نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۴، شماره ۴، سال ۱۴۰۱، صفحات ۸۲۱ تا ۸۴۲
DOI: 10.22060/mej.2022.20518.7251

تحلیل دینامیکی میکرو المان منعطف موازی با مدل قیدی تیر و تئوری گرادیان کرنشی اصلاح یافته

محمد ارحامی[۱]، حمید معین فرد*[۱،۲]

۱- دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران
۲- قطب علمی رایانش نرم و پردازش هوشمند اطلاعات، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران

خلاصه: در این پژوهش، رفتار دینامیکی میکرو المان منعطف موازی تحت بار انتهایی، مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا با تئوری گرادیان کرنشی اصلاح یافته و به کمک مدل قیدی تیر، انرژی کرنشی یک میکرو تیر منعطف، برحسب مؤلفه‌های جابجایی انتهای تیر به دست آمده، و از آن برای تعیین انرژی کرنشی المان منعطف موازی استفاده می‌شود. در ادامه، با روش لاگرانژ، مدل دینامیکی میکرو المان منعطف استخراج شده و حول نقطه تعادل، خطی‌سازی می‌گردد. سپس محدوده مجاز برای اعمال نیروهای استاتیکی به سکوی حرکتی، به نحوی که هم تئوری مورد استفاده از دقت کافی برخوردار باشد، و هم پایداری دینامیکی سیستم تحت اغتشاشات دینامیکی کوچک خدشه‌دار نشود، مشخص می‌گردد. نتایج بدست آمده حاکی از این است که تئوری الاستیسیته کلاسیک، سخت‌گیری بیش از حدی برای مشخص کردن دقیق ناحیه پایداری مکانیزم دارد. همچنین فرکانس‌های طبیعی سیستم نیز استخراج شده و اثر ابعاد و مؤلفه‌های استاتیکی نیرو بر آن‌ها، مورد مطالعه قرار گرفته است. مشاهده می‌شود که با کاهش ابعاد، فرکانس طبیعی بی‌بعد عرضیِ سیستم افزایش می‌یابد، اما فرکانس طبیعی بی‌بُعد طولی سیستم، به دلیل عدم وجود گرادیان کرنش در مُد طولی، ثابت می‌ماند. همچنین مشاهده شد که نیروی استاتیکی کششی باعث افزایش، و نیروی استاتیکی خمشی باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌شوند. با توجه به بی‌بعد بیان شدن روابط و نتایج ارائه شده در این پژوهش، می‌توانند به سادگی برای تحلیل دینامیکی مکانیزم‌های منعطف پیچیده‌تر، استفاده شوند.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۴۰۰/۰۶/۱۷
بازنگری: ۱۴۰۰/۰۹/۰۴
پذیرش: ۱۴۰۰/۱۰/۱۵
ارائه آنلاین: ۱۴۰۰/۱۱/۰۲

کلمات کلیدی:
المان منعطف موازی
مدل قیدی تیر
تحلیل دینامیکی
تئوری گرادیان کرنشی
تحلیل پایداری

۱- مقدمه

مکانیزم منعطف، نوعی مکانیزم است که در آن به منظور ایجاد حرکت، به‌جای استفاده از مفاصل سنتی، از تغییر شکل الاستیک یک سری المان منعطف بهره گرفته می‌شود. از آنجایی که ساخت مکانیزم‌های کلاسیک در ابعاد کوچک، بسیار پیچیده است، کاربرد اصلی مکانیزم‌های منعطف، فراهم کردن حرکت مناسب در ابعاد میکرو است. بسیاری از میکرو مکانیزم‌های منعطف، از ماژول‌های پایه‌ای، مانند میکرو المان منعطف موازی تشکیل می‌شوند. این مکانیزم نیز به نوبه‌ی خود، از دو میکرو تیر یکسرگیردار موازی متصل به یک سکوی صلب تشکیل شده است. این المان به دلیل داشتن سفتی بالا در جهات قیدی (حرکت دورانی و محوری) و سفتی پایین در جهت درجه‌ی آزادی (حرکت عرضی)، خصوصاً در کاربردهای موقعیت‌دهی با دقت میکرو، مورد توجه است. ذاتِ دینامیکی اغلب بارگذاری‌های میکرومکانیزم‌های منعطف، موجب شده است که تحلیل دینامیکی میکرو ماژول‌های منعطف (از جمله میکرو المان منعطف موازی) از اهمیت ویژه‌ای برخوردار باشد. اما مسائلی از جمله، توزیع پیوسته‌ی جرم و سفتی، داشتن بی‌شمار درجه آزادی و تغییر شکل‌های بزرگ موجب شده است که تحلیل این نوع المان‌ها با مشکلاتی همراه باشد و نتوان رفتار آن‌ها را به راحتی ارزیابی نمود. از طرف دیگر، عدم توانایی مکانیک کلاسیک در پیش‌بینی رفتار این میکرو مکانیزم‌ها باعث پیچیدگی بیشتر تحلیل دینامیکی این سیستم‌ها نیز می‌شود. لذا نیاز به ارائه‌ی روشی مناسب و دقیق برای پیش‌بینی رفتار دینامیکی میکرو المان منعطف موازی، به شدت احساس می‌شود.

مکانیزم‌های منعطف، به دلیل ویژگی‌های منحصر به فرد خود از جمله یکپارچگی ساختار، حذف عملیات مونتاژ، نبود اصطکاک (عدم نیاز به روانکاری) و همچنین نداشتن لقی و سایش، مزایای زیادی نسبت به مکانیزم‌های سنتی داشته و در بسیاری از کاربردها از جمله در مواردی که موقعیت‌دهی دقیق مدنظر است، عملکرد بهتری دارند [۱]. اجزای منعطفِ متنوعی همچون انواع مفاصل صفحه‌ای و فضایی [۲]، گیره‌ها [۳ و ۴]،

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: h_moeenfard@um.ac.ir

سوئیچ‌ها [۵ و ۶]، کلیدهای دوحالته و چندحالته [۷ و ۸] و فنرها و لوازم ذخیره‌سازی انرژی [۹ و ۱۰]، طراحی و ساخته شده‌اند که از آن‌ها می‌توان در ساخت انواع دستگاه‌های الکترومکانیکی بهره برد.

تحلیل مکانیزم‌های منعطف نسبت به مکانیزم‌های سنتی به دلیل داشتن بی نهایت درجه آزادی پیچیدگی خاصی دارد که با افزودن اثر غیرخطی به دلیل قرار داشتن تغییرشکل‌ها در محدوده متوسط و بزرگ، این پیچیدگی دوچندان می‌شود. درنتیجه از سال‌ها پیش تا به امروز، روش‌هایی برای تحلیل تغییرشکل غیرخطی مکانیزم‌های منعطف ارائه شده است که برخی از آن‌ها به منظور استفاده آسان‌تر، همراه با ساده‌سازی‌هایی بوده‌اند. از این بین می‌توان به روش‌های انتگرال بیضوی[1] [۱۱]، کمان دایروی [۱۲]، مدل شبه صلب[2] [۱۳]، مدل قیدی تیر[3] [۱۴] و الگوریتم زنجیری مدل قیدی تیر [۱۵] اشاره کرد.

مبانی مدل قیدی تیر ابتدا توسط اوتر و اسلوکام [۱۶] پی‌ریزی شد. سپس اوتر و سن [۱۷] به این تئوری در تحلیل یک تیر یکسر گیردار تحت بارگذاری انتهایی، شکل بخشیدند. در ادامه، آن دو با بیان انرژی کرنشی تیر مذکور برحسب مؤلفه‌های جابجایی انتهایی [۱۴] براساس مدل قیدی تیر، این روش را بسیار توانمند نموده و ابزار لازم را برای آن به منظور گسترش در حوزه تحلیل مکانیزم‌های منعطف، فراهم کردند. این روش بر تقسیم‌بندی حرکت نقطه مورد نظر مکانیزم به درجات آزادی و درجات قیدی استوار است. هر حرکت مستقل، دارای یک سفتی مشخص است که به‌صورت نرخ تغییر بار نسبت به جابه‌جایی در راستای اعمال بار تعریف می‌شود. بسته به اندازه نسبی مقادیر سفتی، راستاهای مستقل به‌صورت درجه آزادی یا درجه قیدی دسته‌بندی می‌شوند. پس می‌توان گفت مدل قیدی تیر با توجه به تعیین رابطه‌ای صریح بین نیرو و جابه‌جایی، بیان انرژی کرنشی به شکل مستقل از بارگذاری و قابلیت تعمیم به مکانیزم‌های منعطف پیچیده، عدم نیاز به المان‌بندی عضوهای منعطف، بررسی درجات آزادی و قیدی و درنظر گرفتن اثر غیرخطی و پدیده‌های سفت شوندگی عرضی و الاستوسینماتیک، یکی از بهترین روش‌های تحلیل مکانیزم‌های منعطف است. بر این اساس، اوتر و همکاران [۱۸] با این روش به بررسی رفتار استاتیکی ماژول‌های منعطف ساخته شده از تیرهای نازک پرداختند. در بررسی آن‌ها، رفتار نیرو–جابه‌جایی تیرهای منعطف و مکانیزم‌های موازی[4] و موازی مزدوج[5] مورد مطالعه قرار گرفت. در پژوهشی دیگر، با کمک رویکرد انرژی و اصل کار مجازی، اوتر و سن [۱۴]، یکی از پایه‌ای‌ترین پژوهش‌ها را در حوزه بررسی رفتار استاتیکی یک تیر منعطف ارائه دادند. در این پژوهش، آن‌ها از مدل قیدی تیر برای لحاظ کردن اثر نیروی محوری بر سفتی افقی و عرضیِ یک تیر منعطف نازک با در نظر گرفتن اثرات غیرخطی هندسی استفاده نمودند. یکی از کلیدی‌ترین نتایجی که در این پژوهش استخراج شد، ارائه‌ی یک فرمول تحلیلی برای انرژی پتانسیل سیستم، برحسب جابه‌جایی‌های افقی، عمودی و دورانیِ صرفاً انتهای تیر بود. این رابطه، کمک شایانی به تحلیل رفتار نیرو–جابه‌جایی در تیر و همچنین سایر مکانیزم‌های پیچیده‌تر می‌کرد. آن‌ها چند سال بعد [۱۹] مدل قیدی غیرخطی فضایی را برای تیر نازک و متقارن براساس روش انرژی ارائه دادند و خطاهای حرکتی در جهات قیدی همچنین پدیده سفت شوندگی درجات آزادی را بررسی کردند.

معمولاً کارایی یک مکانیزم منعطف به دلیل خطای حرکتی در جهات قیدی کاهش می‌یابد. یک مکانیزم منعطف ایده‌آل باید سفتی کم در جهت درجات آزادی و سفتی بینهایت در جهت درجات قیدی داشته باشد. ولی در قریب به اتفاق المان‌های منعطف، حرکت در جهت آزادی، موجب کاهش محسوس سفتی جهت قیدی می‌شود. پژوهشگران، راه‌حل‌هایی در جهت رفع این مشکل پیشنهاد دادند. یک روش، افزایش ضخامت (افزایش صلبیت) ناحیه‌ای از تیر است. بختیاری و معین‌فرد [۲۰] بهبود ویژگی‌های تیر و المان منعطف موازی را با افزودن ناحیه‌ای صلب به طول و موقعیت دلخواه از تیر بررسی کردند. آن‌ها از مدل قیدی تیر[6] به منظور تعیین روابط صریح نیرو–جابه‌جایی انتهایی تیر بهره گرفته و در نهایت با استفاده از الگوریتم ژنتیک، مشخصه‌های مکانیزم را بهینه‌سازی و نتایج را با شبیه‌سازی المان محدود مقایسه نمودند. در پژوهشی دیگر، ملائکه و معین‌فرد [۲۱] ادعا نمودند که استفاده از دو قسمت صلب در طول تیر، موجب بهبود مشکل کاهش شدید سفتی محوری در تغییر شکل‌های زیاد و همچنین افزایش کارایی مکانیزم می‌شود. فولی‌ما[7] و چن [۲۲] براساس مدل قیدی تیر، بیشینه نیروی محوری مجاز وارد بر تیر را در شرایط تکیه‌گاهی مختلف بدست آوردند و با نتایج مدل قیدی تیر زنجیره‌ای و اجزا محدود مقایسه نمودند. بررسی‌ها نشان داد که اولاً مدل قیدی تیر در تغییرشکل‌های متوسط، مناسب است، ولی برای تغییرشکل‌های بزرگ باید از مدل قیدی تیر زنجیره‌ای استفاده کرد. ثانیاً مرز استفاده یا عدم استفاده از مدل قیدی تیر، وابسته به شرایط تکیه‌گاهی است. از دیگر پژوهش‌های انجام شده در حوزه تحلیل استاتیک المان‌های

1 Elliptic Integral Solution) EIS(
2 Pseudo-Rigid Body Model) PRBM(
3 Beam Constraint Method) BCM(
4 Parallelogram (P)
5 Double Parallelogram (DP)
6 Beam Constraint Model (BCM)
7 Fulei Ma

منعطف، می‌توان به ارزیابی تیر با انحنای اولیه توسط چن[1] و همکاران [۱۵] با مدل قیدی تیر زنجیره‌ای اشاره کرد. در این پژوهش انحنای اولیه تیر به شکل‌های کمان دایره، سینوسی و سهموی درنظر گرفته شد. همچنین هی[2] و همکاران [۲۳] به عنوان یک مثال کاربردی، مدل‌سازی دسته کابل هادی[3] در نیروگاه‌ها را با همان تئوری بررسی کردند.

در تحلیل دینامیکی المان‌های منعطف نیز کارهایی انجام شده که از آن جمله می‌توان به مدل‌سازی ارتعاشات آزاد غیرخطی تیر با جرم انتهایی توسط معین فرد و اوتر [۲۴] اشاره کرد. آن‌ها به کمک تکنیک اغتشاشات توانستند روابط صریح برای جابجایی محوری و عرضی جرم انتهایی بدست آورند. همچنین اثر تغییر ضخامت تیر [۲۵] و جرم خارج مرکز میانی [۲۶] و انتهایی [۲۷] و بر رفتار ارتعاشی تیر توسط محققین، مورد ارزیابی قرار گرفته‌است. برادران و همکاران [۲۸] ارتعاشات المان منعطف موازی با درنظر گرفتن تغییرشکل غیرخطی را بررسی کردند. ایجاد رابطه صریح و مقایسه نتایج شکل مدهای سیستم با مدل اجزا محدود از کارهای انجام شده در این پژوهش است. در پژوهش‌های مذکور، برای تعیین معادلات حاکم از اصل همیلتون استفاده شده و انرژی کرنشی تیر از انتگرال‌گیری روی حجم تیر با درنظر گرفتن تغییر شکل غیرخطی حاصل شده است. سیلوا و دقاق [۲۹] رفتار ارتعاشی غیرخطی یک تیر نازک با ضخامت ثابت ولی عرض متغیر را بررسی کردند. در این پژوهش پس از تعیین معادلات حاکم و حل آن‌ها، نتایج حاصل با روش المان‌محدود مقایسه شد که خطای زیاد تقریب خطی را در تغییر شکل‌های بزرگ نشان داد. سایاگ و داول [۳۰] ارتعاشات یک تیر یکسرگیردار با بار نقطه‌ای در انتها که تحت تحریک از پایه قرار داشت را بررسی کردند. همانطور که مشاهده می‌شود، اغلب کارهای تحلیلی انجام شده روی المان‌های منعطف در حوزه تحلیل دینامیکی، بر روی تیر انجام شده و هنوز جای کار زیادی بر روی المان‌های منعطف پیچیده‌تر وجود دارد.

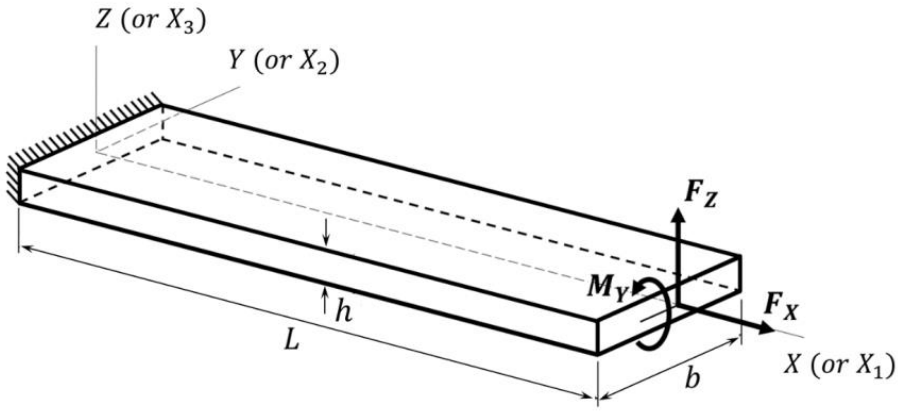
مزیت اصلی مکانیزم‌های منعطف در سیستم‌هایی با ابعاد میکرو خود را نشان می‌دهد، ابعادی که ساخت مکانیزم‌های سنتی اگر نگوییم غیرممکن است، بی شک بسیار مشکل خواهد بود. دستیابی به ابعاد میکرو موجب کوچک‌سازی تجهیزات موجود و همچنین معرفی تجهیزات جدید با کاربردهای منحصر به فرد شده که با ابعاد بزرگتر غیرقابل دستیابی بود. به عنوان نمونه میکرو المان‌های منعطف به دلیل جرم ناچیز، فرکانس طبیعی بسیار بالایی دارند و این پدیده موجب دستیابی به عملگرهایی با فرکانس تحریک و سرعت پاسخ زیاد و حسگرهایی با حساسیت و دقت بالا و همچنین مکانیزم‌هایی با قابلیت موقعیت‌دهی دقیق شده است. از کاربردهای عملیاتی این حوزه می‌توان به سنسورهای جابجایی [۳۱]، شتاب [۳۲] و نیرو [۳۳]، انواع نوسانگر [۳۴]، فشارسنج [۳۵]، ژیروسکوپ [۳۶]، و میکروآینه [۳۷] اشاره کرد.

با توجه به جهت‌گیری علم طراحی مکانیزم‌های منعطف، در راستای ساخت انواع مکانیزم‌ها در ابعاد میکرو، ایجاد روش‌های تحلیل رفتار استاتیکی و دینامیکی میکرو مکانیزم‌های منعطف از حالت ترجیح، به الزام تبدیل شده است. اثبات شده است که روش‌های مبتنی بر مکانیک محیط پیوسته کلاسیک، در ابعاد میکرو با خطا همراه است. از این جهت، روش‌هایی برای تحلیل رفتار مکانیکی در ابعاد میکرو پیشنهاد شده است که شامل دینامیک مولکولی[4] [۳۸]، مکانیک ساختاری [۳۹] و مکانیک محیط پیوسته غیرکلاسیک[5] [۴۰] است. مکانیک محیط پیوسته غیرکلاسیک، مجموعه‌ای از روش‌هایی است که میکرو-عضو منعطف را یک جسم الاستیک پیوسته درنظر گرفته و با اعمال تصحیحاتی، اثر ابعاد کوچک را اعمال می‌کند درنتیجه به دلیل حجم بسیار کمتر محاسبات و دقت قابل قبول، از دو روش دیگر پرکاربردتر است [۴۱ و ۴۲]. از روش‌های پرکاربرد مکانیک محیط پیوسته غیرکلاسیک می‌توان به تئوری تنش کوپل اصلاح شده [۴۳] و تئوری گرادیان کرنشی اصلاح شده [۴۴]، اشاره کرد. هرچند تئوری تنش کوپل اصلاح شده همانند تئوری گرادیان کرنشی اصلاح شده، بر روش انرژی بنا شده است، ولی حالت خاصی از آن به حساب می‌آید. در واقع اگر دو پارامتر از سه پارامتر اندازه در روش گرادیان کرنش اصلاح شده برابر صفر قرار داده شود، این روش به روش تنش کوپل اصلاح شده تبدیل خواهد شد. از این رو می‌توان گفت، تئوری گرادیان کرنشی اصلاح شده، با توجه به درنظر گرفتن اثرات اکثر مؤلفه‌های گرادیان کرنش بر انرژی کرنشی، نسبت به روش تنش کوپل اصلاح شده، دقیق‌تر است [۴۵].

در حوزه پژوهشی مکانیزم‌های منعطف، کمتر پژوهشگرانی اثر ابعاد را در میکرو مکانیزم‌های منعطف درنظر گرفته‌اند و اغلب پژوهش‌های انجام شده با نام تحلیل میکرو مکانیزم‌های منعطف، یا از همان روابط مکانیک محیط پیوسته کلاسیک استفاده کرده و فقط ابعاد مکانیزم را میکرومتری درنظر گرفته [۴۶] و یا منظور پژوهشگر این است که دقت حرکتی (نه ابعاد) مکانیزم منعطف در حد میکرومتر است و بازهم از همان روابط کلاسیک بهره گرفته است [۴۷ و ۴۸]. درنتیجه در بررسی انجام شده توسط مولفان

1 Chen
2 He
3 Bundled conductors

4 Molecular dynamics
5 Non classical continuum mechanics



شکل ۱. میکرو تیر یکسرگیردار

Fig. 1. Cantilever micro-beam

این مقاله، روشی مدون یافت نشد که مخصوص تحلیل میکرو مکانیزم‌های منعطف باشد.

المان منعطف موازی یکی از المان‌های منطف پایه‌ای بوده که در ساختار المان‌های منعطف پیچیده‌تر، همچون المان منعطف موازی مزدوج و المان منعطف موازی مزدوج دوگانه کاربرد دارد و از این‌رو تحلیل رفتار دینامیکی آن، حائز اهمیت است. همچنین، تا جایی که نویسندگان این مقاله اطلاع دارند، رفتار میکرو المان منعطف موازی، با لحاظ کردن اثر اندازه تا کنون تحلیل نشده‌است. لذا، هدف اصلی این پژوهش، ارائه مدلی ساده و در عین حال با دقت مناسب برای پیش‌بینی رفتار دینامیکی این نوع المان منعطف است که در آن علاوه بر درنظر گرفتن تغییر شکل غیرخطی، اثر ابعاد کوچک نیز لحاظ شده است. این درحالی است که نتایج مدل مکانیک کلاسیک در این ابعاد با خطای زیادی همراه است. برای رسیدن به این هدف از تئوری گرادیان کرنشی اصلاح یافته و اعمال مدل قیدی تیر بهره گرفته شده و پس از خطی‌سازی، یک مدل دینامیکی مناسب، برای سیستم مذکور ارائه شده است. به کمک این مدل خطی، پایداری سیستم، تحت بارگذاری‌های مختلف در جهات قیدی و آزادی مورد مطالعه‌ی دقیق قرار گرفته و محدوده‌ی پایداری سیستم، تعیین می‌شود. در نهایت نیز با حل مسئله‌ی مقدار ویژه، فرکانس‌های طبیعی و شکل مُدهای سیستم استخراج شده و وابستگی آن‌ها به ابعاد مکانیزم مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲- انرژی کرنشی میکرو تیر

قبل از بررسی دینامیکی میکرو المان موازی لازم است که انرژی کرنشی میکرو تیر یکسرگیردار تحت بار انتهایی محاسبه شود. در این بخش سعی بر آن است که این انرژی ابتدا به‌صورت انتگرالی با تئوری گرادیان کرنش بیان شده و سپس با تکنیک مدل قیدی تیر برحسب مؤلفه‌های جابجایی نقطه انتهایی بیان شود تا بتوان از آن به راحتی برای فرمولاسیون دینامیکی بهره برد. میکرو تیر یکسرگیردار مفروض، به طول L، عرض b و ضخامت h در شکل ۱ نشان داده شده است. این تیر تحت بارگذاری انتهایی F_X، F_Z و M_Y قرار می‌گیرد.

براساس تئوری اویلر–برنولی برای تیر نازک، بردار جابجایی المان دلخواه در فاصله Z از تار خنثی به‌شکل زیر است [۴۹].

$$\vec{\mathcal{U}}=\begin{Bmatrix}\mathcal{U}_1(X,Z)\\ \mathcal{U}_2(X,Z)\\ \mathcal{U}_3(X,Z)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}U(X)\\ 0\\ W(X)\end{Bmatrix}-Z\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix}\frac{dW(X)}{dX} \qquad (۱)$$

در این رابطه $\mathcal{U}_1$، $\mathcal{U}_2$ و $\mathcal{U}_3$ به‌ترتیب، جابجایی در راستای X، Y و Z هستند. به‌علاوه $U(X)$، جابجایی طولی تار خنثی و $W(X)$ جابجایی عرضی آن است. براساس تئوری ون-کارمن و استفاده از رابطه (۱) تنها درایه غیرصفر تانسور کرنش مطابق زیر است.

$$\varepsilon_{11}(X)=\frac{\partial\mathcal{U}_1(X,Z)}{\partial X}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathcal{U}_3(X,Z)}{\partial Z}\right)^2=\frac{dU(X)}{dX}+\frac{1}{2}\left(\frac{dW(X)}{dX}\right)^2-Z\frac{d^2W(X)}{dX} \tag{۲}$$

براساس تئوری گرادیان کرنشی اصلاح یافته، با استفاده از رابطه (۱) بردار دوران کوچک $\vec{\Theta}=\frac{1}{2}\mathrm{curl}\left(\vec{\mathcal{U}}\right)$ تعیین می‌شود.

$$\vec{\Theta}=-\left\{0 \quad \frac{dW(X)}{dX} \quad 0\right\}^T \tag{۳}$$

سپس به کمک آن، قسمت متقارن تانسور گرادیان دوران $\chi_{ij}^s=\left(\Theta_{i,j}+\Theta_{j,i}\right)/2$ می‌تواند حاصل شود. مؤلفه‌های غیر صفر این تانسور مطابق زیر است.

$$\chi_{12}^s=\chi_{21}^s=-\frac{1}{2}\frac{d^2W(X)}{dX^2} \tag{۴}$$

از تانسور کرنش ε به‌منظور تعیین بردار گرادیان اتساع $\gamma_i=\varepsilon_{mm,i}$ می‌توان بهره گرفت.

$$\gamma_1=\frac{d^2U(X)}{dX^2}+\frac{dW(X)}{dX}\frac{d^2W(X)}{dX^2}-Z\frac{d^3W(X)}{dX^3},\ \gamma_2=0,\ \gamma_3=-\frac{d^2W(X)}{dX^2} \tag{۵}$$

تانسور گرادیان کششی انحرافی نیز از رابطه زیر محاسبه شود [۵۰].

$$\eta_{ijk}^{(1)}=-\frac{1}{15}[\delta_{ij}\left(\varepsilon_{mm,k}+2\varepsilon_{mk,m}\right)+\delta_{jk}\left(\varepsilon_{mm,i}+2\varepsilon_{mi,m}\right)+\delta_{ki}\left(\varepsilon_{mm,j}+2\varepsilon_{mj,m}\right)]+\frac{1}{3}\left(\varepsilon_{jk,i}+\varepsilon_{ki,j}+\varepsilon_{ij,k}\right) \tag{۶}$$

در این رابطه δ، دلتای کرونیکر است. با جایگذاری ε از رابطه (۲) در رابطه (۶)، مؤلفه‌های غیر صفر تانسور گرادیان کششی انحرافی برحسب مؤلفه‌های جابجایی تارخنثی و فاصله تا آن بدست می‌آیند.

$$\eta_{111}^{(1)}=\frac{2}{5}\left(\frac{d}{dX}\left(\frac{dU(X)}{dX}+\frac{1}{2}\left(\frac{dW(X)}{dX}\right)^2\right)-Z\frac{d^3W(X)}{dX^3}\right) \tag{۷}$$

$$\eta_{113}^{(1)}=\eta_{311}^{(1)}=\eta_{131}^{(1)}=-\frac{4}{15}\frac{d^2W(X)}{dX^2} \tag{۸}$$

$$\eta_{122}^{(1)}=\eta_{133}^{(1)}=\eta_{212}^{(1)}=\eta_{221}^{(1)}=\eta_{313}^{(1)}=\eta_{331}^{(1)}=-\frac{1}{5}\left(\frac{d}{dX}\left(\frac{dU(X)}{dX}+\frac{1}{2}\left(\frac{dW(X)}{dX}\right)^2\right)-Z\frac{d^3W(X)}{dX^3}\right) \tag{۹}$$

$$\eta_{223}^{(1)}=\eta_{232}^{(1)}=\eta_{322}^{(1)}=\frac{1}{15}\frac{d^2W(X)}{dX^2} \tag{۱۰}$$

$$\eta_{333}^{(1)}=\frac{1}{5}\frac{d^2W(X)}{dX^2} \tag{۱۱}$$

حالا به کمک روابط (۲) تا (۱۱) می‌توان درایه‌های تانسور تنش $\sigma_{ij}=\lambda\mathrm{tr}(\varepsilon)\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}$ و تنش‌های مرتبه بالاتر $p_i=2\mu l_0^2\gamma_i$، $\tau_{ijk}^{(1)}=2\mu l_1^2\eta_{ijk}^{(1)}$ و $m_{ij}^s=2\mu l_2^2\chi_{ij}^s$ را محاسبه نمود. در این روابط، l_0،

l_1 و l_2 پارامترهای مقیاس طول یا پارامترهای اندازه و λ و μ ثابت‌های لامه هستند [۵۰ و ۵۱]. انرژی کرنشی بر مبنای تئوری گرادیان کرنشی اصلاح‌یافته به این شکل نوشته می‌شود [۴۴].

$$V=\frac{1}{2}\int_0^L\int_A\left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}+p_i\gamma_i+\tau_{ijk}^{(1)}\eta_{ijk}^{(1)}+m_{ij}^s\chi_{ij}^s\right)dA\,dx \qquad (۱۲)$$

با جایگذاری (۲) تا (۱۱) و همچنین تانسورهای تنش در رابطه (۱۲) و اعمال انتگرال روی سطح، انرژی کرنشی بی‌بعد تیر $v=(L/EI)V$ به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$v=\frac{1}{2}\int_0^1\left(a_1\varepsilon_0^2+a_2\varepsilon_0'^2+a_3w''^2+a_4w'''^2\right)dx \qquad (۱۳)$$

در این معادله، از کمیات بی‌بعد رابطه (۱۴) استفاده شده و پارامترهای a_1 تا a_4 برحسب مشخصه‌های وابسته به جنس و هندسه تیر در رابطه (۱۵) معرفی شده‌اند. همچنین $\varepsilon_0(x)=du/dx+(dw/dx)^2/2$ کرنش محوری تار خنثی است.

$$\begin{gathered}x=\frac{X}{L},u(x)=\frac{U(X)}{L},w(x)=\frac{W(X)}{L},\\ f_x=\frac{F_XL^2}{EI},f_z=\frac{F_ZL^2}{EI},m_y=\frac{M_YL}{EI}\end{gathered} \qquad (۱۴)$$

$$\begin{aligned}a_1&=12\left(\frac{L}{h}\right)^2\\ a_2&=\frac{12}{(1+\nu)h^2}\left(l_0^2+\frac{2}{5}l_1^2\right)\\ a_3&=1+\frac{6}{(1+\nu)h^2}\left(2l_0^2+\frac{8}{15}l_1^2+l_2^2\right)\\ a_4&=\frac{1}{(1+\nu)L^2}\left(l_0^2+\frac{2}{5}l_1^2\right)\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

لازم به ذکر است که در این مقاله، فرض می‌گردد که پارامترهای اندازه l_0، l_1 و l_2، هر سه با یکدیگر برابر بوده و مقدار آن‌ها برابر l است. در ادامه، عملگر تغییرات $\tilde{\delta}$ را روی رابطه انرژی کرنشی اعمال کرده و سپس دو بار انتگرال‌گیری جزء به جزء اعمال می‌شود. حال با استفاده از اصل کار مجازی ($\tilde{\delta}V=F_X\tilde{\delta}U_{tip}+F_Z\tilde{\delta}W_{tip}+M_Y\tilde{\delta}\theta_{tip}$) معادلات حاکم و شرایط مرزی کلاسیک و غیرکلاسیک (برای تیر یکسرگیردار) به شکل زیر حاصل می‌شوند.

- معادلات حاکم

$$\left(\varepsilon_0(x)-\frac{a_2}{a_1}\varepsilon_0''(x)\right)'=0 \qquad (۱۶)$$

$$a_4w^{(6)}(x)-a_3w^{(4)}(x)+f_xw''(x)=0 \qquad (۱۷)$$

- شرایط مرزی

$$\varepsilon_0'(0)=\varepsilon_0'(1)=0 \qquad (۱۸)$$

$$\varepsilon_0(1)-\frac{a_2}{a_1}\varepsilon_0''(1)=\frac{f_x}{a_1} \qquad (۱۹)$$

$$w(0)=w'(0)=w''(0)=w'''(1)=0 \qquad (۲۰)$$

$$a_4w^{(5)}(1)-a_3w'''(1)+f_xw'(1)=f_Z \qquad (۲۱)$$

$$a_3w''(1)-a_4w^{(4)}(1)=m_y \qquad (۲۲)$$

از حل معادله (۱۶) با شرایط مرزی (۱۸) و (۱۹) کمیت $\varepsilon_0(x)$، ثابت و برابر f_x/a_1 بدست می‌آید. با انتگرال‌گیری از $\varepsilon_0(x)$ از ۰ تا ۱ و در نظر داشتن اینکه $u(0)=0$ و $u(1)=u_{tip}$، می‌توان نوشت:

$$u_{tip}=\frac{f_x}{a_1}-\frac{1}{2}\int_0^1w'^2(x)dx \qquad (۲۳)$$

برای حل معادله دیفرانسیل (۱۷) از شرط مرزی (۲۰) و بجای دو شرط مرزی (۲۱) و (۲۲) از $w(1)=w_{tip}$ و $w'(1)=\theta_{tip}$، استفاده می‌شود. چنانچه بسط تیلور نتیجه حلِ این معادله نسبت به f_x گرفته شود، می‌توان نوشت:

$$w(x)\approx\sum_{i=0}^{1} f_x^{\,i}\left(\xi_{1,i}(x)\,w_{tip}+\xi_{2,i}(x)\,\theta_{tip}\right) \tag{۲۴}$$

در این رابطه، $\xi_{j,i}(x)$ها توابعی پیچیده و طولانی از x هستند. با جایگذاری معادله (۲۴) در (۲۳) و صرف نظر از عبارات شامل توان‌های دوم f_x، می‌توان f_x را به صورت زیر برحسب u_{tip}، w_{tip} و θ_{tip} بدست آورد.

$$f_x=\frac{u_{tip}-\begin{Bmatrix}w_{tip} & \theta_{tip}\end{Bmatrix}\left[g^{(0)}\right]_{2\times2}\begin{Bmatrix}w_{tip}\\ \theta_{tip}\end{Bmatrix}}{\dfrac{1}{a_1}+\begin{Bmatrix}w_{tip} & \theta_{tip}\end{Bmatrix}\left[g^{(1)}\right]_{2\times2}\begin{Bmatrix}w_{tip}\\ \theta_{tip}\end{Bmatrix}} \tag{۲۵}$$

در معادله (۲۵)، ماتریس‌های $[g]$ به صورت توابعی از ξ_{ij}ها به شرح ذیل قابل محاسبه هستند:

$$g_{ij}^{(0)}=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\xi'_{i,0}\xi'_{j,0}\right)dx,\quad i,j=1,2 \tag{۲۶}$$

$$g_{ij}^{(1)}=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\xi'_{i,0}\xi'_{j,1}+\xi'_{j,0}\xi'_{i,1}\right)dx,\\ i,j=1,2 \tag{۲۷}$$

در نهایت با جایگذاری $w(x)$ از رابطه (۲۴) و $\varepsilon.(x)=f_x/a_1$ در فرم بی‌بعد انرژی کرنشی (معادله (۱۳)) حذف f_x از معادله حاصل به کمک رابطه (۲۵) و اعمال ساده‌سازی‌های لازم، انرژی کرنشی بی‌بعد، برحسب مؤلفه‌های جابجایی انتهای تیر به شکل زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}&v\left(u_{tip},w_{tip},\theta_{tip}\right)=\\&\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}w_{tip} & \theta_{tip}\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}k_{11}^{(0)} & k_{12}^{(0)}\\ k_{12}^{(0)} & k_{22}^{(0)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w_{tip}\\ \theta_{tip}\end{Bmatrix}+\\&\frac{a_1}{2}\frac{\left(u_{tip}+\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}w_{tip} & \theta_{tip}\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)}\\ k_{12}^{(1)} & k_{22}^{(1)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w_{tip}\\ \theta_{tip}\end{Bmatrix}\right)^2}{\left(1-a_1\begin{Bmatrix}w_{tip} & \theta_{tip}\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)}\\ k_{12}^{(2)} & k_{22}^{(2)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w_{tip}\\ \theta_{tip}\end{Bmatrix}\right)}\end{aligned} \tag{۲۸}$$

در این معادلات، $k^{(i)}$ها ماتریس‌های سفتی نام داشته و مقدار آن‌ها به کمک روابط ذیل قابل محاسبه است:

$$k_{ij}^{(0)}=\int_0^1\left(a_3\xi''_{i,0}\xi''_{j,0}+a_4\xi'''_{i,0}\xi'''_{j,0}\right)dx,\\ i,j=1,2 \tag{۲۹}$$

$$k_{ij}^{(1)}=\int_0^1\left(\xi'_{i,0}\xi'_{j,0}\right)dx,\quad i,j=1,2 \tag{۳۰}$$

$$k_{ij}^{(2)}=\int_0^1\begin{pmatrix}a_3\left(\xi''_{i,1}\xi''_{j,1}+\xi''_{i,0}\xi''_{j,2}+\xi''_{j,0}\xi''_{i,2}\right)+\\ a_4\left(\xi'''_{i,1}\xi'''_{j,1}+\xi'''_{i,0}\xi'''_{j,2}+\xi'''_{j,0}\xi'''_{i,2}\right)\end{pmatrix}dx,\\ i,j=1,2 \tag{۳۱}$$

با اعمال عملیات ریاضی معادلات فوق، می‌توان المان‌های ماتریس‌های سفتی را به شکل زیر بیان نمود.

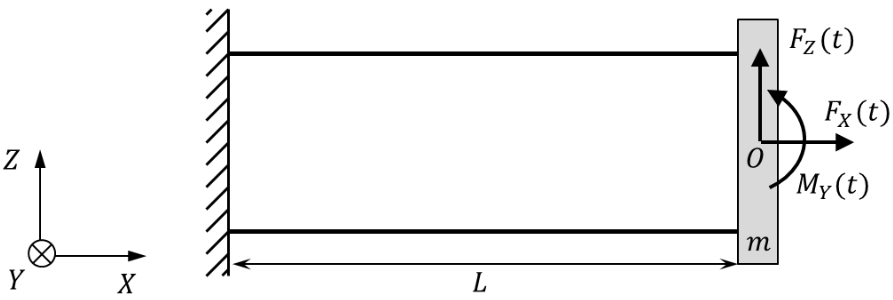
$$k_{ij}^{(0)}=b_2\left(\kappa_{ij}^{(1)}b_1^2+\kappa_{ij}^{(2)}b_1+\kappa_{ij}^{(3)}\right),\\ i,j=1,2 \tag{۳۲}$$

$$k_{ij}^{(1)}=\frac{\kappa_{ij}^{(4)}b_1+\kappa_{ij}^{(5)}}{b_1+\kappa_{ij}^{(6)}},\quad i,j=1,2 \tag{۳۳}$$

جدول ۱. مقادیر عددی پارامترهای $\kappa_{ij}^{(n)}$ ظاهر شده در روابط (۳۲) تا (۳٤)

Table 1. Numerical values of $\kappa_{ij}^{(n)}$ presented in Eqs. (32) to (34)

$\kappa_{ij}^{(n)}$		(i,j)		
		(۱,۱)	(۱,۲)	(۲,۲)
(n)	(۱)	۱۲	−۶	۴
	(۲)	۳۶	−۱۲	۴
	(۳)	۱۵۰	−۶۲	۲۹
	(۴)	۶/۵	−۱/۱۰	۲/۱۵
	(۵)	۵	۱۶/۱۵	۱۱/۱۰
	(۶)	۳	−۱۱	۹
	(۷)	−۱/۷۰۰	۱/۱۴۰۰	−۱۱/۶۳۰۰
	(۸)	۱	۳/۲	۳
	(۹)	۶۲	۱۶۰	۷۴



شکل ۲. میکرو المان موازی (P)

Fig. 2. Micro-Parallelogram flexure

$$k_{ij}^{(2)} = \frac{\kappa_{ij}^{(7)}}{b_2\left(b_1^2 + \kappa_{ij}^{(8)} b_1 + \kappa_{ij}^{(9)}\right)}, \quad i,j = 1,2 \tag{۳۴}$$

در این روابط $b_1 = \sqrt{a_2 / a_4}$ و $b_2 = a_4$ بوده و همچنین پارامترهای $\kappa_{ij}^{(n)}$ ثابت‌هایی هستند که در جدول ۱ معرفی شده‌اند.

نکته قابل توجه در رابطه (۲۸)، یافتن انرژی کرنشی میکرو تیر صرفاً براساس جابجایی انتهایی آن است که تعمیم این مدل به مکانیزم‌های منعطف پیچیده‌تر را بسیار آسان می‌نماید.

۳- تحلیل دینامیکی میکرو المان منعطف موازی

شکل ۲، یک میکرو المان موازی را نشان می‌دهد که از دو تیر موازی به طول L، عرض b و ضخامت h تشکیل شده است که به یک سکوی صلب به جرم m متصل شده‌اند. نقطه میانی سکو (O)، تحت نیروهای

دینامیکی محوری F_X ، عرضی F_Z و گشتاور خمشی M_Y قرار می‌گیرد.

۳- ۱- تشکیل معادلات حاکم

می‌توان از روش لاگرانژ به‌منظور تعیین معادلات حاکم بر این سیستم دینامیکی استفاده نمود. به این منظور باید روابط انرژی پتانسیل کرنشی، انرژی جنبشی و کار مجازی نوشته شود. برای بیان این موارد، از یک مدل دینامیکی پارامتر متمرکز استفاده خواهد شد. در بخش قبل نشان داده شد که انرژی کرنشی تیر در تغییر شکل‌های بزرگ و غیرخطی را می‌توان با دقت مناسب، برحسب مؤلفه‌های جابجایی انتهایی، از رابطه (۲۸) بدست آورد. در مورد المان منعطف موازی با تیرهای یکسان اثبات شده است که دوران سکو بسیار کم بوده و می‌توان از آن صرف نظر کرد [۱۸ و ۵۲]. در این صورت، مؤلفه‌های جابجایی محوری و عرضی دو تیر با یکدیگر و با مؤلفه‌های جابجایی نقطه برابر است. درنتیجه، با فرض $\theta_{tip}=۰$ و با استفاده از (۲۸)، رابطه انرژی کرنشی المان منعطف موازی برحسب مؤلفه‌های جابجایی نقطه میانی سکو به فرم زیر بیان می‌شود.

$$v_P\left(u\left(\hat{t}\right),w\left(\hat{t}\right)\right)= a_1\frac{\left(u\left(\hat{t}\right)+\frac{1}{2}k_{11}^{(1)}\left(w\left(\hat{t}\right)\right)^2\right)^2}{1-a_1k_{11}^{(2)}\left(w\left(\hat{t}\right)\right)^2}+k_{11}^{(0)}\left(w\left(\hat{t}\right)\right)^2 \qquad (۳۵)$$

در این رابطه $\hat{t}$ زمان بدون بعد و $u\left(\hat{t}\right)$ و $w\left(\hat{t}\right)$ به ترتیب، مؤلفه‌های بی‌بعد جابجایی محوری و عرضی نقطه هستند. همچنین $k_{۱۱}^{(\cdot)}$ ، $k_{۱۱}^{(۱)}$ و $k_{۱۱}^{(۲)}$ درایه‌های اول ماتریس‌های سفتی بوده که در روابط (۳۲) تا (۳۴) معرفی شدند. انرژی کرنشی رابطه (۳۵) به فرم بی‌بعد است و برای استفاده در رابطه لاگرانژ باید بابعد شود. به این منظور از رابطه (۱۴) و همچنین رابطه زمان بی‌بعد $\hat{t}=\sqrt{EI/mL^{۳}}\,t$ استفاده می‌شود.

$$V_P=\frac{EI}{L}\left(a_1\frac{\left(\frac{U(t)}{L}+\frac{1}{2}k_{11}^{(1)}\left(\frac{W(t)}{L}\right)^2\right)^2}{1-a_1k_{11}^{(2)}\left(\frac{W(t)}{L}\right)^2}+k_{11}^{(0)}\left(\frac{W(t)}{L}\right)^2\right) \qquad (۳۶)$$

برای محاسبه انرژی جنبشی، با توجه به فرض ناچیز بودن جرم تیر نسبت به جرم انتهایی، فقط انرژی جنبشی جرم درنظر گرفته می‌شود. این فرض با توجه به اینکه از تیرهای بسیار نازک در المان‌های منعطف استفاده می‌شود، صحیح است. همچنین بیان شد که مقدار دوران المان منعطف موازی بسیار اندک است. پس از انرژی دورانی نیز صرفنظر می‌شود.

$$T_P=\frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dU(t)}{dt}\right)^2+\left(\frac{dW(t)}{dt}\right)^2\right) \qquad (۳۷)$$

از طرفی کار مجازی المان موازی به‌صورت $\delta W_{ext}(t)=F_X(t)\,\delta U+F_Z(t)\,\delta W$ نوشته می‌شود. بنابراین U و W مختصه‌های عمومی (q_i) و $F_X(t)$ و $F_Z(t)$ نیروهای عمومی (Q_i) هستند. طبق معادله لاگرانژ می‌توان نوشت:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_P}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T_P}{\partial q_i}+\frac{\partial V_P}{\partial q_i}=Q_i\ ,\quad i=1,2 \qquad (۳۸)$$

با جایگذاری انرژی کرنشی و جنبشی از روابط (۳۶) و (۳۷) در معادله لاگرانژ، معادلات ارتعاشی حاکم بر المان منعطف موازی حاصل شده که پس از بی‌بعدسازی با رابطه (۱۴)، به‌صورت زیر نوشته می‌شوند. برای ساده‌تر شدن عبارات از نوشتن متغیر زمان صرف‌نظر شده است.

$$\ddot{u}+\frac{2u+k_{11}^{(1)}w^2}{1/a_1-k_{11}^{(2)}w^2}=f_x \qquad (۳۹)$$

$$\ddot{w}+\left(\begin{array}{l}2k_{11}^{(0)}+k_{11}^{(1)}\left(\frac{2u+k_{11}^{(1)}w^2}{1/a_1-k_{11}^{(2)}w^2}\right)+\\ k_{11}^{(2)}\left(\frac{2u+k_{11}^{(1)}w^2}{1/a_1-k_{11}^{(2)}w^2}\right)^2\end{array}\right)w=f_z \qquad (۴۰)$$

۳- ۲- خطی‌سازی

در ادامه برای درک بهتر رفتار ارتعاشی المان منعطف موازی، معادلات (۳۹) و (۴۰) خطی‌سازی می‌شوند. البته، نکته بسیار مهم این است که

خطی‌سازی مدل دینامیکی، باید حول نقطه کاری صورت‌پذیرد که از تحلیل معادلات تعادل استاتیکیِ غیرخطی سیستم حاصل می‌شود. به این منظور، فرض می‌شود که بارگذاری‌های انتهایی، حاصل‌جمع یک بارگذاری استاتیکی و دینامیکی باشد. بارگذاری استاتیکی، باعث ایجاد خیز اولیه در المان منعطف می‌گردد و بارگذاری دینامیکی منجر به ارتعاش آن حول نقطه تعادلِ حاصل از بارگذاری استاتیکی می‌شود.

$$f_x\left(\hat{t}\right)=f_x^{(s)}+\hat{f}_x\left(\hat{t}\right) \tag{۴۱}$$

$$f_z\left(\hat{t}\right)=f_z^{(s)}+\hat{f}_z\left(\hat{t}\right) \tag{۴۲}$$

همچنین مؤلفه‌های جابجایی انتهای تیر را نیز می‌توان به دو بخش ثابت ناشی از بار استاتیکی و متغیر ناشی از بار دینامیکی تجزیه کرد.

$$u\left(\hat{t}\right)=u_0+\hat{u}\left(\hat{t}\right) \tag{۴۳}$$

$$w\left(\hat{t}\right)=w_0+\hat{w}\left(\hat{t}\right) \tag{۴۴}$$

مؤلفه‌های بارگذاری و جابجایی را از روابط (۴۱) تا (۴۴) در معادلات (۳۹) و (۴۰) جایگذاری کرده و با حذف عبارات ثابت ناشی از تعادل استاتیکی از طرفین، معادلات ارتعاشی سیستم حول نقطه تعادل استاتیکی حاصل می‌شود. درادامه با فرض کوچک بودن تغییرات حول نقطه تعادل، با استفاده از بسط تیلور، معادلات حاکم، خطی‌سازی شده و به فرم ماتریسی زیر نوشته می‌شوند.

$$[\mathcal{M}]\begin{Bmatrix}\ddot{\hat{u}}\\ \ddot{\hat{w}}\end{Bmatrix}+[\mathcal{K}]\begin{Bmatrix}\hat{u}\\ \hat{w}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\hat{f}_x\\ \hat{f}_z\end{Bmatrix} \tag{۴۵}$$

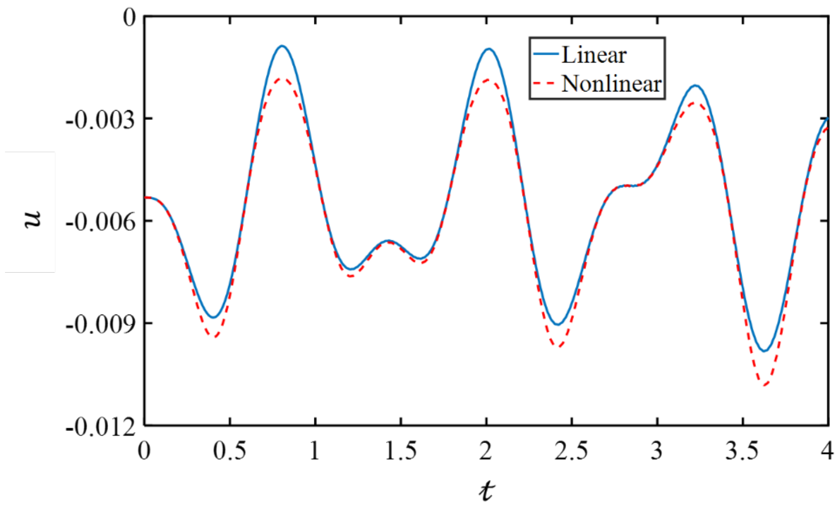
در این رابطه ماتریس جرم $[\mathcal{M}]$، یک ماتریس همانی بوده و $[\mathcal{K}]$ ماتریسی متقارن است که سفتی سیستم را معرفی می‌کند. درایه‌های این ماتریس یه شرح زیر است.

$$\mathcal{K}_{11}=\frac{2a_1}{1-a_1k_{11}^{(2)}w_0^2} \tag{۴۶}$$

$$\mathcal{K}_{12}=\mathcal{K}_{21}=\frac{2a_1\left(2a_1k_{11}^{(2)}u_0+k_{11}^{(1)}\right)w_0}{\left(1-a_1k_{11}^{(2)}w_0^2\right)^2} \tag{۴۷}$$

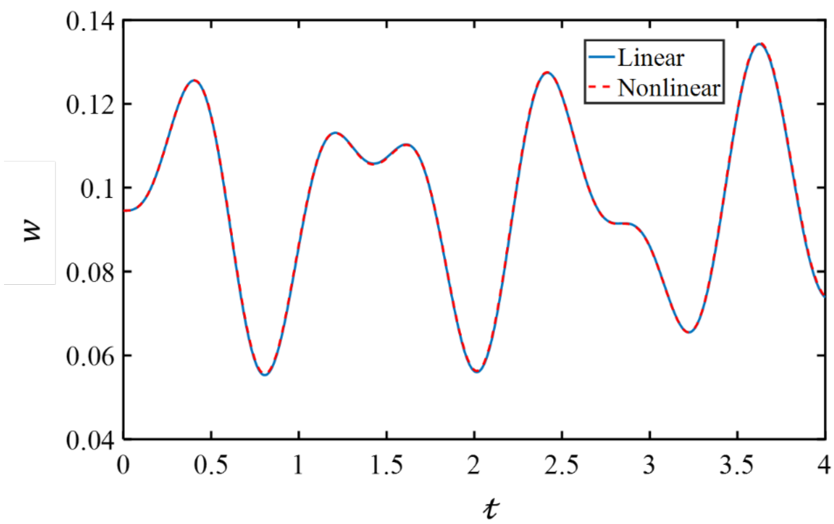
$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{22}=2k_{11}^{(0)}+\frac{a_1k_{11}^{(1)2}w_0^2}{2\left(1-a_1k_{11}^{(2)}w_0^2\right)}-\\ \frac{a_1\left(12a_1k_{11}^{(2)}u_0^2+12k_{11}^{(1)}u_0-k_{11}^{(1)2}w_0^2\right)}{2\left(1-a_1k_{11}^{(2)}w_0^2\right)^2}\\ +\frac{2\left(4a_1k_{11}^{(2)}u_0^2+4k_{11}^{(1)}u_0+k_{11}^{(1)2}w_0^2\right)}{\left(1-a_1k_{11}^{(2)}w_0^2\right)^3}\end{aligned} \tag{۴۸}$$

کمیات موجود در این روابط، قبلاً تعریف شده‌اند. قابل توجه است که المان‌های ماتریس $[\mathcal{K}]$ در مدل دینامیکی خطی، به u. و/یا به w. وابسته‌اند. این دو پارامتر نیز از حل معادلات غیرخطیِ استاتیکی حاصل می‌شوند و بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که صرف‌نظر از کرنش‌های غیرخطی هندسی، می‌تواند باعث بروز خطا در تخمین u. و w. گردد. این خطا نیز به نوبه خود باعث پیش‌بینی ناصحیح برای ماتریس $[\mathcal{K}]$ در مدل خطی ارائه شده در معادله (۴۵) می‌شود. به همین دلیل، در نظر گرفتن کرنش‌های غیرخطی هندسی، برای ارائه یک مدل دینامیکیِ با دقت مناسب که از خطی‌سازی معادلات دینامیکی حول نقطه تعادل بدست می‌آیند، اجتناب ناپذیر است. به منظور بررسی دقت خطی‌سازی، مقایسه‌ای بین حل معادلات غیرخطی (۳۹) و (۴۰) با حل معادلات خطی‌سازی شده (۴۵) در شرایط بارگذاری موردی، انجام می‌پذیرد. در این تحلیل، فرض شده است که در ابتدا، بارگذاری استاتیکی $f_x^{(s)}=$ ۴ و $f_z^{(s)}=$ ۳ به سیستم اعمال می‌شود. در اثر این بارگذاری، با حل معادلات استاتیکی (که به ترتیب از حذف $\ddot{u}$ و $\ddot{w}$ از معادلات (۳۹) و (۴۰) حاصل می‌شوند)، نقطه تعادل بی‌بعد $u_\cdot=$ ۰/۰۰۵۳ و $w_\cdot=$ ۰/۰۹۵ حاصل می‌گردد. سپس، بارگذاری دینامیکی $\hat{f}_z\left(\hat{t}\right)=\sin\left(۱۰\hat{t}\right)$ به سیستم اعمال می‌گردد و باعث ارتعاش آن می‌شود. در شکل‌های ۳ و ۴ به ترتیب جابجایی بی‌بعد محوری و عرضی سکوی حرکتی برحسب زمان بی‌بعد، قابل مشاهده است. در این شکل‌ها، جابجایی حاصل شده از حل معادلات خطی و غیرخطی با یکدیگر مقایسه شده‌اند. لازم به ذکر است که برای حل معادلات غیرخطی (۳۹) و (۴۰) از



شکل ۳. مقایسه جابجایی محوری بی‌بعد برحسب زمان بی‌بعد حاصل از حل معادلات خطی و غیرخطی

Fig. 3. Time response of nondimensional axial displacement resulted from linear and nonlinear solution



شکل ۴. مقایسه جابجایی عرضی بی‌بعد برحسب زمان بی‌بعد حاصل از حل معادلات خطی و غیرخطی

Fig. 4. Time response of nondimensional trasverse displacement resulted from linear and nonlinear solution

حلگر مقدار اولیه ode۴۵ در نرم‌افزار متلب استفاده شده است. نکته دیگر این‌که برای رسم جابجایی مطلق (مجموع مؤلفه‌های استاتیکی و دینامیکی) حاصل از سیستم خطی، پاسخ محوری و عرضی حاصل از معادله‌ی (۴۵)، قبل از ترسیم به ترتیب با کمیات u و w جمع شده است که بتوان آن‌ها را با جابجایی مطلق حاصل از معادلات (۳۹) و (۴۰) مقایسه نمود. نزدیکی نتایج حاصل از شبیه‌سازی سیستم خطی حول نقطه تعادل با سیستم غیرخطی، نشان‌دهنده دقت قابل قبول نتایج سیستم خطی‌سازی شده، به ویژه در راستای عرضی است. در این شبیه‌سازی‌ها، $\nu = ۰/۳۸$، $l = ۱۷/۶\,\mu\text{m}$ و $h = ۲۰۰\,\mu\text{m}$ درنظر گرفته شده است.

۳- ۳- تعیین محدوده پایداری

از المان‌های منعطف برای سیستم‌های موقعیت‌دهی دقیق بهره گرفته می‌شود. در این سیستم‌ها معمولاً مکانیزم تحت بارهای استاتیک، در موقعیت مورد نظر قرار گرفته و سپس با اعمال باردینامیکی، جابجایی سیستم حول آن نقطه کنترل می‌شود. اما مساله‌ای که باید به آن پرداخت، بحث نیروهای استاتیکی مجاز است که سیستم بعد از قرارگیری در نقطه تعادل استاتیکی، قابلیت کنترل داشته باشد و به عبارت دیگر، ناپایدار نشود. به این منظور، در این قسمت تابع تبدیل سیستم و پایداری آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. با لاپلاس‌گیری از طرفین رابطه (۴۵) می‌توان نوشت:

$$\left(s^2\left[\mathcal{M}\right]+\left[\mathcal{K}\right]\right)\begin{Bmatrix}\mathcal{L}\left[\hat{u}\left(\hat{t}\right)\right]\\ \mathcal{L}\left[\hat{w}\left(\hat{t}\right)\right]\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathcal{L}\left[\hat{f_x}\left(\hat{t}\right)\right]\\ \mathcal{L}\left[\hat{f_z}\left(\hat{t}\right)\right]\end{Bmatrix} \qquad (۴۹)$$

سپس معادله (۴۹) به‌شکل زیر بازنویسی شود.

$$\begin{Bmatrix}\mathcal{L}\left[\hat{u}\left(\hat{t}\right)\right]\\ \mathcal{L}\left[\hat{w}\left(\hat{t}\right)\right]\end{Bmatrix}=\left(s^2\left[\mathcal{M}\right]+\left[\mathcal{K}\right]\right)^{-1}\begin{Bmatrix}\mathcal{L}\left[\hat{f_x}\left(\hat{t}\right)\right]\\ \mathcal{L}\left[\hat{f_z}\left(\hat{t}\right)\right]\end{Bmatrix} \qquad (۵۰)$$

به‌منظور بررسی پایداری در جهت تحت تأثیر $\hat{f_z}\left(\hat{t}\right)$، باید نسبت لاپلاس بخش متغیر تغییرشکل عرضی ($\mathcal{L}\left[\hat{w}\left(\hat{t}\right)\right]$) به لاپلاس بخش متغیر نیروی عرضی ($\mathcal{L}\left[\hat{f_z}\left(\hat{t}\right)\right]$) گرفته شود. این نسبت برابر درایه سطر دوم و ستون دوم ماتریس معکوس سمت راست معادله فوق است که آن را تابع تبدیل $G\left(s\right)$ می‌نامیم. این پارامتر پس از جایگذاری ماتریس همانی $\left[\mathcal{M}\right]$ و سپس معکوس‌گیری، برحسب درایه‌های ماتریس سفتی به‌شکل زیر بدست می‌آید.

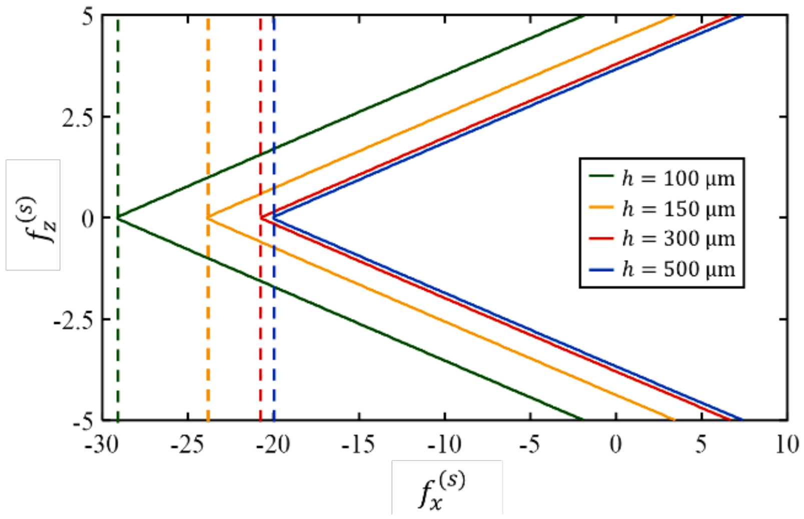
$$G\left(s\right)=\frac{\mathcal{L}\left[\hat{w}\left(\hat{t}\right)\right]}{\mathcal{L}\left[\hat{f_z}\left(\hat{t}\right)\right]}=\frac{s^2+\alpha_1}{s^4+\beta_1 s^2+\beta_2} \qquad (۵۱)$$

که در این رابطه

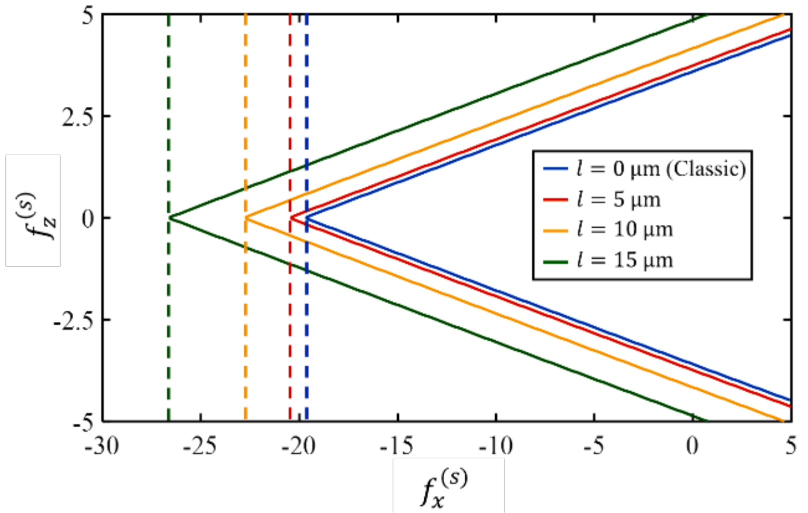
$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \mathcal{K}_{11},\\ \beta_1 &= \mathcal{K}_{11}+\mathcal{K}_{22},\\ \beta_2 &= \mathcal{K}_{11}\mathcal{K}_{22}-\mathcal{K}_{12}^2\end{aligned} \qquad (۵۲)$$

مؤلفه‌های $\mathcal{K}_{ij}$ که در روابط (۴۶) تا (۴۸) معرفی شدند، تابعی از مؤلفه‌های جابجایی استاتیک ($u_0,\ w_0$) و مشخصات المان منعطف موازی هستند. به‌منظور پایداری سیستم، قطب‌های تابع تبدیل رابطه (۵۱) باید سمت چپ دستگاه مختصات باشند. از طرفی روش ارائه شده در این پژوهش با وجود درنظر گرفتن تغییر شکل غیرخطی، برای محدوده جابجایی عرضی بی‌بعد تا سقفِ $w < ۰/۱۵$ دقت کافی دارد. بنابراین علاوه بر محدوده پایداری دینامیکی، محدوده خیز استاتیکی مجاز نیز درنظر گرفته می‌شود. البته قریب به اتفاق مکانیزم‌های منعطف، در این بازه عملکردی قرار دارند. به‌منظور تعیین محدوده پایداری و محدوده خیزِ مجاز، المان منعطف موازی از جنس اپوکسی با $\nu = ۰/۳۸$ در نظر گرفته می‌شود. در بخش الفِ شکل ۵، در $f_x^{(s)}$ و $f_z^{(s)}$های مختلف، مرز محدوده $w < ۰/۱۵$ توسط خط، و مرز محدوده پایداری دینامیکی با خطچین برای چند ضخامت تیر به‌ازای $l = ۱۷/۶\,\mu\text{m}$ ترسیم شده است. در این شکل، سمت راست خطچین‌ها، محدوده پایداری و سمت چپ آن‌ها محدوده ناپایداری بوده و به‌طور مشابه، سمت راست خطهای ممتد، محدوده $w < ۰/۱۵$ و سمت چپ آن‌ها $w > ۰/۱۵$ است. مشابها در بخش (ب) شکل نیز، نمودارهای مذکور به ازای $h = ۱۰۰\,\mu\text{m}$ در lهای مختلف رسم شده‌اند. با بررسی شکل ۵، نتایج زیر حاصل می‌شود:

- با کاهش ضخامت تیر (بخش (الف))، یا افزایش مقیاس طولِ l (بخش (ب)) اثر ابعاد کوچک خود را نشان‌داده و اختلافِ بین نتایج



(الف)



(ب)

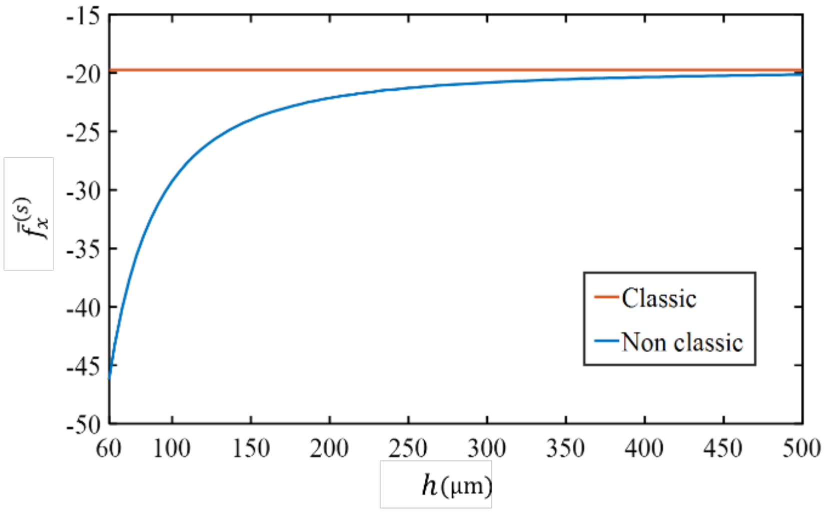
شکل ۵. محدوده پایداری و محدوده $w<۰/۱۵$ برای المان منعطف P (الف) بررسی تأثیر h در $l=۱۷/۶\,\mu m$ (ب) بررسی تأثیر l در $h=۱۰۰\,\mu m$

Fig. 5. Stability and deflection range of P-flexure a) Effect h at $l=۱۷/۶\,\mu m$ b) Effect of l at $h=۱۰۰\,\mu m$

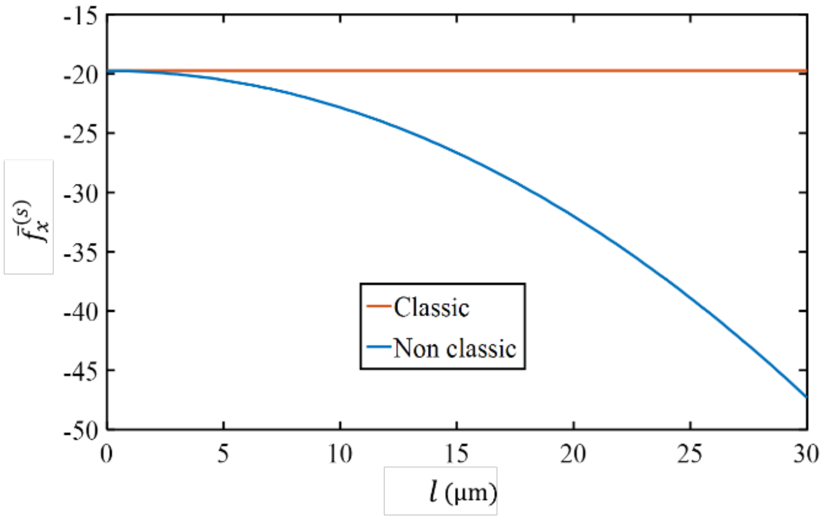
کلاسیک و غیرکلاسیک، به صورت تصاعدی افزایش می‌یابد. همچنین، برای $h>۵۰۰\,\mu m$ و یا lهای کمتر از $۵\,\mu m$، نتایج کلاسیک و غیرکلاسیک تقریباً یکسان می‌شوند.

- هرچه اندازه نیروی محوری فشاری افزایش یابد، محدوده مجاز تغییرات نیروی عرضی کاهش یافته و برعکس، هرچه نیروی محوری کششی افزایش یابد، محدوده مجاز تغییرات نیروی عرضی افزایش می‌یابد.
- حداکثر نیروی محوری فشاری مجاز براساس معیار خیز با نیروی محوریِ معیار پایداری، یکسان است و این مقدار برابر نیروی کمانش المان منعطف موازی است. مثلاً براساس تئوری کلاسیک، مقدار نیروی کمانش المان موازی به صورت $|F_X|_{cr}=۲\times\pi^۲ EI/L^۲$ محاسبه می‌شود. با استفاده از بی‌بعدسازی این رابطه به کمک معادله (۲۱)، نتیجه می‌شود:

$$|f_x|_{cr}=\frac{|F_x|_{cr}L^2}{EI}=2\pi^2=19.74 \qquad (۵۳)$$



(الف)



(ب)

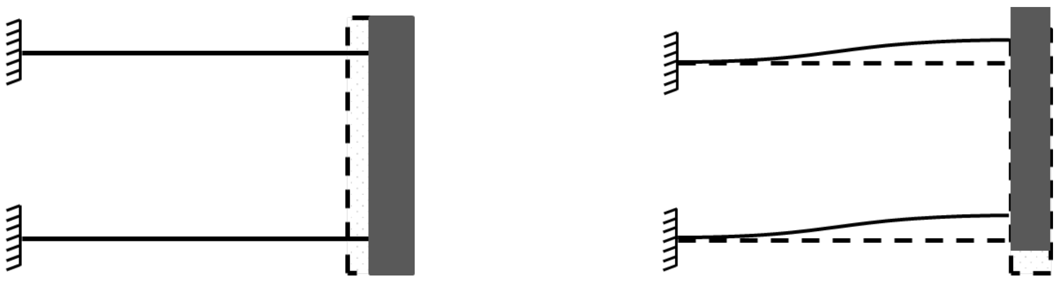
شکل ۶. قدر مطلق نیروی بی‌بعد مجاز محوری $\left|f_x^{(s)}\right|$ **(الف) بر حسب** h **در** $l=۱۷/۶\,\mu\text{m}$ **(ب) بر حسب** l **در یک** $h=۱۰۰\,\mu\text{m}$

Fig. 6. Allowed nondimensional axial force a) Versus h **at** $l=۱۷/۶\,\mu\text{m}$ **b)Versus** l **at** $h=۱۰۰\,\mu\text{m}$

نتیجه ارائه شده در معادله فوق، کاملاً در تطابق با نتایج بدست آمده در بخش (الف) و (ب) شکل ۵ به‌ترتیب به ازای $h=۵۰۰\,\mu\text{m}$ و $l=۰\ \mu\text{m}$ است.

- مقدار نیروی بی‌بعدِ مربوط به مرزِ پایداری، با کاهش ابعاد، افزایش می‌یابد.

با توجه به شکل ۵، می‌توان مقدار حداکثر $\left|f_x^{(s)}\right|$ را در $l=۱۷/۶\,\mu\text{m}$ بر حسب های مختلف، و در $h=۱۰۰\,\mu\text{m}$ بر حسب l های مختلف رسم نمود. نتیجه حاصل در شکل ۶ ارائه شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود با افزایش h در یک l خاص، مقدار قدر مطلق نیروی بی‌بُعد مجازِ $\left|f_x^{(s)}\right|$، کاهش می‌یابد و به صورت مجانب‌وار، به نیروی مُجاز بدست آمده از تئوری کلاسیک نزدیک می‌شود. همچنین در یک h خاص، با کاهش l نیز نیروی $\left|f_x^{(s)}\right|$ مجاز نیز کاهش یافته و به صورت مجانب‌وار به مقدار مربوط به تئوری کلاسیک نزدیک می‌شود.



شکل ۷. مدهای ارتعاشی المان منعطف P (الف) مد اول (عرضی) (ب) مد دوم (محوری)

Fig. 7. Vibrational modes of P-flexure a)Trasnsverse mode shape b)Axial mode shape

۳- ۴- فرکانس طبیعی و شکل مد

با توجه به این نکته که برای تحلیل ماژول منعطف موازی، از یک مدل پارامتر متمرکز با دو درجه آزادی استفاده شده است، سیستم دارای دو شکل مود در راستای دو درجه آزادی خواهد بود. به‌منظور تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای میکرو المان منعطف موازی، از رابطه (۴۵) معادله حرکت سیستم به شکل زیر بیان می‌شود:

$$[\mathcal{M}]\{\ddot{x}\}+[\mathcal{K}]\{x\}=\{f\} \qquad (۵۴)$$

که در آن

$$\{\ddot{x}\}=\begin{Bmatrix}\ddot{\hat{u}}\\ \ddot{\hat{w}}\end{Bmatrix},\ \{x\}=\begin{Bmatrix}\hat{u}\\ \hat{w}\end{Bmatrix},\ \{f\}=\begin{Bmatrix}\hat{f}_x\\ \hat{f}_z\end{Bmatrix} \qquad (۵۵)$$

حال کافیست معادله دیفرانسیل (۵۴) پس از همگن شدن با فرض $\{x\}=\{x_0\}e^{i\varpi_n\hat{t}}$ حل شود. باید توجه داشت که ϖ_n فرکانس طبیعی بی‌بعد بوده که با فرکانس طبیعی بابعد، به‌شکل $\omega_n=\varpi_n\sqrt{EI/mL^۳}$ در ارتباط است.

$$\left(-\varpi_n^2[\mathcal{M}]+[\mathcal{K}]\right)\{x_0\}=0 \qquad (۵۶)$$

با توجه به اینکه $[\mathcal{M}]$ یک ماتریس همانی است، می‌توان رابطه‌ای بین فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد و مؤلفه‌های ماتریس سفتی میکرو المان موازی یافت.

$$\left(\mathcal{K}_{11}-\varpi_n^2\right)\left(\mathcal{K}_{22}-\varpi_n^2\right)-\mathcal{K}_{12}\mathcal{K}_{21}=0 \qquad (۵۷)$$

از حل این معادله جبری، ۲ مقدار حقیقی مثبت برای ϖ_n بدست خواهد آمد. با قراردهی هر یک از فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد در رابطه (۵۶) و سپس حل معادله، یک بردار ویژه $\{x_.\}$ حاصل می‌شود که تعیین کننده شکل مُد مرتبط با آن فرکانس طبیعی است.

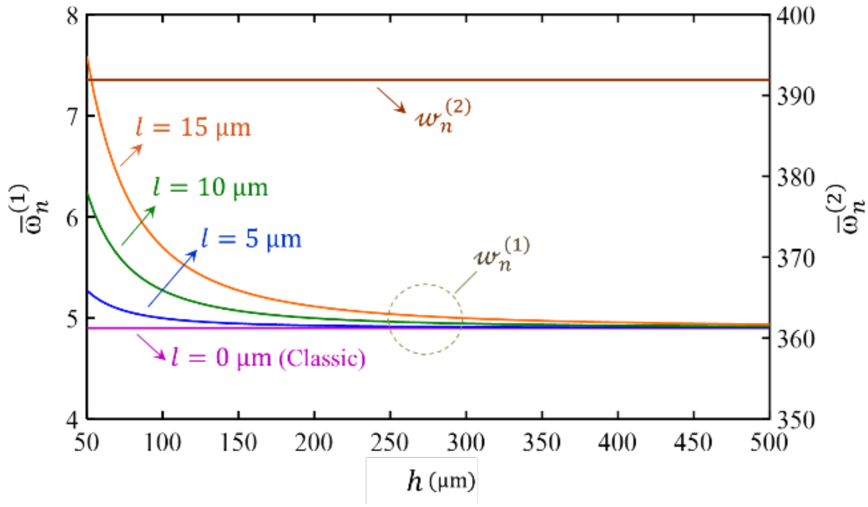
به عنوان نمونه با فرض جنس اپوکسی با $\nu=۰/۳۸$، $l=۱۷/۶\,\mu\text{m}$ و ضخامت تیر $h=۲۰۰\,\mu\text{m}$ مقدار فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد و شکل مدها در حالت آزاد المان منعطف، مطابق زیر حاصل می‌شوند.

$$\varpi_n^{(1)}=5.19,\ \varpi_n^{(2)}=391.9 \qquad (۵۸)$$

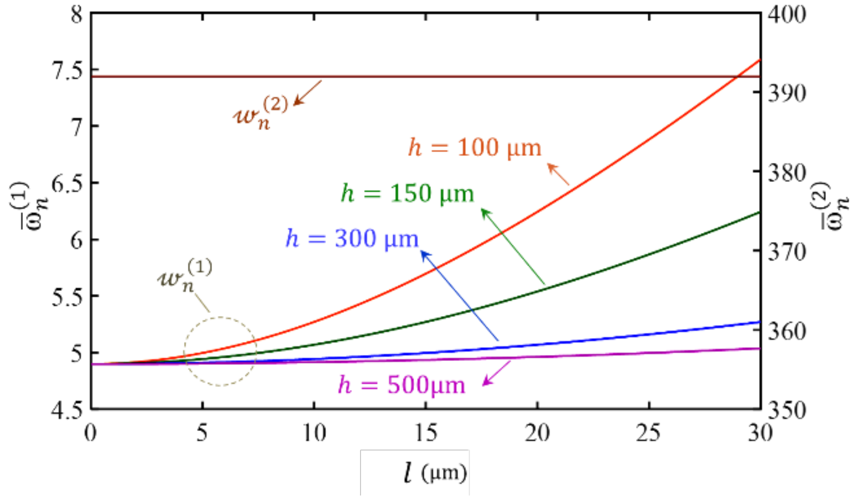
$$\{x_0\}^{(1)}=\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix},\ \{x_0\}^{(2)}=\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} \qquad (۵۹)$$

ملاحظه می‌گردد که مقدار فرکانس طبیعیِ مربوط به حرکت سکو در راستای محوری، بسیار بیشتر از فرکانس مربوط به حرکت عرضی آن است. شماتیک دو شکل مد در شکل ۷ نمایش داده شده است.

در ادامه به بررسی نقش ابعاد بر فرکانس طبیعی پرداخته خواهد شد.



(الف)



(ب)

شکل ۸. فرکانس طبیعی بی‌بعد اول و دومِ میکرو المان منعطفِ P (الف) بررسی تأثیر h در $l = ۱۷/۶ \mu m$ (ب) بررسی تأثیر l در یک $h = ۱۰۰ \mu m$

Fig. 8. First and second nondimensional natural frequency a) Effect h at $l = ۱۷/۶ \mu m$ b)Effect of l at $h = ۱۰۰ \mu m$

به این منظور، یک المان منعطف موازی با تیرهایی از جنس اپوکسی با $L = ۸۰h$ انتخاب کرده و فرض می‌شود، ارتعاش حول نقطه صفر انجام پذیرد. شکل ۸ (الف) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد حرکت‌های عرضی و طولی میکرو المان منعطف موازی را با استفاده از دو تئوری مکانیک کلاسیک و غیرکلاسیک، برحسب ضخامت تیر نمایش می‌دهد. محورهای سمت چپ و راستِ این نمودار، به ترتیب نشان‌دهنده فرکانس‌های طبیعی حرکت عرضی و طولی المان موازی هستند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، تئوری کلاسیک تخمین صحیحی از فرکانس طبیعیِ مربوط به مُد حرکت عرضی در ابعاد کوچک ارائه نمی‌دهد. در واقع هرچه ابعاد کوچکتر باشند، اختلاف بین پیشبینی تئوری‌های کلاسیک و گرادیان کرنش اصلاح شده برای فرکانس طبیعی اول، افزایش می‌یابد. اما هنگامی که المان منعطف در مُد طولی در حال ارتعاش است، هیچ گونه گرادیان کرنش در تیرها وجود نخواهد داشت و به همین دلیل، مطابق انتظار، در این حالت تئوری‌های کلاسیک و گرادیان کرنش اصلاح یافته به نتایج یکسانی منجر می‌شوند

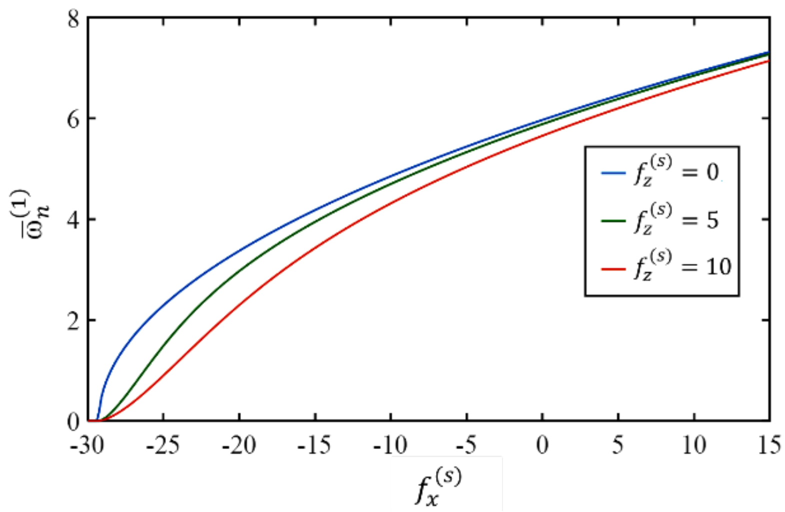
[۴۴]. همچنین به منظور بررسی بهتر اثر اندازه، نمودار فرکانس‌های اول و دوم سیستم بر حسب پارامتر مقیاس طول l در $h = ۱۰۰\mu\text{m}$ در شکل ۸ (ب) رسم شده است. مشاهده می‌شود که با کاهش مقیاس طول، فرکانس طبیعی اول بدست آمده از تئوری گرادیان کرنش اصلاح یافته کاهش می‌یابد و به صورت مجانب‌وار، به فرکانس طبیعی اولِ بدست آمده از تئوری کلاسیک میل می‌کند. همچنین، مطابق بخش (الف) این شکل، از آنجایی که فرکانس دومِ سیستم، مربوط به مُد طولی است و در آن گرادیان کرنش وجود ندارد، نتایج مربوط به فرکانس طبیعی دوم بدست آمده از تئوری گرادیان کرنش اصلاح یافته، مستقل از l بوده و کاملاً منطبق بر نتایج بدست آمده از تئوری کلاسیک است.

به‌منظور صحه‌سنجی فرکانس طبیعی اول کلاسیک در شکل ۸ (الف)، کافی است جذر تقسیم سفتی عرضی المان منعطف موازی بر جرم سکو را محاسبه نمود. از آنجا که المان موازی از دو تیر موازی با ابتدای گیردار و انتهای شیب صفر تشکیل شده است، سفتی عرضی با بعد این المان منعطف از رابطه $K_Z = ۲۴EI / L^۳$ حاصل می‌شود [۵۱]. بنابراین، فرکانسِ طبیعی مد عرضی با جرم سکوی و صرفنظر از جرم تیر، با استفاده از رابطه $\omega_n^{(1)} = \sqrt{k / m} = \sqrt{۲۴EI / mL^۳}$ بدست می‌آید. با استفاده از این رابطه، می‌توان فرکانس بی‌بعد سیستم را به کمک $\varpi_n = \omega_n \sqrt{mL^۳ / EI}$ محاسبه نمود که حاصل، برابر با $\varpi_n = ۴/۹$ است. این فرکانس، برابر با مقدار حدی فرکانس طبیعی بی‌بعد نشان داده شده در شکل ۸ است. نمودار مذکور برای جنس‌های مختلف در صورت دانستن مقدار پارامترهای اندازه، قابل ترسیم است و توسط آن می‌توان با درنظر گرفتن اثر ابعاد میکرو و به کمک رابطه $\omega_n = \varpi_n \sqrt{EI / mL^۳}$ مقدار فرکانس طبیعی (مد اول) بابعد هر المان منعطف موازی با ابعاد و جرم سکوی دلخواه را یافت.

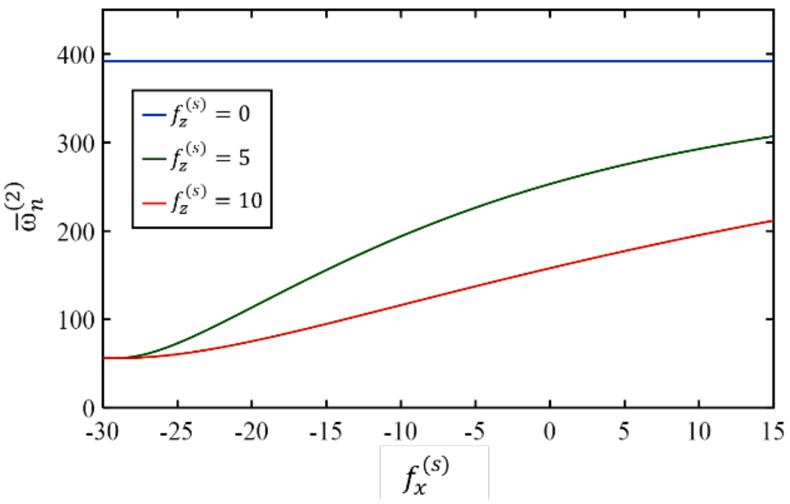
نمودارهای ارائه شده در شکل ۸، با فرض اینکه هیچ نیروی استاتیکی به سیستم وارد نمی‌شود و تعادل سیستم در نقطه صفر است بدست آمده بودند. به منظور بررسی فرکانس‌های طبیعی سیستم هنگامی که نیروهای وارد بر سکوی حرکتی مؤلفه استاتیکی دارند، فرکانس‌های طبیعی اول و دوم سیستم برحسب $f_x^{(s)}$ در $f_z^{(s)}$های مختلف در شکل ۹ و بر حسب $f_z^{(s)}$ در $f_x^{(s)}$های مختلف در شکل ۱۰ بررسی شده است. همان‌گونه که در شکل ۹ (الف) مشاهده می‌شود، با افزایش $f_x^{(s)}$ (مستقل از مقدار $f_z^{(s)}$) فرکانس طبیعی اول سیستم افزایش می‌یابد. همچنین، با توجه به بخش (ب) شکل، می‌توان نتیجه گرفت در صورتی که $f_z^{(s)} = ۰$، فرکانس طبیعی دوم مستقل از مقدار نیروی محوری استاتیکی $f_x^{(s)}$ خواهد بود. اما در غیر این‌صورت، با افزایش $f_x^{(s)}$، مقدار فرکانس طبیعی دوم نیز افزایش می‌یابد. همچنین از شکل ۱۰ می‌توان نتیجه گرفت که عموماً با افزایش نیروی عرضی، فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابد، ولی میزان کاهش در فرکانس دوم (حرکت محوری) بسیار بیشتر است. این مساله به دلیل افت محسوس سفتی محوری با حرکت سکو در راستای عرضی در اثر نیروی استاتیک عرضی است.

۴- نتیجه‌گیری

استفاده از مکانیزم‌های منعطف، رویکردی تقریباً بدون جایگزین برای دستیابی به حرکت‌های مورد نیاز در ابعاد میکرو است. از طرفی، هنگامی که ابعاد سازه مورد بررسی کوچک باشد، تئوری‌های الاستیسیته کلاسیک قادر به تحلیل رفتار سازه‌ها نخواهند بود. همچنین، به دلیل تغییر شکل‌های نسبی بزرگ، غیرخطیت‌های هندسی نیز در تحلیل رفتار سیستم باید مورد توجه باشند. با توجه به مطالب فوق، تحلیل رفتار میکرومکانیزم‌های منعطف با چالش‌های متنوعی روبرو است. لذا هدف این پژوهش، بررسی رفتار دینامیکی میکرو المان منعطف موازی، به عنوان یک ماژول بسیار مورد استفاده در اکثر مکانیزم‌های منعطف بود. به این منظور ابتدا روشی مبتنی بر مدل قیدی تیر و تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده برای تعیین انرژی کرنشی میکرو المان منعطف موازی، معرفی شد و سپس به کمک آن، ارتعاشات یک المان موازی که تحت بارگذاری دینامیکی در انتها قرار گرفته بود، تحلیل شد. همچنین محدوده مجاز بارگذاری استاتیکی که در آن، اغتشاشات کوچک باعث ناپایداری مکانیزم نشوند نیز استخراج گردید. تأثیر بارگذاری‌های استاتیکی بر فرکانس‌های طبیعی سیستم در اثر پارامترهای طول مختلف نیز مورد بحث و بررسی قرار گرفت. به طور خلاصه می‌توان گفت که در ابعاد کوچک، به ویژه در مُد عرضی، مکانیزم، سفتی و فرکانس طبیعی بیشتری از خود نشان می‌دهد. همچنین نیروهای کششی باعث افزایش، و نیروهای خمشی نیز باعث کاهش فرکانس طبیعی میکرو المان منعطف موازی شدند. از نتایج کمی و کیفی بدست آمده در این پژوهش به راحتی می‌توان برای طراحی میکرو المان منعطف موازی بهره برد. همچنین، انرژی کرنشی ارائه شده در این مقاله که صرفاً بر حسب جابجایی‌های سکوی حرکتی بیان شده بود می‌تواند جهت تحلیل سایر میکرو مکانیزم‌های منعطف نیز مورد استفاده قرار بگیرد.



(الف)



(ب)

شکل ۸. تأثیر مؤلفه استاتیکی نیروی محوری بر فرکانس طبیعی میکرو المان منعطف موازی با $h = ۱۰۰\,\mu\text{m}$ و $l = ۱۷/۶\,\mu\text{m}$ (الف) مد حرکت عرضی (ب) مد حرکت محوری

Fig. 8. Effect of axial static force on natural frequency of P-flexure at $h = 100\,\mu\text{m}$ and $l = 17.6\,\mu\text{m}$ a) Trasverse mode b) axial mode

منابع

[1] L.L. Howell, Compliant mechanisms, in: 21st Century Kinematics, Springer, 2013, pp. 189-216.

[2] L.L. Howell, S.P. Magleby, B.M. Olsen, Handbook of compliant mechanisms, John Wiley & Sons, 2013.

[3] C.-H. Liu, G.-F. Huang, C.-H. Chiu, T.-Y. Pai, Topology synthesis and optimal design of an adaptive compliant gripper to maximize output displacement, Journal of Intelligent & Robotic Systems, 90(3-4) (2018) 287-304.

[4] M. Lofroth, E. Avci, Development of a novel modular compliant gripper for manipulation of micro objects, Micromachines, 10(5) (2019) 313.

[5] X. Zhang, X. Xiang, Y. Wang, G. Ding, X. Xu, Z. Yang, A Heterogeneous Integrated MEMS Inertial Switch With

formulation, Journal of mechanical Design, 132(8) (2010).

[15] G. Chen, F. Ma, G. Hao, W. Zhu, Modeling large deflections of initially curved beams in compliant mechanisms using chained beam constraint model, Journal of Mechanisms and Robotics, 11(1) (2019) 011002.

[16] S. Awtar, A.H. Slocum, Closed-form nonlinear analysis of beam-based flexure modules, in: ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, 2005, pp. 101-110.

[17] S. Awtar, S. Sen, A Generalized Constraint Model for Two-Dimensional Beam Flexures: Nonlinear Load-Displacement Formulation, Journal of Mechanical Design, 132(8) (2010).

[18] S. Awtar, A.H. Slocum, E. Sevincer, Characteristics of beam-based flexure modules, (2007).

[19] S. Sen, S. Awtar, Nonlinear strain energy formulation of a generalized bisymmetric spatial beam for flexure mechanism analysis, Journal of Mechanical Design, 136(2) (2014).

[20] M. Bakhtiari-Shahri, H. Moeenfard, Topology optimization of fundamental compliant mechanisms using a novel asymmetric beam flexure, International Journal of Mechanical Sciences, 135 (2018) 383-397.

[21] H. Malaeke, H. Moeenfard, A novel flexure beam module with low stiffness loss in compliant mechanisms, Precision Engineering, 48 (2017) 216-233.

[22] F. Ma, G. Chen, Modeling large planar deflections of flexible beams in compliant mechanisms using chained beam-constraint-model, Journal of Mechanisms and Robotics, 8(2) (2016).

[23] C. He, Q. Xie, Z. Yang, S. Xue, Modelling large planar deflections of flexible bundled conductors in substations using a modified chained-beam constraint model, Engineering Structures, 185 (2019) 278-285.

[24] H. Moeenfard, S. Awtar, Modeling geometric

Compliant Cantilevers Fixed Electrode and Electrostatic Locking to Realize Stable On-State, Journal of Microelectromechanical Systems, 28(6) (2019) 977-986.

[6] Q. Xu, Z. Yang, B. Fu, J. Li, H. Wu, Q. Zhang, Y. Sun, G. Ding, X. Zhao, A surface-micromachining-based inertial micro-switch with compliant cantilever beam as movable electrode for enduring high shock and prolonging contact time, Applied Surface Science, 387 (2016) 569-580.

[7] Q.-D. Truong, D.-A. Wang, Design and characterization of a mouse trap based on a bistable mechanism, Sensors and Actuators A: Physical, 267 (2017) 360-375.

[8] N. Le Chau, N.T. Tran, T.-P. Dao, A multi-response optimal design of bistable compliant mechanism using efficient approach of desirability, fuzzy logic, ANFIS and LAPO algorithm, Applied Soft Computing, 94 (2020) 106486.

[9] M.M. Elsisy, M.H. Arafa, C.A. Saleh, Y.H. Anis, Modeling of a Symmetric Five-Bar Displacement Amplification Compliant Mechanism for Energy Harvesting, Sensors, 21(4) (2021) 1095.

[10] M.A. Abdelnaby, M. Arafa, Energy harvesting using a flextensional compliant mechanism, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 27(19) (2016) 2707-2718.

[11] A. Zhang, G. Chen, A comprehensive elliptic integral solution to the large deflection problems of thin beams in compliant mechanisms, Journal of Mechanisms and Robotics, 5(2) (2013).

[12] L. Campanile, A. Hasse, A simple and effective solution of the elastica problem, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 222(12) (2008) 2513-2516.

[13] P. Liu, P. Yan, Modeling and Analysis of Beam Flexure Based Double Parallel Guiding Mechanisms: A Modified Pseudo-Rigid-Body Approach, in: ASME 2016 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, 2016.

[14] S. Awtar, S. Sen, A generalized constraint model for two-dimensional beam flexures: Nonlinear strain energy

nonlinearities in the free vibration of a planar beam flexure with a tip mass, Journal of Mechanical Design, 136(4) (2014).

[25] M. Radgolchin, H. Moeenfard, Analytical modeling of nonlinear flexural-extensional vibration of flexure beams with an interconnected compliant element, Mechanics Research Communications, 89 (2018) 23-33.

[26] M.N. Aghaei, H. Moeenfard, M. Moavenian, Nonlinear extensional-flexural vibrations in variable cross section beams with eccentric intermediate mass, International Journal of Mechanical Sciences, 196 (2021) 106248.

[27] H. Malaeke, H. Moeenfard, Analytical modeling of large amplitude free vibration of non-uniform beams carrying a both transversely and axially eccentric tip mass, Journal of Sound and Vibration, 366 (2016) 211-229.

[28] M.B. Akbarzadeh, H. Moeenfard, S. Awtar, Nonlinear dynamic modeling of a parallelogram flexure, Mechanism and Machine Theory, 153 (2020) 103985.

[29] C.J. Silva, M.F. Daqaq, Nonlinear flexural response of a slender cantilever beam of constant thickness and linearly-varying width to a primary resonance excitation, Journal of Sound and Vibration, 389 (2017) 438-453.

[30] M.R. Sayag, E.H. Dowell, Linear versus nonlinear response of a cantilevered beam under harmonic base excitation: theory and experiment, Journal of Applied Mechanics, 83(10) (2016).

[31] S. Iqbal, R.I. Shakoor, Y. Lai, A.M. Malik, S.A. Bazaz, Experimental evaluation of force and amplification factor of three different variants of flexure based micro displacement amplification mechanism, Microsystem Technologies, 25(7) (2019) 2889-2906.

[32] A. Vafaie, M. Tahmasebipour, Y. Tahmasebipour, A novel capacitive micro-accelerometer made of steel using micro wire electrical discharge machining method, Journal of Micromechanics and Microengineering, 29(12) (2019) 125018.

[33] Y. Gao, C. Yan, H. Huang, T. Yang, G. Tian, D. Xiong, N. Chen, X. Chu, S. Zhong, W. Deng, Microchannel□Confined MXene Based Flexible Piezoresistive Multifunctional Micro□Force Sensor, Advanced Functional Materials, 30(11) (2020) 1909603.

[34] P. Trocha, M. Karpov, D. Ganin, M.H. Pfeiffer, A. Kordts, S. Wolf, J. Krockenberger, P. Marin-Palomo, C. Weimann, S. Randel, Ultrafast optical ranging using microresonator soliton frequency combs, Science, 359(6378) (2018) 887-891.

[35] A. Kravchenko, V. Komenko, W.-J. Fischer, Silicon-On-Nothing Micro-Pirani Gauge for Interior-Pressure Measurement, in: Multidisciplinary Digital Publishing Institute Proceedings, 2018, pp. 1079.

[36] A. Jain, Development of Indigenous Micro-gyroscope Technology, (2019).

[37] S. Afrang, H. Mobki, M. Hassanzadeh, G. Rezazadeh, Design and simulation of a MEMS analog micro-mirror with improved rotation angle, Microsystem Technologies, 25(3) (2019) 1099-1109.

[38] B. Leimkuhler, C. Matthews, Molecular Dynamics, Springer, 2016.

[39] V. Parvaneh, M. Shariati, A.M.M. Sabeti, Investigation of vacancy defects effects on the buckling behavior of SWCNTs via a structural mechanics approach, European Journal of Mechanics-A/Solids, 28(6) (2009) 1072-1078.

[40] S. Karparvarfard, M. Asghari, R. Vatankhah, A geometrically nonlinear beam model based on the second strain gradient theory, International Journal of Engineering Science, 91 (2015) 63-75.

[41] J.G. Korvink, E.B. Rudnyi, A. Greiner, Z. Liu, MEMS and NEMS simulation, in: MEMS: a practical guide to design, analysis, and applications, Springer, 2006, pp. 93-186.

[42] J.A. Pelesko, D.H. Bernstein, Modeling Mems and Nems, CRC press, 2002.

[43] F. Yang, A. Chong, D.C.C. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, International Journal of Solids and Structures, 39(10) (2002) 2731-2743.

[44] D.C. Lam, F. Yang, A. Chong, J. Wang, P. Tong, Experiments and theory in strain gradient elasticity, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 51(8) (2003) 1477-1508.

[45] F. Rajabi, S. Ramezani, A nonlinear microbeam model based on strain gradient elasticity theory, Acta Mechanica Solida Sinica, 26(1) (2013) 21-34.

[46] R.S. Joshi, A.C. Mitra, S.R. Kandharkar, Design and analysis of compliant micro-gripper using pseudo rigid body model (PRBM), Materials Today: Proceedings, 4(2) (2017) 1701-1707.

[47] B. Ding, Y. Li, Design and analysis of a decoupled XY micro compliant parallel manipulator, in: 2014 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO 2014), IEEE, 2014, pp. 1898-1903.

[48] T.-P. Dao, S.-C. Huang, Design and analysis of a compliant micro-positioning platform with embedded strain gauges and viscoelastic damper, Microsystem Technologies, 23(2) (2017) 441-456.

[49] J. Reddy, Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams, International Journal of Engineering Science, 45(2-8) (2007) 288-307.

[50] M. Kahrobaiyan, M. Asghari, M. Rahaeifard, M. Ahmadian, A nonlinear strain gradient beam formulation, International Journal of Engineering Science, 49(11) (2011) 1256-1267.

[51] F. Beer, E. Johnston, J. DeWolf, D. Mazurek, Mechanics of Materials. 7th_Edition, New York. MeGraw-Hill Education Ltd, (2015).

[52] L. Cui, C. Okwudire, S. Awtar, Modeling complex nonminimum phase zeros in flexure mechanisms, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 139(10) (2017).

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Arhami, H. Moeenfard, Dynamic Analysis of Micro -Scale Parallelogram Flexures Using Beam Constraint Model and Modified Strain Gradient Theory, Amirkabir J. Mech Eng., 54(4) (2022) 821-842.

DOI: 10.22060/mej.2022.20518.7251