



ارتعاشات آزاد ورق‌های نانوکامپوزیتی متخلخل مدرج تابعی تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی با اشکال هندسی مختلف روی بستر الاستیک با روش تحلیلی پی‌ریترز

محمد ضیافت دوست عابد^۱، راهب غلامی^{۲*}، رضا انصاری^۱

۱- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت، ایران
۲- گروه مهندسی مکانیک، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۰/۰۳/۱۵
بازنگری: ۱۴۰۰/۰۸/۰۵
پذیرش: ۱۴۰۰/۰۹/۲۹
ارائه آنلاین: ۱۴۰۰/۱۱/۰۶

کلمات کلیدی:

ارتعاشات آزاد
ورق‌های نانوکامپوزیتی متخلخل
ورق‌های با اشکال مختلف
بستر الاستیک
روش پی‌ریترز

خلاصه: در این مطالعه، ارتعاشات آزاد ورق‌های نانوکامپوزیتی متخلخل مدرج تابعی تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی در اشکال هندسی مستطیلی، مثلثی و بیضوی بر روی بستر الاستیک در شرایط مرزی مختلف مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرد. از تئوری ورق مرتبه اول برشی برای مدلسازی ورق و از مدل پاسترناک برای مدلسازی بستر الاستیک استفاده می‌شود. سه نوع توزیع نانوتراشه گرافنی و سه نوع توزیع تخلخل در راستای ضخامت برای ورق نانوکامپوزیتی در نظر گرفته می‌شود. خواص مؤثر مادی نانوکامپوزیت با استفاده از یک مدل میکرومکانیکی بدست می‌آید. با نوشتن فانکشنال انرژی سیستم و بکارگیری روش تحلیلی پی‌ریترز، نتایج عددی برای بررسی اثرات ضریب تخلخل، درصد وزنی نانوتراشه‌های گرافنی، پارامترهای بستر الاستیک و همچنین نسبت طول به عرض و ضخامت ورق بر فرکانس طبیعی ارائه می‌شود. نشان داده می‌شود که ورق با الگوی توزیع تخلخل غیریکنواخت و متقارن نوع اول و چیدمان نوع اول نانوتراشه‌های گرافنی دارای بیشترین فرکانس طبیعی است. همچنین، با افزایش ضریب تخلخل، فرکانس طبیعی ورق برای تمامی الگوهای توزیع نانوتراشه‌های گرافنی کاهش می‌یابد.

۱- مقدمه

تاکنون مطالعات متنوعی در زمینه ارتعاشات ورق‌های نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی و نانوتراشه‌های گرافنی انجام شده است. به عنوان مثال، ردی و همکاران^[۵] ارتعاشات آزاد صفحات چند لایه کامپوزیتی تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی در شرایط مرزی مختلف را بررسی کردند. آن‌ها با استفاده از روش‌های عددی و تئوری تنش برشی مرتبه اول^۴، به بررسی اثرات نسبت طول به ضخامت، شرایط مرزی مختلف و همچنین الگوی چینش، درصد وزنی، هندسه و اندازه نانوتراشه‌های گرافنی بر فرکانس طبیعی را بررسی نمودند. عارفی و همکاران^[۶] ارتعاشات آزاد ورق‌های کامپوزیتی تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی بر روی بستر الاستیک را مورد بررسی قرار دادند. همچنین، یانگ و همکاران^[۷] به بررسی ارتعاشات آزاد و کمانش ورق‌های کامپوزیتی تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی و ورق‌های کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی در شرایط مرزی مختلف پرداختند. آن‌ها اثرات هندسه نانوتراشه‌های گرافنی، درصد وزنی^۵

توسعه نانوکامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی^۱ و نانوتراشه‌های گرافن^۲ از دهه‌های گذشته آغاز شده است و به دلیل دارا بودن ویژگی‌هایی از قبیل نسبت استحکام به وزن بالا، قابلیت شکل پذیری، پایداری و عایق حرارتی بسیار بالا، استفاده گسترده‌ای در صنایع مختلف از قبیل هوافضا، دریایی، ساختمانی و صنایع نفت، گاز و پتروشیمی دارد. همچنین از دیگر کاربردهای چنین نانوکامپوزیت‌هایی می‌توان به ایجاد ابر خازن‌ها، ایجاد ایمپلنت‌ها با استحکام بالا، ایجاد توربین‌های بادی کارآمدتر و کاربرد در نمایشگرهای کریستال مایع اشاره نمود^[۱-۲]. به عنوان نمونه، با توجه به پیشرفت‌های اخیر در فناوری مواد متخلخل مدرج تابعی^۳، می‌توان ایمپلنت‌های استخوانی سازگار با لایه‌های خارجی سفت و متراکم و لایه میانی اسفنجی متخلخل ساخت و استفاده نمود^[۳-۴].

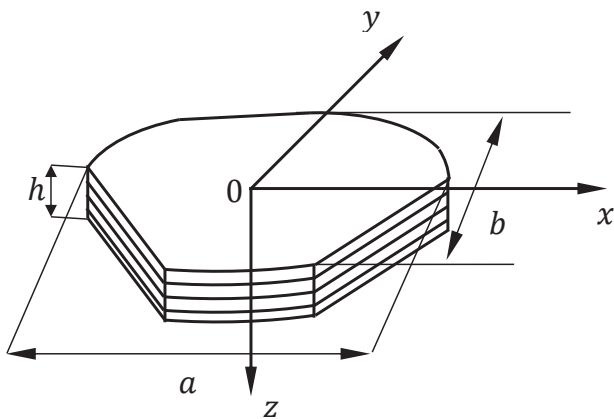
- 1 Carbon Nanotubes (CNTS)
- 2 Graphene Nanoplatelets (GPLs)
- 3 Functionally Graded (FG)

- 4 First-order Shear Deformation Theory (FSDT)
- 5 Weight fraction

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: gholami_r@liau.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس <https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode> دیدن فرمایید.





شکل ۱. ورق نانو کامپوزیتی با شکل دلخواه

Fig. 1. Nanocomposite plate with arbitrary shape

واقع شده بر روی بستر الاستیک پرداخته می‌شود. با ارائه نتایج عددی، تأثیر عوامل طراحی مختلف نظیر الگوی توزیع تخلخل و نانوتراشه‌های گرافنی، درصد وزنی نانوتراشه‌های گرافنی، ضریب تخلخل، پارامترهای هندسی ورق و تقویت کننده و شرایط مرزی بر فرکانس طبیعی ورق‌های نانوکامپوزیتی متخلخل تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲- ورق نانو کامپوزیتی متخلخل تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی: خواص مادی مؤثر و فانکشنال انرژی

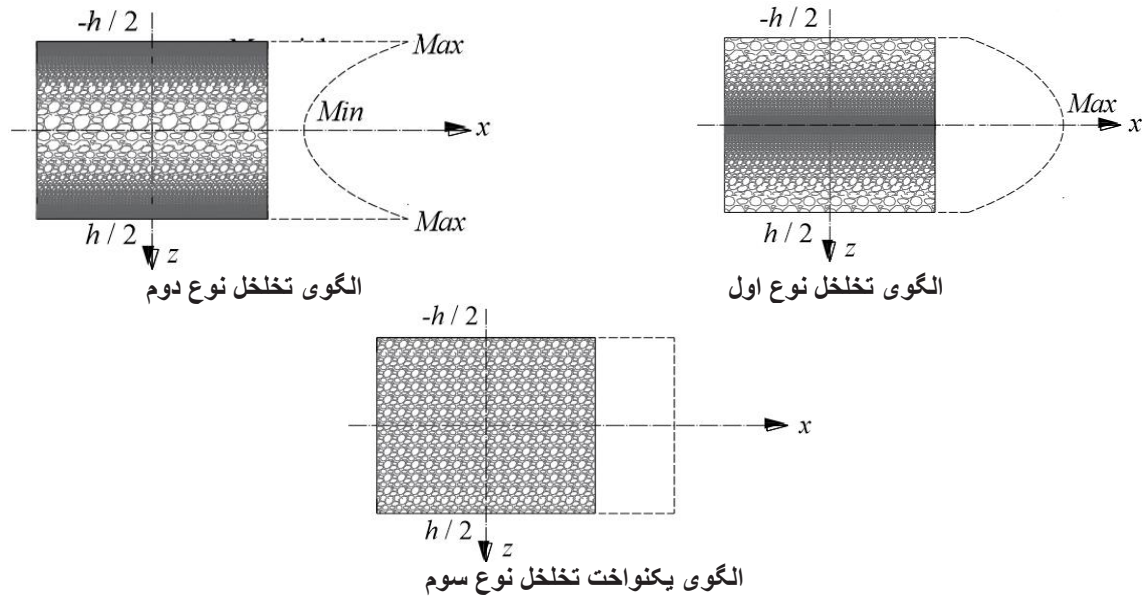
یک ورق نانوکامپوزیتی چند لایه مدرج تابعی متخلخل تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی با شکل هندسی دلخواه را مطابق شکل ۱ در نظر بگیرید. طول ورق a عرض b و ضخامت کل ورق h می‌باشد. تعداد لایه‌های ورق n می‌باشد. دستگاه مختصات کارتزین (x, y, z) در صفحات میانی ورق و جهت مثبت محور z رو به پایین در نظر گرفته می‌شود. لایه‌های مرزی ورق می‌تواند شرایط مرزی مختلفی نظیر ساده، گیردار و آزاد داشته باشد. نام‌گذاری شرایط مرزی به ترتیب از گوشه سمت چپ و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته می‌شود.

سه نوع توزیع تخلخل p_1 و p_2 و p_3 مطابق شکل ۲ و همچنین سه نوع توزیع پخش نانوتراشه‌های گرافنی در ماتریس به صورت الگوهای A, B, C در راستای ضخامت مطابق شکل ۳ در نظر گرفته می‌شوند.

تغییرات مدول یانگ $E(z)$ مدول برشی $G(z)$ و چگالی جرمی $\rho(z)$ در راستای ضخامت ورق برای توزیع‌های تخلخل گوناگون را می‌توان به صورت رابطه (۱) نوشت.

ضریب تخلخل^۱ و همچنین پارامترهای هندسی از جمله نسبت طول به عرض و ضخامت ورق بر روی فرکانس طبیعی و بار کماتش بحرانی را مورد بررسی قرار دادند. حیدری و همکاران [۸] ارتعاشات آزاد نانورق دو لایه تقویت شده با نانولوله‌های کربنی مدرج تابعی واقع شده بر بستر الاستیک را مطالعه نمودند. آن‌ها برای استخراج معادلات از روش انرژی و تئوری غیرمحملی ارینگن استفاده کردند و برای حل معادلات در شرایط تکیه‌گاهی ساده از روش حل ناویر استفاده نمودند. آن‌ها نشان دادند که با افزایش ثابت فنریت پاسترناک، فرکانس طبیعی نانو ورق افزایش می‌یابد در حالی که تأثیر ثابت فنریت وینکلر بر روی فرکانس طبیعی ورق بسیار کم است همچنین، با افزایش نسبت طول به ضخامت ورق، فرکانس طبیعی غیرمحملی کاهش می‌یابد. جاو و همکاران [۹] ارتعاشات آزاد خطی و غیرخطی میکروورق‌های کامپوزیتی متخلخل تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی در بستر الاستیک تحت شرایط مرزی مختلف را به صورت عددی بررسی نمودند. آن‌ها اثرات درصد کسر وزنی نانوتراشه‌های گرافنی، نسبت ابعادی، نسبت طول به ضخامت و ضریب تخلخل بر روی فرکانس طبیعی ورق را مورد مطالعه قرار دادند. فنگ و همکاران [۱۰] ارتعاشات آزاد تیرهای کامپوزیتی مدرج تابعی تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی را بررسی نمودند. فرمول‌بندی ریاضی با استفاده اصل همپلتون^۲ و تئوری تیر تیموشنکو انجام شد و با استفاده از روش تحلیلی ریتز حل شد. آن‌ها اثرات الگوی پخش، اندازه نانوتراشه‌های گرافنی و همچنین تعداد کل لایه‌ها و شرایط مرزی مختلف بر رفتار ارتعاشات آزاد ورق را بررسی نمودند. آن‌ها دریافتند که استفاده از نانوتراشه‌های گرافنی با اندازه بزرگتر و لایه‌های کمتر و قرار دادن آن‌ها در نزدیکی سطوح بالا و پایین تیر می‌تواند منجر به افزایش استحکام تیر و افزایش فرکانس طبیعی خطی و کاهش نسبت فرکانس غیرخطی گردد. جوانی و همکاران [۱۱ و ۱۲] ارتعاشات ورق دایروی نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی را بررسی نمودند. حل معادلات با استفاده از روش تریب دیفرانسیلی^۳ انجام شد. مروری بر منابع نشان می‌دهد که تاکنون مطالعه‌ای بر روی رفتار ارتعاشات آزاد ورق‌های نانوکامپوزیتی متخلخل تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی در اشکال هندسی مختلف از قبیل بیضوی، دایروی و مثلثی انجام نشده است. از این رو، در این مطالعه، با بکارگیری روش تحلیلی پی‌ریتر و تئوری مرتبه اول برشی، به بررسی رفتار ارتعاشی ورق‌های نانوکامپوزیتی متخلخل تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی در اشکال هندسی مختلف

- 1 Porosity coefficients
- 2 Hamilton's principle
- 3 Differential Quadrature Method (DQM)



شکل ۲. شکل شماتیک توزیع تخلخل‌های گوناگون در راستای ضخامت [۷]

Fig. 2. Schematic view of different porosity distributions through the thickness [7]

مقدار E_{max} در رابطه (۱) بر اساس مدل میکرومکانیکی به صورت رابطه (۴) بدست می‌آید [۱۵-۱۳].

$$E_{max} = E_m \left(\frac{3}{8} \left(\frac{1 + \lambda_l \mu_l V_{GPL}}{1 - \mu_l V_{GPL}} \right) + \frac{5}{8} \left(\frac{1 + \lambda_T \mu_T V_{GPL}}{1 - \mu_T V_{GPL}} \right) \right) \quad (4)$$

همچنین داریم:

$$\lambda_l = \frac{2l_{GPL}}{h_{GPL}}, \lambda_T = \frac{2w_{GPL}}{h_{GPL}}, \mu_l = \frac{\frac{E_{GPL}}{E_m} - 1}{\frac{E_{GPL}}{E_m} + \lambda_l}, \mu_T = \frac{\frac{E_{GPL}}{E_m} - 1}{\frac{E_{GPL}}{E_m} + \lambda_T} \quad (5)$$

که در رابطه (۵) $l_{GPL}, w_{GPL}, h_{GPL}, E_{GPL}$ به ترتیب مدول یانگ، ضخامت، پهنا و متوسط طول نانوتراشه‌های گرافنی در نانوکامپوزیت می‌باشند.

مقادیر چگالی و نسبت پواسون نانوکامپوزیت متخلخل تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی با استفاده از قاعده مخلوط^۱ در میکرومکانیک به

$$\begin{aligned} E(z) &= E_{max} (1 - N_0 \phi(z)) \\ G(z) &= G_{max} (1 - N_0 \phi(z)) \\ \rho(z) &= \rho_{max} (1 - N_m \phi(z)) \end{aligned} \quad (1)$$

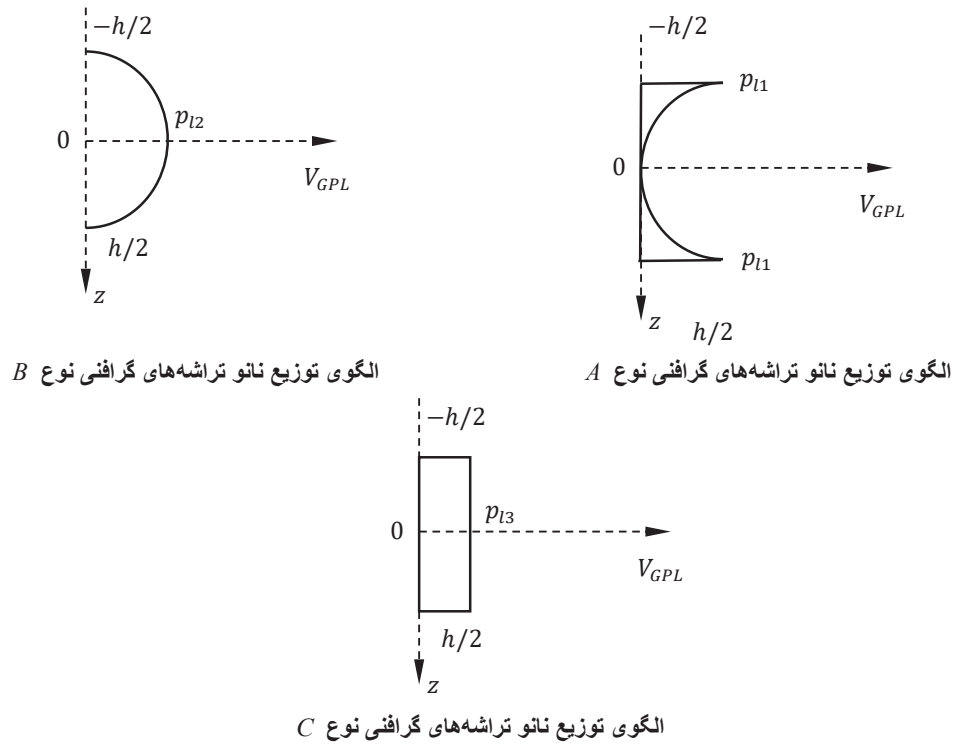
که در آن تابع $\phi(z)$ به صورت رابطه (۲) بدست می‌آید.

$$\phi(z) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right); & p_1 \\ 1 - \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right); & p_2 \\ \phi_0; & p_3 \end{cases} \quad (2)$$

ضرایب N ضریب توزیع پخش می‌باشد و توسط رابطه (۳) بدست می‌آید.

$$N_0 = 1 - \frac{E_{min}}{E_{max}} \quad (3)$$

1 Rule of mixtures



شکل ۳. الگوهای مختلف پخش نانوتراشه‌های گرافنی در راستای ضخامت

Fig. 3. Different distribution patterns of graphene nanoplatelets through the thickness

الگوی پخش نانوتراشه‌های گرافنی نیز به صورت رابطه (۸) بیان می‌شود.

صورت رابطه (۶) بدست می‌آید [۹ و ۱۰].

$$V_{GPL} = \begin{cases} p_{l1} [1 - \cos(\frac{\pi z}{h})]; & A \\ p_{l2} \cos(\frac{\pi z}{h}); & B \\ p_{l3}; & C \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \rho_{\max} &= \rho_m V_m + \rho_{GPL} V_{GPL} \\ v_{\max} &= v_m V_m + v_{GPL} V_{GPL} \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن ρ_{GPL} ، ρ_m به ترتیب چگالی ماتریس فلزی و نانوتراشه گرافنی می‌باشد. همچنین رابطه بین درصد حجمی^۱ ماتریس V_m و نانوتراشه گرافنی V_{GPL} طبق رابطه (۷) است.

که در رابطه (۸) مقادیر p_{l1} ، p_{l2} ، p_{l3} برای الگوهای پخش گوناگون از

رابطه (۹) بدست می‌آید [۱۰-۷].

$$V_m + V_{GPL} = 1 \quad (7)$$

1 Volume fraction

روابط (۱۱) را می‌توان به صورت روابط (۱۲) بازنویسی کرد.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon^{(0)}_{xx} \\ \varepsilon^{(0)}_{yy} \\ \gamma^{(0)}_{xy} \\ \gamma^{(0)}_{xz} \\ \gamma^{(0)}_{yz} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon^{(1)}_{xx} \\ \varepsilon^{(1)}_{yy} \\ \gamma^{(1)}_{xy} \\ \gamma^{(1)}_{xz} \\ \gamma^{(1)}_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$V_{GPL}^T \sum_{j=1}^n \frac{\rho(z_j)}{\rho_{max}} = \begin{cases} p_{I1} \sum_{j=1}^n \left\{ [1 - \cos(\frac{\pi z_j}{h})] \frac{\rho(z_j)}{\rho_{max}} \right\}; & A \\ p_{I2} \sum_{j=1}^n \left\{ \cos(\frac{\pi z_j}{h}) \frac{\rho(z_j)}{\rho_{max}} \right\}; & B \\ p_{I3} \frac{\rho(z_j)}{\rho_{max}}; & C \end{cases} \quad (9)$$

$$V_{GPL}^T = \frac{\Omega_{GPL} \rho_m}{\Omega_{GPL} \rho_m + \rho_{GPL} - \Omega_{GPL} \rho_{GPL}}$$

$$z_j = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{j}{n})h, j = 1, 2, \dots, n$$

۲-۲- روابط ساختاری

روابط بین تنش‌ها و کرنش‌ها به صورت رابطه (۱۳) بیان می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (13)$$

که در آن ضرایب سفتی مادی کاهش یافته Q_{ij} به صورت رابطه (۱۴)

بیان می‌شوند.

$$Q_{11} = \frac{E(z)}{1 - (\nu_{max})^2}, Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - (\nu_{max})^2}, Q_{12} = \frac{\nu_{max} E(z)}{1 - (\nu_{max})^2} \quad (14)$$

$$Q_{66} = Q_{55} = Q_{44} = G(z)$$

همچنین، منتجه‌های نیرو و گشتاور بر واحد طول به صورت رابطه (۱۵)

تعریف می‌گردند.

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \\ (M_x, M_y, M_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) z dz \\ (Q_x, Q_y) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz \end{aligned} \quad (15)$$

با جایگذاری رابطه (۱۳) در معادلات (۱۵) داریم:

۲-۱- میدان جابجایی و روابط کرنش-جابجایی

مطابق با تئوری ورق مرتبه اول برشی، میدان جابجایی را می‌توان به

صورت رابطه (۱۰) بیان کرد.

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, z) + z \phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, z) + z \phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, z) \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن w, v, u به ترتیب جابجایی هر نقطه دلخواه در راستای

x, y, z همچنین u, v, w متناظر با جابجایی سطح میانی ورق می‌باشد.

همچنین، ϕ_x و ϕ_y به ترتیب برابر است با دوران حول محورهای مختصات

x, y در این مطالعه، مقادیر u, v به دلیل تأثیر ناچیز در ارتعاشات عرضی

ورق نادیده گرفته می‌شود.

رابطه خطی کرنش - جابجایی براساس تئوری تغییر شکل مرتبه اول

برشی به صورت رابطه (۱۱) تعریف می‌شود [۱۶].

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} = z \phi_{x,x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} = z \phi_{y,y} \\ \gamma_{xy} &= (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) = z(\phi_{x,y} + \phi_{y,x}) \\ \gamma_{xz} &= \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (11)$$

و با انتگرال‌گیری از رابطه (۲۱) نسبت به ضخامت ورق و جایگذاری روابط (۱۵) و (۱۷) و (۱۸) در آن، رابطه (۲۲) و (۲۳) به دست می‌آید.

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_A \{ M_{xx} \varepsilon_{xx}^{(1)} + M_{yy} \varepsilon_{yy}^{(1)} + M_{xy} \gamma_{xy}^{(0)} + Q_x \gamma_{xz}^{(0)} + Q_y \gamma_{yz}^{(0)} \} dA \\ &= \frac{1}{2} \int_A \{ (D_{11} \varepsilon_{xx}^{(1)} + D_{12} \varepsilon_{yy}^{(1)}) \varepsilon_{xx}^{(1)} + (D_{12} \varepsilon_{xx}^{(1)} + D_{22} \varepsilon_{yy}^{(1)}) \varepsilon_{yy}^{(1)} + \\ &D_{66} (\gamma_{xy}^{(1)})^2 + Q_{55} (\gamma_{xz}^{(0)})^2 + Q_{44} (\gamma_{yz}^{(0)})^2 \} dA \quad (22) \\ &= \frac{1}{2} \int_A \{ D_{11} (\varepsilon_{xx}^{(1)})^2 + 2D_{12} (\varepsilon_{xx}^{(1)} \varepsilon_{yy}^{(1)}) + D_{22} (\varepsilon_{yy}^{(1)})^2 + D_{66} (\gamma_{xy}^{(1)})^2 + \\ &Q_{55} (\gamma_{xz}^{(0)})^2 + Q_{44} (\gamma_{yz}^{(0)})^2 \} dA \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_A \left\{ D_{11} (\phi_{x,x})^2 + 2D_{12} (\phi_{x,x} \phi_{y,y}) + D_{22} (\phi_{y,y})^2 + \right. \\ &\left. + k^2 A_{44} (\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y})^2 \right\} dA \quad (23) \\ &D_{66} (\phi_{x,y} + \phi_{y,x})^2 + k^2 A_{55} (\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = k^2 \begin{bmatrix} A_{55} & 0 \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (18)$$

$$(B_{ij}, D_{ij}) = \frac{h}{n} \sum_{k=1}^n Q_{ij}(z_k) (z_k, z_k^2) \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (19)$$

انرژی پتانسیل ناشی از بارهای درون صفحه‌ای اعمال شده را نیز می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$A_{ii} = \frac{h}{n} \sum_{k=1}^n Q_{ii}(z_k) \quad (i = 4, 5) \quad (20)$$

$$V = -\frac{1}{2} \int_A \left\{ (\frac{\partial w_0}{\partial x})^2 N_x + 2 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} N_{xy} + (\frac{\partial w_0}{\partial y})^2 N_y \right\} dx dy \quad (24)$$

در رابطه (۱۸) معرف ضریب اصلاح تنش برشی^۱ در تئوری ورق مرتبه اول برشی می‌باشد و مقدار آن برابر با ۰/۸۳۳ در نظر گرفته می‌شود.

علاوه بر این، انرژی جنبشی ورق نانوکامپوزیتی به صورت رابطه (۲۵) محاسبه می‌شود.

۲-۳ بدست آوردن فانکشنال انرژی سیستم

با استفاده از کرنش‌ها و تنش‌های تعریف شده، حال می‌توان رابطه‌ی انرژی کرنشی ورق نانوکامپوزیتی را به صورت زیر نوشت [۱۷]:

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) [(u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz = \\ &-\frac{1}{2} \int_A [I_0 (\dot{w}_0)^2 + I_2 [(\dot{\phi}_x)^2 + (\dot{\phi}_y)^2]] dx dy \quad (25) \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \\ &\sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \gamma_{yz}] dV \\ U &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{xx} (\varepsilon_{xx}^{(0)} + z \varepsilon_{xx}^{(1)}) + \sigma_{yy} (\varepsilon_{yy}^{(0)} + z \varepsilon_{yy}^{(1)}) + \\ &\sigma_{xy} (\gamma_{xy}^{(0)} + z \gamma_{xy}^{(1)}) + \sigma_{xz} (\gamma_{xz}^{(0)} + z \gamma_{xz}^{(1)}) + \\ &\sigma_{yz} (\gamma_{yz}^{(0)} + z \gamma_{yz}^{(1)})] dA dz \quad (21) \end{aligned}$$

$$\{I_0, I_2\} = \sum_{k=1}^n \rho(z_k) (1, z_k^2) \quad (26)$$

1 Shear correction factor

$$\bar{K} = \frac{K}{\Delta} = -\frac{1}{2} e^{2i\omega\tau} \frac{\omega^2}{\eta_1} \int_{\bar{A}} \{ \bar{I}_0 (w_1)^2 + \bar{I}_2 (\phi_x^2 + \phi_y^2) \} d\xi d\eta \quad (31)$$

$$\bar{V}_e = \frac{V_e}{\Delta} = \frac{1}{2} \int_{\bar{A}} \left\{ \bar{k}_w \frac{1}{\eta_1 \eta_2^2} (w_1)^2 + \bar{k}_p \left[\frac{1}{\eta_1 \eta_2^2} (w_{1,\xi})^2 + \frac{1}{\eta_1 \eta_3^2} (w_{1,\eta})^2 \right] \right\} d\xi d\eta \quad (32)$$

بنابراین، انرژی پتانسیل کل سیستم به صورت زیر خواهد بود.

$$\Pi^* = \frac{\Pi}{\Delta} = \bar{U} + \bar{V}_e - \bar{K} \quad (33)$$

برای مسئله ارتعاشات آزاد ورق نانوکامپوزیتی با صرف نظر از اثر بارهای صفحه‌ای خارجی در رابطه (۳۳)، انرژی پتانسیل کل به صورت رابطه (۳۴) بدست می‌آید.

$$\Pi^* = \frac{\Pi}{\Delta} = \bar{U} + \bar{V}_e - \bar{K} \quad (34)$$

۳- حل مسأله ارتعاش آزاد با روش تحلیلی پی‌ریتز

براساس روش پی‌ریتز، پاسخ مختصات تعمیم یافته مجهول را به صورت روابط (۳۵) می‌توان نوشت به طوری که این پاسخ‌ها شرایط مرزی هندسی ورق را نیز ارضا می‌نمایند.

$$\begin{aligned} w(\tau, \xi, \eta) &= \sum_{q=0}^p \sum_{i=0}^q c_m \phi_m^w e^{i\omega\tau} = \\ & \sum_{q=0}^p \sum_{i=0}^q c_m (2\xi)^i (2\eta)^{q-i} \phi_b^w(\xi, \eta) e^{i\omega\tau} \\ \phi_x(\tau, \xi, \eta) &= \sum_{q=0}^p \sum_{i=0}^q d_m \phi_m^x e^{i\omega\tau} = \\ & \sum_{q=0}^p \sum_{i=0}^q d_m (2\xi)^i (2\eta)^{q-i} \phi_b^x(\xi, \eta) e^{i\omega\tau} \\ \phi_y(\tau, \xi, \eta) &= \sum_{q=0}^p \sum_{i=0}^q e_m \phi_m^y e^{i\omega\tau} = \\ & \sum_{q=0}^p \sum_{i=0}^q e_m (2\xi)^i (2\eta)^{q-i} \phi_b^y(\xi, \eta) e^{i\omega\tau} \end{aligned} \quad (35)$$

همچنین، انرژی پتانسیل ناشی از بستر الاستیک به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V_e = \frac{1}{2} \int_A \left\{ k_w (w_0)^2 + k_p \left[\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (27)$$

که در رابطه (۲۷)، k_w و k_p به ترتیب ثابت‌های وینکلر و پاسترناک تکیه‌گاه الاستیک می‌باشند. با تعریف پارامترهای بی‌بعد به صورت روابط (۲۸) داریم:

$$\begin{aligned} \{ \xi, \eta \} &= \left\{ \frac{x}{a}, \frac{y}{b} \right\}, \{ \eta_1, \eta_2, \eta_3, w_1 \} = \left\{ \frac{a}{b}, \frac{a}{h}, \frac{b}{h}, \frac{w_0}{h} \right\}, \\ A_{110} &= \frac{E_m h}{(1-\nu_m^2)}, \{ a_{44}, a_{55} \} = \left\{ \frac{A_{44}}{A_{110}}, \frac{A_{55}}{A_{110}} \right\}, \\ \{ d_{11}, d_{12}, d_{22}, d_{66} \} &= \left\{ \frac{D_{11}}{A_{110} h^2}, \frac{D_{12}}{A_{110} h^2}, \frac{D_{22}}{A_{110} h^2}, \frac{D_{66}}{A_{110} h^2} \right\}, \\ \{ p_x, p_y, p_{xy} \} &= \left\{ \frac{N_x}{A_{110}}, \frac{N_y}{A_{110}}, \frac{N_{xy}}{A_{110}} \right\}, \bar{k}_w = \frac{k_w a^4}{A_{110} h^2}, \bar{k}_p = \frac{k_p a^2}{A_{110} h^2} \\ I_{110} &= \rho_m h, \{ \bar{I}_0, \bar{I}_2 \} = \left\{ \frac{I_0}{I_{110}}, \frac{I_2}{I_{110} h^2} \right\}, \omega = \Omega a \sqrt{\frac{A_{110}}{I_{110}}}, \\ \tau &= \frac{t}{a} \sqrt{\frac{A_{110}}{I_{110}}}, \Delta = A_{110} h^2, i = \sqrt{-1} \end{aligned} \quad (28)$$

می‌توان روابط (۲۳)، (۲۴)، (۲۵)، (۲۷) را برحسب پارامترهای بی‌بعد به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned} \bar{U} = \frac{U}{\Delta} &= \frac{1}{2} \int_{\bar{A}} \left\{ \frac{d_{11}}{\eta_1} (\phi_{x,\xi})^2 + 2d_{12} (\phi_{y,\eta} \phi_{x,\xi}) + \right. \\ & \eta_1 d_{22} (\phi_{y,\eta})^2 + d_{66} \left[\frac{1}{\eta_1} (\phi_{y,\xi})^2 + \eta_1 (\phi_{x,\eta})^2 + \right. \\ & 2(\phi_{y,\xi} \phi_{x,\eta}) \left. \right] + k^2 a_{44} [\eta_2 \eta_3 (\phi_y)^2 + \eta_1 (w_{1,\eta})^2 + \\ & 2\eta_2 w_{1,\eta} \phi_y] + k^2 a_{55} [\eta_2 \eta_3 (\phi_x)^2 + \\ & \left. \frac{1}{\eta_1} (w_{1,\xi})^2 + 2\eta_3 (w_{1,\xi} \phi_x) \right\} d\xi d\eta \\ \bar{V} = \frac{V}{\Delta} &= \frac{1}{2} \int_{\bar{A}} \left\{ \frac{p_x}{\eta_1} (w_{1,\xi})^2 + p_y \eta (w_{1,\eta})^2 + 2p_{xy} (w_{1,\xi} w_{1,\eta}) \right\} d\xi d\eta \quad (30) \end{aligned}$$

جدول ۱. توابع پایه‌ای $\phi_b^w, \phi_b^x, \phi_b^y$ برای شرایط مرزی مختلف ورق‌های نانوکامپوزیتی با اشکال مستطیلی، بیضوی و مثلثی متساوی الساقین

Table 1. Base function $\phi_b^w, \phi_b^x, \phi_b^y$ for different boundary conditions of nanocomposite plates with rectangular, elliptical and isosceles triangular shapes

ورق مستطیلی		
شرایط مرزی	گیردار-آزاد-ساده	ساده-ساده-ساده-ساده
ϕ_b^w	$(2\xi+1)^1 \cdot (2\xi-1)^0 \cdot (2\eta+1)^1 \cdot (2\eta-1)^1$	$(2\xi+1)^1 \cdot (2\xi-1)^1 \cdot (2\eta+1)^1 \cdot (2\eta-1)^1$
ϕ_b^x	$(2\xi+1)^1 \cdot (2\xi-1)^0 \cdot (2\eta+1)^1 \cdot (2\eta-1)^1$	$(2\xi+1)^0 \cdot (2\xi-1)^0 \cdot (2\eta+1)^1 \cdot (2\eta-1)^1$
ϕ_b^y	$(2\xi+1)^1 \cdot (2\xi-1)^0 \cdot (2\eta+1)^0 \cdot (2\eta-1)^0$	$(2\xi+1)^1 \cdot (2\xi-1)^1 \cdot (2\eta+1)^0 \cdot (2\eta-1)^0$
ورق بیضوی		
شرایط مرزی	ساده	گیردار
ϕ_b^w	$(4\xi^2+4\eta^2-1)^1$	$(4\xi^2+4\eta^2-1)^1$
ϕ_b^x	$(4\xi^2+4\eta^2-1)^0$	$(4\xi^2+4\eta^2-1)^1$
ϕ_b^y	$(4\xi^2+4\eta^2-1)^0$	$(4\xi^2+4\eta^2-1)^1$
ورق مثلثی متساوی الساقین		
شرایط مرزی	گیردار-گیردار-گیردار	ساده-گیردار-آزاد
ϕ_b^w	$(2\xi+1)^1 \cdot (2\eta-\xi+0.5)^1 \cdot (2\eta+\xi-0.5)^1$	$(2\xi+1)^1 \cdot (2\eta-\xi+0.5)^1 \cdot (2\eta+\xi-0.5)^0$
ϕ_b^x	$(2\xi+1)^1 \cdot (2\eta-\xi+0.5)^1 \cdot (2\eta+\xi-0.5)^1$	$(2\xi+1)^0 \cdot (2\eta-\xi+0.5)^1 \cdot (2\eta+\xi-0.5)^0$
ϕ_b^y	$(2\xi+1)^1 \cdot (2\eta-\xi+0.5)^1 \cdot (2\eta+\xi-0.5)^1$	$(2\xi+1)^1 \cdot (2\eta-\xi+0.5)^1 \cdot (2\eta+\xi-0.5)^0$

در رابطه (۳۷)، n_e برابر با تعداد گوشه‌های هندسه شکل Γ_j و معادله z امین مرز از هندسه شکل می‌باشد. ترتیب نام‌گذاری شرایط مرزی به ترتیب از گوشه سمت چپ و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته شده است.

در جدول ۱، چند نمونه از شرایط مرزی مختلف برای ورق در اشکال هندسی مستطیلی، بیضوی و مثلثی ارائه شده است. همچنین در مراجع [۱۸ و ۲۰ و ۲۱]، شرایط مرزی مختلف برای ورق با هندسه گوناگون نیز آورده شده است.

بر اساس روش پی‌ریترز، با اکسترمم نمودن تابع انرژی پتانسیل کل نسبت به ثابت‌های مجهول e_m, d_m, c_m رابطه (۳۸) استخراج می‌شود.

$$\left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial c_m} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial d_m} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial e_m} \right\} = \{0 \quad 0 \quad 0\} \quad (38)$$

حل رابطه (۳۸) منجر به یک مسئله مقدار ویژه، رابطه (۳۹) می‌گردد

که ω فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌باشد. در رابطه (۳۵) درجه چند جمله‌ای را با p نمایش می‌دهیم همچنین c_m, d_m, e_m به ترتیب ضرایب مجهول چند جمله‌ای می‌باشند. زیرنویس m در رابطه (۳۵) به صورت رابطه (۳۶) بیان می‌گردد [۱۸-۱۹].

$$m = \frac{(q+1)(q+2)}{2} - i \quad (36)$$

همچنین، توابع پایه‌ای $\phi_b^w, \phi_b^x, \phi_b^y$ براساس هندسه ورق و شرایط مرزی به صورت روابط (۳۷) بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned} \phi_b^w &= \prod_{j=1}^{ne} [\Gamma_j(\xi, \eta)]^{\Omega_j^w} \\ \phi_b^x &= \prod_{j=1}^{ne} [\Gamma_j(\xi, \eta)]^{\Omega_j^x} \\ \phi_b^y &= \prod_{j=1}^{ne} [\Gamma_j(\xi, \eta)]^{\Omega_j^y} \end{aligned} \quad (37)$$

$$k_{ij}^{de} = \int_{\bar{A}} \left\{ d_{12} \left(\frac{\partial \phi_i^x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi_j^y}{\partial \eta} \right) + d_{66} \left(\frac{\partial \phi_i^x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \phi_j^y}{\partial \xi} \right) \right\} d\xi d\eta \quad \text{ت}$$

$$k_{ij}^{ee} = \int_{\bar{A}} \left\{ \frac{d_{66}}{\eta_1} \left(\frac{\partial \phi_i^y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi_j^y}{\partial \xi} \right) + k^2 a_{44} \eta_2 \eta_3 (\phi_i^y \cdot \phi_j^y) + \eta_1 d_{22} \left(\frac{\partial \phi_i^y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \phi_j^y}{\partial \eta} \right) \right\} d\xi d\eta \quad \text{س}$$

که در آن که فرکانس طبیعی ورق نانوکامپوزیتی به صورت رابطه (۴۰) بیان می‌شود.

$$([K] - \omega^2 [M]) \begin{Bmatrix} \{c\} \\ \{d\} \\ \{e\} \end{Bmatrix} = 0 \quad (39)$$

همچنین، مؤلفه‌های ماتریس مقارن جرم به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\omega = \Omega a \sqrt{\frac{I_{110}}{A_{110}}} \quad (40)$$

$$M_{ij}^{cc} = \frac{1}{\eta_1} \int_{\bar{A}} \{ \bar{I}_0 (\phi_i^w \cdot \phi_j^w) \} d\xi d\eta \quad (43)$$

در رابطه (۳۹) ماتریس‌های $[M]$ ، $[K]$ دارای ساختاری به صورت

$$M_{ij}^{cc} = \frac{1}{\eta_1} \int_{\bar{A}} \{ \bar{I}_0 (\phi_i^w \cdot \phi_j^w) \} d\xi d\eta \quad \text{الف}$$

زیر می‌باشند.

$$M_{ij}^{cd} = 0 \quad \text{ب}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k^{cc} & k^{cd} & k^{ce} \\ & k^{dd} & k^{de} \\ \text{sym} & & k^{ee} \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$M_{ij}^{ce} = 0 \quad \text{ج}$$

$$M_{ij}^{dd} = \frac{1}{\eta_1} \int_{\bar{A}} \{ \bar{I}_2 (\phi_i^x \cdot \phi_j^x) \} d\xi d\eta \quad \text{پ}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} M^{cc} & M^{cd} & M^{ce} \\ & M^{dd} & M^{de} \\ \text{sym} & & M^{ee} \end{bmatrix}$$

$$M_{ij}^{de} = 0 \quad \text{ت}$$

$$M_{ij}^{ee} = \frac{1}{\eta_1} \int_{\bar{A}} \{ \bar{I}_2 (\phi_i^y \cdot \phi_j^y) \} d\xi d\eta \quad \text{س}$$

اجزای ماتریس مقارن سفتی به صورت رابطه (۴۲) است

کمترین مقادیر ویژه به دست آمده از رابطه (۳۹) فرکانس طبیعی ورق می‌باشد.

$$k_{ij}^{cc} = \int_{\bar{A}} \left\{ \frac{k^2 a_{55}}{\eta_1} \left(\frac{\partial \phi_i^w}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi_j^w}{\partial \xi} \right) + k^2 a_{44} \eta_1 \left(\frac{\partial \phi_i^w}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \phi_j^w}{\partial \eta} \right) + \frac{\bar{k}_w}{\eta_1 \eta_2^2} (\phi_i^w \cdot \phi_j^w) + \frac{\bar{k}_p}{\eta_1 \eta_2^2} \left(\frac{\partial \phi_i^w}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi_j^w}{\partial \xi} \right) + \frac{\bar{k}_p}{\eta_1 \eta_3^2} \left(\frac{\partial \phi_i^w}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \phi_j^w}{\partial \eta} \right) \right\} d\xi d\eta \quad \text{الف} \quad (42)$$

لازم به ذکر است یکی از مهمترین مزیت‌های روش تحلیلی پی‌ریتر این است که بدون تغییر قابل ملاحظه در ساختار فانکشنال انرژی سیستم در دستگاه مختصات کارترین، می‌توان آن را برای تحلیل رفتارهای مکانیکی ورق در اشکال هندسی گوناگون نظیر (مثلثی، شش ضلعی منظم، بیضوی، دایروی و مستطیلی) با شرایط مرزی گوناگون به کار برد. برای بررسی ارتعاشات ورق‌های نانوکامپوزیتی متخلخل با هندسه مختلف تنها کافیت توابع پایه‌ای مطابق جدول ۱ و کران انتگرال دوگانه به واسطه تغییر هندسه، تغییر پیدا کنند. به عنوان مثال، در مقاله حاضر، برای بررسی رفتار ارتعاشی ورق بیضوی در روابط (۴۲) و (۴۳) تنها تغییر مورد نیاز، تغییر کران انتگرال

$$k_{ij}^{cd} = \int_{\bar{A}} \left\{ k^2 a_{55} \eta_3 \left(\frac{\partial \phi_i^w}{\partial \xi} \cdot \phi_j^x \right) \right\} d\xi d\eta \quad \text{ب}$$

$$k_{ij}^{ce} = \int_{\bar{A}} \left\{ k^2 a_{44} \eta_2 \left(\frac{\partial \phi_i^w}{\partial \eta} \cdot \phi_j^y \right) \right\} d\xi d\eta \quad \text{ج}$$

$$k_{ij}^{dd} = \int_{\bar{A}} \left\{ \frac{d_{11}}{\eta_1} \left(\frac{\partial \phi_i^x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi_j^x}{\partial \xi} \right) + k^2 a_{55} \eta_2 \eta_3 (\phi_i^x \cdot \phi_j^x) - d_{66} \eta_1 \left(\frac{\partial \phi_i^x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \phi_j^x}{\partial \eta} \right) \right\} d\xi d\eta \quad \text{پ}$$

$$M_{ij}^{dd} = \frac{1}{\eta_1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{0.25-\xi^2} \left\{ \bar{I}_2(\phi_i^x \cdot \phi_j^x) \right\} d\xi d\eta$$

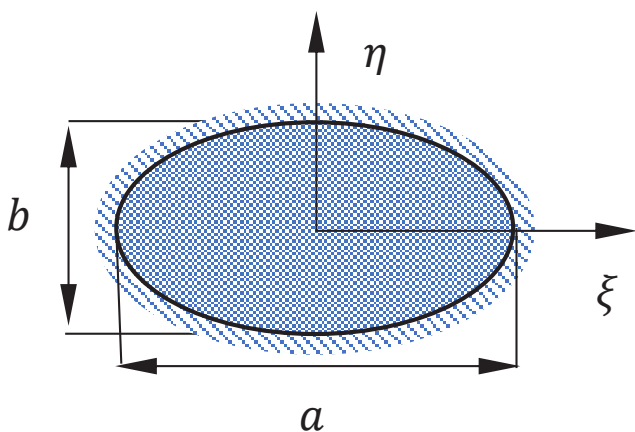
$$M_{ij}^{de} = 0$$

$$M_{ij}^{ee} = \frac{1}{\eta_1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{0.25-\xi^2} \left\{ \bar{I}_2(\phi_i^y \cdot \phi_j^y) \right\} d\xi d\eta$$

۴- تحلیل نتایج

ابتدا، به منظور بررسی صحت نتایج، فرکانس طبیعی اول یک ورق بیضوی همگن بدون تخلخل و در غیاب نانوتراشه‌های گرافنی در شرایط مرزی ساده با نتایج مرجع [۲۳-۲۲] مقایسه می‌شود. بدین منظور، یک ورق بیضوی مطابق شکل ۴ در نظر گرفته می‌شود و فرکانس‌های طبیعی به ازای مقادیر مختلف a/b در جدول ۲ آورده شده است.

علاوه بر این، سه فرکانس طبیعی اول ورق مثلی همگن بدون تخلخل و در غیاب نانوتراشه‌های گرافنی با شرایط مرزی گیردار با مرجع [۲۴] مقایسه می‌شود. ورق مثلی مطابق شکل ۵ در نظر گرفته می‌شود. ترتیب نام گذاری شرایط مرزی از ضلع سمت چپ و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت است. همچنین، در جدول ۴ سه فرکانس اول یک ورق مربعی مدرج تابعی تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی با شرایط مرزی گیردار به ازای درصد



شکل ۴. ورق بیضوی با شرایط مرزی گیردار

Fig. 4. Elliptical plate with clamped boundary conditions

دوگانه به واسطه تغییر هندسه از مستطیلی به بیضوی می‌باشد. از این رو، این روابط را برای ورق نانوکامپوزیتی بیضوی می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$k^2 a_{44} \eta_1 \left(\frac{\partial \phi_i^w}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \phi_j^w}{\partial \eta} \right) + \frac{\bar{k}_w}{\eta_1 \eta_2^2} (\phi_i^w \cdot \phi_j^w) + \quad (44)$$

$$k_{ij}^{cc} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{0.25-\xi^2} \left\{ \frac{k^2 a_{55}}{\eta_1} \left(\frac{\partial \phi_i^w}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi_j^w}{\partial \xi} \right) + \frac{\bar{k}_p}{\eta_1 \eta_2^2} \left(\frac{\partial \phi_i^w}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi_j^w}{\partial \xi} \right) + \frac{\bar{k}_p}{\eta_1 \eta_3^2} \left(\frac{\partial \phi_i^w}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \phi_j^w}{\partial \eta} \right) \right\} d\xi d\eta$$

$$k_{ij}^{cd} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{0.25-\xi^2} \left\{ k^2 a_{55} \eta_3 \left(\frac{\partial \phi_i^w}{\partial \xi} \cdot \phi_j^x \right) \right\} d\xi d\eta \quad \text{ب}$$

$$k_{ij}^{ce} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{0.25-\xi^2} \left\{ k^2 a_{44} \eta_2 \left(\frac{\partial \phi_i^w}{\partial \eta} \cdot \phi_j^y \right) \right\} d\xi d\eta \quad \text{ج}$$

$$k_{ij}^{dd} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{0.25-\xi^2} \left\{ \frac{d_{11}}{\eta_1} \left(\frac{\partial \phi_i^x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi_j^x}{\partial \xi} \right) + \quad \text{پ}$$

$$k^2 a_{55} \eta_2 \eta_3 (\phi_i^x \cdot \phi_j^x) - d_{66} \eta_1 \left(\frac{\partial \phi_i^x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \phi_j^x}{\partial \eta} \right) \right\} d\xi d\eta$$

$$k_{ij}^{de} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{0.25-\xi^2} \left\{ d_{12} \left(\frac{\partial \phi_i^x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi_j^y}{\partial \eta} \right) + d_{66} \left(\frac{\partial \phi_i^x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \phi_j^y}{\partial \xi} \right) \right\} d\xi d\eta \quad \text{ت}$$

$$k_{ij}^{ee} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{0.25-\xi^2} \left\{ \frac{d_{66}}{\eta_1} \left(\frac{\partial \phi_i^y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi_j^y}{\partial \xi} \right) + \quad \text{س}$$

$$k^2 a_{44} \eta_2 \eta_3 (\phi_i^y \cdot \phi_j^y) + \eta_1 d_{22} \left(\frac{\partial \phi_i^y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \phi_j^y}{\partial \eta} \right) \right\} d\xi d\eta$$

همچنین، خواهیم داشت :

$$M_{ij}^{cc} = \frac{1}{\eta_1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{0.25-\xi^2} \left\{ \bar{I}_0(\phi_i^w \cdot \phi_j^w) \right\} d\xi d\eta \quad (45)$$

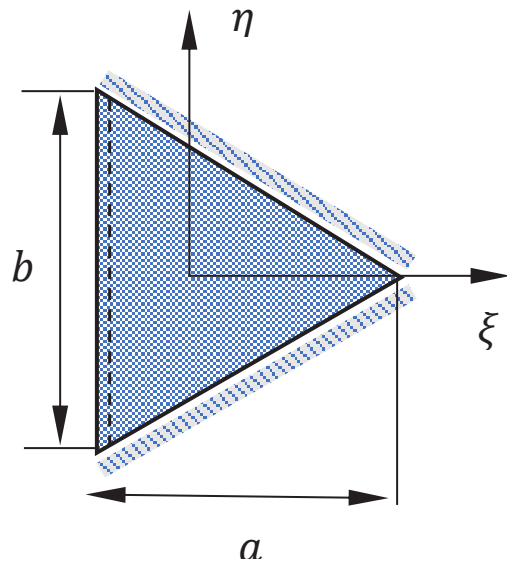
$$M_{ij}^{cd} = 0 \quad \text{ب}$$

$$M_{ij}^{ce} = 0 \quad \text{ج}$$

پ

وزنی $\Omega_{GPL} = 0.1$ و $a/h = 20$ بدست آمده در این پژوهش با نتایج ارائه شده در مرجع [۷] مورد مقایسه قرار می‌گیرد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج بدست آمده از حل روش تحلیلی پی‌ریتز با در نظر گرفتن تعداد دوازده لایه برای ورق نانوکامپوزیتی با نتایج موجود در مرجع [۷] انطباق بالایی دارد. همچنین ورق نانوکامپوزیتی با الگوی تخلخل نوع اول و چیدمان نوع اول نانوتراشه‌های گرافنی دارای بیشترین فرکانس طبیعی می‌باشد. مقایسه‌های انجام شده در جداول ۲، ۳ و ۴ و انطباق نتایج، نشان دهنده صحت نتایج ارائه شده در این مطالعه می‌باشد.

در ادامه، برای ارائه نتایج عددی، فرض می‌شود که ماتریس فلزی از جنس مس می‌باشد. خواص مکانیکی مس و نانوتراشه‌های گرافنی مطابق جدول ۵ در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۵. ورق مثلثی با شرایط مرزی SCC

Fig. 5. Triangular plate with SCC boundary conditions

جدول ۲. مقایسه فرکانس طبیعی ورق بیضوی همگن با شرایط مرزی ساده $\left(\bar{e} = \dot{u} b^* \sqrt{\frac{\bar{h}}{D}}, D = \frac{E_m h^3}{12(1-\bar{\nu}_m^2)} \right)$

Table 2. Comparison of natural frequencies of homogenous elliptical plate with simply supported boundary conditions

نتایج ارائه شده		نتایج ارائه شده [۲۳]				نتایج ارائه شده [۲۲]		a/b
ضریب پواسون								
۰/۲	۰/۱	۰/۲	۰/۱	۰/۵	۰/۲۵	۰/۵	۰/۲۵	
۴/۷۸۲۵۸۵	۴/۶۱۹۲۳۸	۴/۷۸۲۶	۴/۶۱۹۲	۵/۲۱۹۲۹	۴/۸۶۵۲۷۲	۵/۲۱۹	۴/۸۶۵	۱
۴/۰۹۰۴۴۱	۳/۹۶۳۶۶۱	۴/۰۹۰۴	۳/۹۵۹۶	۴/۴۴۱۷۱	۴/۱۵۷۳۸۶	۴/۴۴۲	۴/۱۵۷	۰/۵
۳/۷۱۹۳۰۶	۳/۶۲۱۹۵۶	۳/۷۱۹۳	۳/۶۱۷۳	۳/۹۹۶۴۹	۷۷۳۲۷	۳/۹۹۰	۳/۷۷۳	۰/۲۵
۳/۲۵۸۶۷۵	۳/۲۱۱۴۹۷	۳/۲۵۸۶	۳/۲۱۱۴	۳/۳۹۸۵۹	۳/۲۹۲۱۷۲	۳/۳۹۹	۳/۲۹۲	۲
۲/۹۹۴۱۰۹	۳/۹۷۸۳۳۶	۲/۹۹۳۷	۲/۹۷۷۹	۳/۰۶۵۸۲	۳/۰۲۷۴۲۹	۳/۰۶۶	۳/۰۲۷	۳

جدول ۳. سه فرکانس طبیعی اول ورق مثلثی همگن با شرایط مرزی گیردار $\left(\bar{e} = \dot{u} a^* \sqrt{\frac{\bar{h}}{D}}, D = \frac{E_m h^3}{12(1-\bar{\nu}_m^2)} \right)$

Table 3. First three natural frequencies of homogenous triangular plate with clamped boundary conditions

نتایج ارائه شده				نتایج ارائه شده [۲۴]		a/b
۱/۵	۱/۲۵	۱	۱/۵	۱/۲۵	۱	
۶۵/۴۶۳۹۳	۷۶/۰۹۶۵۴	۹۳/۷۹۱۸۳۶	۶۵/۴۶	۷۶/۰۹	۹۳/۸۶	فرکانس اول
۱۰۶/۶۴۲۹۳	۱۲۶/۶۹۴۲۷	۱۵۷/۸۳۸۸۲	۱۰۶/۱	۱۲۶/۵	۱۵۷/۷	فرکانس دوم
۱۳۹/۴۹۷۵۹	۱۵۹/۹۴۴۶۸	۱۹۴/۸۴۰۵۷	۱۳۹/۱	۱۵۹/۳	۱۹۴/۸	فرکانس سوم

جدول ۴. مقایسه فرکانس‌های ورق نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی ($a/b = 1, a/h = 20, GPL = 0.01$)

Table 4. Comparison of natural frequencies of nanocomposite plate reinforced with graphene nanoplatelets

توزیع گرافن	ضریب تخلخل	فرکانس اول	[γ]	فرکانس دوم	[γ]	فرکانس سوم	[γ]
الگوی تخلخل نوع اول							
نوع اول	۰/۲	۰/۷۰۷۵۰۸	۰/۷۰۷۵	۱/۴۰۶۰۹۴	۱/۴۰۵۷	۱/۴۰۶۰۹۴	۱/۴۰۵۷
	۰/۴	۰/۷۰۳۴۵۵	۰/۷۰۳۵	۱/۳۹۶۱۴۴	۱/۳۹۵۸	۱/۳۹۶۱۴۴	۱/۳۹۵۸
	۰/۶	۰/۷۰۱۶۵۴	۰/۷۰۱۷	۱/۳۹۰۰۶۵	۱/۳۸۹۷	۱/۳۹۰۰۶۵	۱/۳۸۹۷
نوع دوم	۰/۲	۰/۵۹۱۸۰۵	۰/۵۹۱۸	۱/۱۸۳۸۶۱	۱/۱۸۳۲	۱/۱۸۳۸۶۱	۱/۱۸۳۲
	۰/۴	۰/۵۸۸۷۷۱	۰/۵۸۸۸	۱/۱۷۶۰۹۶	۱/۱۷۵۵	۱/۱۷۶۰۹۶	۱/۱۷۵۵
	۰/۶	۰/۵۸۸۷۹۳	۰/۵۸۸۸	۱/۱۷۳۷۱۳	۱/۱۷۳۲	۱/۱۷۳۷۱۳	۱/۱۷۳۲
نوع سوم	۰/۲	۰/۶۳۸۳۹۴	۰/۶۳۸۳	۱/۲۷۳۰۶۵	۱/۲۷۲۹	۱/۲۷۳۰۶۵	۱/۲۷۲۹
	۰/۴	۰/۶۳۶۱۵۶	۰/۶۳۶۴	۱/۲۶۶۳۶۷	۱/۲۶۷۴	۱/۲۶۶۳۶۷	۱/۲۶۷۴
	۰/۶	۰/۶۳۸۱۶۲	۰/۶۳۷۹	۱/۲۶۸۰۵۴	۱/۲۶۷۷	۱/۲۶۸۰۵۴	۱/۲۶۷۷
الگوی تخلخل نوع دوم							
نوع اول	۰/۲	۰/۶۵۵۷۹۹	۰/۶۵۵۸	۱/۳۰۷۲۵۶	۱/۳۰۶۸	۱/۳۰۷۲۵۶	۱/۳۰۶۸
	۰/۴	۰/۵۸۸۴۳۹	۰/۵۸۸۵	۱/۱۷۶۱۶۷	۱/۱۷۵۶	۱/۱۷۶۱۶۷	۱/۱۷۵۶
	۰/۶	۰/۵۰۹۸۹۶	۰/۵۰۹۹	۱/۰۲۳۰۵۴	۱/۰۲۲۳	۱/۰۲۳۰۵۴	۱/۰۲۲۳
نوع دوم	۰/۲	۰/۵۵۰۰۴۴	۰/۵۵۰۱	۱/۱۰۳۵۰۹	۱/۱۰۲۷	۱/۱۰۳۵۰۹	۱/۱۰۲۷
	۰/۴	۰/۴۹۷۲۸۴	۰/۴۹۷۳	۰/۹۹۹۹۵۵	۰/۹۹۹۱	۰/۹۹۹۹۵۵	۰/۹۹۹۱
	۰/۶	۰/۴۳۹۴۲۳	۰/۴۳۹۴	۰/۸۸۶۰۹۶	۰/۸۸۵۱	۰/۸۸۶۰۹۶	۰/۸۸۵۱
نوع سوم	۰/۲	۰/۵۸۹۳۸۵	۰/۵۸۹۴	۱/۱۷۹۷۵۳	۱/۱۷۹۱	۱/۱۷۹۷۵۳	۱/۱۷۹۱
	۰/۴	۰/۵۲۸۷۷۸	۰/۵۲۸۸	۱/۰۶۱۲۳۹	۱/۰۶۰۵	۱/۰۶۱۲۳۹	۱/۰۶۰۵
	۰/۶	۰/۴۶۰۹۵۳	۰/۴۶۱۰	۰/۹۲۸۲۲۲	۰/۹۲۷۳	۰/۹۲۸۲۲۲	۰/۹۲۷۳
الگوی تخلخل نوع سوم							
نوع اول	۰/۲	۰/۶۸۸۶۵۲	۰/۶۸۸۷	۱/۳۷۰۰۷۴	۱/۳۶۹۶	۱/۳۷۰۰۷۴	۱/۳۶۹۶
	۰/۴	۰/۶۶۱۱۳۰	۰/۶۶۱۲	۱/۳۱۵۳۲۰	۱/۳۱۴۹	۱/۳۱۵۳۲۰	۱/۳۱۴۹
	۰/۶	۰/۶۲۸۵۰۰	۰/۶۲۸۵	۱/۲۵۰۴۰۳	۱/۲۵۰۰	۱/۲۵۰۴۰۳	۱/۲۵۰۰
نوع دوم	۰/۲	۰/۵۷۶۲۱۳	۰/۵۷۶۲	۱/۱۵۳۹۰۲	۱/۱۵۳۲	۱/۱۵۳۹۰۲	۱/۱۵۳۲
	۰/۴	۰/۵۵۳۱۸۵	۰/۵۵۳۲	۱/۱۰۷۷۸۷	۱/۱۰۷۱	۱/۱۰۷۷۸۷	۱/۱۰۷۱
	۰/۶	۰/۵۲۵۸۸۳	۰/۵۲۵۹	۱/۰۵۳۱۱۲	۱/۰۵۲۵	۱/۰۵۳۱۱۲	۱/۰۵۲۵
نوع سوم	۰/۲	۰/۶۲۰۱۷۳	۰/۶۲۰۲	۱/۲۳۸۸۵۸	۱/۲۳۸۳	۱/۲۳۸۸۵۸	۱/۲۳۸۳
	۰/۴	۰/۵۹۵۳۸۸	۰/۵۹۵۴	۱/۱۸۹۳۴۸	۱/۱۸۸۸	۱/۱۸۹۳۴۸	۱/۱۸۸۸
	۰/۶	۰/۵۶۶۰۰۳	۰/۵۶۶۰	۱/۱۳۰۶۴۸	۱/۱۳۰۱	۱/۱۳۰۶۴۸	۱/۱۳۰۱

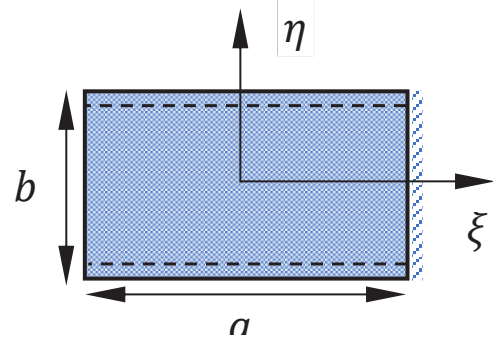
جدول ۵. خواص مادی ماتریس فلزی و نانوتراشه‌های گرافنی [۷]

Table 5. Material properties of metal matrix and graphene nanoplatelets [7]

ویژگی نانوتراشه‌های گرافنی	
مدول یانگ	۱/۰۱ تراپاسکال
ضریب پواسون	۰/۱۸۶
چگالی	۱۰۶۲/۵ کیلوگرم بر مترمکعب
طول نانوتراشه گرافن	۲/۵ میکرومتر
ضخامت نانوتراشه گرافن	۱/۵ نانومتر
عرض نانوتراشه گرافن	۱/۵ میکرومتر
ویژگی ماتریس فلزی مس	
مدول یانگ	۱۳۰ گیگاپاسکال
ضریب پواسون	۰/۳۴
چگالی	۸۹۶۰ کیلوگرم بر مترمکعب

می‌دهد. همچنین مقادیر درصد حجمی $\dot{U}_{GPL} = 0.1$ و ضریب الگوی پخش $N. = 0.4$ و الگوی پخش تخلخل ورق، نوع اول و الگوی چیدمان نانو تراشه گرافنی، نوع اول می‌باشند. همان طور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت طول به ضخامت ورق، مقادیر فرکانس طبیعی ورق کاهش می‌یابد. در تمام شرایط مرزی تأثیر ثابت فنریت پاسترناک نسبت به ثابت فنریت وینکلر بر روی فرکانس طبیعی بیشتر می‌باشد. زیرا ثابت فنریت وینکلر تحت تأثیر سرعت در سطح میانی ورق است اما ثابت پاسترناک تحت تأثیر گرادیان سرعت سطح ورق است و از آنجا که گرادیان تأثیر را زیاد می‌کند بنابراین تأثیر ثابت پاسترناک بیشتر می‌باشد. همچنین تأثیر شرایط مرزی گیردار بر روی افزایش فرکانس طبیعی به دلیل افزایش سطح تنش در جسم بیشتر می‌باشد.

شکل‌های ۱۰ تا ۱۲ اثرات هندسه نانوتراشه‌های گرافنی را بر روی فرکانس طبیعی ورق برای تمام الگوی چیدمان نانوتراشه‌های گرافنی، نمایش می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود، در تمام حالت‌ها به ازای l_{GPL} / t_{GPL} بالا، افزایش قابل ملاحظه‌ای بر فرکانس طبیعی وجود دارد.

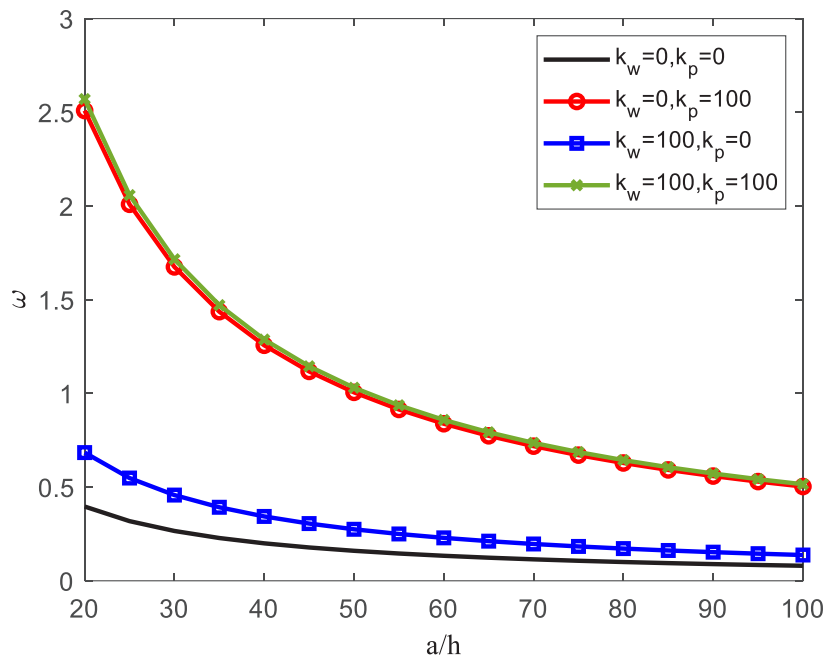


شکل ۶. ورق نانو کامپوزیتی مستطیلی با شرایط مرزی FSCS

Fig. 6. Nanocomposite plate with FSCS boundary conditions

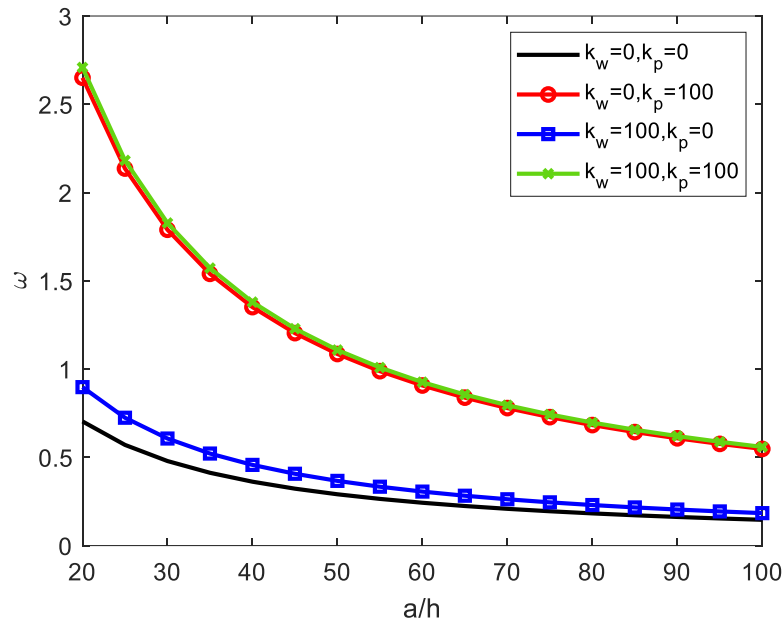
۴-۱- ورق مستطیلی

ورق مستطیلی مطابق شکل ۶ را در نظر بگیرید. شکل‌های ۷، ۸ و ۹ تغییرات فرکانس طبیعی ورق مستطیلی بر حسب نسبت طول به ضخامت ورق با در نظر گرفتن اثرات بستر الاستیک در شرایط مرزی مختلف را نشان



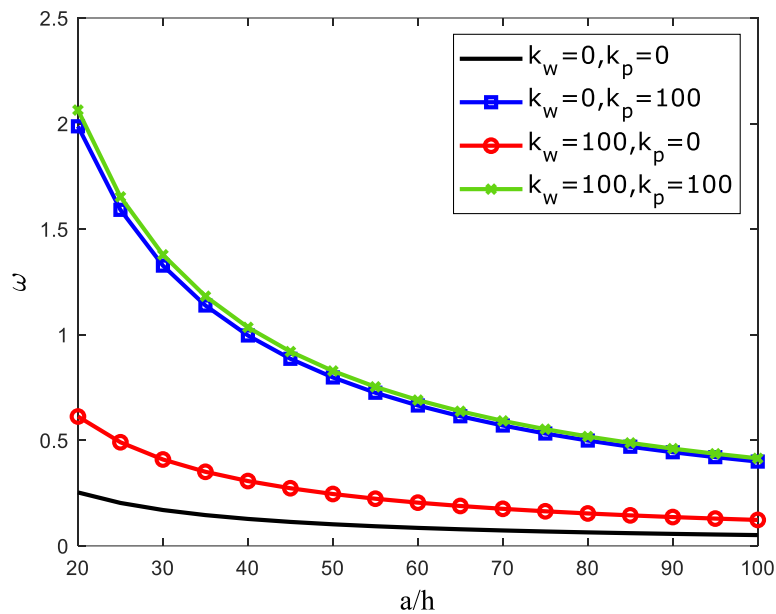
شکل ۷. مقایسه فرکانس طبیعی ورق مستطیلی با شرایط مرزی ساده بر حسب نسبت طول به ضخامت برای ضرایب الاستیک مختلف

Fig. 7. Comparison of natural frequency of rectangular plate with simply supported boundary conditions versus the length to thickness ratio for various elastic coefficients



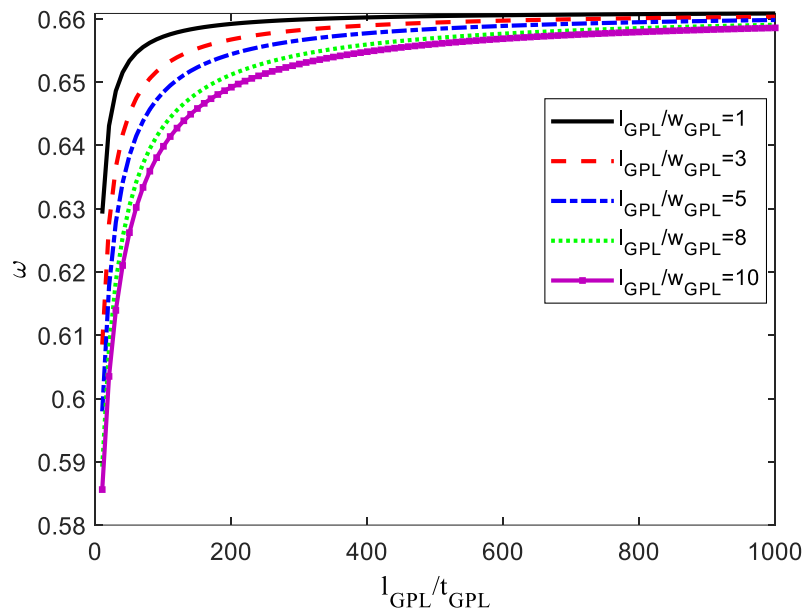
شکل ۸. مقایسه فرکانس طبیعی ورق مستطیلی با شرایط مرزی گیردار بر حسب نسبت طول به ضخامت برای ضرایب الاستیک مختلف

Fig. 8. Comparison of natural frequency of rectangular plate with clamped boundary conditions versus the length to thickness ratio for various elastic coefficients



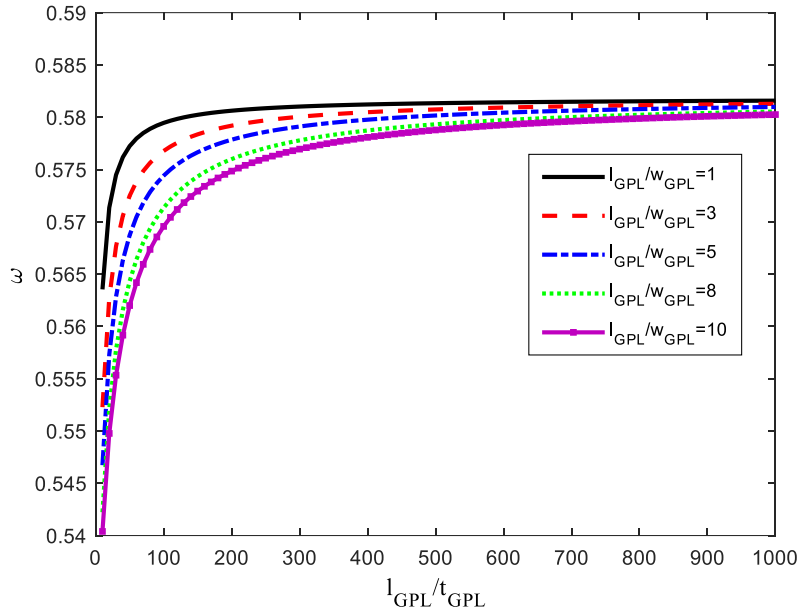
شکل ۹. مقایسه فرکانس طبیعی ورق مستطیلی با شرایط مرزی CSFS بر حسب نسبت طول به ضخامت برای ضرایب الاستیک مختلف

Fig. 9. Comparison of natural frequency of rectangular plate with CSFS boundary conditions versus the length to thickness ratio for various elastic coefficients



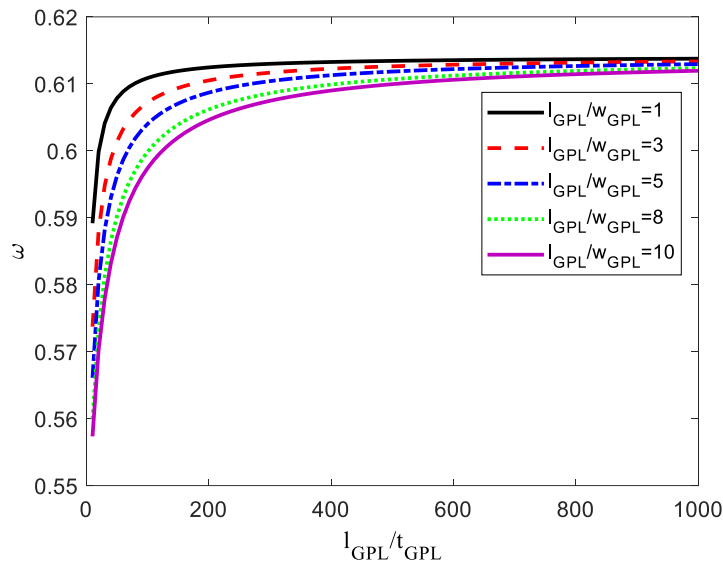
شکل ۱۰. مقایسه فرکانس طبیعی ورق مستطیلی تحت شرایط مرزی CSCS بر حسب نسبت طول به ضخامت نانوتراشه‌های گرافنی به ازای الگوی توزیع نانو تراشه‌های گرافنی نوع اول A و توزیع تخلخل P_1

Comparison of natural frequency of rectangular plate with CSCS boundary conditions versus the length to thickness ratio of graphene nanoplatelets for the graphene nanoplatelets distribution pattern A and porosity distribution P_1



شکل ۱۱. مقایسه فرکانس طبیعی ورق مستطیلی با شرایط مرزی CSCS بر حسب نسبت طول به ضخامت نانوتراشه‌های گرافنی به ازای الگوی توزیع نانو تراشه‌های گرافنی نوع دوم B و توزیع تخلخل P_1

Fig. 11. Comparison of natural frequencies of rectangular plate with CSCS boundary conditions versus the length to thickness ratio of graphene nanoplatelets for the graphene nanoplatelets distribution pattern B and porosity distribution P_1



شکل ۱۲. فرکانس طبیعی ورق مستطیلی بر حسب نسبت طول به ضخامت نانوتراشه‌های گرافنی تحت شرایط مرزی CSCS به ازای الگوی توزیع نانو تراشه‌های گرافنی نوع سوم C و توزیع تخلخل P_1

Fig. 12. Comparison of natural frequency of rectangular plate with CSCS boundary conditions versus the length to thickness ratio of graphene nanoplatelets for the graphene nanoplatelets distribution pattern C and porosity distribution P_1

ثابت بی‌بعد وینکلر بیشتر می‌باشد. همچنین بیشترین مقادیر فرکانس طبیعی در الگوی تخلخل نوع اول و الگوی چینش نوع اول برای نانو تراشه‌های گرافنی نیز بدست می‌آید.

شکل ۱۴ منحنی تغییرات چهار فرکانس طبیعی ورق کامپوزیتی متخلخل تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی بر حسب نسبت طول به ضخامت ورق بیضوی در شرایط مرزی گیردار را نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت طول به ضخامت ورق، فرکانس طبیعی نیز کاهش می‌یابد. همچنین مطابق منحنی تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب طول به عرض ورق در شکل ۱۵، با افزایش نسبت طول به عرض ورق، فرکانس طبیعی ورق نیز افزایش می‌یابد. شکل ۱۶ منحنی تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب ضریب پخش تخلخل در ورق را نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود، به ازای تمامی الگوهای چینش نانوتراشه‌های گرافنی، مقادیر فرکانس طبیعی با افزایش ضریب پخش تخلخل نیز کاهش می‌یابد. شکل ۱۷ تغییرات فرکانس طبیعی ورق بر حسب درصد وزنی را نیز نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود به ازای تمامی الگوی چینش، مقادیر فرکانس طبیعی با افزایش درصد وزنی نیز افزایش می‌یابد. این نمودار نشان می‌دهد که افزودن مقدار اندکی نانوتراشه گرافنی موجب افزایش قابل ملاحظه‌ای در سفتی ورق کامپوزیتی نیز می‌گردد.

شکل ۱۳ تأثیر نسبت طول به عرض ورق مستطیلی بر فرکانس طبیعی، برای تمام حالت‌های الگوی پخش نانوتراشه‌های گرافنی را نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود در تمام حالت‌ها با افزایش نسبت طول به عرض ورق، مقادیر فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد و کمترین مقادیر فرکانس طبیعی در ورق مربعی می‌باشد. همچنین نحوه پیدمان نانوتراشه‌های گرافنی تأثیر کمی بر فرکانس طبیعی ورق کامپوزیتی نیز دارد. بنابراین، با تغییر هندسه نانوتراشه‌های گرافنی به صورت افزایش و کاهش l_{GPL}/w_{GPL} و ضخامت ورق و همچنین کاهش سطح می‌توان به تأثیر بهتر تقویت نانوتراشه‌های گرافتی بر روی سختی ورق نانوکامپوزیتی دست یافت.

با بکارگیری الگوی تخلخل غیر یکنواخت نوع اول و الگوی چینش نوع اول به دلیل تمرکز بیشتر تخلخل در لایه میانی ورق و پراکندگی نانوتراشه‌های گرافنی در اطراف سطوح ورق می‌تواند منجر به افزایش استحکام در ورق نانوکامپوزیتی نیز گردد.

۴-۲- ورق بیضوی

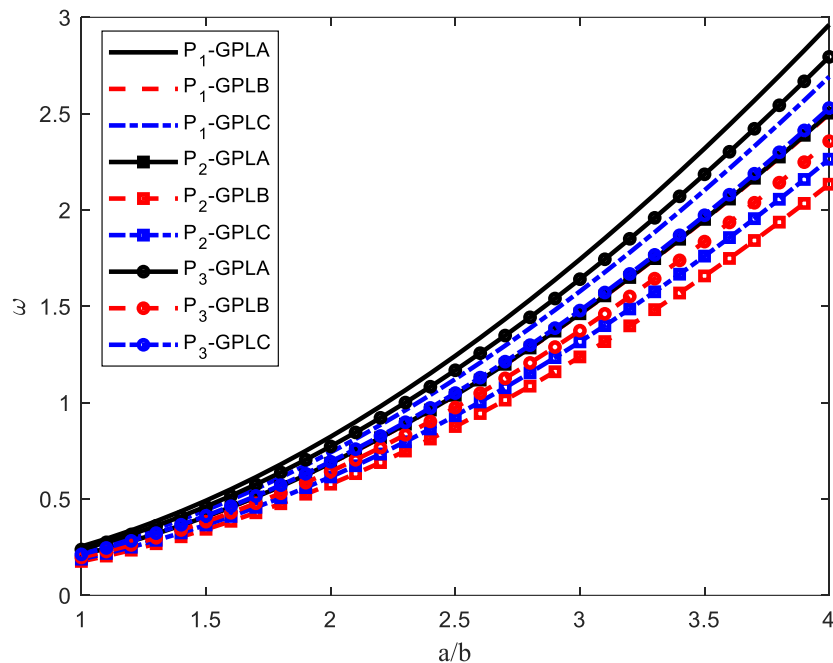
در جدول ۶، شش فرکانس طبیعی اول ورق بیضوی را در شرایط مرزی گیردار بر روی بستر الاستیک به ازای درصد حجمی $\bar{U}_{GPL} = 0.1$ و ضریب توزیع پخش $N = 0.2$ و الگوی تخلخل نوع اول نشان می‌دهد. با توجه به جدول ۶، تأثیر ثابت بی‌بعد پاسترناک در افزایش فرکانس طبیعی نسبت به

جدول ۶. فرکانس طبیعی ورق بیضوی نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی برای شرایط مرزی

$$(a \bar{b} = 2, a/h = 20, I_{GPL} = 0.01 N, \nu = 0.2) \text{ CCC}$$

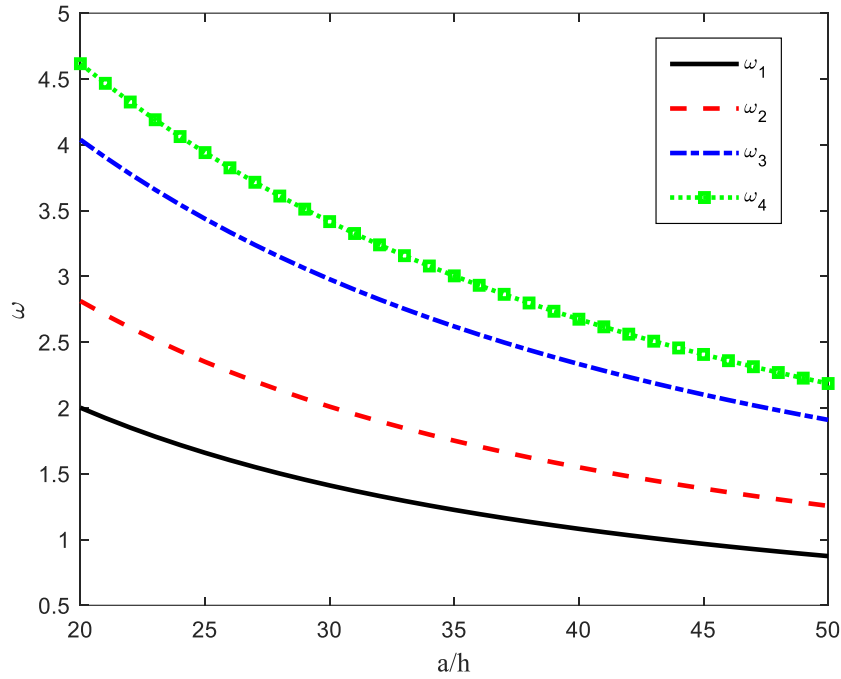
Table 6. Comparison of natural frequency of nanocomposite elliptical plate reinforced with graphene nanoplatelets for CCC boundary conditions

توزیع گرافن (\bar{k}_w, \bar{k}_p)							فرکانس اول	فرکانس دوم	فرکانس سوم	فرکانس چهارم	فرکانس پنجم	فرکانس ششم
(۰،۰)							۲/۰۱۸۹	۲/۸۳۸۵	۳/۹۱۶۱	۴/۶۷۲۶	۵/۵۳۹۶	۵/۷۳۰۱
(۱۰۰،۰)							۲/۰۸۸۳	۲/۸۸۷۹	۳/۹۵۱۹	۴/۷۰۲۶	۵/۵۶۴۸	۵/۷۵۴۵
(۰،۱۰۰)							۴/۶۳۹۲	۶/۱۶۸۲	۷/۸۸۶۰	۸/۷۵۸۳	۹/۹۹۴۵	۱۰/۳۰۳
(۱۰۰،۱۰۰)							۴/۶۶۹۸	۶/۱۹۱۲	۷/۹۰۳۹	۸/۷۷۴۳	۱۰/۰۰۸	۱۰/۳۱۶
(۰،۰)							۱/۷۱۶۳	۲/۴۲۶۲	۳/۳۶۷۰	۴/۰۵۴۷	۴/۸۴۷۲	۴/۹۹۸۸
(۱۰۰،۰)							۱/۷۹۲۲	۲/۴۸۳۷	۳/۴۰۸۳	۴/۰۸۹۰	۴/۸۷۵۸	۵/۰۲۶۵
(۰،۱۰۰)							۴/۵۱۴۶	۵/۹۸۸۷	۷/۶۲۶۲	۸/۴۴۶۰	۹/۶۱۳۴	۹/۹۰۸۳
(۱۰۰،۱۰۰)							۴/۵۴۶۰	۶/۰۱۲۲	۷/۶۴۴۵	۸/۴۶۲۵	۹/۶۲۷۸	۹/۹۲۲۳
(۰،۰)							۱/۸۳۹۳	۲/۵۹۴۴	۳/۵۹۱۹	۴/۳۰۹۷	۵/۱۳۳۲	۵/۳۰۱۶
(۱۰۰،۰)							۱/۹۱۵۱	۲/۶۴۸۳	۳/۶۳۰۸	۴/۳۴۲۱	۵/۱۶۰۳	۵/۳۲۷۸
(۰،۱۰۰)							۴/۵۶۳۷	۶/۰۵۹۵	۷/۷۲۹۲	۸/۵۷۱۱	۹/۷۶۶۷	۱۰/۰۶۷
(۱۰۰،۱۰۰)							۴/۵۹۴۸	۶/۰۸۲۸	۷/۷۴۷۴	۸/۵۸۷۵	۹/۷۴۱۰	۱۰/۰۸۱



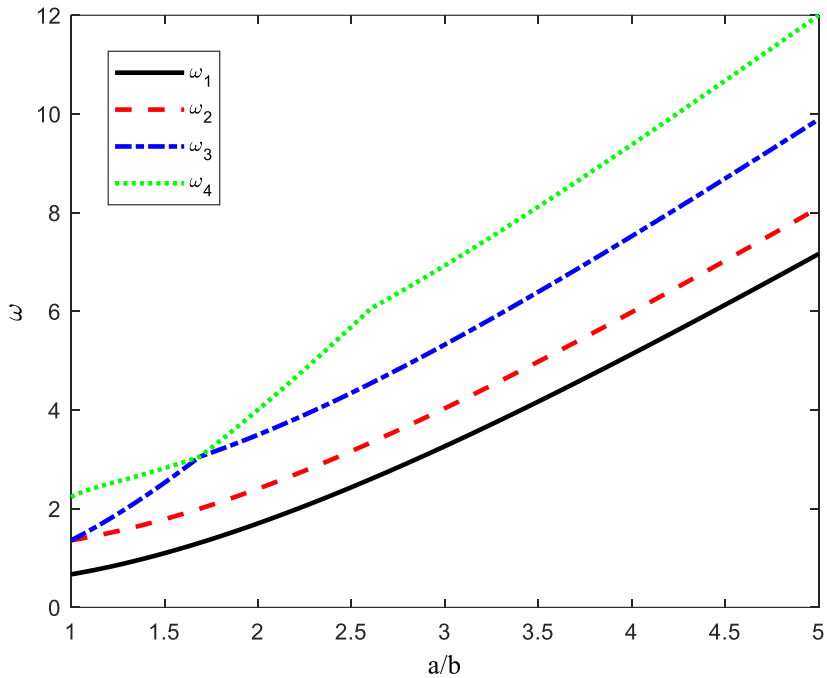
شکل ۱۳. مقایسه فرکانس طبیعی ورق مستطیلی با شرایط مرزی CSFS بر حسب نسبت طول به عرض برای الگوهای توزیع تخلخل مختلف

Fig. 13. Comparison of natural frequency of rectangular plate with CSFS boundary conditions versus the length to width ratio for various porosity distribution patterns



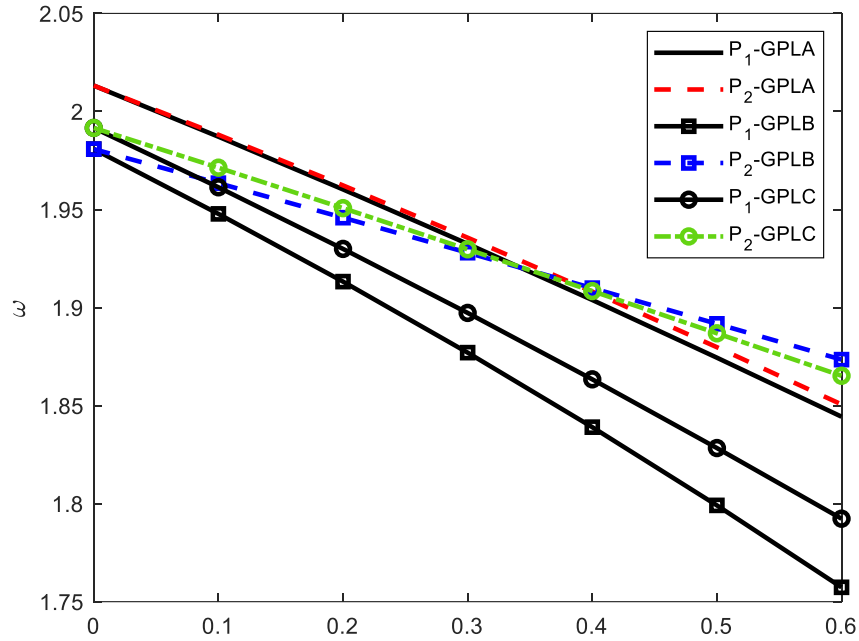
شکل ۱۴. مقایسه فرکانس طبیعی ورق بیضوی با شرایط مرزی گیردار بر حسب نسبت طول به ضخامت

Fig. 14. Comparison of natural frequency of elliptical plate with clamped boundary conditions versus the length to thickness ratio



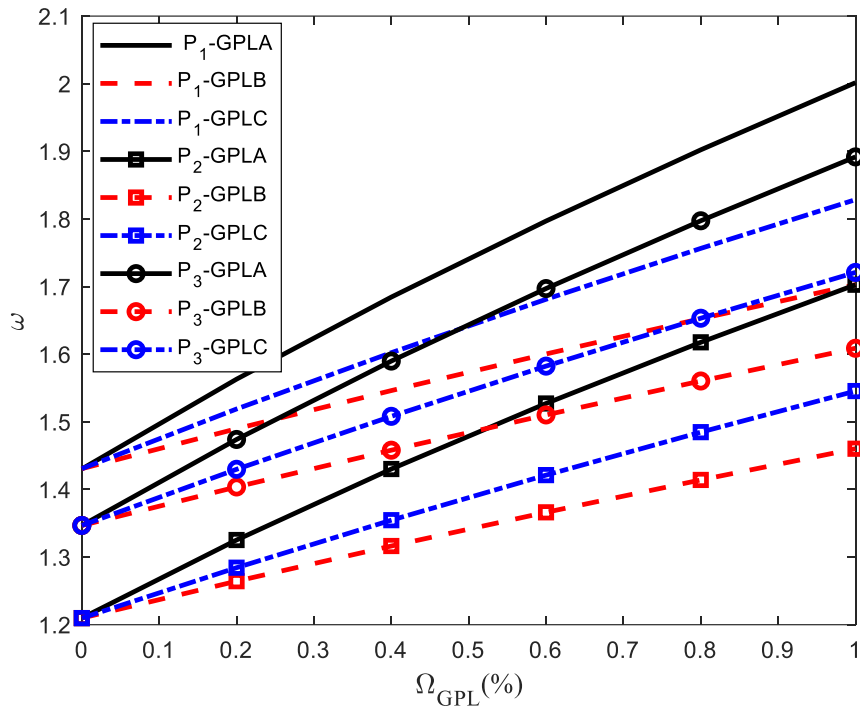
شکل ۱۵. مقایسه فرکانس طبیعی ورق بیضوی بر حسب نسبت طول به عرض در شرایط مرزی گیردار

Fig. 15. Comparison of natural frequencies of elliptical plate versus the length to width ratio under clamped boundary conditions



شکل ۱۶. مقایسه فرکانس طبیعی ورق بیضوی بر حسب ضریب توزیع تخلخل تحت شرایط مرزی گیردار

Fig. 16. Comparison of natural frequencies of elliptical plate versus the porosity distribution coefficient under clamped boundary conditions



شکل ۱۷. مقایسه فرکانس طبیعی ورق بیضوی بر حسب درصد وزنی در شرایط مرزی گیردار

Fig. 17. Comparison of natural frequencies of elliptical plate versus the weight fraction under clamped boundary conditions

۳-۴- ورق مثلثی متساوی الساقین

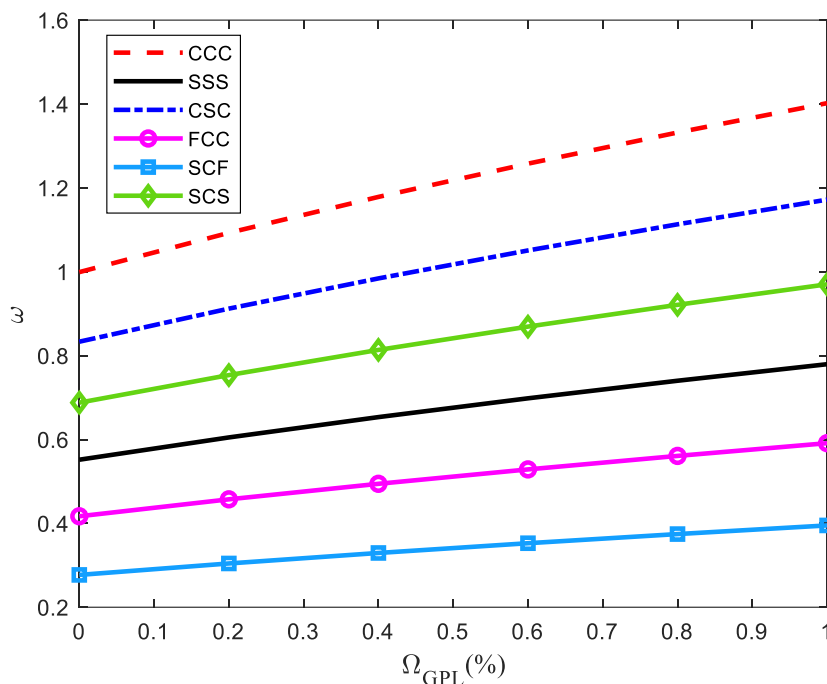
شکل ۱۸ تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب درصد وزنی یک ورق مثلثی متساوی الساقین در شرایط مرزی مختلف به ازای $a/b = \sqrt{3}/2, a/h = 20, N_c = 0.4$ را نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود با افزایش درصد وزنی، مقادیر فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. همچنین، بیشترین مقادیر فرکانس طبیعی مربوط به شرایط مرزی گیردار می‌باشد.

شکل‌های ۱۹ و ۲۰ تغییرات فرکانس طبیعی ورق مثلثی متساوی الساقین در شرایط مرزی ساده به ازای درصد حجمی و ضریب تخلخل پاسترناک تکیه‌گاه الاستیک نشان می‌دهند. همان طور که مشاهده می‌شود مقادیر فرکانس طبیعی تحت تأثیر ثابت برشی بی‌بعد پاسترناک بیشتر از مقادیر فرکانس طبیعی ناشی از ثابت فنریت بی‌بعد وینکلر است. در واقع در حضور ثابت بی‌بعد برشی پاسترناک، تأثیر ثابت بی‌بعد وینکلر ناچیز می‌باشد.

۵- نتیجه گیری

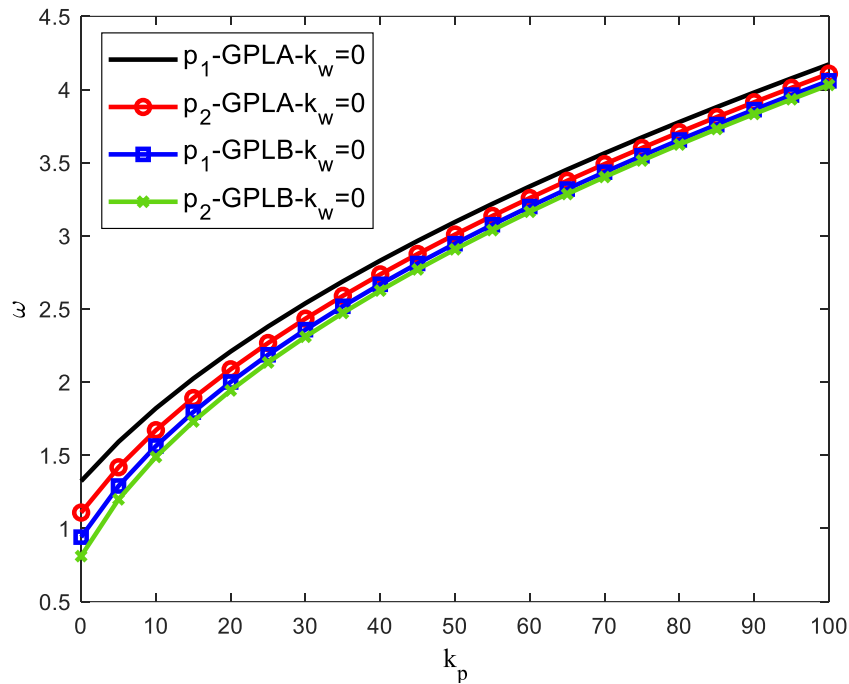
در این مطالعه، ارتعاشات آزاد ورق‌های نانوکامپوزیتی متخلخل مدرج تابعی تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی با اشکال هندسی مستطیلی، بیضوی و مثلثی واقع شده بر بستر الاستیک مورد بررسی قرار گرفت. در این راستا، پس از بدست آوردن خواص مؤثر مادی با استفاده از یک روش میکرومکانیکی، فانکشنال انرژی سیستم در نظر گرفته شده براساس تئوری مرتبه اول برشی ورق نوشته شد. سپس، مسئله ارتعاشات آزاد با استفاده از روش تحلیلی پی‌ریتز حل شد. با ارائه نتایج عددی، اثرات عوامل مختلف نظیر درصد وزنی، آرایش و هندسه نانوتراشه‌های گرافنی، ضریب تخلخل و نحوه توزیع تخلخل، پارامترهای هندسی ورق همچنین شرایط مرزی بررسی شد. نتایج حاصل از این پژوهش را می‌توان به صورت زیر جمع بندی کرد:

۱- با کاهش نسبت طول به ضخامت در ورق، مقادیر فرکانس طبیعی در تمامی شرایط مرزی کاهش می‌یابد. همچنین استفاده از نانوتراشه‌های



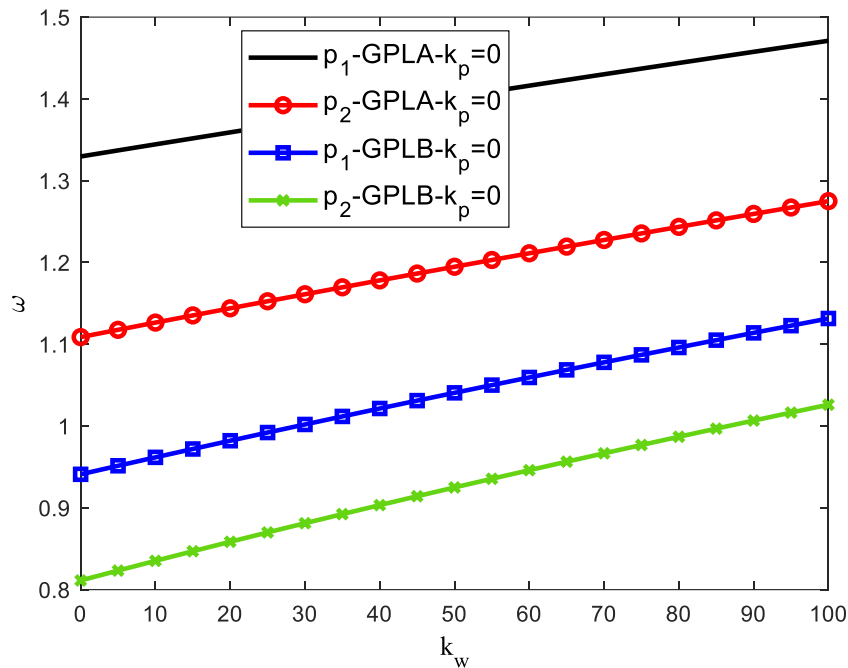
شکل ۱۸. مقایسه فرکانس طبیعی ورق مثلثی متساوی الساقین بر حسب درصد وزنی تحت شرایط مرزی مختلف

Fig. 18. Comparison of natural frequencies of isosceles triangular plate versus the weight fraction under various boundary conditions



شکل ۱۹. مقایسه فرکانس طبیعی ورق مثلثی متساوی الساقین بر حسب ضریب وینکلر تحت شرایط مرزی ساده

Fig. 19. Comparison of natural frequencies of isosceles triangular plate versus the Winkler coefficient under simply supported boundary conditions



شکل ۲۰. مقایسه فرکانس طبیعی ورق مثلثی متساوی الساقین بر حسب ضریب پاسترناک تحت شرایط مرزی ساده

Fig. 20. Comparison of natural frequencies of isosceles triangular plate versus the Pasternak coefficient under simply supported boundary conditions

پارامتر بی بعد کسر حجمی نانو تراشه گرافنی	V_{GPL}
پارامتر پهنا نانو تراشه گرافنی، mm	w_{GPL}
علائم یونانی	
کرنش	ε
پارامتر بی بعد نسبت طول به عرض	η_1
پارامتر بی بعد نسبت طول به ضخامت ورق	η_2
پارامتر بی بعد نسبت عرض به ضخامت ورق	η_3
ضریب اصلاح نش برشی در تئوری مرتبه اول	k^T
ضریب پواسون ماتریس فلزی	ν_m
ضریب پواسون نانو تراشه گرافنی	ν_{GPL}
چگالی ماتریس فلزی، kg/m^3	ρ_m
چگالی نانو تراشه گرافنی، kg/m^3	ρ_{GPL}

منابع

- [1] P. Avouris, C. Dimitrakopoulos, Graphene: synthesis and applications, *Materials today*, 15(3) (2012) 86-97.
- [2] S. Park, R.S. Ruoff, Chemical methods for the production of graphenes, *Nature nanotechnology*, 4(4) (2009) 217-224.
- [3] A. Tampieri, G. Celotti, S. Sprio, A. Delcogliano, S. Franzese, Porosity-graded hydroxyapatite ceramics to replace natural bone, *Biomaterials*, 22(11) (2001) 1365-1370.
- [4] W. Pompe, H. Worch, M. Epple, W. Friess, M. Gelinsky, P. Greil, U. Hempel, D. Scharnweber, K. Schulte, Functionally graded materials for biomedical applications, *Materials Science and Engineering: A*, 362(1-2) (2003) 40-60.
- [5] R.M.R. Reddy, W. Karunasena, W. Lokuge, Free vibration of functionally graded-GPL reinforced composite plates with different boundary conditions, *Aerospace Science and Technology*, 78 (2018) 147-156.
- [6] M. Arefi, E.M.-R. Bidgoli, R. Dimitri, F. Tornabene, Free vibrations of functionally graded polymer composite nanoplates reinforced with graphene nanoplatelets, *Aerospace Science and Technology*, 81 (2018) 108-117.
- [7] J. Yang, D. Chen, S. Kitipornchai, Buckling and free

گرافنی با نسبت طول به ضخامت بزرگ و نسبت طول به پهنا ک کوچک، تأثیر بهتری در تقویت ورق کامپوزیتی نیز ایجاد می نماید.

۲- بیشترین فرکانس طبیعی برای ورق متخلخل با استفاده از الگوی چینش نوع اول نانوتراشه های گرافنی نیز بدست می آید. بنابراین ایجاد تخلخل داخلی و مرکزی در میانه ورق و در اطراف سطوح آن می تواند منجر به افزایش سختی خمشی در ورق نانو کامپوزیتی نیز گردد.

۳- با افزایش خروج از مرکز ورق بیضوی، مقادیر فرکانس طبیعی در تمامی الگوهای چینش نیز افزایش می یابد.

۴- بیشترین مقادیر فرکانس طبیعی ورق مثلثی متساوی الساقین در شرایط مرزی گیردار و کمترین مقادیر آن در شرایط مرزی ساده-گیردار-آزاد نیز بدست آمده است.

۵- در یک ورق مثلثی متساوی الساقین، مقادیر فرکانس طبیعی ناشی از ثابت فنریت برشی پاسترناک بیشتر از مقادیر فرکانس طبیعی ناشی از ثابت فنریت وینکلر می باشد.

۶- فهرست علائم

علائم انگلیسی	
پارامتر بی بعد کننده اجزای ماتریس سفتی کششی، N/m	A_{11}
اجزای ماتریس سختی کششی، Pa-m	A_{ij}
پارامتر طولی ورق	a
پارامتر عرضی ورق	b
اجزای ماتریس سختی خمشی، Pa-m ³	D_{ij}
مدول یانگ ماتریس فلزی، Pa	E_m
مدول یانگ نانو تراشه گرافنی، Pa	E_{GPL}
مدول برشی، Pa	G
ضخامت ورق، mm	h
ثابت بی بعد فنریت وینکلر بستر الاستیک	\bar{k}_w
ثابت بی بعد برشی پاسترناک بستر الاستیک	\bar{k}_p
پارامتر طول نانو تراشه گرافنی، mm	l_{GPL}
ضریب بی بعد پخش تخلخل در ورق به ازای الگوی های مختلف	N_i
ضریب بی بعد چگالی جرمی	N_m
تعداد لایه های ورق نانو کامپوزیتی	n
درجه چند جمله پاسخها در روش پی ریتز	p

- beam in thermal environment, *Procedia Engineering*, 144 (2016) 928-935.
- [16] A. Ugural, *Stresses in plates and shells*, McGraw-Hill, 1999.
- [17] J.N. Reddy, *Energy principles and variational methods in applied mechanics*, John Wiley & Sons, 2017.
- [18] C. Wang, T.M. Aung, Plastic buckling analysis of thick plates using p-Ritz method, *International Journal of Solids and Structures*, 44(18-19) (2007) 6239-6255.
- [19] Y. Hou, G. Wei, Y. Xiang, DSC-Ritz method for the free vibration analysis of Mindlin plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(2) (2005) 262-288.
- [20] S.T. Smith, M.A. Bradford, D.J. Oehlers, Numerical convergence of simple and orthogonal polynomials for the unilateral plate buckling problem using the Rayleigh–Ritz method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(11) (1999) 1685-1707.
- [21] S.H. Hashemi, M. Karimi, H.R.D. Taher, Vibration analysis of rectangular Mindlin plates on elastic foundations and vertically in contact with stationary fluid by the Ritz method, *Ocean Engineering*, 37(2-3) (2010) 174-185.
- [22] A. Leissa, Vibration of a simply-supported elliptical plate, *Journal of Sound and Vibration*, 6(1) (1967) 145-148.
- [23] S. Çeribaşı, G. Altay, Free vibration of super elliptical plates with constant and variable thickness by Ritz method, *Journal of Sound and Vibration*, 319(1-2) (2009) 668-680.
- [24] D. Gorman, Free vibration analysis of right triangular plates with combinations of clamped-simply supported boundary conditions, *Journal of sound and vibration*, 106(3) (1986) 419-431.
- vibration analyses of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite plates based on Chebyshev-Ritz method, *Composite Structures*, 193 (2018) 281-294.
- [8] M. Heidari-Rarani, S. Alimirzaei, K. Torabi, Analytical solution for free vibration of functionally graded carbon nanotubes (FG-CNT) reinforced double-layered nano-plates resting on elastic medium, *Journal of Science and Technology of Composites*, 2(3) (2015) 55-66.
- [9] K. Gao, W. Gao, D. Chen, J. Yang, Nonlinear free vibration of functionally graded graphene platelets reinforced porous nanocomposite plates resting on elastic foundation, *Composite Structures*, 204 (2018) 831-846.
- [10] C. Feng, S. Kitipornchai, J. Yang, Nonlinear bending of polymer nanocomposite beams reinforced with non-uniformly distributed graphene platelets (GPLs), *Composites Part B: Engineering*, 110 (2017) 132-140.
- [11] M. Javani, Y. Kiani, M. Eslami, Geometrically nonlinear free vibration of FG-GPLRC circular plate on the nonlinear elastic foundation, *Composite Structures*, 261 (2021) 113515.
- [12] M. Javani, Y. Kiani, M. Eslami, Free vibration analysis of FG-GPLRC L-shaped plates implementing GDQE approach, *Thin-Walled Structures*, 162 (2021) 107600.
- [13] L.P. Lefebvre, J. Banhart, D.C. Dunand, Porous metals and metallic foams: current status and recent developments, *Advanced engineering materials*, 10(9) (2008) 775-787.
- [14] C. Betts, Benefits of metal foams and developments in modelling techniques to assess their materials behaviour: a review, *Materials Science and Technology*, 28(2) (2012) 129-143.
- [15] V.K. Chaudhari, A. Lal, Nonlinear free vibration analysis of elastically supported nanotube-reinforced composite

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Z. Doust Abed, R. Gholami, R. Ansari, Free Vibrations of Embedded Functionally Graded Graphene Platelets Reinforced Porous Nanocomposite Plates with Various Shapes Using P-Ritz Method, Amirkabir J. Mech Eng., 54(2) (2022) 391-414.

DOI: [10.22060/mej.2022.20132.7174](https://doi.org/10.22060/mej.2022.20132.7174)

