Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 54(2) (2022) 77-80
DOI: 10.22060/mej.2022.20132.7174

Free Vibrations of Embedded Functionally Graded Graphene Platelets Reinforced Porous Nanocomposite Plates with Various Shapes Using P-Ritz Method

M. Z. Doust Abed[1], R. Gholami[2] , R. Ansari[1]

[1] Department of Mechanical Engineering, University of Guilan, Rasht, Iran
[2] Department of Mechanical Engineering, Lahijan Branch, Islamic Azad University, Lahijan, Iran

ABSTRACT: In this study, the free vibrations of functionally graded graphene platelet-reinforced porous nanocomposite plates with various shapes such as rectangular, elliptical, and triangular ones embedded on an elastic foundation are analyzed. To mathematically model the considered plate and elastic foundation, the first-order shear deformation plate theory, and Pasternak model are used, respectively. Three types of graphene nanoplatelet distribution patterns and porous dispersion types through the thickness are considered for the nanocomposite plate. To obtain the effective material properties of the considered nanocomposite, a micromechanical model is employed. Then, the energy functional of considered functionally graded graphene platelet-reinforced porous nanocomposite plates are expressed, and the analytical P-Ritz method is used to solve the vibration problem corresponding to different shapes and boundary conditions, the influences of porosity coefficient, the weight fraction of graphene nanoplatelets, elastic foundation coefficients and also the lengths-to-width and -thickness ratios on the natural frequency are analyzed. It is illustrated that the plate with non-uniform and symmetric of first type porosity distribution pattern and the first type graphene nanoplatelets has a higher natural frequency. Also, by increasing the porosity coefficient, the natural frequency of the plate associated with all patterns of graphene nanoplatelets is reduced.

Review History:

Received: Jun. 05, 2021
Revised: Oct. 27, 2021
Accepted: Dec. 20, 2021
Available Online: Jan. 26, 2022

Keywords:

Free vibration
Porous nanocomposite plates
Plates with various shapes
Elastic foundation
P-Ritz method.

1- Introduction

In recent years, many studies have been conducted on mechanical behaviors of Functionally Graded (FG) graphene platelets reinforced porous nanocomposite beams, plates, and shells. The effects of the geometry of nanoplatelets, weight fraction, porosity distribution, and geometric parameters on bending, buckling, and vibrational behaviors have been investigated [1].

Literature review shows that no study has been performed on free vibration of nanocomposite plate Reinforced Graphene Nanoplatelets (GPL) with arbitrary shapes including rectangular, elliptical, and isosceles triangular. In the present study, based on the first order shear deformation theory and using the p-Ritz method, the free vibration of arbitrary-shaped porous nanocomposite plates embedded on an elastic foundation is investigated. The elastic foundation is formulated using the Winkler-Pasternak model. Three types of distribution for pores and graphene nanoplatelets through the thickness are considered. The modified Halpin-Tsai micromechanics model and extended rule of the mixture are used to determine the effective material properties of the porous nanocomposite.

After convergence study and verifying the accuracy of the present results, a comprehensive parametric investigation is performed to study the influence of the weight fraction and geometric parameters of GPL nanofiller and porosity coefficient on the vibrational behavior of porous nanocomposite plates with various shapes.

2- Problem Formulation

In this paper, three types of FG porous plates along with the even porosity distribution case, denoted by $ű_{ü}$, , are considered. To further strengthen the mechanical properties, the metal matrix of the composite plate is reinforced by GPLs. And the distribution of GPLs in the metal matrix may be uniform or non-uniform by adjusting the volume fraction along the plate thickness. Three different GPLs patterns are also considered for each porosity distribution which are [1].

Three distributions of internal pore inside of the proposed porous plates and three GPL dispersion patterns regarding the varying nanofillers volume contents $V_{ű}$ across the thickness are assumed.

The variation of Young’s module, shear module, and mass density through the thickness direction for different porosity distribution can be described by Eq. (1) and N_0 is the coefficients of porosity.

*Corresponding author’s email: gholami_r@liau.ac.ir

$$
\begin{aligned}
E(z) &= E_{\max}\left(1-N_0\phi(z)\right)\\
G(z) &= G_{\max}\left(1-N_0\phi(z)\right)\\
\rho(z) &= \rho_{\max}\left(1-N_m\phi(z)\right)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

The effective Young's module and mass density are obtained based on the Halpin-Tsai micromechanics model.

The adopted admissible P-Ritz functions which satisfy at least boundary condition for the deflection and rotation of plate are given by Eq. (4) [2]:

$$
\begin{aligned}
w(\tau,\xi,\eta) &= \sum_{q=0}^{p}\sum_{i=0}^{q} c_m (2\xi)^i (2\eta)^{q-i}\,\phi_b^w(\xi,\eta)e^{i\omega\tau}\\
\phi_x(\tau,\xi,\eta) &= \sum_{q=0}^{p}\sum_{i=0}^{q} d_m (2\xi)^i (2\eta)^{q-i}\,\phi_b^x(\xi,\eta)e^{i\omega\tau}\\
\phi_y(\tau,\xi,\eta) &= \sum_{q=0}^{p}\sum_{i=0}^{q} e_m (2\xi)^i (2\eta)^{q-i}\,\phi_b^y(\xi,\eta)e^{i\omega\tau}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

According to the P-Ritz method, the minimizing of total potential energy with respect to unknown displacement parameters yields:

$$
\Pi^* = \frac{\Pi}{\Delta} = \bar{U} + \bar{V}_e - \bar{K} \tag{3}
$$

The governing equation for free vibration analysis is expressed as:

$$
\begin{aligned}
&\left([K]-\omega^2[M]\right)\begin{Bmatrix}\{c\}\\ \{d\}\\ \{e\}\end{Bmatrix} = 0\\
&\omega = \Omega a\sqrt{\frac{I_{110}}{A_{110}}}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Table 1. Comparting of natural frequencies of the elliptical homogenous plate under simply supported boundary conditions

	[3]		Present	
a/b	$\upsilon=0/5$	$\upsilon=0/25$	$\upsilon=0/5$	$\upsilon=0/25$
1	5/219	4/865	5/21929	4/865272
1/2	4/442	4/157	4/44171	4/157386

3- Results and Discussion

At the first step, the natural frequencies of the elliptical homogenous plate without pore and graphene platelet nanofillers are compared with those given in reference [3], as given in Table 1. An excellent agreement can be found between the provided results and those given in the literature.

The variation of the dimensionless natural frequency of the elliptical plate versus the GPL weight fraction is illustrated in Fig. 1 for different porosity and graphene platelets distribution patterns. Fundamental frequency increases by an increase in GPLs weight fraction. Compared to patterns B and C, the effect of GPLs with symmetric pattern A on the natural frequency is more considerable.

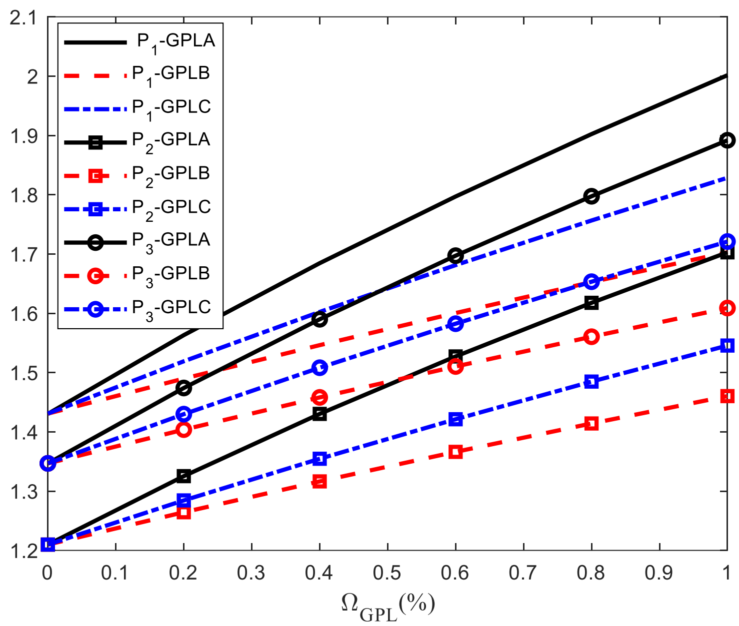


Fig. 1. Comparison of the natural frequency of elliptical plate versus the GPL weight fraction for the clamped boundary conditions

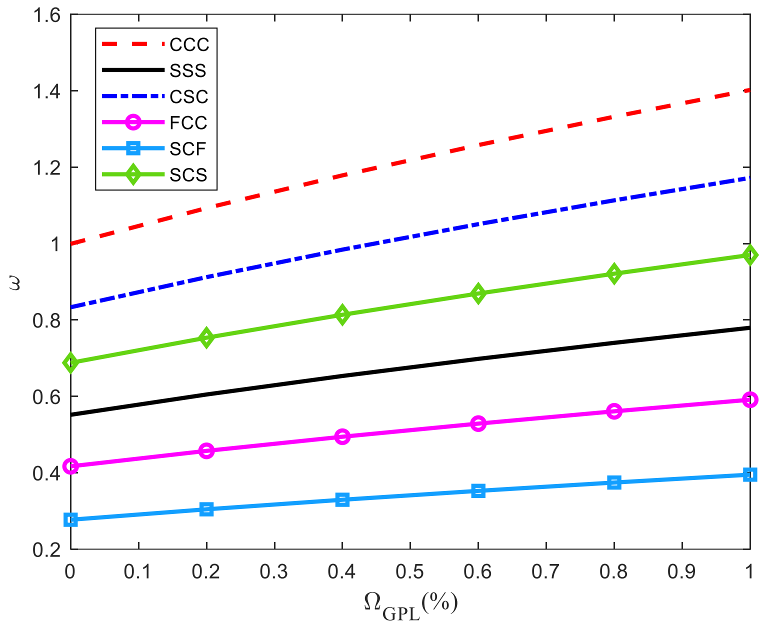


Fig. 2. Comparison of the natural frequency of isosceles triangular plate versus the GPL weight fraction for various boundary conditions

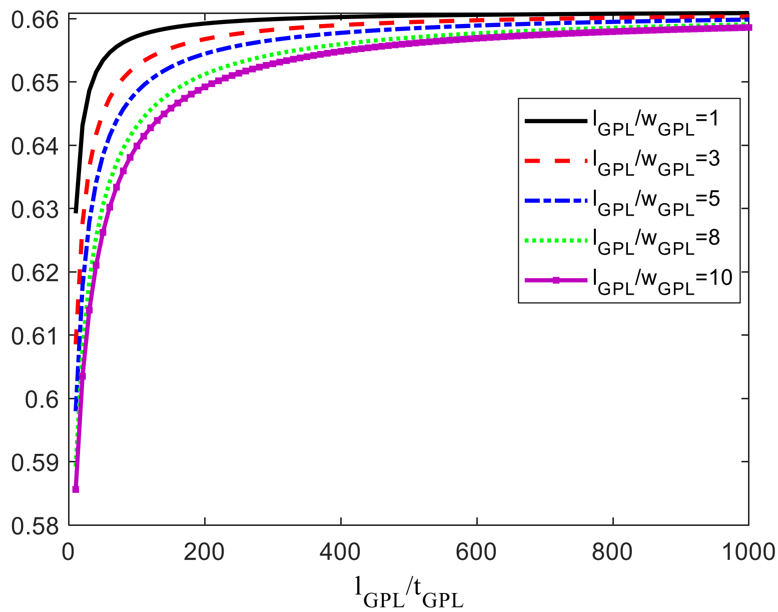


Fig. 3. Comparison of the natural frequency of rectangular plate versus the length to thickness ratio of GPLs under CSCS boundary conditions for GPL pattern

Fig. 2 depicts the variation of the dimensionless natural frequency of porous nanocomposite isosceles triangular plate versus the GPL weight fraction for various boundary conditions. Also, Fig. 3 illustrates the variations of the dimensionless natural frequency of porous nanocomposite rectangular plate versus the GPL shape ratio l_{GPL} / t_{GPL} for various l_{GPL} / w_{GPL}. It can be seen that for higher values of l_{GPL} / t_{GPL}, increasing l_{GPL} / w_{GPL}, the differences between the natural frequencies are negligible.

4- Conclusions

•The maximum frequencies can be achieved for the no-uniformly symmetric porosity distribution 1 and GPL pattern A.

•An increase in the weight fraction leads to an increase in the natural frequencies of porous nanocomposite plates.

•Increasing the and ratios result in increasing and decreasing the natural frequencies of porous nanocomposite plates, respectively.

References

[1] J. Yang, D. Chen, S. Kitipornchai, Buckling and free vibration analyses of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite plates based on Chebyshev-Ritz method, Composite Structures, 193 (2018) 281-294.

[2] C. Wang, T.M. Aung, Plastic buckling analysis of thick plates using p-Ritz method, International Journal of Solids and Structures, 44(18-19) (2007) 6239-6255.

[3] S. Çeribaşı, G. Altay, Free vibration of super elliptical plates with constant and variable thickness by Ritz method, Journal of Sound and Vibration, 319(1-2) (2009) 668-680.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

M. Z. Doust Abed, R. Gholami , R. Ansari , Free Vibrations of Embedded Functionally Graded Graphene Platelets Reinforced Porous Nanocomposite Plates with Various Shapes Using P-Ritz Method, Amirkabir J. Mech Eng., 54(2) (2022) 77-80.

DOI: 10.22060/mej.2021.20198.7191

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۴، شماره ۲، سال ۱۴۰۱، صفحات ۳۹۱ تا ۴۱۴
DOI: 10.22060/mej.2022.20132.7174

ارتعاشات آزاد ورق‌های نانوکامپوزیتی متخلخل مدرج تابعی تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی با اشکال هندسی مختلف روی بستر الاستیک با روش تحلیلی پی‌ریتز

محمد ضیافت دوست عابد[۱]، راهب غلامی*[۲]، رضا انصاری[۱]

۱- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت، ایران
۲- گروه مهندسی مکانیک، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران.

خلاصه: در این مطالعه، ارتعاشات آزاد ورق‌های نانوکامپوزیتی متخلخل مدرج تابعی تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی در اشکال هندسی مستطیلی، مثلثی و بیضوی بر روی بستر الاستیک در شرایط مرزی مختلف مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرد. از تئوری ورق مرتبه اول برشی برای مدلسازی ورق و از مدل پاسترناک برای مدلسازی بستر الاستیک استفاده می‌شود. سه نوع توزیع نانوتراشه گرافنی و سه نوع توزیع تخلخل در راستای ضخامت برای ورق نانوکامپوزیتی در نظر گرفته می‌شود. خواص مؤثر مادی نانوکامپوزیت با استفاده از یک مدل میکرومکانیکی بدست می‌آید. با نوشتن فانکشنال انرژی سیستم و بکارگیری روش تحلیلی پی‌ریتز، نتایج عددی برای بررسی اثرات ضریب تخلخل، درصد وزنی نانوتراشه‌های گرافنی، پارامترهای بستر الاستیک و همچنین نسبت طول به عرض و ضخامت ورق بر فرکانس طبیعی ارائه می‌شود. نشان داده می‌شود که ورق با الگوی توزیع تخلخل غیریکنواخت و متقارن نوع اول و چیدمان نوع اول نانوتراشه‌های گرافنی دارای بیشترین فرکانس طبیعی است. همچنین، با افزایش ضریب تخلخل، فرکانس طبیعی ورق برای تمامی الگوهای توزیع نانوتراشه‌های گرافنی کاهش می‌یابد.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۴۰۰/۰۳/۱۵
بازنگری: ۱۴۰۰/۰۸/۰۵
پذیرش: ۱۴۰۰/۰۹/۲۹
ارائه آنلاین: ۱۴۰۰/۱۱/۰۶

کلمات کلیدی:
ارتعاشات آزاد
ورق‌های نانوکامپوزیتی متخلخل
ورق‌های با اشکال مختلف
بستر الاستیک
روش پی‌ریتز

۱- مقدمه

توسعه نانوکامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی[۱] و نانوتراشه‌های گرافن[۲] از دهه‌های گذشته آغاز شده است و به دلیل دارا بودن ویژگی‌هایی از قبیل نسبت استحکام به وزن بالا، قابلیت شکل پذیری، پایداری و عایق حرارتی بسیار بالا، استفاده گسترده‌ای در صنایع مختلف از قبیل هوافضا، دریایی، ساختمانی و صنایع نفت، گاز و پتروشیمی دارد. همچنین از دیگر کاربردهای چنین نانوکامپوزیت‌هایی می‌توان به ایجاد ابر خازن‌ها، ایجاد ایمپلنت‌ها با استحکام بالا، ایجاد توربین‌های بادی کارآمدتر و کاربرد در نمایشگرهای کریستال مایع اشاره نمود [۱-۲]. به عنوان نمونه، با توجه به پیشرفت‌های اخیر در فناوری مواد متخلخل مدرج تابعی[۳]، می‌توان ایمپلنت‌های استخوانی سازگار با لایه‌های خارجی سفت و متراکم و لایه میانی اسفنجی متخلخل ساخت و استفاده نمود [۳-۴].

1 Carbon Nanotubes (CNTS)
2 Graphene Nanoplatelets (GPLs)
3 Functionally Graded (FG)

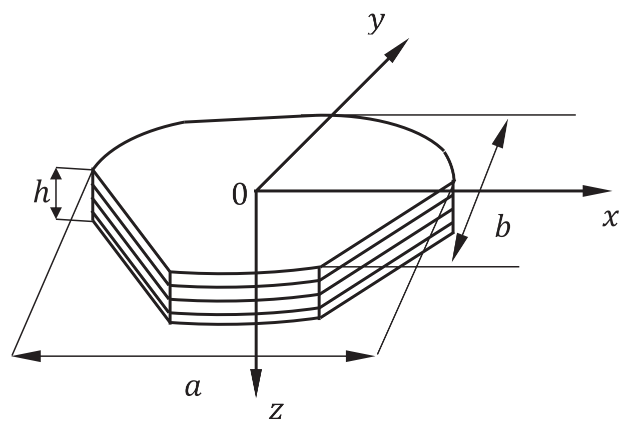
تاکنون مطالعات متنوعی در زمینه ارتعاشات ورق‌های نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی و نانوتراشه‌های گرافنی انجام شده است. به عنوان مثال، ردی و همکاران[۵] ارتعاشات آزاد صفحات چند لایه کامپوزیتی تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی در شرایط مرزی مختلف را بررسی کردند. آن‌ها با استفاده از روش‌های عددی و تئوری تنش برشی مرتبه اول[۴]، به بررسی اثرات نسبت طول به ضخامت، شرایط مرزی مختلف و همچنین الگوی چینش، درصد وزنی، هندسه و اندازه نانوتراشه‌های گرافنی بر فرکانس طبیعی را بررسی نمودند. عارفی و همکاران[۶] ارتعاشات آزاد ورق‌های کامپوزیتی تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی برروی بستر الاستیک را مورد بررسی قرار دادند. همچنین، یانگ و همکاران [۷] به بررسی ارتعاشات آزاد و کمانش ورق‌های کامپوزیتی تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی و ورق‌های کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی در شرایط مرزی مختلف پرداختند. آن‌ها اثرات هندسه نانوتراشه‌های گرافنی، درصد وزنی[۵]،

4 First-order Shear Deformation Theory (FSDT)
5 Weight fraction

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: gholami_r@liau.ac.ir

ضریب تخلخل[1] و همچنین پارامترهای هندسی از جمله نسبت طول به عرض و ضخامت ورق بر روی فرکانس طبیعی و بار کمانش بحرانی را مورد بررسی قرار دادند. حیدری و همکاران [۸] ارتعاشات آزاد نانوورق دو لایه تقویت شده با نانولوله‌های کربنی مدرج تابعی واقع شده بر بستر الاستیک را مطالعه نمودند. آن‌ها برای استخراج معادلات از روش انرژی و تئوری غیرمحلی ارینگن استفاده کردند و برای حل معادلات در شرایط تکیه‌گاهی ساده از روش حل ناویر استفاده نمودند. آن‌ها نشان دادند که با افزایش ثابت فنریت پاسترناک، فرکانس طبیعی نانو ورق افزایش می‌یابد در حالی که تأثیر ثابت فنریت وینکلر برروی فرکانس طبیعی ورق بسیار کم است همچنین، با افزایش نسبت طول به ضخامت ورق، فرکانس طبیعی غیرمحلی کاهش می‌یابد. جاو و همکاران [۹] ارتعاشات آزاد خطی و غیرخطی میکروورق‌های کامپوزیتی متخلخل تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی در بستر الاستیک تحت شرایط مرزی مختلف را به صورت عددی بررسی نمودند. آن‌ها اثرات درصد کسر وزنی نانوتراشه‌های گرافنی، نسبت ابعادی، نسبت طول به ضخامت و ضریب تخلخل برروی فرکانس طبیعی ورق را مورد مطالعه قرار دادند. فنگ و همکاران [۱۰] ارتعاشات آزاد تیرهای کامپوزیتی مدرج تابعی تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی را بررسی نمودند. فرمول‌بندی ریاضی با استفاده اصل همیلتون[2] و تئوری تیر تیموشنکو انجام شد و با استفاده از روش تحلیلی ریتز حل شد. آن‌ها اثرات الگوی پخش، اندازه نانوتراشه‌های گرافنی و همچنین تعداد کل لایه‌ها و شرایط مرزی مختلف بر رفتار ارتعاشات آزاد ورق را بررسی نمودند. آن‌ها دریافتند که استفاده از نانوتراشه‌های گرافنی با اندازه بزرگتر و لایه‌های کمتر و قرار دادن آنها در نزدیکی سطوح بالا و پایین تیر می‌تواند منجر به افزایش استحکام تیر و افزایش فرکانس طبیعی خطی و کاهش نسبت فرکانس غیرخطی گردد. جوانی و همکاران [۱۱ و ۱۲] ارتعاشات ورق دایروی نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی را بررسی نمودند. حل معادلات با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی[3] انجام شد.

مروری بر منابع نشان می‌دهد که تاکنون مطالعه‌ای بر روی رفتار ارتعاشات آزاد ورق‌های نانوکامپوزیتی متخلخل تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی در اشکال هندسی مختلف از قبیل بیضوی، دایروی و مثلثی انجام نشده است. از این رو، در این مطالعه، با بکارگیری روش تحلیلی پی‌ریتز و تئوری مرتبه اول برشی، به بررسی رفتار ارتعاشی ورق‌های نانوکامپوزیتی متخلخل تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی در اشکال هندسی مختلف



شکل ۱. ورق نانو کامپوزیتی با شکل دلخواه

Fig. 1. Nanocomposite plate with arbitrary shape

واقع شده برروی بستر الاستیک پرداخته می‌شود. با ارائه نتایج عددی، تأثیر عوامل طراحی مختلف نظیر الگوی توزیع تخلخل و نانوتراشه‌های گرافنی، درصد وزنی نانوتراشه‌های گرافنی، ضریب تخلخل، پارامترهای هندسی ورق و تقویت کننده و شرایط مرزی بر فرکانس طبیعی ورق‌های نانوکامپوزیتی متخلخل تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

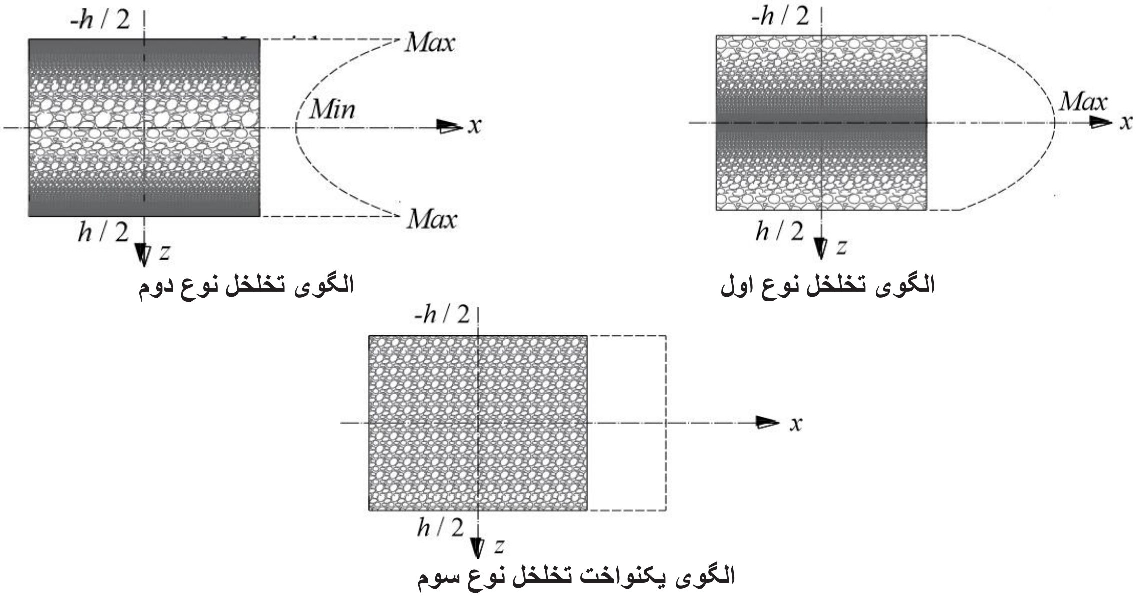
۲- ورق نانو کامپوزیتی متخلخل تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی: خواص مادی مؤثر و فانکشنال انرژی

یک ورق نانوکامپوزیتی چند لایه مدرج تابعی متخلخل تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی با شکل هندسی دلخواه را مطابق شکل ۱ در نظر بگیرید. طول ورق a عرض b و ضخامت کل ورق h می‌باشد. تعداد لایه‌های ورق n می‌باشد. دستگاه مختصات کارتزین (x, y, z) در صفحات میانی ورق و جهت مثبت محور z رو به پایین در نظر گرفته می‌شود. لبه‌های مرزی ورق می‌تواند شرایط مرزی مختلفی نظیر ساده، گیردار و آزاد داشته باشد. نام‌گذاری شرایط مرزی به ترتیب از گوشه سمت چپ و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته می‌شود.

سه نوع توزیع تخلخل p_1 و p_2 و p_3 مطابق شکل ۲ و همچنین سه نوع توزیع پخش نانوتراشه‌های گرافنی در ماتریس به صورت الگوهای A, B, C در راستای ضخامت مطابق شکل ۳ در نظر گرفته می‌شوند.

تغییرات مدول یانگ $E(z)$ مدول برشی $G(z)$ و چگالی جرمی $\rho(z)$ در راستای ضخامت ورق برای توزیع‌های تخلخل گوناگون را می‌توان به صورت رابطه (۱) نوشت.

1 Porosity coefficients
2 Hamilton's principle
3 Differential Quadrature Method (DQM)



شکل ۲ . شکل شماتیک توزیع تخلخل‌های گوناگون در راستای ضخامت[۷]

Fig. 2. Schematic view of different porosity distributions through the thickness [7]

$$
\begin{aligned}
E(z) &= E_{\max}\left(1-N_0\phi(z)\right)\\
G(z) &= G_{\max}\left(1-N_0\phi(z)\right)\\
\rho(z) &= \rho_{\max}\left(1-N_m\phi(z)\right)
\end{aligned}
\qquad (۱)
$$

که در آن تابع $\varphi(z)$ به صورت رابطه (۲) بدست می‌آید.

$$
\phi(z)=\begin{cases}
\cos\left(\dfrac{\pi z}{h}\right); & p_1\\
1-\cos\left(\dfrac{\pi z}{h}\right); & p_2\\
\varphi_0; & p_3
\end{cases}
\qquad (۲)
$$

ضرایب N_0 ضریب توزیع پخش می‌باشد و توسط رابطه (۳) بدست می‌آید.

$$
N_0 = 1-\frac{E_{\min}}{E_{\max}} \qquad (۳)
$$

مقدار E_{max} در رابطه (۱) بر اساس مدل میکرومکانیکی به صورت رابطه (۴) بدست می‌آید[۱۵-۱۳].

$$
E_{\max}=E_m\left(\frac{3}{8}\left(\frac{1+\lambda_l\mu_l V_{GPL}}{1-\mu_l V_{GPL}}\right)+\frac{5}{8}\left(\frac{1+\lambda_T\mu_T V_{GPL}}{1-\mu_T V_{GPL}}\right)\right) \qquad (۴)
$$

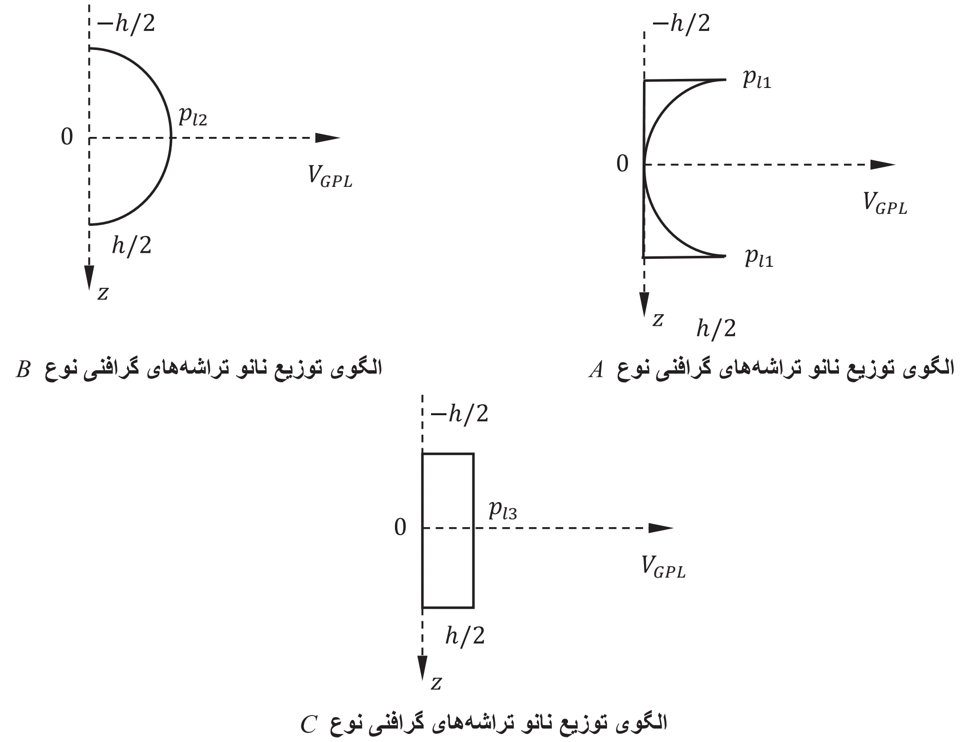
همچنین داریم:

$$
\lambda_l=\frac{2l_{GPL}}{h_{GPL}},\ \lambda_T=\frac{2w_{GPL}}{h_{GPL}},\ \mu_l=\frac{\dfrac{E_{GPL}}{E_m}-1}{\dfrac{E_{GPL}}{E_m}+\lambda_l},\ \mu_T=\frac{\dfrac{E_{GPL}}{E_m}-1}{\dfrac{E_{GPL}}{E_m}+\lambda_T} \qquad (۵)
$$

که در رابطه (۵) $l_{GPL}, w_{GPL}, h_{GPL}, E_{GPL}$ به ترتیب مدول یانگ، ضخامت، پهنا و متوسط طول نانوتراشه‌های گرافنی در نانوکامپوزیت می‌باشند.

مقادیر چگالی و نسبت پوآسون نانوکامپوزیت متخلخل تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی با استفاده از قاعده مخلوط[1] در میکرومکانیک به

1 Rule of mixtures



شکل ۳. الگوهای مختلف پخش نانوتراشه‌های گرافنی در راستای ضخامت

Fig. 3. Different distribution patterns of graphene nanoplatelets through the thickness

صورت رابطه (۶) بدست می‌آید[۹ و ۱۰].

$$\begin{aligned}\rho_{\max} &= \rho_m V_m + \rho_{GPL} V_{GPL} \\ \upsilon_{\max} &= \upsilon_m V_m + \upsilon_{GPL} V_{GPL}\end{aligned} \tag{۶}$$

که در آن ρ_{GPl}, ρ_m به ترتیب چگالی ماتریس فلزی و نانوتراشه گرافنی می‌باشد. همچنین رابطه بین درصد حجمی[1] ماتریس V_m و نانوتراشه گرافنی V_{GPL} طبق رابطه (۷) است.

$$V_m + V_{GPL} = 1 \tag{۷}$$

الگوی پخش نانوتراشه‌های گرافنی نیز به صورت رابطه (۸) بیان می‌شود.

$$V_{GPL} = \begin{cases} p_{l1}[1-\cos(\dfrac{\pi z}{h})]; & A \\ p_{l2}\cos(\dfrac{\pi z}{h}); & B \\ p_{l3}; & C \end{cases} \tag{۸}$$

که دررابطه (۸) مقادیر $p_{l۳}, p_{l۲}, p_{l۱}$ برای الگوهای پخش گوناگون از رابطه (۹) بدست می‌آید [۱۰-۷].

1 Volume fraction

$$V^T_{GPL}\sum_{j=1}^{n}\frac{\rho(z_j)}{\rho_{\max}}=\begin{cases} p_{l1}\sum_{j=1}^{n}\left\{[1-\cos(\frac{\pi z_j}{h})]\frac{\rho(z_j)}{\rho_{\max}}\right\}; & A\\ p_{l2}\sum_{j=1}^{n}\left\{\cos(\frac{\pi z_j}{h})\frac{\rho(z_j)}{\rho_{\max}}\right\}; & B\\ p_{l3}\frac{\rho(z_j)}{\rho_{\max}}; & C\end{cases} \tag{۹}$$

$$V^T_{GPL}=\frac{\Omega_{GPL}\rho_m}{\Omega_{GPL}\rho_m+\rho_{GPL}-\Omega_{GPL}\rho_{GPL})}$$

$$z_j=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}-\frac{j}{n})h,\ j=1,2,....,n$$

۲- ۱- میدان جابجایی و روابط کرنش- جابجایی

مطابق با تئوری ورق مرتبه اول برشی، میدان جابجایی را می‌توان به صورت رابطه (۱۰) بیان کرد.

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t)&=u_0(x,y,z)+z\phi_x(x,y,t)\\ v(x,y,z,t)&=v_0(x,y,z)+z\phi_y(x,y,t)\\ w(x,y,z,t)&=w_0(x,y,z)\end{aligned} \tag{۱۰}$$

که در آن u, v, w به ترتیب جابجایی هر نقطه دلخواه در راستای x, y, z همچنین u_0، v_0، w_0 متناظر با جابجایی سطح میانی ورق می‌باشد. همچنین، φ_x و φ_y به ترتیب برابر است با دوران حول محورهای مختصات y, x در این مطالعه، مقادیر u_0، v_0 به دلیل تأثیر ناچیز در ارتعاشات عرضی ورق نادیده گرفته می‌شود.

رابطه خطی کرنش - جابجایی براساس تئوری تغییر شکل مرتبه اول برشی به صورت رابطه (۱۱) تعریف می‌شود[۱۶].

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}&=\frac{\partial u}{\partial x}=z\frac{\partial\phi_x}{\partial x}=z\phi_{x,x}\\ \varepsilon_{yy}&=\frac{\partial v}{\partial y}=z\frac{\partial\phi_y}{\partial y}=z\phi_{y,y}\\ \gamma_{xy}&=(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x})=z(\phi_{x,y}+\phi_{y,x})\\ \gamma_{xz}&=\phi_x+\frac{\partial w_0}{\partial x}\\ \gamma_{yz}&=\phi_y+\frac{\partial w_0}{\partial y}\end{aligned} \tag{۱۱}$$

روابط (۱۱) را می‌توان به صورت روابط (۱۲) بازنویسی کرد.

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varepsilon^{(0)}_{xx}\\ \varepsilon^{(0)}_{yy}\\ \gamma^{(0)}_{xy}\\ \gamma^{(0)}_{xz}\\ \gamma^{(0)}_{yz}\end{Bmatrix}+z\begin{Bmatrix}\varepsilon^{(1)}_{xx}\\ \varepsilon^{(1)}_{yy}\\ \gamma^{(1)}_{xy}\\ \gamma^{(1)}_{xz}\\ \gamma^{(1)}_{yz}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \phi_x+\frac{\partial w_0}{\partial x}\\ \phi_y+\frac{\partial w_0}{\partial y}\end{Bmatrix}+z\begin{Bmatrix}\phi_{x,x}\\ \phi_{y,y}\\ \phi_{x,y}+\phi_{y,x}\\ 0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{۱۲}$$

۲- ۲- روابط ساختاری

روابط بین تنش‌ها و کرنش‌ها به صورت رابطه (۱۳) بیان می‌شود.

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{yz}\end{bmatrix}^{(k)}=\begin{bmatrix}Q_{11}&Q_{12}&0&0&0\\ Q_{12}&Q_{22}&0&0&0\\ 0&0&Q_{66}&0&0\\ 0&0&0&Q_{55}&0\\ 0&0&0&0&Q_{44}\end{bmatrix}^{(k)}\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{bmatrix}^{(k)} \tag{۱۳}$$

که در آن ضرایب سفتی مادی کاهش یافته Q_{ij} به صورت رابطه **(۱۴)** بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned} &Q_{11}=\frac{E(z)}{1-(\upsilon_{\max})^2},Q_{22}=\frac{E(z)}{1-(\upsilon_{\max})^2},Q_{12}=\frac{\upsilon_{\max}E(z)}{1-(\upsilon_{\max})^2}\\ &Q_{66}=Q_{55}=Q_{44}=G(z)\end{aligned} \tag{۱۴}$$

همچنین، منتجه‌های نیرو و گشتاور بر واحد طول به صورت رابطه (۱۵) تعریف می‌گردند.

$$\begin{aligned} \left(N_x,N_y,N_{xy}\right)&=\int_{-h/2}^{h/2}\left(\sigma_{xx},\sigma_{yy},\sigma_{xy}\right)dz\\ \left(M_x,M_y,M_{xy}\right)&=\int_{-h/2}^{h/2}\left(\sigma_{xx},\sigma_{yy},\sigma_{xy}\right)zdz\\ \left(Q_x,Q_y\right)&=\int_{-h/2}^{h/2}\left(\sigma_{xz},\sigma_{yz}\right)dz\end{aligned} \tag{۱۵}$$

با جایگذاری رابطه (۱۳) درمعادلات (۱۵) داریم :

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \end{Bmatrix}^{(k)} \tag{۱۶}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \end{Bmatrix}^{(k)} \tag{۱۷}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = k^2 \begin{bmatrix} A_{55} & 0 \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_x + \dfrac{\partial w_0}{\partial x} \\ \phi_y + \dfrac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix}^{(k)} \tag{۱۸}$$

$$\left(B_{ij}, D_{ij}\right) = \frac{h}{n} \sum_{k=1}^{n} Q_{ij}\left(z_k\right)\left(z_k, z_k^2\right) \left(i, j = 1,2,6\right) \tag{۱۹}$$

$$A_{ii} = \frac{h}{n} \sum_{k=1}^{n} Q_{ii}\left(z_k\right) \left(i = 4,5\right) \tag{۲۰}$$

در رابطه (۱۸) k^2 معرف ضریب اصلاح تنش برشی[1] در تئوری ورق مرتبه اول برشی می‌باشد و مقدار آن برابر با ۰/۸۳۳ در نظر گرفته می‌شود.

۲- ۳- بدست آوردن فانکشنال انرژی سیستم

با استفاده از کرنش‌ها و تنش‌های تعریف شده، حال می‌توان رابطه‌ی انرژی کرنشی ورق نانوکامپوزیتی را به صورت زیر نوشت[۱۷] :

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2}\int_V [\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \\ &\sigma_{xy}\gamma_{xy} + \sigma_{xz}\gamma_{xz} + \sigma_{yz}\gamma_{yz}]dV \\ U &= \frac{1}{2}\iint_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\sigma_{xx}(\varepsilon_{xx}^{(0)} + z\,\varepsilon_{xx}^{(1)}) + \sigma_{yy}(\varepsilon_{yy}^{(0)} + z\,\varepsilon_{yy}^{(1)}) + \\ &\sigma_{xy}(\gamma_{xy}^{(0)} + z\,\gamma_{xy}^{(1)}) + \sigma_{xz}(\gamma_{xz}^{(0)} + z\,\gamma_{xy}^{(1)}) + \\ &\sigma_{yz}(\gamma_{yz}^{(0)} + z\,\gamma_{yz}^{(1)})]dA\,dz \end{aligned} \tag{۲۱}$$

و با انتگرال‌گیری از رابطه (۲۱) نسبت به ضخامت ورق و جایگذاری روابط (۱۵) و (۱۷) و (۱۸) در آن، رابطه (۲۲) و (۲۳) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\int_A \{M_{xx}\varepsilon_{xx}^{(1)} + M_{yy}\varepsilon_{yy}^{(1)} + M_{xy}\gamma_{xy}^{(0)} + Q_x\gamma_{xz}^{(0)} + Q_y\gamma_{yz}^{(0)}\}dA \\ &= \frac{1}{2}\int_A \{(D_{11}\varepsilon_{xx}^{(1)} + D_{12}\varepsilon_{yy}^{(1)})\varepsilon_{xx}^{(1)} + (D_{12}\varepsilon_{xx}^{(1)} + D_{22}\varepsilon_{yy}^{(1)})\varepsilon_{yy}^{(1)} + \\ &D_{66}(\gamma_{xy}^{(1)})^2 + Q_{55}(\gamma_{xz}^{(0)})^2 + Q_{44}(\gamma_{yz}^{(0)})^2\}dA \\ &= \frac{1}{2}\int_A \{D_{11}(\varepsilon_{xx}^{(1)})^2 + 2D_{12}(\varepsilon_{xx}^{(1)}\varepsilon_{yy}^{(1)}) + D_{22}(\varepsilon_{yy}^{(1)})^2 + D_{66}(\gamma_{xy}^{(1)})^2 + \\ &Q_{55}(\gamma_{xz}^{(0)})^2 + Q_{44}(\gamma_{yz}^{(0)})^2\}dA \end{aligned} \tag{۲۲}$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\int_A \Big\{D_{11}(\phi_{x,x})^2 + 2D_{12}(\phi_{x,x}\phi_{y,y}) + D_{22}(\phi_{y,y})^2 + \\ &+ k^2 A_{44}(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y})^2\Big\}dA \\ &D_{66}(\phi_{x,y} + \phi_{y,x})^2 + k^2 A_{55}(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x})^2 \end{aligned} \tag{۲۳}$$

انرژی پتانسیل ناشی از بارهای درون صفحه‌ای اعمال شده را نیز می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$V = -\frac{1}{2}\int_A \left\{(\frac{\partial w_0}{\partial x})^2 N_x + 2\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}N_{xy} + (\frac{\partial w_0}{\partial y})^2 N_y\right\}dxdy \tag{۲۴}$$

علاوه براین، انرژی جنبشی ورق نانوکامپوزیتی به صورت رابطه (۲۵) محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2}\int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z)[(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2)dxdydz = \\ &-\frac{1}{2}\int_A [I_0(\dot{w}_0)^2 + I_2[(\dot{\phi}_x)^2 + (\dot{\phi}_y)^2]]dxdy \end{aligned} \tag{۲۵}$$

که در آن

$$\{I_0, I_2\} = \sum_{k=1}^{n} \rho(z_k)\left(1, z_k^{\,2}\right) \tag{۲۶}$$

1 Shear correction factor

همچنین، انرژی پتانسیل ناشی از بستر الاستیک به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V_e=\frac{1}{2}\int_A\left\{k_w(w_0)^2+k_p\left[(\frac{\partial w_0}{\partial x})^2+(\frac{\partial w_0}{\partial y})^2\right]\right\}dxdy \quad (۲۷)$$

که در رابطه (۲۷)، k_w و k_p به ترتیب ثابت‌های وینکلر و پاسترناک تکیه‌گاه الاستیک می‌باشند. با تعریف پارامترهای بی‌بعد به صورت روابط (۲۸) داریم :

$$\begin{aligned}
&\{\xi,\eta\}=\left\{\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right\},\{\eta_1,\eta_2,\eta_3,w_1\}=\left\{\frac{a}{b},\frac{a}{h},\frac{b}{h},\frac{w_0}{h}\right\},\\
&A_{110}=\frac{E_mh}{(1-\upsilon_m{}^2)},\{a_{44},a_{55}\}=\left\{\frac{A_{44}}{A_{110}},\frac{A_{55}}{A_{110}}\right\},\\
&\{d_{11},d_{12},d_{22},d_{66}\}=\left\{\frac{D_{11}}{A_{110}h^2},\frac{D_{12}}{A_{110}h^2},\frac{D_{22}}{A_{110}h^2},\frac{D_{66}}{A_{110}h^2}\right\},\\
&\{p_x,p_y,p_{xy}\}=\left\{\frac{N_x}{A_{110}},\frac{N_y}{A_{110}},\frac{N_{xy}}{A_{110}}\right\},\bar{k}_w=\frac{k_wa^4}{A_{110}h^2},\bar{k}_p=\frac{k_pa^2}{A_{110}h^2}\\
&I_{110}=\rho_mh,\{\bar{I}_0,\bar{I}_2\}=\left\{\frac{I_0}{I_{110}},\frac{I_2}{I_{110}h^2}\right\},\omega=\Omega a\sqrt{\frac{A_{110}}{I_{110}}},\\
&\tau=\frac{t}{a}\sqrt{\frac{A_{110}}{I_{110}}},\Delta=A_{110}h^2,i=\sqrt{-1}
\end{aligned} \quad (۲۸)$$

می‌توان روابط (۲۳)، (۲۴)، (۲۵)، (۲۷) را برحسب پارامترهای بی‌بعد به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned}
\bar{U}=\frac{U}{\Delta}=\frac{1}{2}\int_{\bar{A}}\Big\{&\frac{d_{11}}{\eta_1}(\phi_{x,\xi})^2+2d_{12}(\phi_{y,\eta}\phi_{x,\xi})+\\
&\eta_1d_{22}(\phi_{y,\eta})^2+d_{66}[\frac{1}{\eta_1}(\phi_{y,\xi})^2+\eta_1(\phi_{x,\eta})^2+\\
&2(\phi_{y,\xi}\phi_{x,\eta})]+k^2a_{44}[\eta_2\eta_3(\phi_y)^2+\eta_1(w_{1,\eta})^2+\\
&2\eta_2w_{1,\eta}\phi_y]+k^2a_{55}[\eta_2\eta_3(\phi_x)^2+\\
&\frac{1}{\eta_1}(w_{1,\xi})^2+2\eta_3(w_{1,\xi}\phi_x)]\Big\}d\xi d\eta
\end{aligned} \quad (۲۹)$$

$$\bar{V}=\frac{V}{\Delta}=\frac{1}{2}\int_{\bar{A}}\left\{\frac{p_x}{\eta_1}(w_{1,\xi})^2+p_y\eta(w_{1,\eta})^2+2p_{xy}(w_{1,\xi}w_{1,\eta})\right\}d\xi d\eta \quad (۳۰)$$

$$\bar{K}=\frac{K}{\Delta}=-\frac{1}{2}e^{2i\omega\tau}\frac{\omega^2}{\eta_1}\int_{\bar{A}}\left\{\bar{I}_0(w_1)^2+\bar{I}_2(\phi_x{}^2+\phi_y{}^2)\right\}d\xi d\eta \quad (۳۱)$$

$$\bar{V}_e=\frac{V_e}{\Delta}=\frac{1}{2}\int_{\bar{A}}\left\{\bar{k}_w\frac{1}{\eta_1\eta_2{}^2}(w_1)^2+\bar{k}_p[\frac{1}{\eta_1\eta_2{}^2}(w_{1,\xi})^2+\frac{1}{\eta_1\eta_3{}^2}(w_{1,\eta})^2]\right\}d\xi d\eta \quad (۳۲)$$

بنابراین، انرژی پتانسیل کل سیستم به صورت زیر خواهد بود.

$$\Pi^*=\frac{\Pi}{\Delta}=\bar{U}+\bar{V}+\bar{V}_e-\bar{K} \quad (۳۳)$$

برای مسئله ارتعاشات آزاد ورق نانوکامپوزیتی با صرف نظر از اثر بارهای صفحه‌ای خارجی در رابطه (۳۳)، انرژی پتانسیل کل به صورت رابطه (۳۴) بدست می‌آید.

$$\Pi^*=\frac{\Pi}{\Delta}=\bar{U}+\bar{V}_e-\bar{K} \quad (۳۴)$$

۳- حل مسأله ارتعاش آزاد با روش تحلیلی پی‌ریتز

براساس روش پی‌ریتز، پاسخ مختصات تعمیم یافته مجهول را به صورت روابط (۳۵) می‌توان نوشت به طوری که این پاسخ‌ها شرایط مرزی هندسی ورق را نیز ارضا می‌نمایند.

$$\begin{aligned}
&w(\tau,\xi,\eta)=\sum_{q=0}^{p}\sum_{i=0}^{q}c_m\phi_m{}^we^{i\omega\tau}=\\
&\sum_{q=0}^{p}\sum_{i=0}^{q}c_m(2\xi)^i(2\eta)^{q-i}\phi_b{}^w(\xi,\eta)e^{i\omega\tau}\\
&\phi_x(\tau,\xi,\eta)=\sum_{q=0}^{p}\sum_{i=0}^{q}d_m\phi_m{}^xe^{i\omega\tau}=\\
&\sum_{q=0}^{p}\sum_{i=0}^{q}d_m(2\xi)^i(2\eta)^{q-i}\phi_b{}^x(\xi,\eta)e^{i\omega\tau}\\
&\phi_y(\tau,\xi,\eta)=\sum_{q=0}^{p}\sum_{i=0}^{q}e_m\phi_m{}^ye^{i\omega\tau}=\\
&\sum_{q=0}^{p}\sum_{i=0}^{q}e_m(2\xi)^i(2\eta)^{q-i}\phi_b{}^y(\xi,\eta)e^{i\omega\tau}
\end{aligned} \quad (۳۵)$$

جدول ۱. توابع پایه‌ای φ_b^w ، φ_b^x و φ_b^y برای شرایط مرزی مختلف ورق‌های نانوکامپوزیتی با اشکال مستطیلی، بیضوی و مثلثی متساوی الساقین

Table 1. Base function $\varphi_b^w, \varphi_b^x, \varphi_b^y$ for different boundary conditions of nanocomposite plates with rectangular, elliptical and isosceles triangular shapes

ورق مستطیلی		
شرایط مرزی	گیردار-ساده-آزاد-ساده	ساده-ساده-ساده-ساده
φ_b^w	$(2\xi+1)^1.(2\xi-1)^0.(2\eta+1)^1.(2\eta-1)^1$	$(2\xi+1)^1.(2\xi-1)^1.(2\eta+1)^1.(2\eta-1)^1$
φ_b^x	$(2\xi+1)^1.(2\xi-1)^0.(2\eta+1)^1.(2\eta-1)^1$	$(2\xi+1)^0.(2\xi-1)^0.(2\eta+1).(2\eta-1)$
φ_b^y	$(2\xi+1)^1.(2\xi-1)^0.(2\eta+1)^0.(2\eta-1)^0$	$(2\xi+1).(2\xi-1).(2\eta+1)^0.(2\eta-1)^0$
ورق بیضوی		
شرایط مرزی	ساده	گیردار
φ_b^w	$(4\xi^2+4\eta^2-1)^1$	$(4\xi^2+4\eta^2-1)^1$
φ_b^x	$(4\xi^2+4\eta^2-1)^0$	$(4\xi^2+4\eta^2-1)^1$
φ_b^y	$(4\xi^2+4\eta^2-1)^0$	$(4\xi^2+4\eta^2-1)^1$
ورق مثلثی متساوی الساقین		
شرایط مرزی	گیردار-گیردار-گیردار	ساده-گیردار-آزاد
φ_b^w	$(2\xi+1)^1.(2\eta-\xi+0.5)^1.(2\eta+\xi-0.5)^1$	$(2\xi+1)^1.(2\eta-\xi+0.5)^1.(2\eta+\xi-0.5)^0$
φ_b^x	$(2\xi+1)^1.(2\eta-\xi+0.5)^1.(2\eta+\xi-0.5)^1$	$(2\xi+1)^0.(2\eta-\xi+0.5)^1.(2\eta+\xi-0.5)^0$
φ_b^y	$(2\xi+1)^1.(2\eta-\xi+0.5)^1.(2\eta+\xi-0.5)^1$	$(2\xi+1)^1.(2\eta-\xi+0.5)^1.(2\eta+\xi-0.5)^0$

که ω فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌باشد. در رابطه (۳۵) درجه چند جمله‌ای را با p نمایش می‌دهیم همچنین e_m, d_m, c_m به ترتیب ضرایب مجهول چند جمله‌ای می‌باشند. زیرنویس m در رابطه (۳۵) به صورت رابطه (۳۶) بیان می‌گردد[۱۸-۱۹].

$$m=\frac{(q+1)(q+2)}{2}-i \quad (۳۶)$$

همچنین، توابع پایه‌ای φ_b^w ، φ_b^x و φ_b^y براساس هندسه ورق و شرایط مرزی به صورت روابط (۳۷) بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned}
\phi_b{}^w &= \prod_{j=1}^{ne}[\Gamma_j(\xi,\eta)]^{\Omega^w{}_j} \\
\phi_b{}^x &= \prod_{j=1}^{ne}[\Gamma_j(\xi,\eta)]^{\Omega^x{}_j} \\
\phi_b{}^y &= \prod_{j=1}^{ne}[\Gamma_j(\xi,\eta)]^{\Omega^y{}_j}
\end{aligned} \quad (۳۷)$$

در رابطه (۳۷)، n_e برابر با تعداد گوشه‌های هندسه شکل و Γ_j معادله j امین مرز از هندسه شکل می‌باشد. ترتیب نام‌گذاری شرایط مرزی به ترتیب از گوشه سمت چپ و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته شده است.

در جدول ۱، چند نمونه از شرایط مرزی مختلف برای ورق در اشکال هندسی مستطیلی، بیضوی و مثلثی ارائه شده است. همچنین در مراجع[۱۸ و ۲۰ و ۲۱] ، شرایط مرزی مختلف برای ورق با هندسه گوناگون نیز آورده شده است.

بر اساس روش پی‌ریتز، با اکسترمم نمودن تابع انرژی پتانسیل کل نسبت به ثابت‌های مجهول e_m, d_m, c_m رابطه (۳۸) استخراج می‌شود.

$$\left\{\frac{\partial\Pi}{\partial c_m} \quad \frac{\partial\Pi}{\partial d_m} \quad \frac{\partial\Pi}{\partial e_m}\right\}=\{0 \quad 0 \quad 0\} \quad (۳۸)$$

حل رابطه (۳۸) منجر به یک مسئله مقدار ویژه، رابطه (۳۹) می‌گردد

که در آن که فرکانس طبیعی ورق نانوکامپوزیتی به صورت رابطه (۴۰) بیان می‌شود.

$$\left(\left[K\right]-\omega^2\left[M\right]\right)\begin{Bmatrix}\{c\}\\\{d\}\\\{e\}\end{Bmatrix}=0 \tag{۳۹}$$

$$\omega=\Omega a\sqrt{\frac{I_{110}}{A_{110}}} \tag{۴۰}$$

در رابطه (۳۹) ماتریس‌های $\left[K\right],\left[M\right]$ دارای ساختاری به صورت زیر می‌باشند.

$$\left[K\right]=\begin{bmatrix}k^{cc} & k^{cd} & k^{ce}\\ & k^{dd} & k^{de}\\ sym & & k^{ee}\end{bmatrix}$$
$$\left[M\right]=\begin{bmatrix}M^{cc} & M^{cd} & M^{ce}\\ & M^{dd} & M^{de}\\ sym & & M^{ee}\end{bmatrix} \tag{۴۱}$$

اجزای ماتریس متقارن سفتی به صورت رابطه (۴۲) است

(۴۲)

الف
$$k_{ij}^{cc}=\int_{\bar{A}}\left\{\frac{k^2a_{55}}{\eta_1}\left(\frac{\partial\phi_i^w}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\phi_j^w}{\partial\xi}\right)+k^2a_{44}\eta_1\left(\frac{\partial\phi_i^w}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\phi_j^w}{\partial\eta}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{\bar{k}_w}{\eta_1\eta_2^2}\left(\phi_i^w\cdot\phi_j^w\right)+\frac{\bar{k}_p}{\eta_1\eta_2^2}\left(\frac{\partial\phi_i^w}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\phi_j^w}{\partial\xi}\right)+\frac{\bar{k}_p}{\eta_1\eta_3^2}\left(\frac{\partial\phi_i^w}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\phi_j^w}{\partial\eta}\right)\right\}d\xi d\eta$$

ب
$$k_{ij}^{cd}=\int_{\bar{A}}\left\{k^2a_{55}\eta_3\left(\frac{\partial\phi_i^w}{\partial\xi}\cdot\phi_j^x\right)\right\}d\xi d\eta$$

ج
$$k_{ij}^{ce}=\int_{\bar{A}}\left\{k^2a_{44}\eta_2\left(\frac{\partial\phi_i^w}{\partial\eta}\cdot\phi_j^y\right)\right\}d\xi d\eta$$

پ
$$k_{ij}^{dd}=\int_{\bar{A}}\left\{\frac{d_{11}}{\eta_1}\left(\frac{\partial\phi_i^x}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\phi_j^x}{\partial\xi}\right)+k^2a_{55}\eta_2\eta_3\left(\phi_i^x\cdot\phi_j^x\right)-\right.$$
$$\left.-d_{66}\eta_1\left(\frac{\partial\phi_i^x}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\phi_j^x}{\partial\eta}\right)\right\}d\xi d\eta$$

ت
$$k_{ij}^{de}=\int_{\bar{A}}\left\{d_{12}\left(\frac{\partial\phi_i^x}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\phi_j^y}{\partial\eta}\right)+d_{66}\left(\frac{\partial\phi_i^x}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\phi_j^y}{\partial\xi}\right)\right\}d\xi d\eta$$

س
$$k_{ij}^{ee}=\int_{\bar{A}}\left\{\frac{d_{66}}{\eta_1}\left(\frac{\partial\phi_i^y}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\phi_j^y}{\partial\xi}\right)+k^2a_{44}\eta_2\eta_3\left(\phi_i^y\cdot\phi_j^y\right)+\right.$$
$$\left.\eta_1d_{22}\left(\frac{\partial\phi_i^y}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\phi_j^y}{\partial\eta}\right)\right\}d\xi d\eta$$

همچنین، مؤلفه‌های ماتریس متقارن جرم به صورت زیر بدست می‌آید.

$$M_{ij}^{cc}=\frac{1}{\eta_1}\int_{\bar{A}}\left\{\bar{I}_0\left(\phi_i^w\cdot\phi_j^w\right)\right\}d\xi d\eta \tag{۴۳}$$

الف
$$M_{ij}^{cc}=\frac{1}{\eta_1}\int_{\bar{A}}\left\{\bar{I}_0\left(\phi_i^w\cdot\phi_j^w\right)\right\}d\xi d\eta$$

ب
$$M_{ij}^{cd}=0$$

ج
$$M_{ij}^{ce}=0$$

پ
$$M_{ij}^{dd}=\frac{1}{\eta_1}\int_{\bar{A}}\left\{\bar{I}_2\left(\phi_i^x\cdot\phi_j^x\right)\right\}d\xi d\eta$$

ت
$$M_{ij}^{de}=0$$

س
$$M_{ij}^{ee}=\frac{1}{\eta_1}\int_{\bar{A}}\left\{\bar{I}_2\left(\phi_i^y\cdot\phi_j^y\right)\right\}d\xi d\eta$$

کمترین مقادیر ویژه به دست آمده از رابطه (۳۹) فرکانس طبیعی ورق می‌باشد.

لازم به ذکر است یکی از مهمترین مزیت‌های روش تحلیلی پی‌ریتز این است که بدون تغییر قابل ملاحظه در ساختار فانکشنال انرژی سیستم در دستگاه مختصات کارتزین، می‌توان آن را برای تحلیل رفتارهای مکانیکی ورق در اشکال هندسی گوناگون نظیر (مثلثی، شش ضلعی منظم، بیضوی، دایروی و مستطیلی) با شرایط مرزی گوناگون به کار برد. برای بررسی ارتعاشات ورق‌های نانوکامپوزیتی متخلخل با هندسه مختلف تنها کافیست توابع پایه‌ای مطابق جدول ۱ و کران انتگرال دوگانه به واسطه تغییر هندسه، تغییر پیدا کنند. به عنوان مثال، در مقاله حاضر، برای بررسی رفتار ارتعاشی ورق بیضوی در روابط (۴۲) و (۴۳) تنها تغییر مورد نیاز، تغییر کران انتگرال

دوگانه به واسطه تغییر هندسه از مستطیلی به بیضوی می‌باشد. از این رو، این روابط را برای ورق نانوکامپوزیتی بیضوی می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

(۴۴) الف
$$k^2 a_{44}\eta_1\left(\frac{\partial\phi_i^w}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\phi_j^w}{\partial\eta}\right)+\frac{\bar{k}_w}{\eta_1\eta_2^{\,2}}\left(\phi_i^w\cdot\phi_j^w\right)+$$
$$k_{ij}^{cc}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\sqrt{0.25-\xi^2}}^{\sqrt{0.25-\xi^2}}\left\{\frac{k^2 a_{55}}{\eta_1}\left(\frac{\partial\phi_i^w}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\phi_j^w}{\partial\xi}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{\bar{k}_p}{\eta_1\eta_2^{\,2}}\left(\frac{\partial\phi_i^w}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\phi_j^w}{\partial\xi}\right)+\frac{\bar{k}_p}{\eta_1\eta_3^{\,2}}\left(\frac{\partial\phi_i^w}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\phi_j^w}{\partial\eta}\right)\right\}d\xi d\eta$$

ب
$$k_{ij}^{cd}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\sqrt{0.25-\xi^2}}^{\sqrt{0.25-\xi^2}}\left\{k^2 a_{55}\eta_3\left(\frac{\partial\phi_i^w}{\partial\xi}\cdot\phi_j^x\right)\right\}d\xi d\eta$$

ج
$$k_{ij}^{ce}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\sqrt{0.25-\xi^2}}^{\sqrt{0.25-\xi^2}}\left\{k^2 a_{44}\eta_2\left(\frac{\partial\phi_i^w}{\partial\eta}\cdot\phi_j^y\right)\right\}d\xi d\eta$$

پ
$$k_{ij}^{dd}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\sqrt{0.25-\xi^2}}^{\sqrt{0.25-\xi^2}}\left\{\frac{d_{11}}{\eta_1}\left(\frac{\partial\phi_i^x}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\phi_j^x}{\partial\xi}\right)+\right.$$
$$\left.k^2 a_{55}\eta_2\eta_3\left(\phi_i^x\cdot\phi_j^x\right)-d_{66}\eta_1\left(\frac{\partial\phi_i^x}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\phi_j^x}{\partial\eta}\right)\right\}d\xi d\eta$$

ت
$$k_{ij}^{de}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\sqrt{0.25-\xi^2}}^{\sqrt{0.25-\xi^2}}\left\{d_{12}\left(\frac{\partial\phi_i^x}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\phi_j^y}{\partial\eta}\right)+d_{66}\left(\frac{\partial\phi_i^x}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\phi_j^y}{\partial\xi}\right)\right\}d\xi d\eta$$

س
$$k_{ij}^{ee}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\sqrt{0.25-\xi^2}}^{\sqrt{0.25-\xi^2}}\left\{\frac{d_{66}}{\eta_1}\left(\frac{\partial\phi_i^y}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\phi_j^y}{\partial\xi}\right)+\right.$$
$$\left.k^2 a_{44}\eta_2\eta_3\left(\phi_i^y\cdot\phi_j^y\right)+\eta_1 d_{22}\left(\frac{\partial\phi_i^y}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\phi_j^y}{\partial\eta}\right)\right\}d\xi d\eta$$

همچنین، خواهیم داشت :

(۴۵) الف
$$M_{ij}^{cc}=\frac{1}{\eta_1}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\sqrt{0.25-\xi^2}}^{\sqrt{0.25-\xi^2}}\left\{\bar{I}_0\left(\phi_i^w\cdot\phi_j^w\right)\right\}d\xi d\eta$$

ب
$$M_{ij}^{cd}=0$$

ج
$$M_{ij}^{ce}=0$$

پ
$$M_{ij}^{dd}=\frac{1}{\eta_1}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\sqrt{0.25-\xi^2}}^{\sqrt{0.25-\xi^2}}\left\{\bar{I}_2\left(\phi_i^x\cdot\phi_j^x\right)\right\}d\xi d\eta$$

ت
$$M_{ij}^{de}=0$$

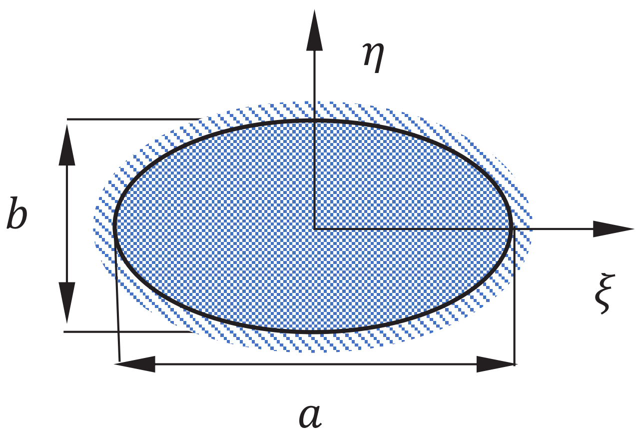
س
$$M_{ij}^{ee}=\frac{1}{\eta_1}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\sqrt{0.25-\xi^2}}^{\sqrt{0.25-\xi^2}}\left\{\bar{I}_2\left(\phi_i^y\cdot\phi_j^y\right)\right\}d\xi d\eta$$

۴- تحلیل نتایج

ابتدا، به منظور بررسی صحت نتایج، فرکانس طبیعی اول یک ورق بیضوی همگن بدون تخلخل و در غیاب نانوتراشه‌های گرافنی در شرایط مرزی ساده با نتایج مرجع [۲۳-۲۲] مقایسه می‌شود. بدین منظور، یک ورق بیضوی مطابق شکل ۴ در نظر گرفته می‌شود و فرکانس‌های طبیعی به ازای مقادیر مختلف a/b در جدول ۲ آورده شده است.

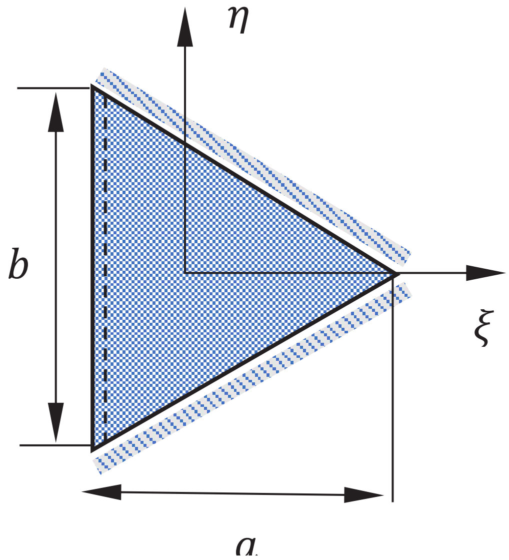
علاوه بر این، سه فرکانس طبیعی اول ورق مثلثی همگن بدون تخلخل و در غیاب نانوتراشه‌های گرافنی با شرایط مرزی گیردار با مرجع[۲۴] مقایسه می‌شود. ورق مثلثی مطابق شکل ۵ در نظر گرفته می‌شود. ترتیب نام گذاری شرایط مرزی از ضلع سمت چپ و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت است.

همچنین، در جدول ۴ سه فرکانس اول یک ورق مربعی مدرج تابعی تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی با شرایط مرزی گیردار به ازای درصد



شکل ۴ . ورق بیضوی با شرایط مرزی گیردار

Fig. 4. Elliptical plate with clamped boundary conditions



شکل ۵. ورق مثلثی با شرایط مرزی SCC

Fig. 5. Triangular plate with SCC boundary conditions

وزنی $\Omega_{GPL} = ۰/۰۱$ و $a/h = ۲۰$ بدست آمده در این پژوهش با نتایج ارائه شده در مرجع [۷] مورد مقایسه قرار می‌گیرد. همان‌طورکه مشاهده می‌شود، نتایج بدست آمده از حل روش تحلیلی پی‌ریتز با در نظر گرفتن تعداد دوازده لایه برای ورق نانوکامپوزیتی با نتایج موجود در مرجع [۷] انطباق بالایی دارد. همچنین ورق نانوکامپوزیتی با الگوی تخلخل نوع اول و چیدمان نوع اول نانوتراشه‌های گرافنی دارای بیشترین فرکانس طبیعی می‌باشد. مقایسه‌های انجام شده در جداول ۲، ۳ و ۴ و انطباق نتایج، نشان دهنده صحت نتایج ارائه شده در این مطالعه می‌باشد.

در ادامه، برای ارائه نتایج عددی، فرض می‌شود که ماتریس فلزی از جنس مس می‌باشد. خواص مکانیکی مس و نانوتراشه‌های گرافنی مطابق جدول ۵ در نظر گرفته می‌شود.

جدول ۲ . مقایسه فرکانس طبیعی ورق بیضوی همگن با شرایط مرزی ساده $\left(\ddot{e}^{۲} = \grave{u}\, b^{۲}\sqrt{\frac{\tilde{n}h}{D}}, D = \frac{E_m h^{۳}}{۱۲\left(۱-\tilde{o}_m^{۲}\right)}\right)$

Table 2. Comparison of natural frequencies of homogenous elliptical plate with simply supported boundary conditions

	[۲۲]		نتایج ارائه شده		[۲۳]		نتایج ارائه شده	
	ضریب پوآسون							
a/b	۰/۲۵	۰/۵	۰/۲۵	۰/۵	۰/۱	۰/۲	۰/۱	۰/۲
۱	۴/۸۶۵	۵/۲۱۹	۴/۸۶۵۲۷۲	۵/۲۱۹۲۹	۴/۶۱۹۲	۴/۷۸۲۶	۴/۶۱۹۲۳۸	۴/۷۸۲۵۸۵
۰/۵	۴/۱۵۷	۴/۴۴۲	۴/۱۵۷۳۸۶	۴/۴۴۱۷۱	۳/۹۵۹۶	۴/۰۹۰۴	۳/۹۶۳۶۶۱	۴/۰۹۰۴۴۱
۰/۲۵	۳/۷۷۳	۳/۹۹۰	۷۷۳۲۷	۳/۹۹۶۴۹	۳/۶۱۷۳	۳/۷۱۹۳	۳/۶۲۱۹۵۶	۳/۷۱۹۳۰۶
۲	۳/۲۹۲	۳/۳۹۹	۳/۲۹۲۱۷۲	۳/۳۹۸۵۹	۳/۲۱۱۴	۳/۲۵۸۶	۳/۲۱۱۴۹۷	۳/۲۵۸۶۷۵
۳	۳/۰۲۷	۳/۰۶۶	۳/۰۲۷۴۲۹	۳/۰۶۵۸۲	۲/۹۷۷۹	۲/۹۹۳۷	۳/۹۷۸۳۳۶	۲/۹۹۴۱۰۹

جدول ۳. سه فرکانس طبیعی اول ورق مثلثی همگن با شرایط مرزی گیردار $\left(\ddot{e} = \grave{u}\, a^{۲}\sqrt{\frac{\tilde{n}}{D}}, D = \frac{E_m h^{۳}}{۱۲\left(۱-\tilde{o}_m^{۲}\right)}\right)$

Table 3. First three natural frequencies of homogenous triangular plate with clamped boundary conditions

	[۲۴]			نتایج ارائه شده		
a/b	۱	۱/۲۵	۱/۵	۱	۱/۲۵	۱/۵
فرکانس اول	۹۳/۸۶	۷۶/۰۹	۶۵/۴۶	۹۳/۷۹۱۸۳۶	۷۶/۰۹۶۵۴	۶۵/۴۶۳۹۳
فرکانس دوم	۱۵۷/۷	۱۲۶/۵	۱۰۶/۱	۱۵۷/۸۳۸۸۲	۱۲۶/۶۹۴۲۷	۱۰۶/۶۴۲۹۳
فرکانس سوم	۱۹۴/۸	۱۵۹/۳	۱۳۹/۱	۱۹۴/۸۴۰۵۷	۱۵۹/۹۴۴۶۸	۱۳۹/۴۹۷۵۹

جدول ۴. مقایسه فرکانس‌های ورق نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی $(a/b=1,\ a/h=20,\ W_{GPL}=0.01)$

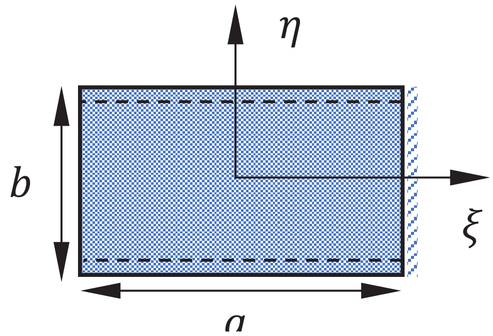
Table 4. Comparison of natural frequencies of nanocomposite plate reinforced with graphene nanoplatelets

توزیع گرافن	ضریب تخلخل	فرکانس اول	[۷]	فرکانس دوم	[۷]	فرکانس سوم	[۷]
الگوی تخلخل نوع اول							
	۰/۲	۰/۷۰۷۵۰۸	۰/۷۰۷۵	۱/۴۰۶۰۹۴	۱/۴۰۵۷	۱/۴۰۶۰۹۴	۱/۴۰۵۷
نوع اول	۰/۴	۰/۷۰۳۴۵۵	۰/۷۰۳۵	۱/۳۹۶۱۴۴	۱/۳۹۵۸	۱/۳۹۶۱۴۴	۱/۳۹۵۸
	۰/۶	۰/۷۰۱۶۵۴	۰/۷۰۱۷	۱/۳۹۰۰۶۵	۱/۳۸۹۷	۱/۳۹۰۰۶۵	۱/۳۸۹۷
	۰/۲	۰/۵۹۱۸۰۵	۰/۵۹۱۸	۱/۱۸۳۸۶۱	۱/۱۸۳۲	۱/۱۸۳۸۶۱	۱/۱۸۳۲
نوع دوم	۰/۴	۰/۵۸۸۷۷۱	۰/۵۸۸۸	۱/۱۷۶۰۹۶	۱/۱۷۵۵	۱/۱۷۶۰۹۶	۱/۱۷۵۵
	۰/۶	۰/۵۸۸۷۹۳	۰/۵۸۸۸	۱/۱۷۳۷۱۳	۱/۱۷۳۲	۱/۱۷۳۷۱۳	۱/۱۷۳۲
	۰/۲	۰/۶۳۸۳۹۴	۰/۶۳۸۳	۱/۲۷۳۰۶۵	۱/۲۷۲۹	۱/۲۷۳۰۶۵	۱/۲۷۲۹
نوع سوم	۰/۴	۰/۶۳۶۱۵۶	۰/۶۳۶۴	۱/۲۶۶۳۶۷	۱/۲۶۷۴	۱/۲۶۶۶۳۸	۱/۲۶۷۴
	۰/۶	۰/۶۳۸۱۶۲	۰/۶۳۷۹	۱/۲۶۸۰۵۴	۱/۲۶۷۷	۱/۲۶۸۲۶۹	۱/۲۶۷۷
الگوی تخلخل نوع دوم							
	۰/۲	۰/۶۵۵۷۹۹	۰/۶۵۵۸	۱/۳۰۷۲۵۶	۱/۳۰۶۸	۱/۳۰۷۲۵۶	۱/۳۰۶۸
نوع اول	۰/۴	۰/۵۸۸۴۳۹	۰/۵۸۸۵	۱/۱۷۶۱۶۷	۱/۱۷۵۶	۱/۱۷۶۱۶۷	۱/۱۷۵۶
	۰/۶	۰/۵۰۹۸۹۶	۰/۵۰۹۹	۱/۰۲۳۰۵۴	۱/۰۲۲۳	۱/۰۲۳۰۵۴	۱/۰۲۲۳
	۰/۲	۰/۵۵۰۰۴۴	۰/۵۵۰۱	۱/۱۰۳۵۰۹	۱/۱۰۲۷	۱/۱۰۳۵۰۹	۱/۱۰۲۷
نوع دوم	۰/۴	۰/۴۹۷۲۸۴	۰/۴۹۷۳	۰/۹۹۹۹۵۵	۰/۹۹۹۱	۰/۹۹۹۹۵۵	۰/۹۹۹۱
	۰/۶	۰/۴۳۹۴۲۳	۰/۴۳۹۴	۰/۸۸۶۰۹۶	۰/۸۸۵۱	۰/۸۸۶۰۹۶	۰/۸۸۵۱
	۰/۲	۰/۵۸۹۳۸۵	۰/۵۸۹۴	۱/۱۷۹۷۵۳	۱/۱۷۹۱	۱/۱۷۹۷۵۳	۱/۱۷۹۱
نوع سوم	۰/۴	۰/۵۲۸۷۷۸	۰/۵۲۸۸	۱/۰۶۱۲۳۹	۱/۹۶۰۵	۱/۰۶۱۲۳۹	۱/۰۶۰۵
	۰/۶	۰/۴۶۰۹۵۳	۰/۴۶۱۰	۰/۹۲۸۲۲۲	۰/۹۲۷۳	۰/۹۲۸۲۲۲	۰/۹۲۷۳
الگوی تخلخل نوع سوم							
	۰/۲	۰/۶۸۸۶۵۲	۰/۶۸۸۷	۱/۳۷۰۰۷۴	۱/۳۶۹۶	۱/۳۷۰۰۷۴	۱/۳۶۹۶
نوع اول	۰/۴	۰/۶۶۱۱۳۰	۰/۶۶۱۲	۱/۳۱۵۳۲۰	۱/۳۱۴۹	۱/۳۱۵۳۲۰	۱/۳۱۴۹
	۰/۶	۰/۶۲۸۵۰۰	۰/۶۲۸۵	۱/۲۵۰۴۰۳	۱/۲۵۰۰	۱/۲۵۰۴۰۳	۱/۲۵۰۰
	۰/۲	۰/۵۷۶۲۱۳	۰/۵۷۶۲	۱/۱۵۳۹۰۲	۱/۱۵۳۲	۱/۱۵۳۹۰۲	۱/۱۵۳۲
نوع دوم	۰/۴	۰/۵۵۳۱۸۵	۰/۵۵۳۲	۱/۱۰۷۷۸۷	۱/۱۰۷۱	۱/۱۰۷۷۸۷	۱/۱۰۷۱
	۰/۶	۰/۵۲۵۸۸۳	۰/۵۲۵۹	۱/۰۵۳۱۱۲	۱/۰۵۲۵	۱/۰۵۳۱۱۲	۱/۰۵۲۵
	۰/۲	۰/۶۲۰۱۷۳	۰/۶۲۰۲	۱/۲۳۸۸۵۸	۱/۲۳۸۳	۱/۲۳۸۸۵۸	۱/۲۳۸۳
نوع سوم	۰/۴	۰/۵۹۵۳۸۸	۰/۵۹۵۴	۱/۱۸۹۳۴۸	۱/۱۸۸۸	۱/۱۸۹۳۴۸	۱/۱۸۸۸
	۰/۶	۰/۵۶۶۰۰۳	۰/۵۶۶۰	۱/۱۳۰۶۴۸	۱/۱۳۰۱	۱/۱۳۰۶۴۸	۱/۱۳۰۱

جدول ۵. خواص مادی ماتریس فلزی و نانوتراشه‌های گرافنی[۷]

Table 5. Material properties of metal matrix and graphene nanoplatelets [7]

ویژگی نانوتراشه‌های گرافنی	
مدول یانگ	۱/۰۱ تراپاسکال
ضریب پوآسون	۰/۱۸۶
چگالی	۱۰۶۲/۵ کیلوگرم بر مترمکعب
طول نانوتراشه گرافن	۲/۵ میکرومتر
ضخامت نانوتراشه گرافن	۱/۵ نانومتر
عرض نانوتراشه گرافن	۱/۵ میکرومتر
ویژگی ماتریس فلزی مس	
مدول یانگ	۱۳۰ گیگاپاسکال
ضریب پوآسون	۰/۳۴
چگالی	۸۹۶۰ کیلوگرم بر مترمکعب



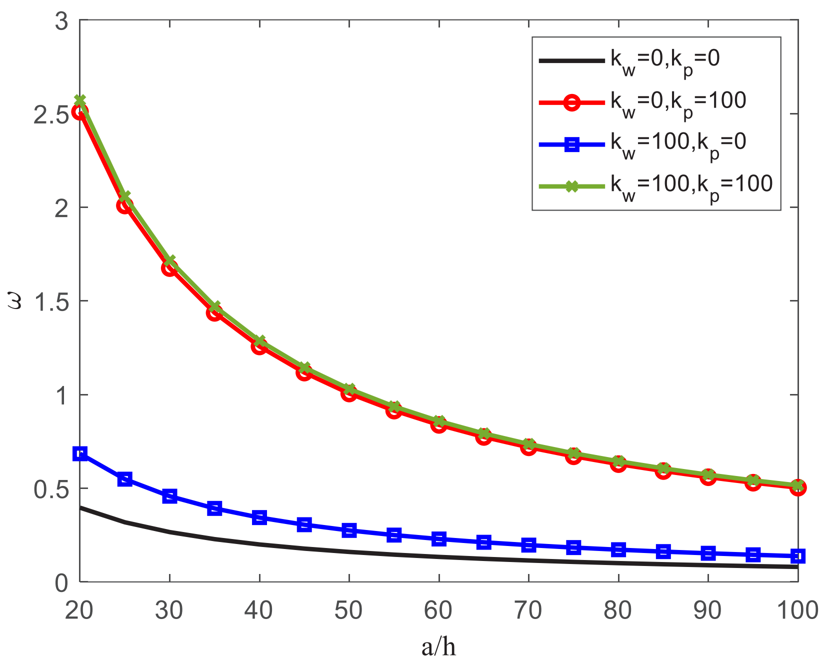
شکل۶. ورق نانو کامپوزیتی مستطیلی با شرایط مرزی FSCS

Fig. 6. Nanocomposite plate with FSCS boundary conditions

۴– ۱- ورق مستطیلی

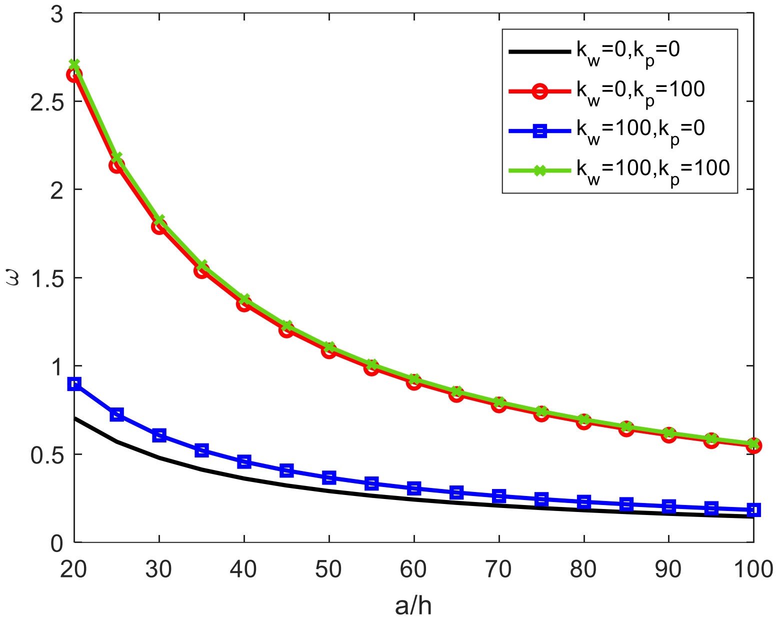
ورق مستطیلی مطابق شکل ۶ را در نظر بگیرید. شکل‌های ۷، ۸ و ۹ تغییرات فرکانس طبیعی ورق مستطیلی بر حسب نسبت طول به ضخامت ورق با در نظر گرفتن اثرات بستر الاستیک در شرایط مرزی مختلف را نشان می‌دهد. همچنین مقادیر درصد حجمی Ù$_{GPL}$ =۰/۰۱ و ضریب الگوی پخش $N_{.}$ =۰/۴ و الگوی پخش تخلخل ورق، نوع اول و الگوی چیدمان نانو تراشه گرافنی، نوع اول می‌باشند. همان طور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت طول به ضخامت ورق، مقادیر فرکانس طبیعی ورق کاهش می‌یابد. در تمام شرایط مرزی تأثیر ثابت فنریت پاسترناک نسبت به ثابت فنریت وینکلر برروی فرکانس طبیعی بیشتر می‌باشد. زیرا ثابت فنریت وینکلر تحت تأثیر سرعت در سطح میانی ورق است اما ثابت پاسترناک تحت تأثیر گرادیان سرعت سطح ورق است و از آنجا که گرادیان تأثیر را زیاد می‌کند بنابراین تاثیر ثابت پاسترناک بیشتر می‌باشد. همچنین تأثیر شرایط مرزی گیردار برروی افزایش فرکانس طبیعی به دلیل افزایش سطح تنش در جسم بیشتر می‌باشد.

شکل‌های ۱۰ تا ۱۲ اثرات هندسه نانوتراشه‌های گرافنی را برروی فرکانس طبیعی ورق برای تمام الگوی چیدمان نانوتراشه‌های گرافنی، نمایش می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود، در تمام حالت‌ها به ازای l_{GPL}/t_{GPL} بالا، افزایش قابل ملاحظه‌ای بر فرکانس طبیعی وجود دارد.



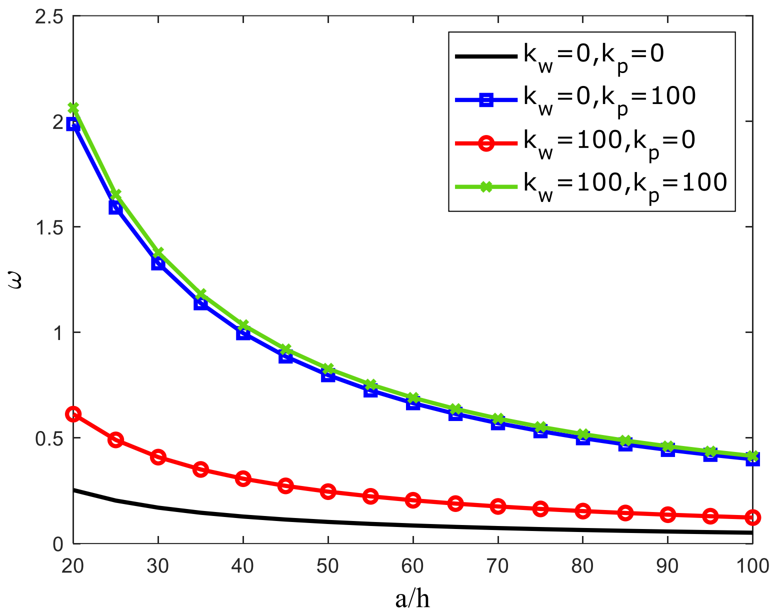
شکل ۷. مقایسه فرکانس طبیعی ورق مستطیلی با شرایط مرزی ساده بر حسب نسبت طول به ضخامت برای ضرایب الاستیک مختلف

Fig. 7. Comparison of natural frequency of rectangular plate with simply supported boundary conditions versus the length to thickness ratio for various elastic coefficients



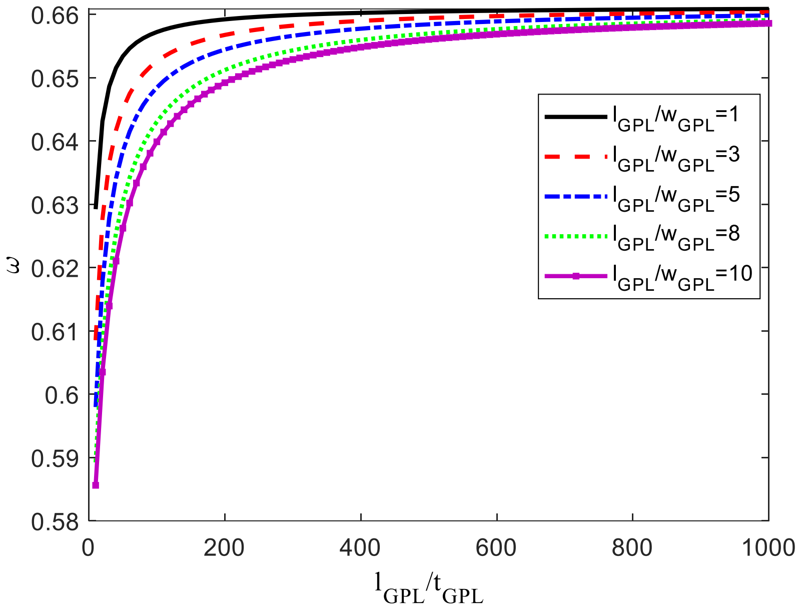
شکل ۸. مقایسه فرکانس طبیعی ورق مستطیلی با شرایط مرزی گیردار بر حسب نسبت طول به ضخامت برای ضرایب الاستیک مختلف

Fig. 8. Comparison of natural frequency of rectangular plate with clamped boundary conditions versus the length to thickness ratio for various elastic coefficients



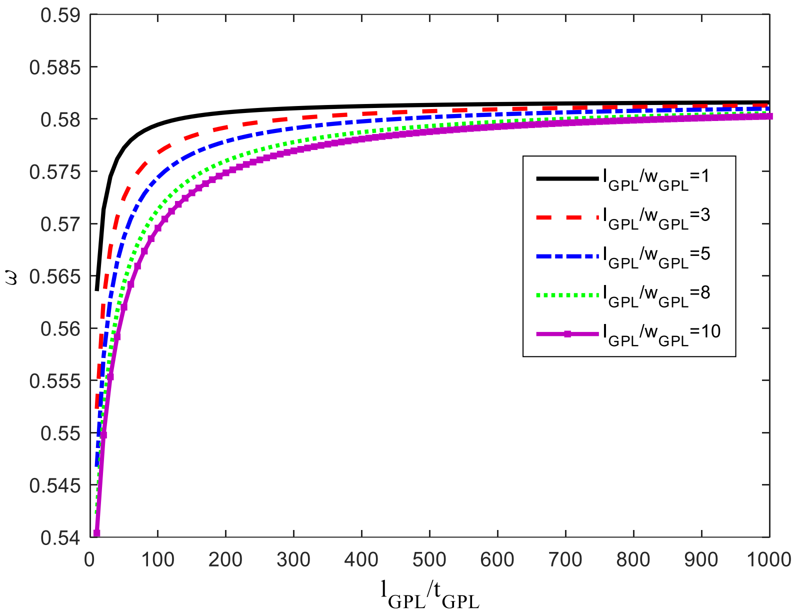
شکل ۹. مقایسه فرکانس طبیعی ورق مستطیلی با شرایط مرزی CSFS بر حسب نسبت طول به ضخامت برای ضرایب الاستیک مختلف

Fig. 9. Comparison of natural frequency of rectangular plate with CSFS boundary conditions versus the length to thickness ratio for various elastic coefficients



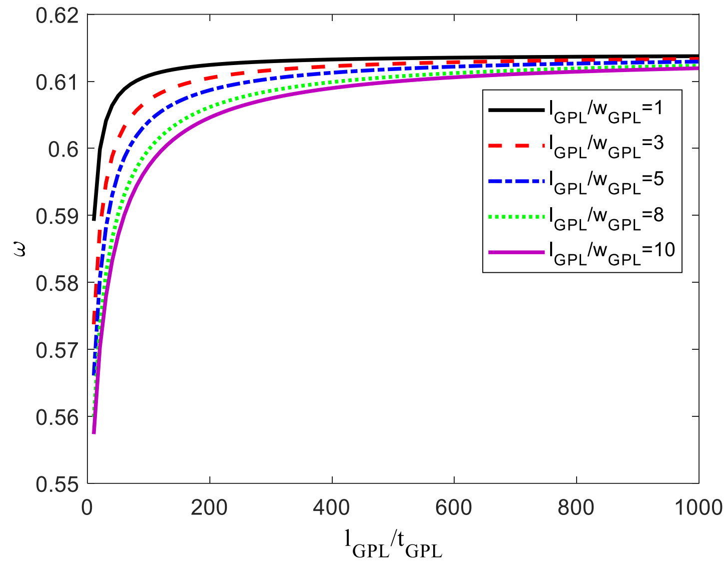
شکل ۱۰ . مقایسه فرکانس طبیعی ورق مستطیلی تحت شرایط مرزی CSCS بر حسب نسبت طول به ضخامت نانوتراشه‌های گرافنی به ازای الگوی توزیع نانو تراشه‌های گرافنی نوع اول A و توزیع تخلخل P_1

Comparison of natural frequency of rectangular plate with CSCS boundary conditions versus the length to thickness ratio of graphene nanoplatelets for the graphene nanoplatelets distribution pattern and porosity distribution P_1



شکل ۱۱. مقایسه فرکانس طبیعی ورق مستطیلی با شرایط مرزی CSCS بر حسب نسبت طول به ضخامت نانوتراشههای گرافنی به ازای الگوی توزیع نانو تراشههای گرافنی نوع دوم B و توزیع تخلخل P_1

Fig. 11. Comparison of natural frequencies of rectangular plate with CSCS boundary conditions versus the length to thickness ratio of graphene nanoplatelets for the graphene nanoplatelets distribution pattern B and porosity distribution P_1



شکل ۱۲. فرکانس طبیعی ورق مستطیلی بر حسب نسبت طول به ضخامت نانوتراشه‌های گرافنی تحت شرایط مرزی CSCS به ازای الگوی توزیع نانو تراشه‌های گرافنی نوع سوم C و توزیع تخلخل P_1

Fig. 12. Comparison of natural frequency of rectangular plate with CSCS boundary conditions versus the length to thickness ratio of graphene nanoplatelets for the graphene nanoplatelets distribution pattern C and porosity distribution P_1

شکل ۱۳ تأثیر نسبت طول به عرض ورق مستطیلی بر فرکانس طبیعی، برای تمام حالت‌های الگوی پخش نانوتراشه‌های گرافنی را نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود در تمام حالت‌ها با افزایش نسبت طول به عرض ورق، مقادیر فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد و کمترین مقادیر فرکانس طبیعی در ورق مربعی می‌باشد. همچنین نحوه چیدمان نانوتراشه‌های گرافنی تأثیر کمی بر فرکانس طبیعی ورق کامپوزیتی نیز دارد. بنابراین، با تغییر هندسه نانوتراشه‌های گرافنی به صورت افزایش l_{GPL}/w_{GPL} و کاهش و ضخامت ورق و همچنین کاهش سطح می‌توان به تأثیر بهتر تقویت نانوتراشه‌های گرافتی برروی سختی ورق نانوکامپوزیتی دست یافت.

با بکارگیری الگوی تخلخل غیر یکنواخت نوع اول و الگوی چینش نوع اول به دلیل تمرکز بیشتر تخلخل در لایه میانی ورق و پراکندگی نانوتراشه‌های گرافنی در اطراف سطوح ورق می‌تواند منجر به افزایش استحکام در ورق نانوکامپوزیتی نیز گردد.

۴-۲- ورق بیضوی

در جدول ۶ شش فرکانس طبیعی اول ورق بیضوی را در شرایط مرزی گیردار برروی بستر الاستیک به ازای درصد حجمی $Ù_{GPL}=۰/۰۱$ و ضریب توزیع پخش $N_{.}=۰/۲$ و الگوی تخلخل نوع اول نشان می‌دهد. با توجه به جدول ۶ تأثیر ثابت بی‌بعد پاسترناک در افزایش فرکانس طبیعی نسبت به ثابت بی‌بعد وینکلر بیشتر می‌باشد. همچنین بیشترین مقادیر فرکانس طبیعی در الگوی تخلخل نوع اول و الگوی چینش نوع اول برای نانو تراشه‌های گرافنی نیز بدست می‌آید.

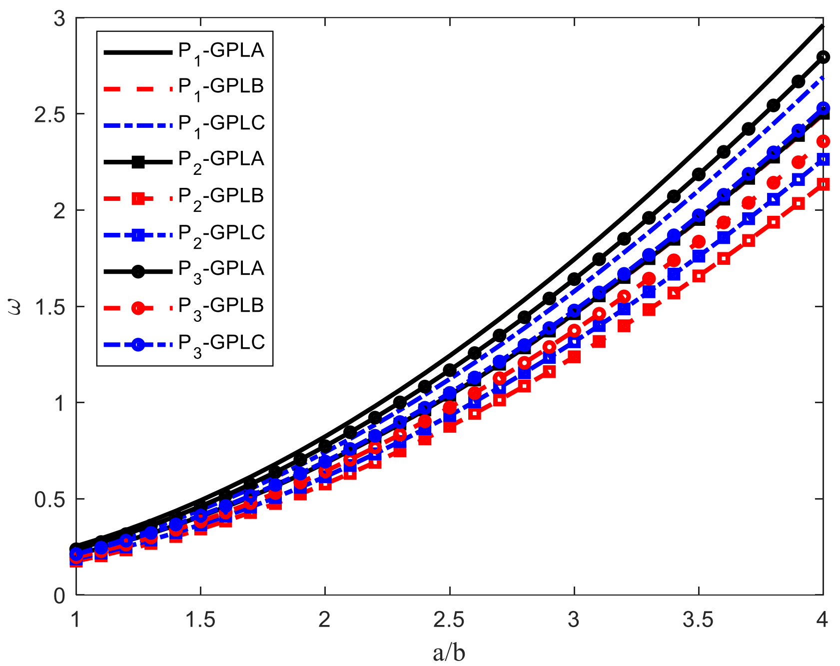
شکل ۱۴ منحنی تغییرات چهار فرکانس طبیعی ورق کامپوزیتی متخلخل تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی بر حسب نسبت طول به ضخامت ورق بیضوی در شرایط مرزی گیردار را نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت طول به ضخامت ورق، فرکانس طبیعی نیز کاهش می‌یابد. همچنین مطابق منحنی تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب طول به عرض ورق در شکل ۱۵، با افزایش نسبت طول به عرض ورق، فرکانس طبیعی ورق نیز افزایش می‌یابد. شکل ۱۶ منحنی تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب ضریب پخش تخلخل در ورق را نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود، به ازای تمامی الگوهای چینش نانوتراشه‌های گرافنی، مقادیر فرکانس طبیعی با افزایش ضریب پخش تخلخل نیز کاهش می‌یابد. شکل ۱۷ تغییرات فرکانس طبیعی ورق بر حسب درصد وزنی را نیز نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود به ازای تمامی الگوی چینش، مقادیر فرکانس طبیعی با افزایش درصد وزنی نیز افزایش می‌یابد. این نمودار نشان می‌دهد که افزودن مقدار اندکی نانوتراشه گرافنی موجب افزایش قابل ملاحظه‌ای در سفتی ورق کامپوزیتی نیز می‌گردد.

جدول۶. فرکانس طبیعی ورق بیضوی نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی برای شرایط مرزی

$\left(a/b=۲,\ a/h=۲۰,\ \Lambda_{GPL}=۰.۰۱\ N=۲\right)$ **CCC**

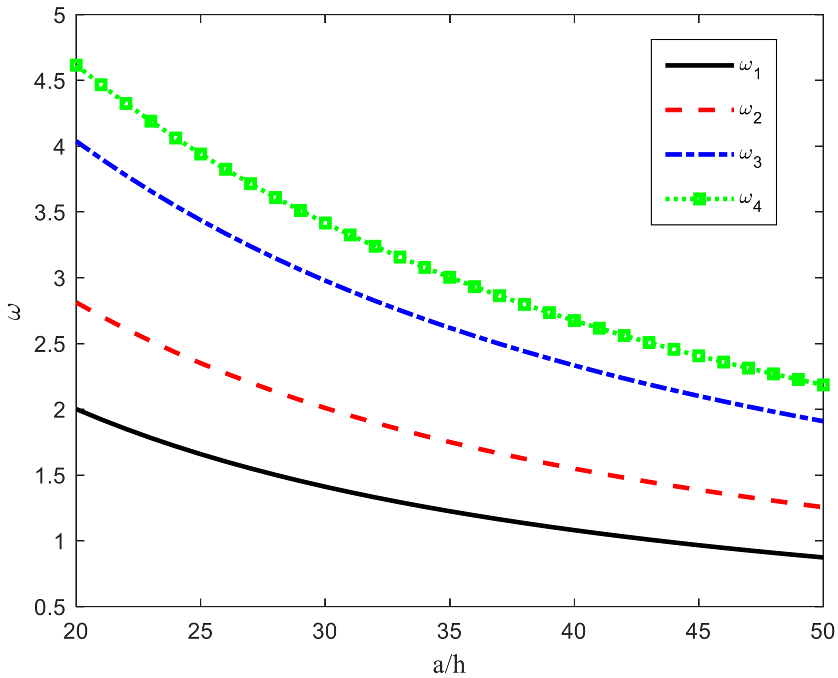
Table 6. Comparison of natural frequency of nanocomposite elliptical plate reinforced with graphene nanoplatelets for CCC boundary conditions

توزیع گرافن	$\left(\bar{k}_w,\bar{k}_p\right)$	فرکانس اول	فرکانس دوم	فرکانس سوم	فرکانس چهارم	فرکانس پنجم	فرکانس ششم
	(۰،۰)	۲/۰۱۸۹	۲/۸۳۸۵	۳/۹۱۶۱	۴/۶۷۲۶	۵/۵۳۹۶	۵/۷۳۰۱
	(۱۰۰،۰)	۲/۰۸۸۳	۲/۸۸۷۹	۳/۹۵۱۹	۴/۷۰۲۶	۵/۵۶۴۸	۵/۷۵۴۵
نوع اول	(۰،۱۰۰)	۴/۶۳۹۲	۶/۱۶۸۲	۷/۸۸۶۰	۸/۷۵۸۳	۹/۹۹۴۵	۱۰/۳۰۳
	(۱۰۰،۱۰۰)	۴/۶۶۹۸	۶/۱۹۱۲	۷/۹۰۳۹	۸/۷۷۴۳	۱۰/۰۰۸	۱۰/۳۱۶
	(۰،۰)	۱/۷۱۶۳	۲/۴۲۶۲	۳/۳۶۷۰	۴/۰۵۴۷	۴/۸۴۷۲	۴/۹۹۸۸
	(۱۰۰،۰)	۱/۷۹۲۲	۲/۴۸۳۷	۳/۴۰۸۳	۴/۰۸۹۰	۴/۸۷۵۸	۵/۰۲۶۵
نوع دوم	(۰،۱۰۰)	۴/۵۱۴۶	۵/۹۸۸۷	۷/۶۲۶۲	۸/۴۴۶۰	۹/۶۱۳۴	۹/۹۰۸۳
	(۱۰۰،۱۰۰)	۴/۵۴۶۰	۶/۰۱۲۲	۷/۶۴۴۵	۸/۴۶۲۵	۹/۶۲۷۸	۹/۹۲۲۳
	(۰،۰)	۱/۸۳۹۳	۲/۵۹۴۴	۳/۵۹۱۹	۴/۳۰۹۷	۵/۱۳۳۲	۵/۳۰۱۶
	(۱۰۰،۰)	۱/۹۱۵۱	۲/۶۴۸۳	۳/۶۳۰۸	۴/۳۴۲۱	۵/۱۶۰۳	۵/۳۲۷۸
نوع سوم	(۰،۱۰۰)	۴/۵۶۳۷	۶/۰۵۹۵	۷/۷۲۹۲	۸/۵۷۱۱	۹/۷۶۶۷	۱۰/۰۶۷
	(۱۰۰،۱۰۰)	۴/۵۹۴۸	۶/۰۸۲۸	۷/۷۴۷۴	۸/۵۸۷۵	۹/۷۴۱۰	۱۰/۰۸۱



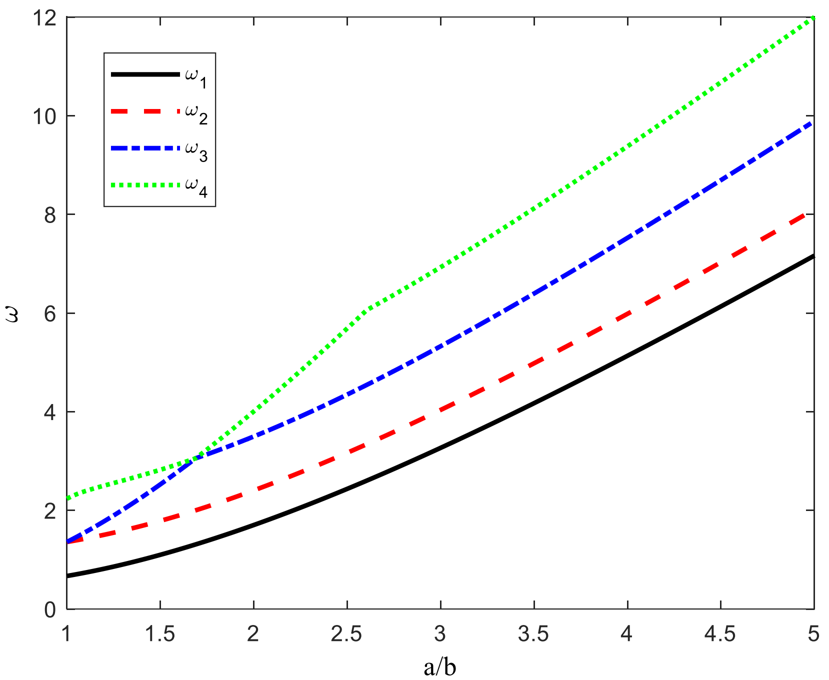
شکل ۱۳ . مقایسه فرکانس طبیعی ورق مستطیلی با شرایط مرزی CSFS بر حسب نسبت طول به عرض برای الگوهای توزیع تخلخل مختلف

Fig. 13. Comparison of natural frequency of rectangular plate with CSFS boundary conditions versus the length to width ratio for various porosity distribution patterns



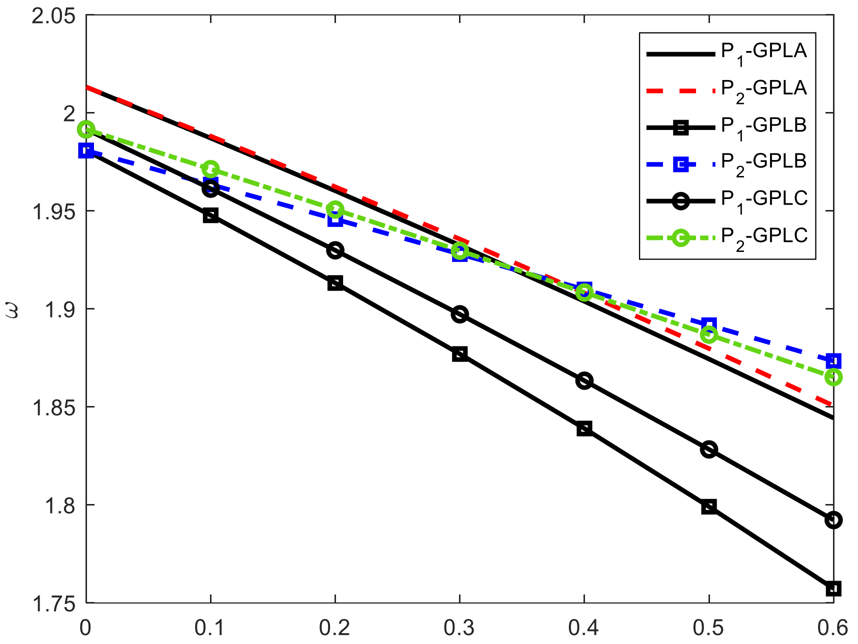
شکل۱۴. مقایسه فرکانس طبیعی ورق بیضوی با شرایط مرزی گیردار بر حسب نسبت طول به ضخامت

Fig. 14. Comparison of natural frequency of elliptical plate with clamped boundary conditions versus the length to thickness ratio



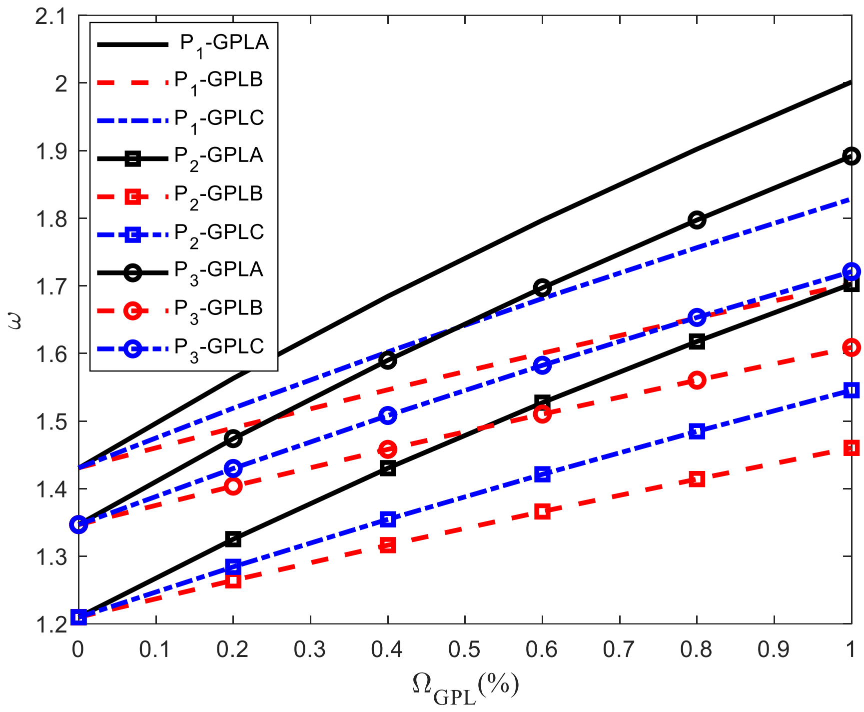
شکل۱۵. مقایسه فرکانس طبیعی ورق بیضوی بر حسب نسبت طول به عرض در شرایط مرزی گیردار

Fig. 15. Comparison of natural frequencies of elliptical plate versus the length to width ratio under clamped boundary conditions



شکل ۱۶ . مقایسه فرکانس طبیعی ورق بیضوی بر حسب ضریب توزیع تخلخل تحت شرایط مرزی گیردار

Fig. 16. Comparison of natural frequencies of elliptical plate versus the porosity distribution coefficient under clamped boundary conditions



شکل۱۷ . مقایسه فرکانس طبیعی ورق بیضوی بر حسب درصد وزنی در شرایط مرزی گیردار

Fig. 17. Comparison of natural frequencies of elliptical plate versus the weight fraction under clamped boundary conditions

۴-۳- ورق مثلثی متساوی الساقین

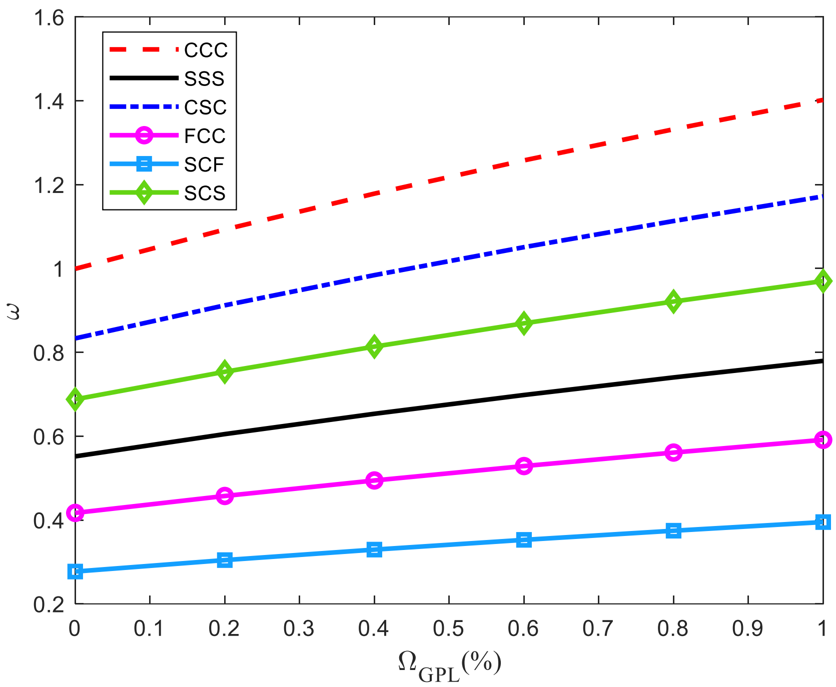
شکل ۱۸ تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب درصد وزنی یک ورق مثلثی متساوی الساقین در شرایط مرزی مختلف به ازای $a/b=\sqrt{۳}/۲, a/h=۲۰, N_s=۰/۴$ را نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود با افزایش درصد وزنی، مقادیر فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. همچنین، بیشترین مقادیر فرکانس طبیعی مربوط به شرایط مرزی گیردار می‌باشد.

شکل‌های ۱۹ و ۲۰ تغییرات فرکانس طبیعی ورق مثلثی متساوی الساقین در شرایط مرزی ساده به ازای درصد حجمی و ضریب تخلخل بر حسب ثابت‌های بی‌بعد وینکلر و برشی $N_s=۰/۴, \Omega_{GPL}=۰/۵$ پاسترناک تکیه‌گاه الاستیک نشان می‌دهند. همان طور که مشاهده می‌شود مقادیر فرکانس طبیعی تحت تأثیر ثابت برشی بی‌بعد پاسترناک بیشتر از مقادیر فرکانس طبیعی ناشی از ثابت فنریت بی‌بعد وینکلر است. در واقع در حضور ثابت بی‌بعد برشی پاسترناک، تأثیر ثابت بی‌بعد وینکلر ناچیز می‌باشد.

۵- نتیجه گیری

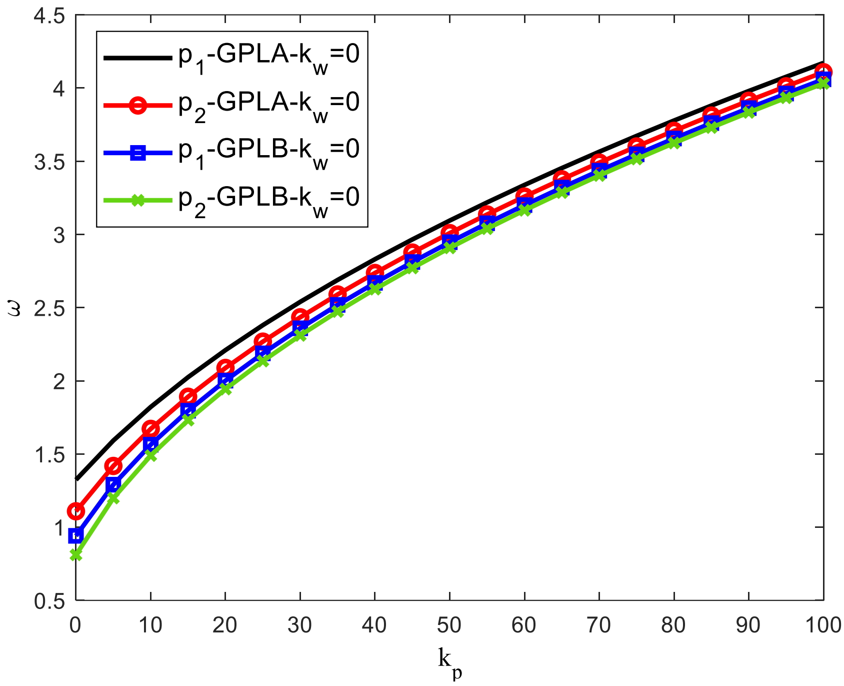
در این مطالعه، ارتعاشات آزاد ورق‌های نانوکامپوزیتی متخلخل مدرج تابعی تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی با اشکال هندسی مستطیلی، بیضوی و مثلثی واقع شده بر بستر الاستیک مورد بررسی قرار گرفت. در این راستا، پس از بدست آوردن خواص مؤثر مادی با استفاده از یک روش میکرومکانیکی، فانکشنال انرژی سیستم در نظر گرفته شده براساس تئوری مرتبه اول برشی ورق نوشته شد. سپس، مسئله ارتعاشات آزاد با استفاده از روش تحلیلی پی‌ریتز حل شد. با ارائه نتایج عددی، اثرات عوامل مختلف نظیر درصد وزنی، آرایش و هندسه نانوتراشه‌های گرافنی، ضریب تخلخل و نحوه توزیع تخلخل، پارامترهای هندسی ورق همچنین شرایط مرزی برروی فرکانس طبیعی ورق نانوکامپوزیتی با اشکال هندسی مختلف بررسی شد. نتایج حاصل از این پژوهش را می‌توان به صورت زیر جمع بندی کرد:

۱- با کاهش نسبت طول به ضخامت در ورق، مقادیر فرکانس طبیعی در تمامی شرایط مرزی کاهش می‌یابد. همچنین استفاده از نانوتراشه‌های



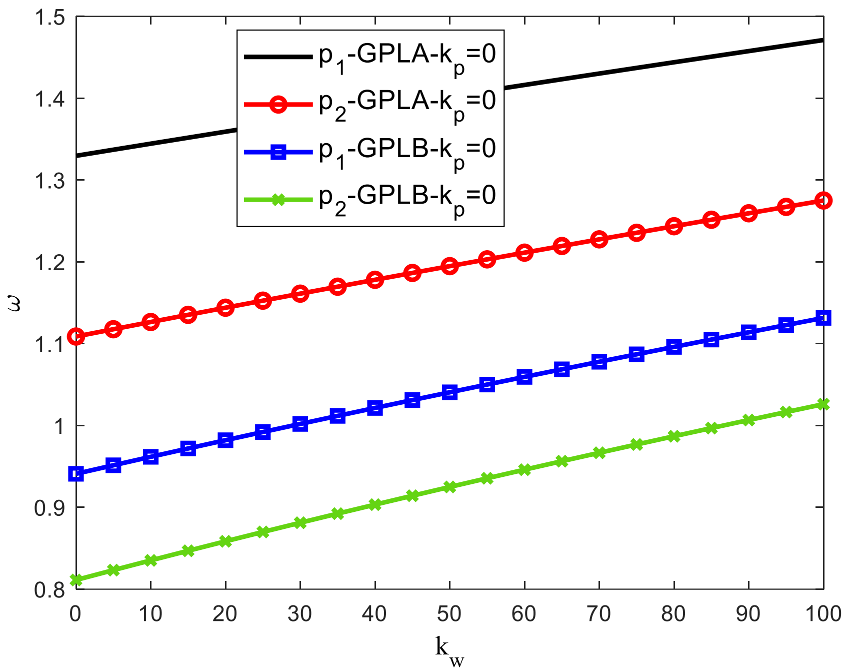
شکل ۱۸. مقایسه فرکانس طبیعی ورق مثلثی متساوی الساقین بر حسب درصد وزنی تحت شرایط مرزی مختلف

Fig. 18. Comparison of natural frequencies of isosceles triangular plate versus the weight fraction under various boundary conditions



شکل ۱۹. مقایسه فرکانس طبیعی ورق مثلثی متساوی الساقین بر حسب ضریب وینکلر تحت شرایط مرزی ساده

Fig. 19. Comparison of natural frequencies of isosceles triangular plate versus the Winkler coefficient under simply supported boundary conditions



شکل ۲۰. مقایسه فرکانس طبیعی ورق مثلثی متساوی الساقین بر حسب ضریب پاسترناک تحت شرایط مرزی ساده

Fig. 20. Comparison of natural frequencies of isosceles triangular plate versus the Pasternak coefficient under simply supported boundary conditions

گرافنی با نسبت طول به ضخامت بزرگ و نسبت طول به پهنای کوچک، تأثیر بهتری در تقویت ورق کامپوزیتی نیز ایجاد می‌نماید.

۲- بیشترین فرکانس طبیعی برای ورق متخلخل با استفاده از الگوی چینش نوع اول نانوتراشه‌های گرافنی نیز بدست می‌آید. بنابراین ایجاد تخلخل داخلی و مرکزی در میانه ورق و در اطراف سطوح آن می‌تواند منجر به افزایش سختی خمشی در ورق نانو کامپوزیتی نیز گردد.

۳- با افزایش خروج از مرکز ورق بیضوی، مقادیر فرکانس طبیعی در تمامی الگوهای چینش نیز افزایش می‌یابد.

۴- بیشترین مقادیر فرکانس طبیعی ورق مثلثی متساوی الساقین در شرایط مرزی گیردار و کمترین مقادیر آن در شرایط مرزی ساده-گیردار-آزاد نیز بدست آمده است.

۵- در یک ورق مثلثی متساوی الساقین، مقادیر فرکانس طبیعی ناشی از ثابت فنریت برشی پاسترناک بیشتر از مقادیر فرکانس طبیعی ناشی از ثابت فنریت وینکلر می‌باشد.

۶- فهرست علائم

علائم انگلیسی

A_{110}	پارامتر بی‌بعد کننده اجزای ماتریس سفتی کششی، N/m
A_{ij}	اجزای ماتریس سختی کششی، Pa-m
a	پارامتر طولی ورق
b	پارامتر عرضی ورق
D_{ij}	اجزای ماتریس سختی خمشی، $Pa\text{-}m^3$
E_m	مدول یانگ ماتریس فلزی، Pa
E_{GPL}	مدول یانگ نانو تراشه گرافنی، Pa
G	مدول برشی، Pa
h	ضخامت ورق، mm
$\bar{k}_w$	ثابت بی‌بعد فنریت وینکلر بستر الاستیک
$\bar{k}_p$	ثابت بی‌بعد برشی پاسترناک بستر الاستیک
l_{GPL}	پارامتر طول نانو تراشه گرافنی، mm
N_0	ضریب بی‌بعد پخش تخلخلدر ورق به ازای الگوی‌های مختلف
N_m	ضریب بی‌بعد چگالی جرمی
n	تعداد لایه‌های ورق نانوکامپوزیتی
p	درجه چند جمله پاسخ‌ها در روش پی‌ریتز
V_{GPL}	پارامتر بی‌بعد کسر حجمی نانو تراشه گرافنی
w_{GPL}	پارامتر پهنای نانو تراشه گرافنی، mm

علائم یونانی

ε	کرنش
η_1	پارامتر بی بعد نسبت طول به عرض
η_2	پارامتر بی بعد نسبت طول به ضخامت ورق
η_3	پارامتر بی بعد نسبت عرض به ضخامت ورق
k^2	ضریب اصلاح نش برشی در تئوری مرتبه اول
ν_m	ضریب پوآسون ماتریس فلزی
ν_{GPL}	ضریب پوآسون نانو تراشه گرافنی
ρ_m	چگالی ماتریس فلزی ، kg/m^3
ρ_{GPL}	چگالی نانو تراشه گرافنی، kg/m^3

منابع

[1] P. Avouris, C. Dimitrakopoulos, Graphene: synthesis and applications, Materials today, 15(3) (2012) 86-97.

[2] S. Park, R.S. Ruoff, Chemical methods for the production of graphenes, Nature nanotechnology, 4(4) (2009) 217-224.

[3] A. Tampieri, G. Celotti, S. Sprio, A. Delcogliano, S. Franzese, Porosity-graded hydroxyapatite ceramics to replace natural bone, Biomaterials, 22(11) (2001) 1365-1370.

[4] W. Pompe, H. Worch, M. Epple, W. Friess, M. Gelinsky, P. Greil, U. Hempel, D. Scharnweber, K. Schulte, Functionally graded materials for biomedical applications, Materials Science and Engineering: A, 362(1-2) (2003) 40-60.

[5] R.M.R. Reddy, W. Karunasena, W. Lokuge, Free vibration of functionally graded-GPL reinforced composite plates with different boundary conditions, Aerospace Science and Technology, 78 (2018) 147-156.

[6] M. Arefi, E.M.-R. Bidgoli, R. Dimitri, F. Tornabene, Free vibrations of functionally graded polymer composite nanoplates reinforced with graphene nanoplatelets, Aerospace Science and Technology, 81 (2018) 108-117.

[7] J. Yang, D. Chen, S. Kitipornchai, Buckling and free

beam in thermal environment, Procedia Engineering, 144 (2016) 928-935.

[16] A. Ugural, Stresses in plates and shells, McGraw-Hill, 1999.

[17] J.N. Reddy, Energy principles and variational methods in applied mechanics, John Wiley & Sons, 2017.

[18] C. Wang, T.M. Aung, Plastic buckling analysis of thick plates using p-Ritz method, International Journal of Solids and Structures, 44(18-19) (2007) 6239-6255.

[19] Y. Hou, G. Wei, Y. Xiang, DSC-Ritz method for the free vibration analysis of Mindlin plates, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 62(2) (2005) 262-288.

[20] S.T. Smith, M.A. Bradford, D.J. Oehlers, Numerical convergence of simple and orthogonal polynomials for the unilateral plate buckling problem using the Rayleigh–Ritz method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 44(11) (1999) 1685-1707.

[21] S.H. Hashemi, M. Karimi, H.R.D. Taher, Vibration analysis of rectangular Mindlin plates on elastic foundations and vertically in contact with stationary fluid by the Ritz method, Ocean Engineering, 37(2-3) (2010) 174-185.

[22] A. Leissa, Vibration of a simply-supported elliptical plate, Journal of Sound and Vibration, 6(1) (1967) 145-148.

[23] S. Çeribaşı, G. Altay, Free vibration of super elliptical plates with constant and variable thickness by Ritz method, Journal of Sound and Vibration, 319(1-2) (2009) 668-680.

[24] D. Gorman, Free vibration analysis of right triangular plates with combinations of clamped-simply supported boundary conditions, Journal of sound and vibration, 106(3) (1986) 419-431.

vibration analyses of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite plates based on Chebyshev-Ritz method, Composite Structures, 193 (2018) 281-294.

[8] M. Heidari-Rarani, S. Alimirzaei, K. Torabi, Analytical solution for free vibration of functionally graded carbon nanotubes (FG-CNT) reinforced double-layered nano-plates resting on elastic medium, Journal of Science and Technology of Composites, 2(3) (2015) 55-66.

[9] K. Gao, W. Gao, D. Chen, J. Yang, Nonlinear free vibration of functionally graded graphene platelets reinforced porous nanocomposite plates resting on elastic foundation, Composite Structures, 204 (2018) 831-846.

[10] C. Feng, S. Kitipornchai, J. Yang, Nonlinear bending of polymer nanocomposite beams reinforced with non-uniformly distributed graphene platelets (GPLs), Composites Part B: Engineering, 110 (2017) 132-140.

[11] M. Javani, Y. Kiani, M. Eslami, Geometrically nonlinear free vibration of FG-GPLRC circular plate on the nonlinear elastic foundation, Composite Structures, 261 (2021) 113515.

[12] M. Javani, Y. Kiani, M. Eslami, Free vibration analysis of FG-GPLRC L-shaped plates implementing GDQE approach, Thin-Walled Structures, 162 (2021) 107600.

[13] L.P. Lefebvre, J. Banhart, D.C. Dunand, Porous metals and metallic foams: current status and recent developments, Advanced engineering materials, 10(9) (2008) 775-787.

[14] C. Betts, Benefits of metal foams and developments in modelling techniques to assess their materials behaviour: a review, Materials Science and Technology, 28(2) (2012) 129-143.

[15] V.K. Chaudhari, A. Lal, Nonlinear free vibration analysis of elastically supported nanotube-reinforced composite

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Z. Doust Abed, R. Gholami , R. Ansari , Free Vibrations of Embedded Functionally Graded Graphene Platelets Reinforced Porous Nanocomposite Plates with Various Shapes Using P-Ritz Method, Amirkabir J. Mech Eng., 54(2) (2022) 391-414.

DOI: 10.22060/mej.2022.20132.7174