

## Investigation on the Effect of Different Constitutive Models on the Forming Limit of the Sheet under Nonlinear Strain Path

S. Sojodi, A. Basti\*, S. R. Falahatgar, S. M. Mirfalah Nasiri

Department of Mechanical Engineering, University of Guilan, Rasht, Iran

**ABSTRACT:** Forming limit diagrams are a criterion to predict the necking for constructing an optimal design in metal products. In this paper, the Marciniaik-Kuczynski instability theory is used to determine the forming limits of the AA6111-T43 sheet. Also, Hill 48, Gotoh, and Yld2000-2d yield criteria are investigated to describe the yield behavior of the alloy, and their coefficients are computed based on the results obtained from uniaxial and bulge tests. Finally, forming limit diagrams are plotted by employing different yield functions and appropriate hardening models. The comparison between theoretical and experimental results indicated that the limit strains obtained by the Yld2000-2d criterion and Swift model are in better agreement with experimental data than others. Since in complex forming processes, the strain path is rarely linear, the investigation of the forming limit diagram by considering the nonlinear strain path is important. In multi-stage forming processes, while the limit strains are significantly path dependent, the forming limit stress diagram is less dependent on the loading path. However the sensitivity of the forming limit stresses to the path is lower than limit strains, the limit stresses in large pre-strain are not completely loading path independent. The sensitivity of the limit stresses to strain path in addition to the magnitude of the pre-strain, also depends on the used hardening model and yield function that are examined in detail in this study.

### Review History:

Received: Sep. 12, 2021  
Revised: Jan. 07, 2022  
Accepted: Feb. 04, 2022  
Available Online: Feb. 10, 2022

### Keywords:

Forming limit diagram  
Different yield functions  
Nonlinear strain path  
Forming limit stress diagram  
Loading path independent

## 1- Introduction

Since in complex metal forming processes, considering the linear loading condition is not a correct assumption, a lot of research is done to investigate the effect of the strain path on Forming Limits Diagram (FLD). Graf and Hosford [1] investigated the effect of nonlinear strain paths on the forming limits of aluminum alloys, and they announced that the change of the strain path has a great effect on the specimen's formability. Yoshida et al. [2] proposed the Forming Limit Stress Diagram (FLSD) as a valuable criterion because of the path-independence of the limit stresses in metal forming processes. Although later, Yoshida and Kuwabara [3] indicated that the limit stresses are not completely path independent, and the path dependence of FLSD is affected by the hardening behavior of the material. Nurcheshmeh and Green [4] investigated the path dependency of the Forming Limit Stress Diagram (FLSD) for various combined loading history and it was observed that for a range of pre-strain values, the FLSD remain constant along different paths. Wang et al. [5] determined the forming limits of the AA5754-O by applying the Yld2000-2d yield criterion in non-linear loading path processes and they discussed the path-dependence of the limit stress diagrams. Sojodi et al. [6] by applying the modified

Kim-Tuan hardening model, investigated the influence of the compressive normal stress on the path dependence of FLSD. Also, they examined the effect of the pre-strain magnitudes on the sensitivity of FLD to compressive normal stress.

In this paper, the influences of the loading path on forming limit diagrams are studied and the path dependence of FLD and FLSD are analyzed in detail. In the end, the sensitivity of the FLSD to the magnitude of the pre-strain for different constitutive models is discussed and the critical effective strain values that specified the path dependence of FLSD are determined.

## 2- Marciniaik-Kuczynski Model

This method is based on the existence of the initial imperfection that is characterized by the reduction of thickness in a part of the sheet. The initial thickness imperfection is defined as:

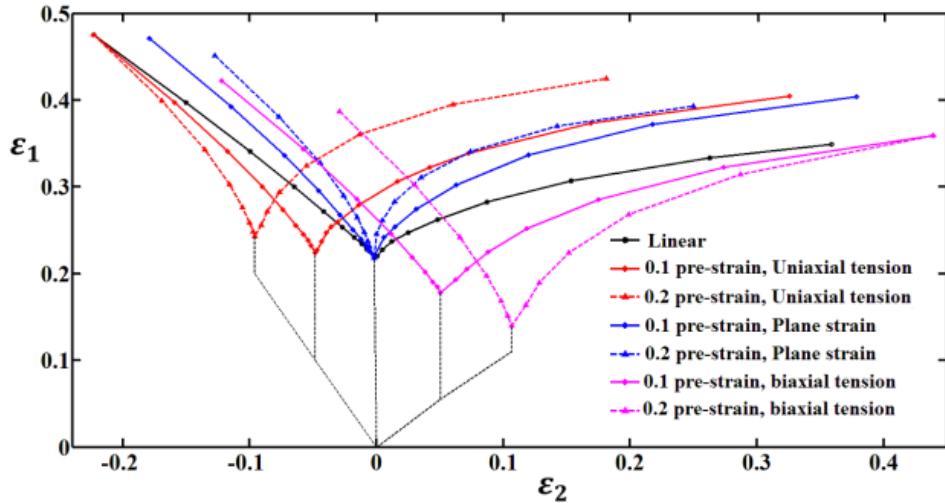
$$f_0 = \frac{t_0^b}{t_0^a} \quad (1)$$

Where  $t_0^a$  and  $t_0^b$  are the initial thickness in the safe

\*Corresponding author's email: basti@guilan.ac.ir



Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit <https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>.



**Fig. 1.** The FLCs based on different pre-strains along a different direction

and defect region, respectively. In the M-K approach, the equivalent strain increment  $d\bar{\varepsilon}$  with a specific stress ratio ( $\alpha = \sigma_2 / \sigma_1$ ) was applied to the safe region and then the other strain and stress component values in this area were computed by using the flow rule, hardening equation, and yield function. The unknown parameters in the groove zone were calculated according to three major assumptions including compatibility condition, geometrical imperfection, and force equilibrium that are expressed as:

$$d\dot{\varepsilon}_{tt}^a = d\varepsilon_{tt}^b \quad (2)$$

$$\begin{cases} \sigma_{nn}^a t^a = \sigma_{nn}^b t^b \\ \sigma_{nt}^a t^a = \sigma_{nt}^b t^b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{nn}^b = \sigma_{nn}^a / f \\ \sigma_{nt}^b = \sigma_{nt}^a / f \end{cases} \quad (3)$$

The Numerical Newton-Raphson method is used to solve the nonlinear set of equations, and the unknown stress and strain components in the defect region are obtained when the effective strain increment in the groove reaches ten times greater than the perfect area. This numerical procedure in each stress ratio is repeated for different groove directions to determine minimum limit strains [4].

### 3- Work-Hardening Models

To investigate the influence of the hardening law on the forming limit diagrams, Swift and voce stress-strain are utilized to describe the mechanical behavior of the AA6111-T43 alloy as [7]:

$$\bar{\sigma} = K (\bar{\varepsilon} + \varepsilon_0)^n \quad (4)$$

$$\bar{\sigma} = A - Be^{-c\bar{\varepsilon}} \quad (5)$$

### 4- Yield Functions

Yld2000-2d yield criteria are expressed as:

- Yld200-2d yield criterion[8]:

$$\phi = \phi' + \phi'' = 2\bar{\sigma}^m \quad (6)$$

$$\phi'' = |2X_2'' + X_1''|^m + |2X_1'' + X_2''|^m \quad (7)$$

$$\phi'' = |2X_2'' + X_1''|^m + |2X_1'' + X_2''|^m \quad (8)$$

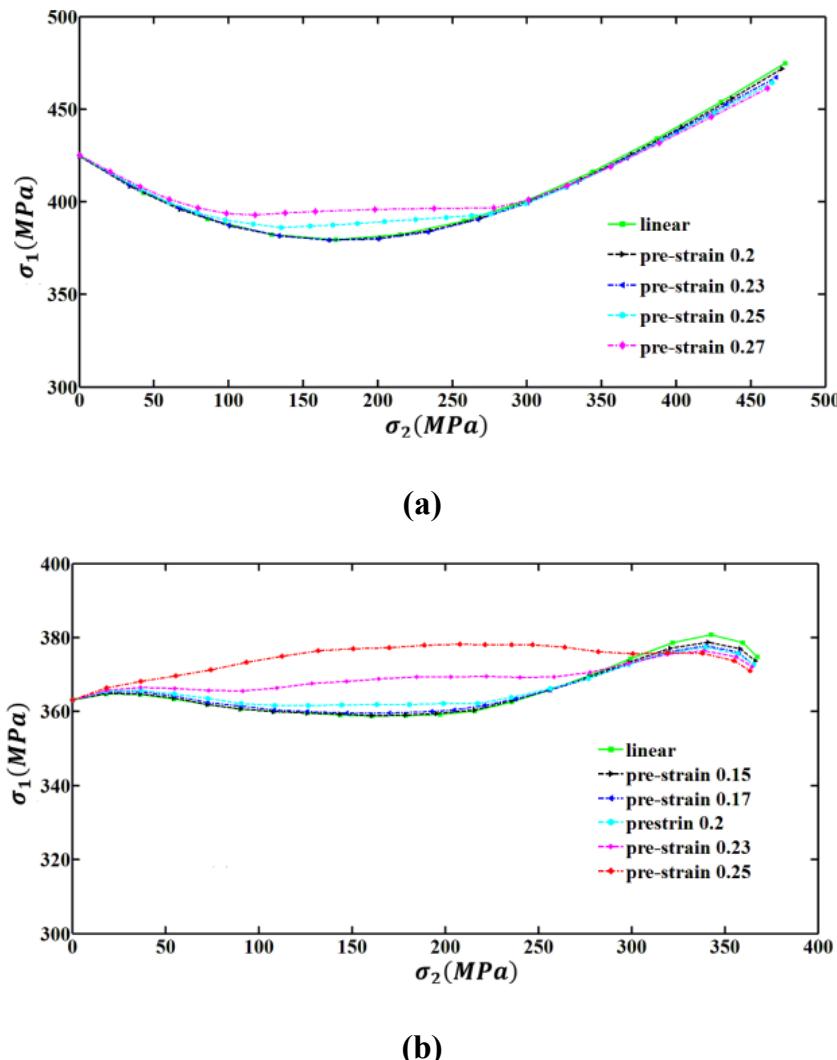
### 5- Results and Discussion

The M-K criterion code was developed to calculate the theoretical forming limit diagram of AA6111-T43 under combined loading paths. Fig. 1 shows the limit strains obtained under various pre-strains along the uniaxial tension, plane strain, and equi-biaxial tension paths.

It was seen in Fig. 1 that the strain path dependence of limit strains under bilinear loading paths with higher pre-strains is more obvious. Therefore, the larger the pre-strain causes the more influence on the forming limits.

In the continuation of this section, the sensitivity of the forming limit stress curves to the strain path are examined. Fig. 2 indicated the forming limit stresses for various pre-effective strains in the uniaxial tension direction.

The criterion for this behavior, dependence or independence of FLSD, is the magnitude of pre-effective strain compared to the value of the effective forming limit



**Fig. 2. FLSDs based on different pre-effective strains by using (a) Swift (b) Voce hardening models**

strain in-plane strain state and linear loading condition (effective FLD0). The calculated effective FLD0 for the Swift and Voce hardening laws are 0.237, and 0.172 respectively. Briefly, if effective pre-strain in the multistep loading path process is less than this critical value, the final limit stresses will coincide with the FLSD in linear condition. But, if the strain path changed after this critical value, the limit stresses will be affected by the pre-strain.

## 6- Conclusion

The most important consequences of this study are below items:

The FLD in nonlinear strain path processes are significantly dependent on the strain path. Although the sensitivity of forming limits in stress space to loading path are less than limit strains, FLSD is not completely path independent.

The forming limit curves in stress space for the multistep strain path processes will be path-dependent if the pre-strain is more than effective FLD0. Also, the selective constitutive model significantly affects the path dependency of the forming limit stress curve.

## References

- [1] A. Graf, W. Hosford, Effect of changing strain paths on, Metallurgical transactions A, 24(11) (1993) 2503-2512.
- [2] K. Yoshida, T. Kuwabara, K. Narihara, S. Takahashi, Experimental verification of the path-independence of forming limit stresses, Int J Form Process, 8(SI) (2005) 283-298.
- [3] K. Yoshida, T. Kuwabara, Effect of strain hardening behavior on forming limit stresses of steel tube subjected

- to nonproportional loading paths, International journal of plasticity, 23(7) (2007) 1260-1284.
- [4] M. Nurcheshmeh, D.E. Green, Investigation on the strain-path dependency of stress-based forming limit curves, International journal of material forming, 4(1) (2011) 25-37.
- [5] H. Wang, Y. Yan, F. Han, M. Wan, Experimental and theoretical investigations of the forming limit of 5754O aluminum alloy sheet under different combined loading paths, International Journal of Mechanical Sciences, 133 (2017) 147-166.
- [6] S. Sojodi, A. Basti, S.R. Falahatgar, S.M.M. Nasiri, Investigation on the forming limit diagram of AA5754-O alloy by considering strain hardening model, strain path, and through-thickness normal stress, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 113(9) (2021) 2495-2511.
- [7] D. Banabic, M. Vos, Modelling of the forming limit band—a new method to increase the robustness in the simulation of sheet metal forming processes, CIRP annals, 56(1) (2007) 249-252.
- [8] B. Ma, M. Wan, Z. Cai, W. Yuan, C. Li, X. Wu, W. Liu, Investigation on the forming limits of 5754-O aluminum alloy sheet with the numerical Marciniak–Kuczynski approach, International Journal of Mechanical Sciences, 142 (2018) 420-431.

**HOW TO CITE THIS ARTICLE**

*S. Sojodi, A. Basti, S. R. Falahatgar, S. M. Mirfalah Nasiri, Investigation on the Effect of Different Constitutive Models on the Forming Limit of the Sheet under Nonlinear Strain Path , Amirkabir J. Mech Eng., 54(4) (2022) 191-194.*

**DOI:** [10.22060/mej.2022.20519.7256](https://doi.org/10.22060/mej.2022.20519.7256)





## بررسی اثر مدل‌های ساختاری مختلف بر حد شکل دهی ورق تحت مسیر کرنش غیرخطی

سهیلا سجودی<sup>\*</sup>، علی باستی<sup>\*</sup>، سید رضا فلاحتگر، سیده مریم میرفلاح نصیری

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت، ایران.

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۰/۰۶/۲۱

بازنگری: ۱۴۰۰/۱۰/۱۷

پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۱۵

ارائه آنلاین: ۱۴۰۰/۱۱/۲۱

### کلمات کلیدی:

نمودار حد شکل دهی

توابع تسلیم مختلف

مسیر کرنش غیرخطی

نمودار حد تنش شکل دهی

مستقل از مسیربارگذاری

**خلاصه:** نمودار حد شکل دهی معیاری جهت پیش‌بینی وقوع گلویی به منظور طراحی بهینه در محصولات فلزی است. در این مقاله از تئوری ناپایداری مارسینیاک-کوزینسکی جهت تعیین حد شکل دهی ورق آلومینیوم ۶۱۱۱-T ۴۳ استفاده شده است. همچنین معیارهای تسلیم ناهمسانگرد هیل ۴۸ Gotoh ۲-۲۰۰۰D Yld برای توصیف رفتار تسلیم آلیاژ مورد بررسی قرار می‌گیرند و پارامترهای ثابت این توابع با دردسترس بودن مقادیر حاصل از آزمون کشنش تکمحوره و تست بالج محاسبه می‌شوند. در نهایت، نمودارهای حد شکل دهی با بکارگیری توابع تسلیم مختلف و روابط کارسختی مناسب ترسیم و با نتایج تجربی در دسترس مقایسه می‌شوند. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که کرنش‌های حدی حاصل از بکارگیری تابع تسلیم D ۲-۲۰۰۰ Yld و مدل سخت‌شوندگی سوئیفت مطابقت بهتری با نتایج تجربی دارند. از آنجا که در فرایندهای شکل دهی پیچیده، بندرت مسیر کرنش خطی است، بررسی نمودارهای حد شکل دهی با درنظر گرفتن مسیر کرنش‌های غیرخطی حائز اهمیت است. در فرایندهای شکل دهی چند مرحله‌ای، در حالی که کرنش‌های حدی بشدت تحت تأثیر مسیر کرنش می‌باشند، نمودار حد تنش شکل دهی وابستگی کمتری به مسیر بارگذاری دارد. هرچند که وابستگی تنش‌های حدی به مسیر کمتر از کرنش‌های حدی است، ولی این نمودارها در مقادیر پیش‌کرنش بالا کاملاً مستقل از مسیر بارگذاری نیستند و این وابستگی تنش‌های حدی به مسیر کرنش علاوه بر مقدار پیش‌کرنش به روابط کارسختی و معیار تسلیم بکارگرفته شده نیز بستگی دارد که این موضوع در این مقاله با جزئیات مورد بررسی قرار می‌گیرد.

### ۱- مقدمه

ناپایداری مارسینیاک-کوزینسکی پرداختند. آن‌ها برای محاسبه ضرایب ثابت معیار تسلیم از روش نیوتون-رافسون جهت به حداقل رساندن توابع خطا استفاده کردند. بارلات و همکاران [۳] تابع تسلیم D ۲-۲۰۰۰ Yld را یک معیار مناسب برای پیش‌بینی رفتار تسلیم آلیاژهای آلومینیوم در حالت تنش صفحه‌ای معرفی کردند و به بیان روابط جهت تعیین ضرایب ثابت معیار جدیدشان پرداختند و تابع خطا مربوط به آن را بر اساس نتایج خروجی از آزمون کشنش ساده و تست هیدرولیکی بالج در مقاله‌شان ارائه دادند. باناییک و واس [۴] مقادیر تنش‌های تسلیم و ضرایب ناهمسانگرد حاصل از نتایج آزمایشگاهی خود را در جهت‌های مختلف برای آلیاژ ۶۱۱۱-T ۴۳ AA بدست آورده‌اند و به تعیین تئوری و تجربی حد شکل دهی ورق پرداختند. آرتز و بارلات [۵] معیارهای تسلیم p ۱۸-۲۰۱۱ Yld و p ۲۷-۲۰۱۱ Yld را معرفی و پارامترهای ثابت این معیارهای تسلیم را برای آلیاژ H ۱۹-۳۱۰۴-AIISI ۴۰۹ AA و L ۲۰۹۰-T ۳ AA محاسبه کردند. نصیری و

یکی از ابزارهای مهم در طراحی فرایندهای شکل دهی ورق فلزی، نمودارهای حد شکل دهی است که با پیش‌بینی دقیق آن‌ها می‌توان از وقوع گلویی در ورق جلوگیری کرد. تئوری‌های زیادی جهت تعیین حد شکل دهی آلیاژهای فلزی ارائه شد که یکی از پرکاربردترین آنها مدل ارائه شده توسط مارسینیاک و کوزینسکی است که به تئوری M-K معروف شد [۱]. پیش‌بینی دقیق رفتار گلویی آلیاژ فلزی علاوه بر تئوری ناپایداری مناسب، به استفاده از روابط ساختاری مناسب نیز نیاز دارد. به همین دلیل ارائه مدل‌های کارسختی و معیارهای تسلیم جدید و پیشرفتی و تعیین پارامترهای ثابت آنها همواره مورد توجه دانشمندان حوزه شکل دهی فلزات، است. بوتوک BBC ۲۰۰۲ و همکاران [۲] با بکارگیری دو معیار تسلیم ۹۶ Yld و ۵۶ Yld به تعیین نمودار حد شکل دهی آلیاژ XXX AA با استفاده از تئوری

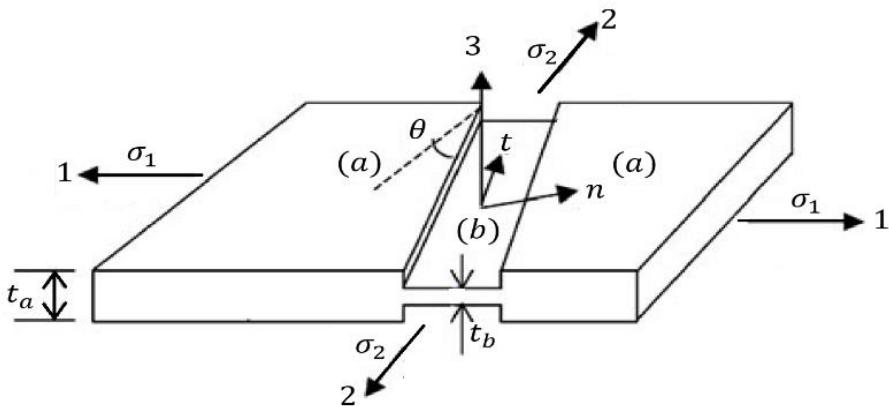
\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: basti@guilan.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسنده‌گان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس <https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode> دیدن فرمائید.



به بررسی اثر مسیر کرنش بر حد تنش و کرنش شکل دهی ورق پرداختند و مستقل یا وابسته به مسیر کرنش بودن تنش های حدی را در مقادیر پیش کرنش مختلف مورد ارزیابی قرار دادند. آن ها همچنین با بکارگیری تابع تسلیم هیل ۴۸ و هاسفورد ۷۹، حد شکل دهی ورق تحت بارگذاری غیرخطی را بررسی کردند و نشان دادند که تابع تسلیم غیر درجه دو هاسفورد ۷۹ معیار مناسبتری برای پیش بینی حد شکل دهی ورق نسبت به تابع درجه دوم هیل ۴۸ است [۱۷]. ژاله فر و همکاران [۱۸] بطور آزمایشگاهی و تئوری به تعیین حد شکل دهی ورق AA در فرایند با بارگذاری تناوبی و غیر تناوبی پرداختند و در آن نمودارهای حد تنش و کرنش شکل دهی را مورد بررسی قرار دادند و تنش حد شکل دهی را مستقل از مسیر بارگذاری و شاخصی مناسب در بررسی شکل دهی فرایندهای مانند هیدرو فرمینگ معرفی کردند. وانگ و همکاران [۱۹] حد شکل دهی ورق آلومینیوم AA ۵۷۵۴-O را با بکارگیری تابع تسلیم D ۲-۲۰۰۰ در فرایندهای با بارگذاری غیر تناوبی و چند مرحله ای تعیین کردند و نشان دادند که کرنش های حدی در مقایسه با تنش های حدی، وابستگی بیشتری به مسیر کرنش دارند و منحنی حد تنش شکل دهی را در مقادیر با پیش کرنش گذاری بالا مورد ارزیابی قرار دادند. عرفانیان و هاشمی [۲۰] با بکارگیری تابع تسلیم Yld ۲۰۱۱ نمودارهای حدی را در نظر گرفتن مسیر کرنش، تنش نرمال و تنش نمودارهای حدی با توجه به اینکه در فرایندهای مختلف شکل دهی، مسیر کرنش نقاط مختلط ورق لزوماً خطی نیست، استفاده از منحنی های حد شکل دهی که از مسیر های خطی بدست آمده اند، دقت کافی را ندارند. اما با تغییر مسیر کرنش با استفاده از پیش کرنش گذاری مناسب ورق در فرایندهای شکل دهی می توان دقت حد شکل پذیری پیش بینی شده ورق را بهبود بخشید. گراف و هاسفورد [۱۳] بطور آزمایشگاهی به بررسی اثر مسیر کرنش بر حد شکل دهی ورق T ۲۰۰۸-T AL پرداختند و تأثیر محسوس پیش کرنش گذاری در راستای کشش تک محوره، دوممحوره و کرنش صفحه ای بر نمودار حد شکل دهی را تأیید کردند. یوشیدا و همکاران [۱۴] نمودار حد تنش شکل دهی را عنوان یک معیار ارزشمند برای پیش بینی آسیب در ورق ها و لوله های فلزی معرفی کردند. آن ها پیش بینی حد تنش شکل دهی را بدلیل مستقل از مسیر بارگذاری بودند، در فرایندهای پیچیده صنعتی و چند مرحله ای، پر کاربرد داشتند. هر چند که بعدها یوشیدا و کووالبارا [۱۵] اعلام کردند که تنش های حد شکل دهی بطور کامل مستقل از مسیر نیستند و این وابستگی حد تنش شکل دهی در فرایندهای با بارگذاری چند مرحله ای به رفتار سخت شوندگی ماده بستگی دارد. نور چشم و گرین [۱۶] با بکارگیری نتایج آزمایشگاهی در دسترس،

همکاران [۶] با استفاده از معیار تسلیم p ۲۰۱۱-Yld ۱۸-۲۰۱۱ به بررسی اثر تنش نرمال فشاری بر حد شکل دهی ورق H ۱۹-۳۱۰۴-AA پرداختند. همچنین با توجه به فرمولبندی سه بعدی p ۱۸-۲۰۱۱-Yld ، نمودار حد شکل دهی را در حالت جامع تعیین کردند و اثر تنش نرمال فشاری و تنش مماسی بین ضخامتی را نیز مورد بررسی قرار دادند [۷]. وانگ و همکاران Gotoh [۸] با استفاده از معیارهای تسلیم فون میزز، هیل ۴۸، بارلات ۸۹، و D ۲-۲۰۰۰-Yld به بررسی نمودار حد شکل دهی آلیاژ آلومینیوم ۲۰۲۴-O AA در دماهای مختلف پرداختند. آپولاری و هلム [۹] با بکارگیری دو Gotoh دستاورد مستقیم و معکوس، ضرایب معیار تسلیم درجه چهارم را بدست آورند و با مقایسه نمودارهای حاصل از مدل های ارائه شده با نتایج تجربی، صحت ضرایب پیش بینی شده در توصیف رفتار تسلیم آلیاژ را مورد تأیید قرار دادند. علاوه بر تنش تسلیم، روابط کارسختی مختلف نیز می تواند بر دقت حد شکل دهی مؤثر باشد، بر این اساس همواره روابط کارسختی جدیدی برای افزایش دقت محاسبات ارائه می شود. فام و همکاران [۱۰] مدل سخت شوندگی کیم-توان را برای آلیاژ DP ۹۸۰ و AA ۵۰۵۲-O معرفی کردند و در مقاله ای دیگر، از این مدل کارسختی برای تعیین حد شکل دهی آلیاژ تیتانیوم استفاده کردند [۱۱]. آن ها همچنین مدل اصلاح شده کیم-توان را برای توصیف رفتار پلاستیک آلیاژ تیتانیوم تجاری ارائه دادند [۱۲]. با توجه به اینکه در فرایندهای مختلف شکل دهی، مسیر کرنش نقاط مختلف ورق لزوماً خطی نیست، استفاده از منحنی های حد شکل دهی که از مسیر های خطی بدست آمده اند، دقت کافی را ندارند. اما با تغییر مسیر کرنش با استفاده از پیش کرنش گذاری مناسب ورق در فرایندهای شکل دهی می توان دقت حد شکل پذیری پیش بینی شده ورق را بهبود بخشید. گراف و هاسفورد [۱۳] بطور آزمایشگاهی به بررسی اثر مسیر کرنش بر حد شکل دهی ورق T ۲۰۰۸-T AL پرداختند و تأثیر محسوس پیش کرنش گذاری در راستای کشش تک محوره، دوممحوره و کرنش صفحه ای بر نمودار حد شکل دهی را تأیید کردند. یوشیدا و همکاران [۱۴] نمودار حد تنش شکل دهی را عنوان یک معیار ارزشمند برای پیش بینی آسیب در ورق ها و لوله های فلزی معرفی کردند. آن ها پیش بینی حد تنش شکل دهی را بدلیل مستقل از مسیر بارگذاری بودند، در فرایندهای پیچیده صنعتی و چند مرحله ای، پر کاربرد داشتند. هر چند که بعدها یوشیدا و کووالبارا [۱۵] اعلام کردند که تنش های حد شکل دهی بطور کامل مستقل از مسیر نیستند و این وابستگی حد تنش شکل دهی در فرایندهای با بارگذاری چند مرحله ای به رفتار سخت شوندگی ماده بستگی دارد. نور چشم و گرین [۱۶] با بکارگیری نتایج آزمایشگاهی در دسترس،



شکل ۱. نمایش مدل ناپایداری M-K

Fig. 1. A View of the M-K instability model

در شکل ۱ نشان داده شده است، ناحیه سالم با a و ناحیه شیار با b نامگذاری می‌شود. فاکتور نقص مفروض در این تئوری ناشی از عیوب میکروساختاری است که در ورق، قبل از شکل‌دهی وجود داشته است. در این مدل، عامل نقص اولیه بصورت نسبت ضخامت ناحیه شیار به ناحیه سالم، مطابق رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$f_0 = \frac{t_0^b}{t_0^a} \quad (1)$$

شکل‌دهی، در حالت بارگذاری غیرخطی با پیش‌کرنش گذاری در سه جهت تکمحوره، دومحوره و کرنش صفحه‌ای رسم می‌شوند. در نهایت، وابستگی تنش‌های حدی به مسیر کرنش برای مقادیر مختلف پیش‌کرنش در راستای کشش تکمحوره تحلیل می‌شود و اثر مدل‌های سخت شوندگی و توابع تسلیم بکار رفته بر مستقل از مسیر بودن تنش‌های حدی با جزئیات مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین، مقدار پیش‌کرنش بحرانی برای هر مدل ساختاری که تعیین کننده مستقل از مسیر بودن تنش‌های حدی است، محاسبه شده است.

## ۲- تعیین نمودار حد شکل‌دهی

در این مقاله از توابع تسلیم هیل ۴۸، Gotoh ۲-۲۰۰۰D و Yld ۶۱۱۱-T ۴۳ بیان رفتار پلاستیک آلیاژ آلمینیوم AA استفاده می‌شود. پارامترهای ثابت معیارهای تسلیم با استفاده از ضرایب ناهمسانگرد تجربی تعیین می‌شوند. تعیین تئوری حد شکل‌دهی ورق با بکارگیری مدل ناپایداری مارسینیاک-کوزینسکی انجام می‌شود و تأثیر پارامترهایی همچون روابط کارسختی و توابع تسلیم مختلف بر نمودارهای حد شکل‌دهی مورد بررسی قرار می‌گیرند.

که  $t$  ضخامت ورق و زیر نویس • نشانه حالت اولیه ورق است. عامل نقص در طی مراحل حل، مطابق با رابطه زیر تغییر می‌کند:

$$\frac{df}{f} = d\varepsilon_3^b - d\varepsilon_3^a \Rightarrow f = f_0 \exp(\varepsilon_3^b - \varepsilon_3^a) \quad (2)$$

که  $\varepsilon_3$  کرنش ضخامتی ورق است.

مطابق شکل ۱، چرخش زاویه شیار نسبت به راستای اصلی ورق باید در تحلیل مورد بررسی قرار گیرد. در مدل M-K مقدار اولیه دلخواهی برای زاویه  $\theta$  در نظر گرفته می‌شود و در هر نمو تغییر شکل این مقدار زاویه مطابق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

## ۱- تئوری ناپایداری مارسینیاک-کوزینسکی

آنالیز مارسینیاک-کوزینسکی با فرض وجود یک ناهمگنی اولیه در ضخامت ورق، که بصورت یک شیار است، ارائه شد. در این مدل همانطور که

است. معادلات تعادل با بکارگیری عامل نقص بصورت زیر استخراج می‌شود:

$$\begin{cases} F_{nn}^a = F_{nn}^b \\ F_{nt}^a = F_{nt}^b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{nn}^a t^a = \sigma_{nn}^b t^b \\ \sigma_{nt}^a t^a = \sigma_{nt}^b t^b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{nn}^b = \sigma_{nn}^a / f \\ \sigma_{nt}^b = \sigma_{nt}^a / f \end{cases} \quad (8)$$

به این ترتیب با در نظر گرفتن مدل M-K، معادلات حاکم بین دو ناحیه تعیین می‌شوند که برای حل دستگاه معادلات از روش نیوتون-رافسون در هر مرحله‌ی کرنش‌گذاری استفاده می‌شود. با اعمال کرنش‌های متوالی مشاهده می‌شود که نمو کرنش در ناحیه شیار بیشتر از ناحیه سالم می‌شود و هنگامی که نمو کرنش مؤثر در ناحیه شیار  $10$  برابر ناحیه سالم شود  $d\bar{\varepsilon}^b / d\bar{\varepsilon}^a \geq 10$  گلویی آغاز می‌شود. در این هنگام عملیات حل متوقف و کرنش‌های متناظر برای ناحیه سالم ( $\varepsilon_1^a, \varepsilon_2^a$ ) ثبت می‌شود. این عمل برای نسبت کرنش‌های  $\rho \leq 1 / 5$  تکرار می‌شود و کرنش‌های حدی در نمودار ترسیم می‌گردند [۱۶].

## ۲-۲- مدل‌های کارسختی

قوانين سخت شوندگی در واقع روابطی ریاضی جهت توصیف رفتار تعییر شکل پلاستیک ماده هستند که دقت این توابع در پیش‌بینی حد شکل دهی نیز بسیار مؤثر است. در این مقاله جهت بررسی اثر روابط کارسختی بر نمودار حد شکل دهی، مدل‌های سخت شوندگی سوئیفت و وس، مطابق روابط زیر برای توصیف رفتار مکانیکی آلیاژ آلومینیوم AA ۶۱۱۱-T ۴۳ مورد استفاده قرار می‌گیرند [۴ و ۲۲].

$$\bar{\sigma} = K (\bar{\varepsilon} + \varepsilon_0)^n \quad (9)$$

$$\bar{\sigma} = A - Be^{-c\bar{\varepsilon}} \quad (10)$$

در رابطه‌ی بالا  $\bar{\sigma}$  تنש مؤثر،  $\bar{\varepsilon}$  کرنش موثر پلاستیک،  $K$  مقدار کرنش قبل تسلیم،  $n$  ثابت‌های ماده در مدل کارسختی سوئیفت و  $A$ ،  $B$  و  $c$  پارامترهای ثابت مدل وس می‌باشند که مقادیر مربوط به آن‌ها برای آلیاژ آلومینیوم AA ۶۱۱۱-T ۴۳ در جدول ۱ آورده شده است.

$$\tan(\theta + d\theta) = \frac{1+d\varepsilon_1^a}{1+d\varepsilon_2^a} \tan(\theta) \quad (3)$$

در رابطه‌ی بالا  $d\varepsilon_1^a$  و  $d\varepsilon_2^a$  بترتیب کرنش‌های اصلی بیشینه و کمینه در ناحیه سالم هستند که مطابق با قوانین شارش بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4)$$

$\bar{\sigma}$  تابع تسلیم انتخاب شده برای ورق است و  $d\lambda$  ضریب ثابت لحظه‌ای است که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$d\lambda = d\bar{\varepsilon} \quad (5)$$

در حل به روش M-K، با در نظر گرفتن یک نسبت کرنش  $\rho$  یا نسبت تنش  $\alpha$ ، نمو کرنش مؤثر  $d\bar{\varepsilon}$  به ناحیه سالم اعمال می‌شود.

$$\rho = \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} = \frac{\partial \bar{\sigma} / \partial \sigma_2}{\partial \bar{\sigma} / \partial \sigma_1}, \quad \alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad (6)$$

با بکارگیری روابط سخت شوندگی و توابع تسلیم برای مقدار وارد شده  $d\bar{\varepsilon}$ ، مقادیر تنش و نمو کرنش در جهات اصلی در ناحیه سالم تعیین می‌شوند. بعد از تعیین مجھولات ناحیه سالم با بکارگیری معادلات سازگاری و معادلات تعادل، به تعیین مجھولات در ناحیه شیار پرداخته می‌شود. معادله سازگاری در تحلیل M-K عبارتست از:

$$d\varepsilon_{tt}^a = d\varepsilon_{tt}^b \quad (7)$$

که،  $d\varepsilon_{tt}^b$  و  $d\varepsilon_{tt}^a$  مقادیر کرنش مماسی در راستای شیار در ناحیه a و b

### جدول ۱. پارامترهای ثابت مدل‌های کارسختی سوئیفت و وس برای آلیاژ AA 6111-T43

Table 1. The constant parameters of the Swift and Voce hardening models for AA6111-T43 alloy [4]

سوئیفت			وس		
$K$ Mpa	$\varepsilon_c$	$n$	$A$ Mpa	$B$ Mpa	$C$
۵۲۰	۰	۰/۲۷	۳۷۲/۲۵	۲۳۰/۳۶	۹/۹۰۱

### ۲-۳- معیارهای تسلیم

برای پیش‌بینی رفتار تسلیم ماده است که در حالت سه بعدی بصورت زیر بیان می‌شود [۸]:

$$\bar{\sigma}^2 = F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2(L\sigma_{yz}^2 + M\sigma_{zx}^2 + N\sigma_{xy}^2) \quad (12)$$

معیار تسلیم هیل ۴۸ در حالت تنفس صفحه‌ای بصورت زیر ساده می‌شود:

$$\bar{\sigma}^2 = (G + H)\sigma_x^2 - 2H\sigma_x\sigma_y + (F + H)\sigma_y^2 + 2N\sigma_{xy}^2 \quad (13)$$

در رابطه بالا،  $F$ ،  $G$  و  $H$  پارامترهای ناهمسانگرد تابع تسلیم هیل ۴۸ هستند که با استفاده از روابط زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned} F &= \frac{r_0}{(1+r_0)r_{90}}, & G &= \frac{1}{1+r_0} \\ H &= \frac{r_0}{1+r_0}, & N &= \frac{(1+2r_{45})(r_0+r_{90})}{2(1+r_0)r_{90}} \end{aligned} \quad (14)$$

$r_\phi$  ضرایب ناهمسانگرد در جهت‌های مختلف هستند که مقادیر مربوط به آن برای آلیاژ آلومینیوم AA 6111-T43 در جدول ۲ آورده شده است. همچنین ضرایب ثابت محاسبه شده برای تابع هیل ۴۸ نیز در جدول ۳ ارائه شده است.

تابع تسلیم، معیاری جهت تعیین شروع تغییر شکل پلاستیک مواد هستند که در پیش‌بینی حد شکل‌دهی ورق فلزی بسیار حائز اهمیت می‌باشند. به همین دلیل، تلاش‌های متعددی صورت گرفته تا با ارائه روابط تئوری مختلف، امکان توصیف ریاضی رفتار تسلیم به نحوی مناسب فراهم گردد. سطح تسلیم معمولاً بصورت رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\phi(\bar{\sigma}, Y) = \bar{\sigma} - Y = 0 \quad (11)$$

که در رابطه بالا  $\bar{\sigma}$  تنفس مؤثر و یک تابع اسکالر از تانسور انحرافی تنفس و  $Y$  مقدار تنفس تسلیم بدست آمده از آزمون تجربی است [۶]. در این مقاله جهت بررسی اثر معیار تسلیم بر نمودار حد شکل‌دهی، توابع هیل ۴۸، ۲۰۰-D و Gotoh ۲-۲۰۰-Yd برای پیش‌بینی رفتار تسلیم ورق آلومینیوم AA 6111-T43 مورد استفاده قرار می‌گیرند. پارامترهای ثابت هریک از توابع تسلیم با استفاده از مقادیر تنفس تسلیم ( $\sigma_\phi$ ) و ضرایب ناهمسانگردی ( $r_\phi$ ) در جهت‌های مختلف نسبت به راستای نورد ورق که در جدول ۲ آورده شده است، تعیین می‌شوند. بنابر گزارش ارائه شده در مرجع [۴]، در میان هشت داده جدول ۲، شش داده ( $r_0, r_{45}, r_{90}, \sigma_{45}, \sigma_9, \sigma_{45}, \sigma_9$ ) حاصل از آزمون کشش ساده و دو داده ( $r_b, \sigma_b$ ) حاصل تست بالج هستند که برای هر آزمایش، پنج نمونه ورق آلومینیومی AA 6111-T43، با ضخامت ۰/۹۹ میلیمتر مورد استفاده قرار گرفت و میانگین نتایج حاصل از پنج نمونه در جدول ۲ مشاهده می‌شود.

### ۲-۳-۱- معیار تسلیم هیل ۴۸

تابع تسلیم درجه دو هیل ۴۸، یکی از ساده‌ترین و متدائل‌ترین توابع

## جدول ۲. مقادیر تنש‌های تسلیم و ضرایب ناهمسانگرد $r$ در جهت‌های مختلف ورق برای آلیاژ AA 6111-T 43

Table 2. Yield stress and r-value in different directions for AA6111-T43 alloy [4]

$\sigma.$ Mpa	$\sigma_{45}$ Mpa	$\sigma_9.$ Mpa	$\sigma_b$ Mpa	$r.$	$r_{45}$	$r_9.$	$r_b$
۱۴۰/۱	۱۳۳/۹	۱۳۱/۴	۱۴۰	۰/۸۸۴	۰/۷۰۸	۰/۷۷	۱/۲۲۵

## جدول ۳. پارامترهای ثابت تابع تسلیم هیل ۴۸ برای آلیاژ AA 6111-T 43

Table 3. The constant parameters of the Hill48 yield function for AA6111-T43 alloy

$F$	$G$	$H$	$N$
۰/۶۵۱۷	۰/۵۳۰۸	۰/۴۶۹۲	۱/۴۲۸۴

## جدول ۴. پارامترهای ثابت تابع تسلیم Gotoh برای آلیاژ AA 6111-T 43

Table 4. The constant parameters of the Gotoh yield function for AA6111-T43 alloy

$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$A_8$	$A_9$
۱	-۱/۸۷۶۹	۲/۷۵۱۳	-۲/۱۶۳۹	۱/۲۹۲۳	۶/۳۷۸۴	-۴/۴۰۷۳	۷/۲۵۰۱	۸/۹۵۱۶

:Gotoh -۲ -۳ -۴ معیار تسلیم

از آنجایی که تابع درجه دوم هیل ۴۸ دارای محدودیتهایی است، در ادامه تابع چندجمله‌ای درجه چهارم Gotoh مورد بررسی قرار می‌گیرد. این تابع تسلیم برای پیش‌بینی آغاز رفتار پلاستیک ماده در حالت تنش صفحه‌ای فرمول‌بندی شده است. رابطه معیار تسلیم Gotoh بصورت زیر بیان می‌شود [۲۳]:

$$\bar{\sigma}^4 = A_1 \sigma_x^4 + A_2 \sigma_x^3 \sigma_y + A_3 \sigma_x^2 \sigma_y^2 + A_4 \sigma_x \sigma_y^3 + A_5 \sigma_y^4 + (A_6 \sigma_x^2 + A_7 \sigma_x \sigma_y + A_8 \sigma_y^2) \sigma_{xy}^2 + A_9 \sigma_{xy}^4 \quad (15)$$

$$A_1 = 1, A_2 = -\frac{4r_0}{1+r_0}, \quad (16)$$

$$A_4 = -\frac{4r_{90}}{1+r_{90}} \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_{90}} \right)^4, \quad A_5 = \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_{90}} \right)^4$$

$$A_3 = \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_b} \right)^4 - (A_1 + A_2 + A_4 + A_5),$$

$$A_9 = \frac{16r_{45}}{1+r_{45}} \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_{45}} \right)^4 + \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_b} \right)^4$$

$$A_6 = \frac{1+5r_0}{1+r_0} + 4 \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_{45}} \right)^4 - \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_{90}} \right)^4,$$

$$A_8 = \frac{1+5r_{90}}{1+r_{90}} \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_{90}} \right)^4 + 4 \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_{45}} \right)^4 - 1$$

$$A_7 = \frac{16}{1+r_{45}} \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_{45}} \right)^4 - 2 \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_b} \right)^4 - A_6 - A_8$$

تا  $A_9$  پارامترهای ثابت ماده در تابع تسلیم Gotoh هستند که با استفاده از داده‌های ( $r, r_{45}, r_{90}, r_b, \sigma, \sigma_{45}, \sigma_b, \sigma_9$ ) و روابط مستقیم زیر محاسبه می‌شوند [۹].

پارامترهای ثابت معیار تسلیم Gotoh برای آلیاژ آلومینیوم AA 6111-T 43 مطابق روابط بالا تعیین و در جدول ۴ نمایش داده شده‌اند.

### جدول ۵. داده‌های مورد نیاز جهت تعیین پارامترهای ثابت تابع تسلیم [۲۵] Yld ۲-۲۰۰۰-D

Table 5. Required data to determine the parameters of the Yld2000-2d yield function [25]

$q_{yj}$	$q_{xj}$	$\delta_j$	$\gamma_j$	$j$	راستای کشش ورق
$2+r_i$	$1-r_i$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	۱	۰°
$1-r_{q_1}$	$2+r_{q_1}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	۲	۹۰°
$2+r_b$	$1+2r_b$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	۳	دو محوره

$$\begin{bmatrix} L'_{11} \\ L'_{12} \\ L'_{21} \\ L'_{22} \\ L'_{66} \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 8 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & -4 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & -4 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_8 \end{bmatrix} \quad (22)$$

در روابط (۲۱) و (۲۲)،  $\alpha_1$  تا  $\alpha_8$ ، هشت ثابت ناهمسانگرد برای معیار تسلیم Yld ۲-۲۰۰۰ d هستند که برای تعیین آنها باید مقادیر تنش (۷ $r_i$ ,  $r_{q_1}$ ,  $r_{q_1}$ ,  $r_b$ ) و ضرایب ناهمسانگردی ( $\sigma_i$ ,  $\sigma_{q_1}$ ,  $\sigma_{q_1}$ ,  $\sigma_b$ ) در معادلات زیر قرار گیرند [۳]:

$$F = \phi - 2\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}\right)^a = 0 \quad (23)$$

$$G = q_x \frac{\partial \phi}{\partial S_{xx}} - q_y \frac{\partial \phi}{\partial S_{yy}} = 0 \quad (24)$$

$$\phi = |\alpha_1 \gamma - \alpha_2 \delta|^a + |\alpha_3 \gamma + 2\alpha_4 \delta|^a + |\alpha_5 \gamma + \alpha_6 \delta|^a \quad (25)$$

در روابط بالا  $\gamma$  و  $\delta$  مقادیر ثابت هستند و  $q$  تابع ضریب ناهمسانگردی است که روابط مربوط به آنها با جزئیات در جدول ۵ نمایش داده شده است.

در نهایت با قرار دادن مقدار تابع  $\phi$  از رابطه (۲۵) در روابط (۲۳) و (۲۴)، معادلات اصلی جهت تعیین پارامترهای ثابت معیار تسلیم Yld ۲۰۰۰-۲ d مربوط زیر تعیین می‌شوند [۲۵]:

تابع تسلیم Yld ۲-۲۰۰۰-D یک معیار مناسب برای توصیف رفتار ناهمسانگرد ورق‌های آلومینیومی در حالت تنش صفحه‌ای است. روابط مربوط به این تابع تسلیم بصورت زیر بیان می‌شوند [۲۶]:

$$\phi = \phi' + \phi'' = 2\bar{\sigma}^a \quad (17)$$

$$\phi' = |X'_1 - X'_2|^a, \quad \phi'' = |2X''_2 + X''_1|^a + |2X''_1 + X''_2|^a \quad (18)$$

در روابط بالا  $\bar{\sigma}$  تنش مؤثر و  $a$  پارامتر ماده است که برای مواد با ساختار FCC  $a = 8$  پیشنهاد می‌شود.  $\phi$  حاصل جمع دو معادله همسانگرد و  $X'_i$  و  $X''_j$  مقادیر اصلی ماتریس‌های  $X'$  و  $X''$  هستند.  $X'$  و  $X''$  مطابق روابط زیر بدست می‌آیند:

$$X' = L'.\sigma \quad (19)$$

$$X'' = L''.\sigma \quad (20)$$

و  $L''$  طبق روابط زیر با هشت ثابت  $\alpha_1$  تا  $\alpha_8$  بیان می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} L'_{11} \\ L'_{12} \\ L'_{21} \\ L'_{22} \\ L'_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} x_1'' &= \frac{\alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6}{9}, \\ x_2'' &= \frac{2\alpha_5 + \alpha_6 - \alpha_3 - 2\alpha_4}{3} \end{aligned} \quad (31)$$

$$V''' = a \left( \frac{\sqrt{x_2'^2 + 4\alpha_7^2}}{2} \right)^{a-1} \quad (32)$$

$$V'''' = a \left( \frac{3x_1'' - \sqrt{x_2'^2 + 4\alpha_8^2}}{4} \right) \left| \frac{3x_1'' - \sqrt{x_2'^2 + 4\alpha_8^2}}{4} \right|^{a-2} \quad (33)$$

$$W'''' = a \left( \frac{3x_1'' + \sqrt{x_2'^2 + 4\alpha_8^2}}{4} \right) \left| \frac{3x_1'' + \sqrt{x_2'^2 + 4\alpha_8^2}}{4} \right|^{a-2} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} F_J &= |\alpha_1\gamma_J - \alpha_2\delta_J|^a + |\alpha_3\gamma_J + 2\alpha_4\delta_J|^a + \\ &|2\alpha_5\gamma_J + \alpha_6\delta_J|^a - 2 \left( \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_J} \right)^a = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} F_4 &= \left| \frac{\sqrt{x_2'^2 + 4\alpha_7^2}}{2} \right|^a + \left| \frac{3x_1'' - \sqrt{x_2'^2 + 4\alpha_8^2}}{4} \right|^a + \\ &\left| \frac{3x_1'' + \sqrt{x_2'^2 + 4\alpha_8^2}}{4} \right|^a - 2 \left( \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{45}} \right)^a = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} G_J &= (\alpha_1 q_{xJ} + \alpha_2 q_{yJ}) (\alpha_1 \gamma_J + \alpha_2 \gamma_J)^{a-2} + \\ &(\alpha_3 q_{xJ} - 2\alpha_4 q_{yJ}) (\alpha_3 \gamma_J + 2\alpha_4 \delta_J) \\ &|\alpha_3 \gamma_J + 2\alpha_4 \delta_J|^{a-2} + (2\alpha_5 q_{xJ} - \alpha_6 q_{yJ}) \\ &(2\alpha_5 \gamma_J + \alpha_6 \delta_J) |2\alpha_5 \gamma_J + \alpha_6 \delta_J|^{a-2} = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} G_4 &= V''' \frac{x_2'^2}{\sqrt{x_2'^2 + 4\alpha_7^2}} + \frac{3}{2} x_1'' (V'''' + W''') + \\ &\frac{1}{2} \frac{x_2''^2}{\sqrt{x_2'^2 + 4\alpha_8^2}} (W'''' - V''') - \frac{2a}{1+r_{45}} \left( \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{45}} \right)^a = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

در روابط بالا، سه معادله برای هر  $F_j$  و  $G_j$  متناظر با  $j = 1, 2, 3$  وجود دارد که با قرار دادن مقادیر  $\sigma_{45}$ ،  $\sigma_b$ ،  $r_b$ ،  $r_{45}$  و  $r_{45}$  از جدول ۲ در آنها، شش معادله تعیین می‌شوند و همچنین با جایگذاری دو مقدار  $r_{45}$  و  $\sigma_{45}$  در روابط  $F_4$  و  $G_4$ ، دو معادله دیگر نیز بدست می‌آیند. در معادلات  $F_4$  و  $G_4$  در روابط  $F_j$  و  $G_j$  متناظر با هر  $j$  در جدول ۵ نمایش داده شده است، همچنین بقیه مقادیر مورد نیاز در معادلات  $F_4$  و  $G_4$  نیز مطابق روابط زیر محاسبه می‌شوند [۲۵].

در نهایت با داشتن هشت معادله غیرخطی و بکارگیری روش نیوتون-رافسون برای به حداقل رساندن توابع خطای مقادیر ثابت معیار تسلیم Yld ۲-۲۰۰D تعیین می‌شوند. پارامترهای ثابت محاسبه شده تابع تسلیم AA ۶۱۱۱-T ۴۳ برای آلیاژ ۶۱۱۱ در جدول ۶ آورده شده است. در ادامه جهت بررسی صحت پارامترهای ثابت تعیین شده، ابتدا سطح تسلیم توابع بر حسب تنש‌های اصلی رسم می‌شوند. خواص مکانیکی در دسترس آلیاژ ۶۱۱۱-T ۴۳ در جدول ۲ و پارامترهای ثابت معیارهای تسلیم هیل ۴۸، Gotoh و Yld ۲-۲۰۰D بترتیب در جداول ۳، ۴ و ۶ آورده شده‌اند. شکل ۲ سطح تسلیم معیارهای مختلف را در مقایسه با نتایج تجربی حاصل از آزمون کشش ساده در جهت‌های مختلف نورد نشان می‌دهد. برای رسم این توابع، تنش‌های صفحه‌ای بر حسب زاویه  $\theta$  بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_\theta \cos^2 \theta, \quad \sigma_y = \sigma_\theta \sin^2 \theta, \\ \sigma_{xy} &= \sigma_\theta \cos \theta \sin \theta \end{aligned} \quad (39)$$

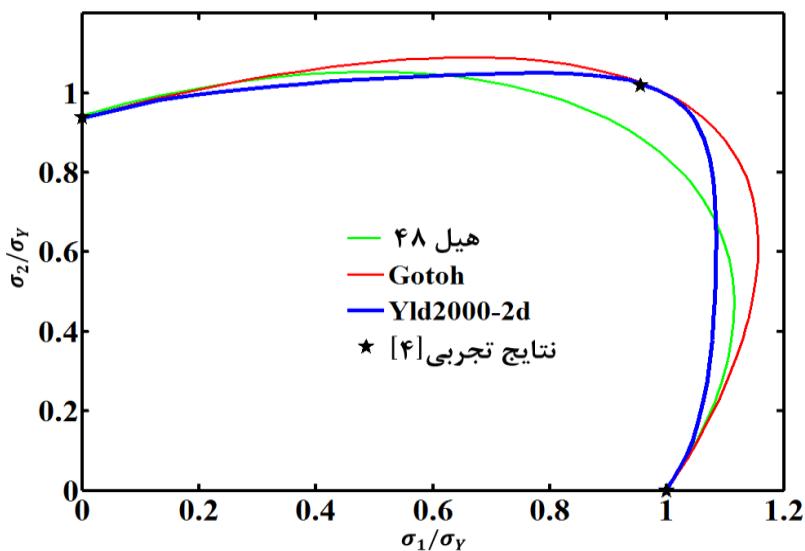
$$x_1' = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{3}, \quad x_2' = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{3} \quad (40)$$

همانطور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، هرچند که سطح تسلیم

### جدول ۶. پارامترهای ثابت معیار تسليیم AA ۶۱۱۱-T ۴۳-Yld ۲-۲۰۰۰D برای الیاز آلومینیوم

Table 6. The constant parameters of the Yld2000-2d yield function for AA6111-T43 alloy

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$
۰/۹۳۴۶	۰/۰۸۱۴	۰/۹۱۴۱	۱/۰۴۸۹	۱/۰۰۶۱	۰/۹۸	۱/۰۰۷۵	۱/۱۵۳۱



شکل ۲. مقایسه سطح تسليیم پیش‌بینی شده براساس توابع تسليیم مختلف با نتایج تجربی

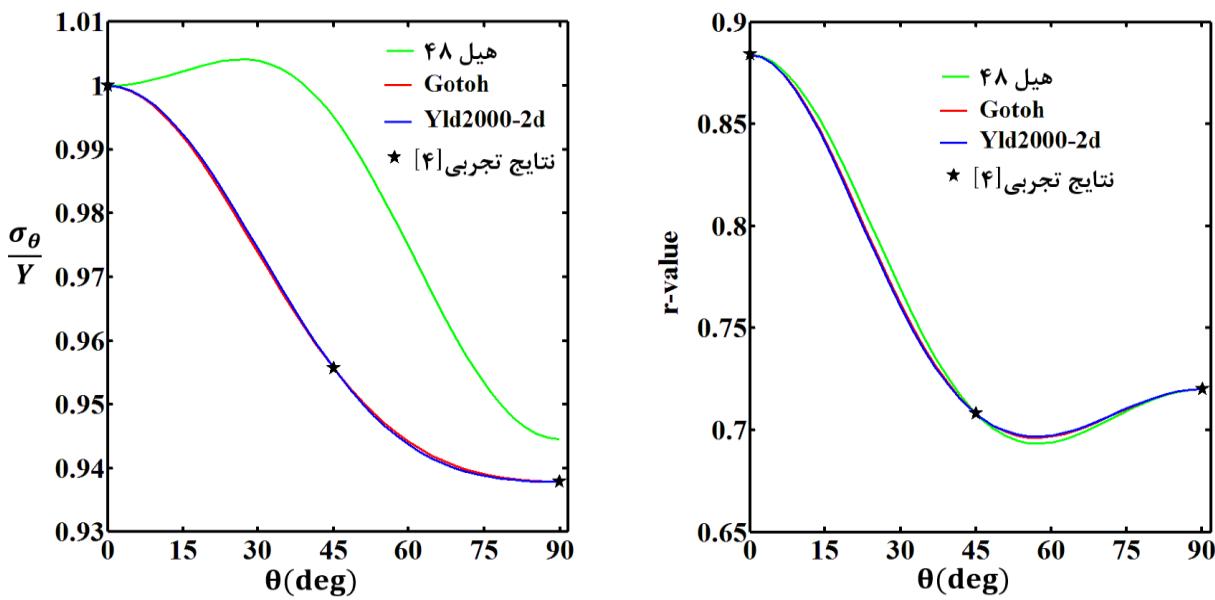
Fig. 2. comparsion between the yield surface based on different yield functions and experimental results

$$r_\theta = -\frac{\sin^2 \theta \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_x} - \frac{1}{2} \sin 2\theta \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{xy}} + \cos^2 \theta \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_y}}{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_x} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_y}} \quad (37)$$

شکل ۳ مقایسه تنش‌های تسليیم نرماله شده و ضرایب ناهمسانگردی در راستاهای مختلف نورد با داده‌های آزمایشگاهی را نشان می‌دهند. هر چند که هر سه تابع تسليیم، مقدار ضریب ناهمسانگردی ۰/۲ را بخوبی پیش‌بینی می‌کنند، ولی در پیش‌بینی مقادیر تنش تسليیم در راستاهای مختلف، معیار هیل ۴۸ انحراف قابل ملاحظه‌ای را از خود نشان می‌دهد. از آنجایی که طبق رابطه (۱۴)، ضرایب معیار تسليیم هیل ۴۸، براساس مقادیر ۰/۲ محاسبه می‌شوند، در پیش‌بینی تنش تسليیم تکمحوره با این تابع، خط قابل ملاحظه است. بنابراین با توجه به شکل‌های ۲ و ۳ ملاحظه می‌شود که معیار هیل ۴۸

پیش‌بینی شده با معیارهای Gotoh و Yld ۲-۲۰۰۰D در بعضی نقاط اختلاف قابل ملاحظه‌ای با یکدیگر دارند ولی هر دو تابع مطابقت خوبی با داده‌های تجربی دارند. در مقابل سطح تسليیم پیش‌بینی شده با معیار تسليیم هیل ۴۸ علاوه بر اینکه با دو معیار دیگر همپوشانی ندارد، با نتایج تجربی نیز کمی اختلاف دارد. در ادامه، مقادیر تنش تسليیم نرماله شده و ضریب ناهمسانگردی بر حسب زاویه نورد نیز مورد سنجش قرار می‌گیرد. این مقادیر برای تنش‌های تسليیم مختلف مطابق روابط زیر محاسبه می‌شوند [۵]:

$$\frac{\sigma_\theta}{Y} = \frac{1}{\bar{\sigma}(1, \theta)} \quad (38)$$



شکل ۳. مقایسه تنفس تسیلیم نرماله شده و ضریب ناهمسانگردی براساس توابع تسیلیم مختلف با نتایج تجربی

**Fig.3. comparsion between normalized yield stress and r-values based on the different yield functions and experimental results**

می‌گیرد. شکل‌های ۴ و ۵ حد شکل دهی ورق آلومنیوم T ۴۳-۶۱۱۱-AA را بر حسب مدل‌های سخت شوندگی سوئیفت و وس نشان می‌دهند و در آن اثر توابع تسیلیم هیل، ۴۸، Gotoh و Yld ۲۰۰۰-۲d بر کرنش‌های حدی مورد بررسی قرار می‌گیرد و با نتایج تجربی حاصل از آزمون هکر در مرجع [۴] مقایسه می‌شود.

در آزمون هکر، نمونه‌های با پهنای متفاوت ولی طول یکسان، برای در نظر گرفتن مسیرهای کرنش مختلف در منحنی، بریده می‌شوند. روی نمونه‌ها، شبکه‌ی دایره‌ای حک شده است تا بتوان پس از تعییر شکل، کرنش‌ها را اندازه گیری کرد. تجهیزات آزمون شامل یک سنبه نیمه کروی، قالب، ورق‌گیر و نیروسنج است که بر روی دستگاه پرس نصب شده‌اند. بخشی از ورق که در دهانه قالب قرار دارد، توسط سنبه تعییر شکل داده می‌شود. پرس به سنسورهای نیروسنج و اندازه گیری جابجایی مجهز است و آزمون‌ها به محض اینکه نیرو یکباره کاهش پیدا می‌کند، متوقف می‌شوند. کاهش یکباره نیرو در حین فرایند شکل دهی، نشاندهنده پاره شدن ورق است. دایره‌هایی که در معرض تعییر شکل هستند، پس از انجام فرایند به شکل بیضی در می‌آیند و می‌توان با اندازه گیری قطرهای آنها، مقدار کرنش را اندازه گیری کرد. این شکل‌ها بر حسب موقعیت در یکی از سه ناحیه ایمن، ناحیه گلوبی و ناحیه شکست، در نمودار قرار می‌گیرند.

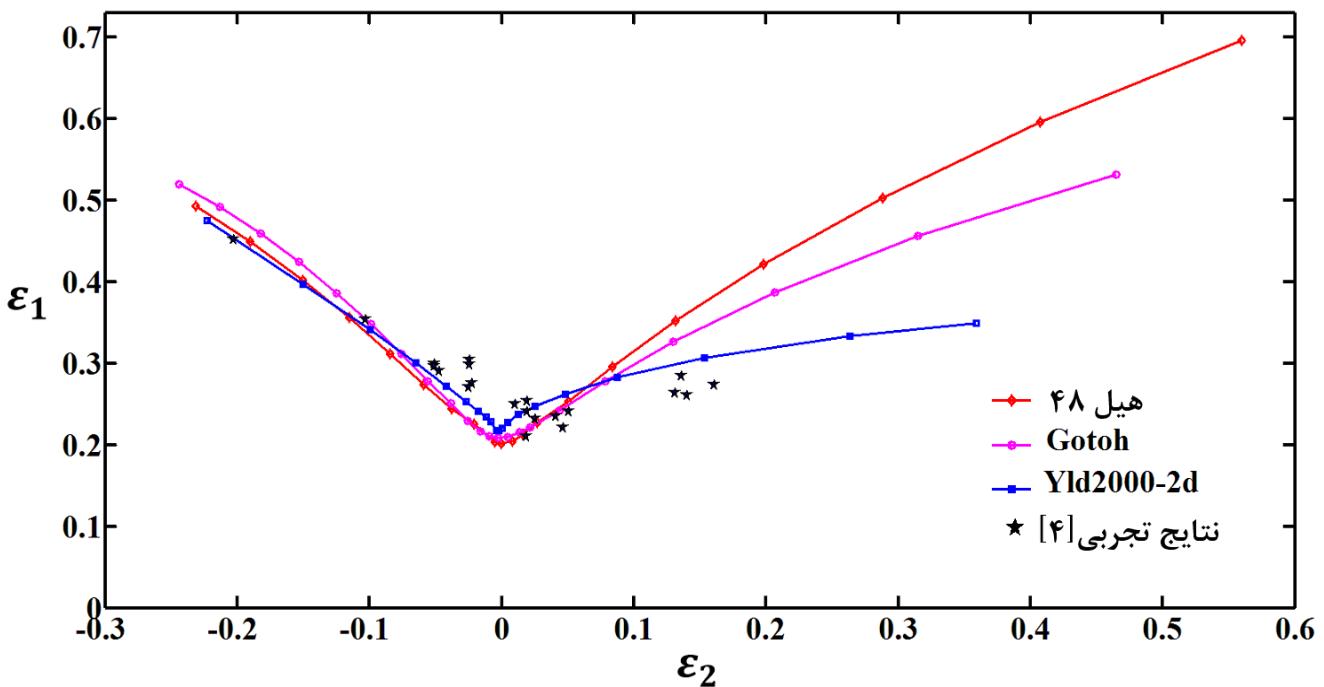
نسبت به دو معیار دیگر در پیش‌بینی رفتار تسیلیم آلیاژ ۴۳-۶۱۱۱-AA، قدری ضعیفتر است که در بخش بعدی مقاله نیز این اختلاف در پیش‌بینی حد شکل دهی مشاهده خواهد شد.

### ۳- نتایج و بحث

در فرایندهای مختلف شکل دهی تعیین نمودارهای حد شکل دهی با هدف بررسی حد تحمل ورق در برابر کرنش‌های مختلف بسیار حائز اهمیت است. در این مقاله ابتدا به بررسی اثر معادلات ساختاری در تعیین حد شکل دهی ورق در شرایط بارگذاری خطی پرداخته می‌شود و سپس کرنش‌های حدی در شرایط بارگذاری غیرخطی محاسبه می‌شوند و در ادامه با توجه به اهمیت تنفس‌های حدی در فرایندهای پیچیده و چند مرحله‌ای، مستقل از مسیر بودن این نمودارها مورد بررسی قرار می‌گیرد.

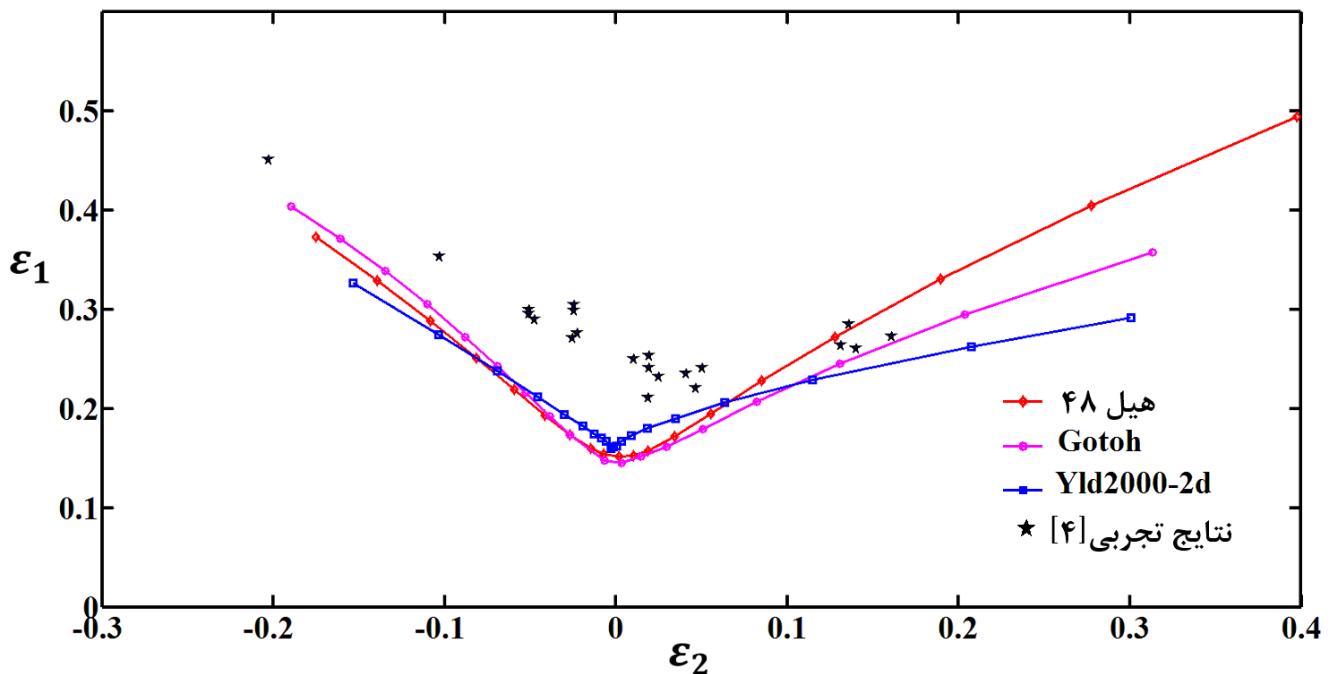
#### ۳-۱- نمودار حد شکل دهی در شرایط بارگذاری خطی

مطالعات زیادی در بررسی اثر مدل‌های ساختاری بر نمودارهای حد شکل دهی گزارش شده است. در این مقاله نیز کرنش‌های حدی با استفاده از تئوری ناپایداری مارسینیاک-کوزینسکی و با بکارگیری توابع تسیلیم و روابط کارسختی مختلف تعیین می‌شوند و صحت نتایج مورد بررسی قرار



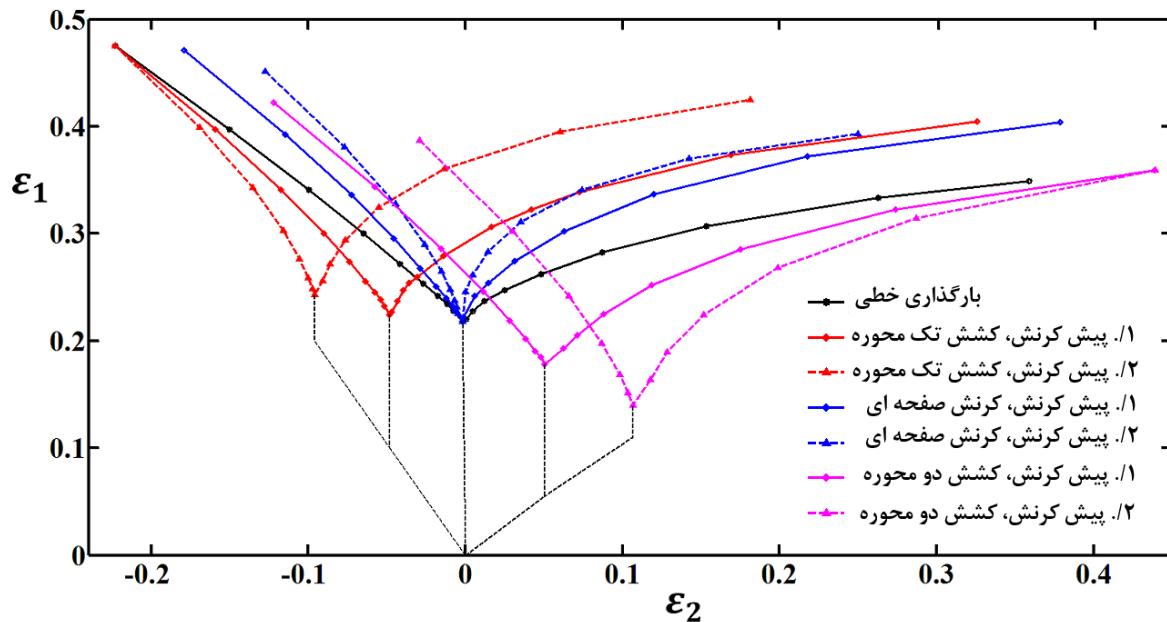
شکل ۴. مقایسه نمودارهای حد شکل دهنده پیش‌بینی شده براساس توابع تسلیم مختلف و مدل کارسختی سوئیفت با نتایج تجربی

Fig. 4. Comparison between experimental results and predicted forming limit diagrams based on the different yield functions and Swift hardening model



شکل ۵. مقایسه نمودارهای حد شکل دهنده پیش‌بینی شده براساس توابع تسلیم مختلف و بکارگیری مدل کارسختی وس با نتایج تجربی

Fig. 5. Comparison between experimental results and predicted forming limit diagrams based on the different yield functions and Voce hardening model



شکل ۶. نمودارهای حد شکل دهی با در نظر گرفتن مقادیر مختلف پیش کرنش در راستای کشش تک محوره  $\mu = 0$  ، کشش صفحه ای  $\mu = 0$  و کشش دو محوره  $\mu = 1$

Fig. 6. Forming limit diagrams based on different pre-strains along uniaxial tension , plane strain direction and equi-biaxial tension

$$err (\%) = \frac{|\epsilon_1^{cal} - \epsilon_1^{exp}|}{\epsilon_1^{exp}} \times 100 \quad (38)$$

مقادیر کرنش‌های اصلی محاسبه شده از روابط ساختاری مختلف  $\epsilon_1^{cal}$  و  $\epsilon_1^{exp}$  مقدار کرنش حاصل از نتایج آزمایشگاهی مرجع [۴] است. با استفاده از رابطه بالا درصد خطای نقاط مختلف تعیین می‌شود و سپس میانگین خطای سمت راست، چپ و کل نمودار حد شکل دهی برای هر الگوی ساختاری محاسبه می‌شود که این مقادیر در جدول ۷ آورده شده است. براساس مقادیر جدول ۷ مشاهده می‌شود که مقدار میانگین خطای سمت چپ و راست نمودار، برحسب رابطه کارسختی سوئیفت کمتر از رابطه کارسختی وس است. در بررسی خطای با الگوی سخت شوندگی سوئیفت هم مشاهده می‌شود که کمترین خطای مربوط به تابع تسلیم Yld ۲-۲۰۰۰ d است، این معیار تسلیم هر دو سمت نمودار را با دقت بالاتری نسبت به دو مدل دیگر پیش‌بینی می‌کند.

مطابق شکل ۴ که براساس مدل کارسختی سوئیفت است، مشاهده می‌شود که هر سهتابع تسلیم، سمت چپ و تا حدودی سمت راست نمودار حد شکل دهی را بخوبی پیش‌بینی می‌کنند. ولی در مقادیر کرنش کمینه بالاتر از ۰/۰، کرنش‌های پیش‌بینی شده با معیار تسلیم Yld ۲-۲۰۰۰ D مطابقت بهتری با نتایج تجربی دارند و این تابع تسلیم، کرنش‌های حدی را با دقت قابل قبولی پیش‌بینی می‌کند. همچنین در این ناحیه نمودار رسم شده با معیار تسلیم Gotoh دقت بالاتری نسبت به معیار هیل ۴۸ دارد. در ادامه، با مقایسه شکل‌های ۴ و ۵ می‌توان به عدم توانایی مدل کرنش سختی وس در مقایسه با مدل سوئیفت در پیش‌بینی حد شکل دهی این آیاژ اشاره کرد. همانطور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود، نمودارهای رسم شده با توابع تسلیم مختلف در مدل وس فقط در بخشی از ناحیه با کشنش دومحوره با نتایج تجربی مطابقت دارد و بخش‌های دیگر نمودارهای حاصل از معیارهای تسلیم، همخوانی قابل قبولی با نتایج آزمایشگاهی درست ندارد. جهت اعتبارسنجی نتایج و بررسی کمی اثر روابط ساختاری بر حد شکل دهی، درصد خطای مقدار کرنش اصلی و برای مدل‌های مختلف محاسبه می‌شود. برای تعیین مقدار مطلق درصد خطای کرنش اصلی از رابطه زیر استفاده می‌شود:

## جدول ۷. تخمین درصد خطای حد شکل دهی های تئوری محاسبه شده برای مدل های ساختاری مختلف آلیاز ۴۳-T AA ۶۱۱۱

**Table 7. Percentage of the error for theoretical forming limits based on different constitutive models for AA6111-T43 alloy**

مدل کار سختی	تابع تسلیم	سمت راست منحنی(٪)	سمت چپ منحنی(٪)	کل منحنی(٪)
هیل	۴۸	۱۷/۲۲	۱۳/۵۸	۱۵/۶۶
Gotoh	سوئیفت	۱۳/۱۲	۱۲/۹۹	۱۳/۰۶
Yld <sub>2000-2d</sub>		۹/۷۵	۷/۵۸	۸/۸۲
هیل	۴۸	۲۱/۲۳	۳۱/۶۱	۲۵/۶۸
Gotoh	وس	۲۲/۷۹	۳۰/۲۷	۲۵/۹۹
Yld <sub>2000-2d</sub>		۱۷/۶۳	۲۸/۴۹	۲۲/۲۸

حدی تحت پیش کرنش ۰/۱ و ۰/۲ در راستای کرنش صفحه ای را نمایش می دهد. مشاهده می شود که حد شکل دهی در همه نواحی بجز نقطه کرنش صفحه ای افزایش می یابد. در این نوع پیش کرنش گذاری، بطور کلی شکل پذیری بهبود می یابد و فقط مقدار کرنش حدی در حالت کرنش صفحه ای که به نقطه FLD<sup>۰</sup> معروف است، ثابت می ماند.

در شکل ۶ نمودارهای ارجاعی رنگ، کرنش های حدی را نشان می دهد که به مقدار ۰/۱ و ۰/۲ در راستای کشش دومحوره پیش کرنش گذاری شده اند. مطابق شکل قسمتی از نمودار که در سمت چپ تقاطع قرار دارد به سمت بالا و بقیه نمودار به سمت پایین حرکت می کند و همچنین این نوع پیش کرنش گذاری سبب حرکت نمودار به سمت راست نیز می شود. بطور کلی شکل ۶ نشان می دهد که پیش کرنش گذاری بطور چشمگیری بر کرنش های حدی اثر می گذارد، بنابراین در فرایندهای پیچیده شکل دهی، فرض مسیر کرنش خطی در محاسبه حد شکل دهی، فرض درستی نیست.

### ۳-۳- نمودار حد تنش شکل دهی

همانطور که در بخش قبلی نشان داده شد، وابستگی نمودارهای حد کرنش شکل دهی به مسیر کرنش محسوس است. بنابراین در فرایندهای شکل دهی پیچیده، مسیر کرنش به شدت بر کرنش های حدی اثر می گذارد و این وابستگی نمودارهای حد شکل دهی به مسیر کرنش سبب شده تا در فرایندهای با بارگذاری ترکیبی و چند مرحله ای این منحنی کارایی چندانی نداشته باشد. بنابراین با استفاده از قوانین پلاستیسیته، مقادیر کرنش حدی به تنش حدی تبدیل و نمودار حد تنش شکل دهی رسم می شود. هرچند که

بنابراین با مقایسه نمودارهای شکل ۴ و ۵ و جدول ۷، می توان مدل سخت شوندگی سوئیفت و تابع تسلیم Yld<sub>2000-2d</sub> با پارامترهای ثابت محاسبه شده در آن را بعنوان یک مدل ایده آل و دقیق جهت پیش بینی حد شکل دهی آلیاز ۴۳-T AA ۶۱۱۱ معرفی کرد.

### ۳-۴- نمودار حد شکل دهی در شرایط بارگذاری غیر خطی

در این بخش، تئوری ناپایداری M-K توسعه داده می شود و به بررسی حد شکل دهی در شرایط با بارگذاری غیرخطی پرداخته می شود. در بررسی اثر پیش کرنش بر کرنش های حدی از مدل سخت شوندگی سوئیفت و تابع تسلیم Yld<sub>2000-2d</sub> استفاده شده است. در فرایندهای با بارگذاری چند مرحله ای ابتدا قطعه کار تحت مقدار مشخصی پیش کرنش در یکی از سه راستای کشش تک محوره، دومحوره و راستای کرنش صفحه ای قرار می گیرد. در مرحله دوم حد شکل دهی در امتداد پیش کرنش اولیه در مسیر کرنش بین حالت کشش تک محوره تا دومحوره ( $\mu \leq 5/0$ ) رسم می شود. شکل ۶ اثر مسیر کرنش بر حد شکل دهی ورق AA ۶۱۱۱-T ۴۳ می شود. تحت مقادیر مختلف پیش کرنش در راستاهای مختلف را نمایش می دهد. نمودارهای رنگ قرمز در شکل ۶ اثر مقادیر مؤثر پیش کرنش ۰/۱ و ۰/۲ در راستای کشش تک محوره را بر حد شکل دهی ورق نشان می دهد. در مقایسه با حالت بارگذاری خطی این نوع پیش کرنش گذاری سبب بالا رفتن کرنش های حدی سمت راست نمودار و حرکت رو به پایین سمت چپ نمودار می شود. همچنین این نوع پیش کرنش گذاری نمودار را به جهت منفی کرنش کمینه حرکت می دهد. نمودارهای آبی رنگ در شکل ۶ مقادیر کرنش های

بحranی باشد، نمودارهای حد تنش شکل دهی بر هم منطبقند و پیش کرنش گذاری تاثیری بر تنش های حدی ندارد و می توان نمودار تنش حدی را مستقل از مسیر دانست. ولی اگر مقدار مؤثر پیش کرنش بیشتر از حد کرنش مؤثر پلاستیک در حالت کرنش صفحه ای یا همان مقدار بحرانی باشد، تنش های حدی به مسیر کرنش وابسته خواهند بود و همانطور که در شکل ۷ دیده می شود، در این حالت نمودار در ناحیه کرنش صفحه ای قدری بالا رفتگی نسبت به بقیه تنش های حدی دارد. در فرایندهای با بارگذاری چند مرحله ای، برای پیش بینی رفتار نمودارهای تنش حدی، مقادیر کرنش مؤثر بحرانی باید اندازه گیری شود که این مقدار بحرانی برای مدل سخت شوندگی وس این مقادیر را ثابت می کنند، چون نمودارهای حد تنش شکل دهی با مقدیر پیش کرنش مؤثر بالاتر از  $172^{\circ}$  برای مدل وس و بالاتر از  $237^{\circ}$  برای الگوی سوئیفت، رفتار وابسته به مسیر بارگذاری را نشان می دهند.

### ۳-۲-۳-۱- بررسی وابستگی تنش های حدی به مسیر کرنش با در نظر گرفتن مدل های کارسختی مختلف

در این بخش برای بررسی وابستگی تنش های حدی به مسیر کرنش از تئوری ناپایداری  $M-K$  و مدل سخت شوندگی سوئیفت استفاده می شود و اثر توابع تسلیم مختلف بر نمودارهای حد تنش شکل دهی، مورد ارزیابی قرار می گیرد. شکل ۸ نمودار حد تنش شکل دهی برای ورق آلومینیوم  $AA\ 6111-T_{43}$  تحت مقادیر مختلف پیش کرنش در راستای کشش تک محور را نشان می دهد. با توجه به مطالب ارائه شده در بخش قبل، در این بخش ابتدا مقادیر حد کرنش مؤثر پلاستیک در حالت کرنش صفحه ای تعیین می شوند.

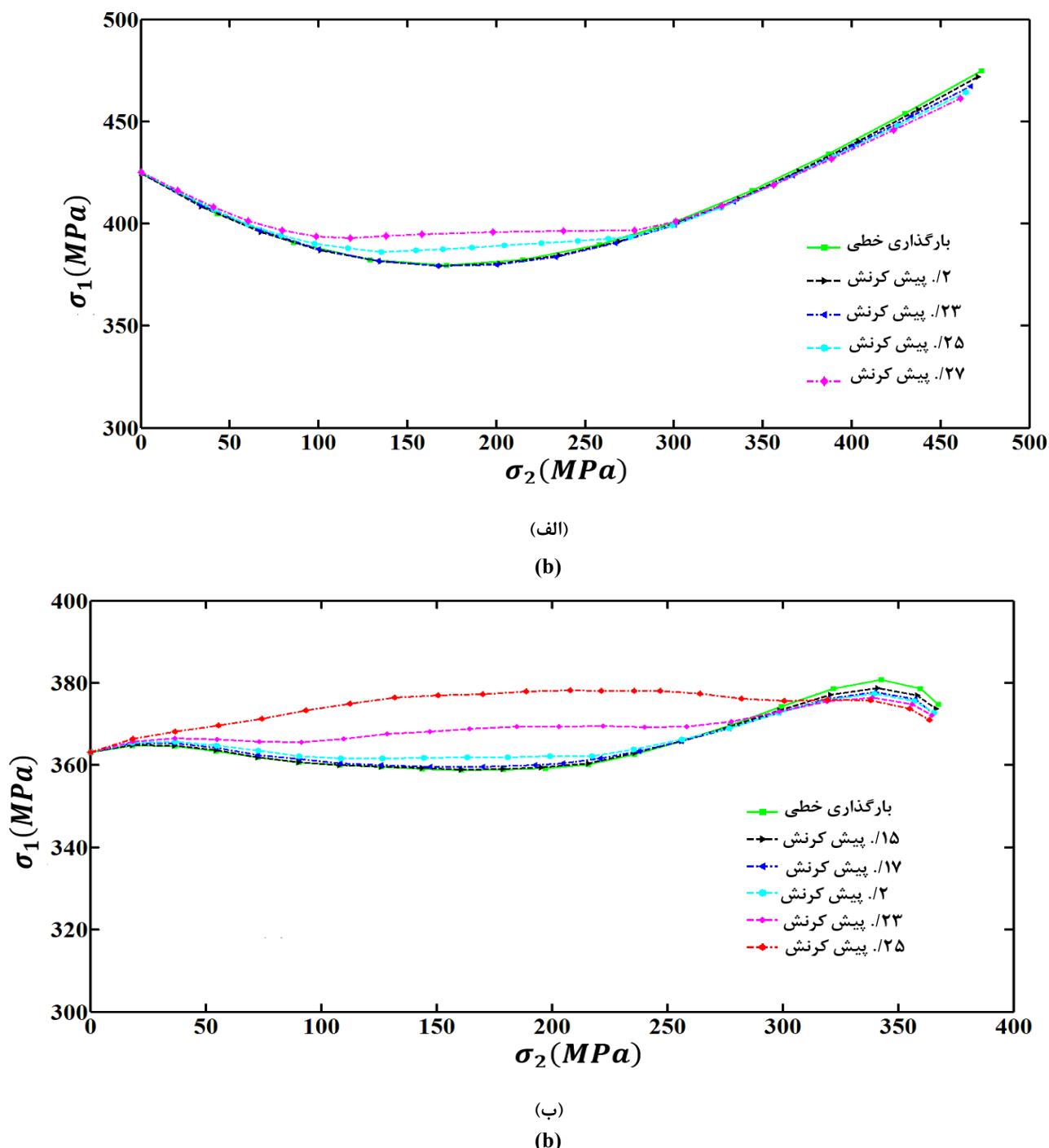
Gotoh کرنش های مؤثر بحرانی برای توابع تسلیم هیل  $48^{\circ}$  و  $D_{225}^0$  با بکارگیری مدل سخت شوندگی سوئیفت به ترتیب  $225^{\circ}$ ،  $234^{\circ}$  و  $237^{\circ}$  می دهند. ملاحظه می شود که مقادیر بحرانی سه معیار بسیار بهم نزدیک هستند و نمودارهای شکل ۸ نیز این مطلب را بخوبی نمایش می دهند. تنش های حدی پیش بینی شده با توابع Gotoh و  $D_{200}^0$  در مقادیر  $15^{\circ}/0$ ،  $23^{\circ}/0$  و  $25^{\circ}/0$  مستقل از مسیر و مقدار پیش کرنش هستند و تفاوت آنها با تابع هیل  $48^{\circ}$  در مقدار پیش کرنش  $23^{\circ}/0$  است که در مدل هیل  $48^{\circ}$  تنش های حدی حاصل از این مقدار پیش کرنش، وابسته به مسیر بارگذاری هستند، چون مقدار کرنش بحرانی پیش بینی شده با این تابع تسلیم  $225^{\circ}/0$  است.

وابستگی تنش های حدی به مسیر کرنش کمتر از کرنش های حدی است ولی این نمودارها نیز در مقادیر با پیش کرنش بالا، وابسته به مسیر بارگذاری هستند. همچنین این وابستگی تنش های حدی به مسیر کرنش علاوه بر مقدار پیش کرنش به روابط کارسختی و معیار تسلیم بکار گرفته شده نیز بستگی دارد. در ادامه این بخش، به بررسی مستقل از مسیر بودن تنش های حدی با اعمال مقادیر مختلف پیش کرنش براساس روابط مختلف کارسختی و معیارهای تسلیم پرداخته می شود.

### ۳-۳-۱- بررسی وابستگی تنش های حدی به مسیر کرنش با در نظر گرفتن مدل های کارسختی مختلف

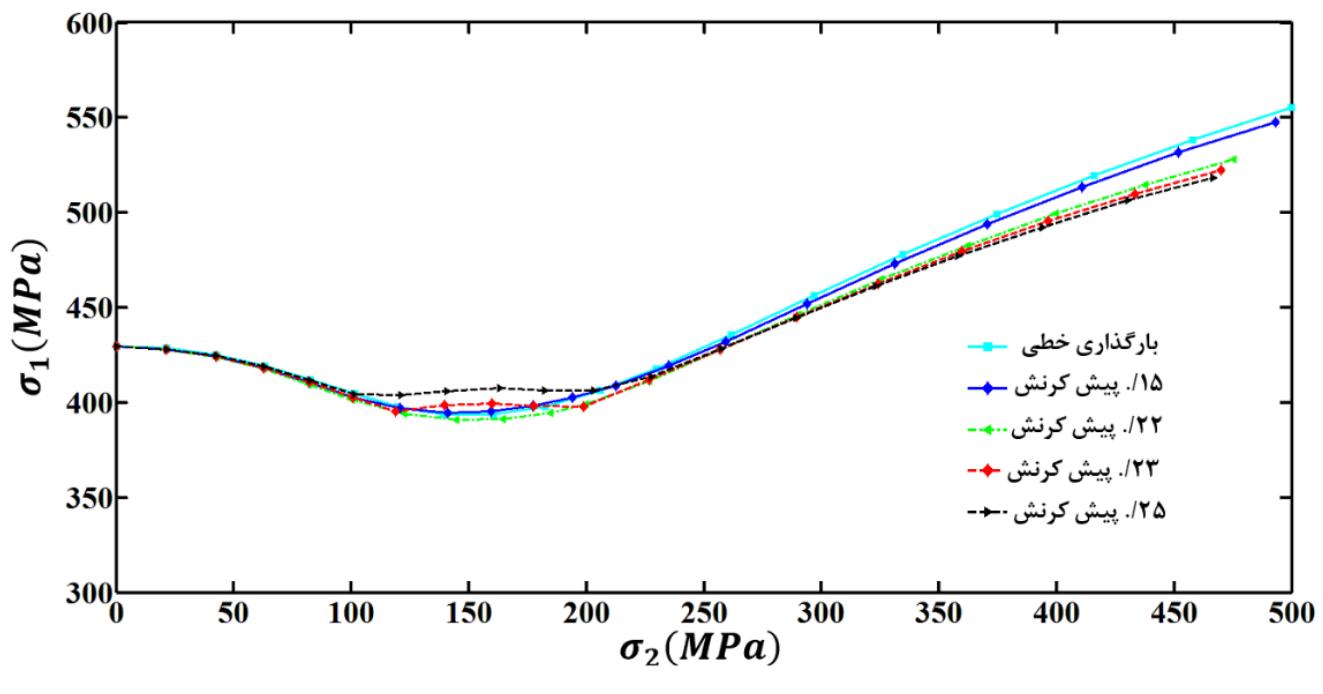
در این بخش برای بررسی مستقل از مسیر بودن تنش های حدی، نمودارهای حد تنش شکل دهی آلیاژ  $A6111-T_{43}$  با بکارگیری معیار تسلیم  $D_{200}^0-Yld$  و دو مدل سخت شوندگی سوئیفت و وس رسم می شوند. شکل ۷ الف تنش های حدی را برای مقادیر  $23^{\circ}/0$ ،  $25^{\circ}/0$  و  $27^{\circ}/0$  پیش کرنش مؤثر ورق در راستای کشش تک محوره با بکارگیری مدل سخت شوندگی سوئیفت نشان می دهد. مشاهده می شود که نمودار باز ای مقادیر پیش کرنش  $23^{\circ}/0$  و  $25^{\circ}/0$  مستقل از مسیر بارگذاری است و تنش های حدی پیش بینی شده توسط آنها با حالت کرنش گذاری خطی مطابقت دارد و منحنی ها تقریباً یک نوار باریک ایجاد می کنند. ولی تنش های حدی رسم شده با مقادیر پیش کرنش  $27^{\circ}/0$  و  $25^{\circ}/0$  به مسیر کرنش وابسته هستند و هر یک از این مقادیر پیش کرنش، نمودارهای مختص خود را تشکیل می دهند. حال آنکه، مطابق شکل ۷ ب تنش های حدی تولیدی توسط مدل کارسختی وس برای مقادیر  $23^{\circ}/0$ ،  $25^{\circ}/0$  و  $27^{\circ}/0$  وابستگی نمودار را به مسیر بارگذاری نشان می دهند و نمودارهای متفاوتی را تولید می کنند. مقایسه دو نمودار شکل ۷ نشان می دهد که وابستگی نمودارهای حد تنش شکل دهی به مسیر کرنش با بکارگیری مدل وس بیشتر از مدل سوئیفت است. یعنی در حالیکه تنش های حدی پیش بینی شده توسط مدل وس در مقادیر پیش کرنش  $23^{\circ}/0$  و  $25^{\circ}/0$  وابسته به مسیر کرنش هستند، در مدل سوئیفت مستقل از مسیر بارگذاری بوده و نمودارهای تولیدی بر هم منطبق هستند.

علت این رفتار تنش های حدی به مقدار کرنش مؤثر حدی در حالت کرنش صفحه ای در بارگذاری خطی مربوط می شود. این مقدار که در واقع یک مقدار بحرانی در تعیین مقدار پیش کرنش معادل با مستقل از مسیر بودن تنش های حدی است را می توان برای هر مدل ساختاری بکار رفته تعیین کرد. اگر مقدار مؤثر پیش کرنش در بارگذاری غیر تنااسبی کمتر از این مقدار



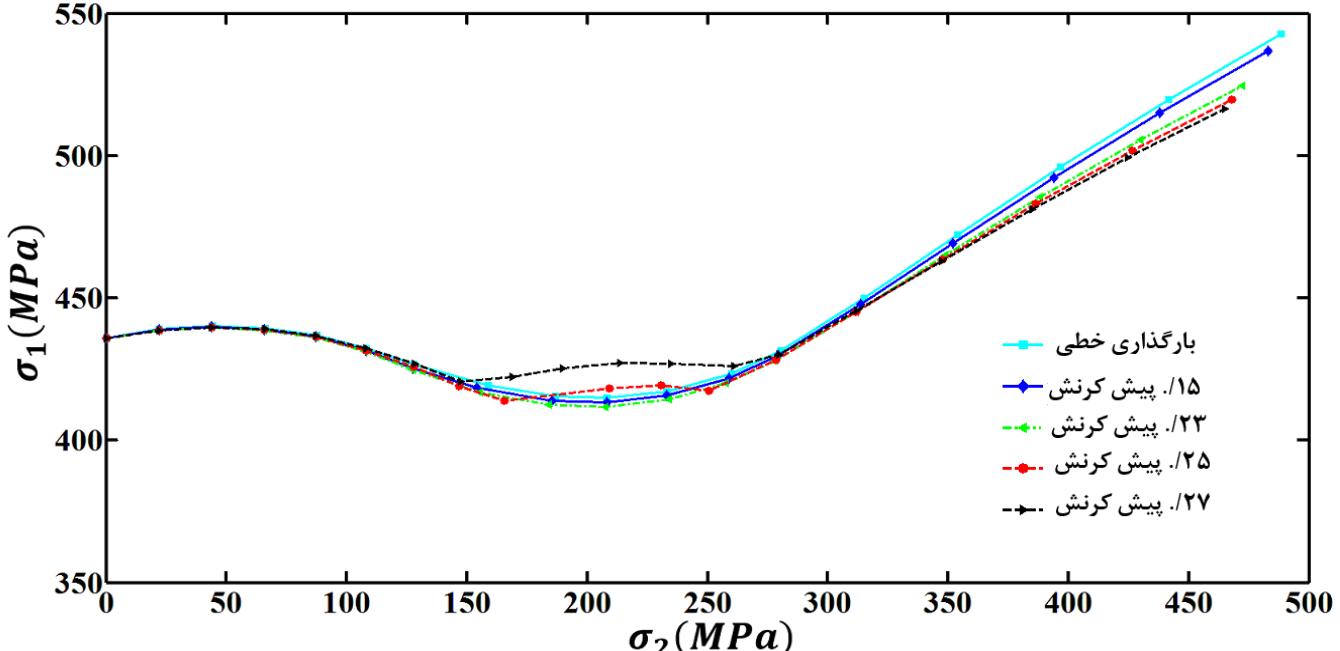
شکل ۷. نمودارهای حد تنش شکل دهی ورق با در نظر گرفتن مقادیر مختلف پیش کرنش در راستای کشش تک محوره و بکارگیریتابع تسلیم Yld ۲-۲۰۰۰D و مدل های کارسختی الف: سوئیفت ب: وس

Fig. 7. Forming limit stress diagrams based on different pre-strains along uniaxial tension by applying Yld2000-2d yield function and (a) Swift (b) Voce hardening model



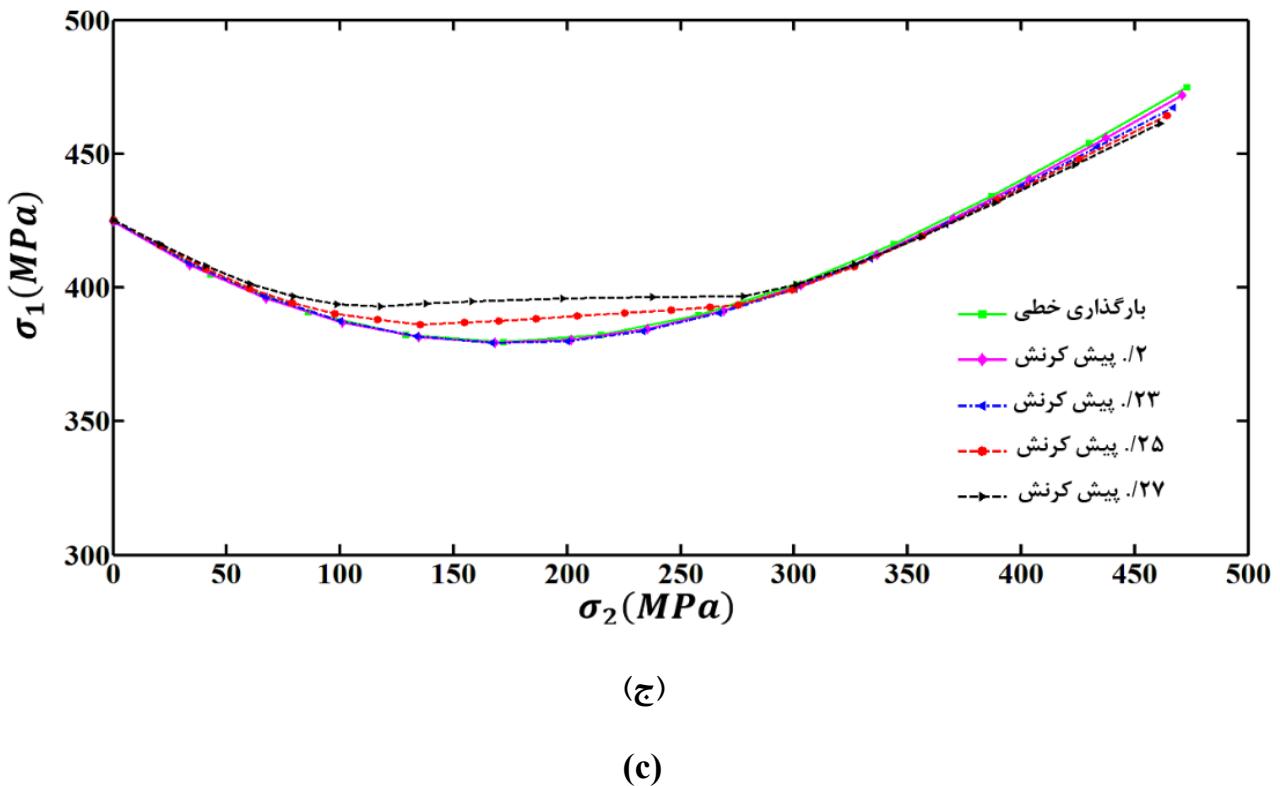
(الف)

(a)



(ب)

(b)



شکل ۸. نمودارهای حد تنش شکل دهی با در نظر گرفتن مقادیر مختلف پیش کرنش در راستای کشنش تک محوره و بکارگیری مدل سخت شوندگی سوئیفت و توابع تسلیم الف: هیل ۴۸ ب: ج: Yld ۲-۲۰۰۰ D Gotoh

Fig. 8. Forming limit stress diagrams by considering different pre-strains along uniaxial tension by applying Swift hardening model and (a) Hill48 (b) Gotoh (c) Yld2000-2d yield functions

سوئیفت، کرنش‌های حدی حاصل از بکارگیری تابع تسلیم Yld ۲-۲۰۰۰D با نتایج آزمایشگاهی مطابقت بهتری دارند. بنابراین می‌توان مدل کارسختی سوئیفت و تابع تسلیم Yld ۲-۲۰۰۰D با ضرایب تعیین شده آن در این مقاله را بعنوان یک مدل ایده‌آل در پیش‌بینی حد شکل دهی ورق ۴۳-T AA ۶۱۱۱ معرفی کرد.

۳- نمودار حد شکل دهی در شرایط بارگذاری غیرخطی با اعمال پیش کرنش گذاری در سه جهت کشنش تک محوره، دوممحوره و حالت کرنش صفحه‌ای مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان دادند که متناسب با مقدار و راستای پیش کرنش گذاری، نمودارهای حد شکل دهی مجازی تشکیل می‌شوند که این نمودارها وابستگی کرنش‌های حدی به مسیر کرنش را ثابت می‌کنند.

۴- اگرچه وابستگی نمودارهای حد تنش شکل دهی به مسیر کرنش همچون کرنش‌های حدی نیست، ولی تنش‌های حدی نیز در مقادیر با

#### ۴- نتیجه گیری

در این مقاله نمودارهای حد شکل دهی در شرایط بارگذاری خطی و غیرخطی با استفاده از تئوری ناپایداری M-K تعیین می‌شوند که در آن اثر توابع تسلیم و مدل‌های کارسختی مختلف با جزئیات مورد بررسی قرار می‌گیرد که مهم‌ترین نتایج به شرح زیر است:

۱- در بررسی معیارهای تسلیم بکارگرفته شده در این مقاله، مشاهده می‌شود که تابع تسلیم هیل ۴۸، پیش‌بینی مناسبی را در توصیف رفتار تسلیم Gotoh آلیاز ۴۳-T AA ۶۱۱۱ می‌دهد. در حالی که توابع Yld ۲-۲۰۰۰D، سطح تسلیم، تنش تسلیم تک محوره نرماله شده و ضرایب ناهمسانگردی را بخوبی برای آلیاز مربوطه پیش‌بینی کردند.

۲- نتایج نشان می‌دهد که مدل سخت شوندگی سوئیفت، کرنش‌های حدی دقیق‌تری را نسبت به مدل وس پیش‌بینی می‌کند و همچنین در بررسی اثر معیارهای تسلیم بر حد شکل دهی با استفاده از مدل کارسختی

## منابع

- [1] Z. Marciniak, K. Kuczyński, Limit strains in the processes of stretch-forming sheet metal, International journal of mechanical sciences, 9(9) (1967) 609-620.
- [2] M. Butuc, D. Banabic, A.B. da Rocha, J. Gracio, J.F. Duarte, P. Jurco, D. Comsa, The performance of Yld96 and BBC2000 yield functions in forming limit prediction, Journal of materials processing technology, 125 (2002) 281-286.
- [3] F. Barlat, J. Brem, J.W. Yoon, K. Chung, R. Dick, D. Lege, F. Pourboghrat, S.-H. Choi, E. Chu, Plane stress yield function for aluminum alloy sheets—part 1: theory, International Journal of Plasticity, 19(9) (2003) 1297-1319.
- [4] D. Banabic, M. Vos, Modelling of the forming limit band—a new method to increase the robustness in the simulation of sheet metal forming processes, CIRP annals, 56(1) (2007) 249-252.
- [5] H. Aretz, F. Barlat, New convex yield functions for orthotropic metal plasticity, International Journal of nonlinear mechanics, 51 (2013) 97-111.
- [6] S. Mirfalah-Nasiri, A. Basti, R. Hashemi, Forming limit curves analysis of aluminum alloy considering the through-thickness normal stress, anisotropic yield functions and strain rate, International Journal of Mechanical Sciences, 117 (2016) 93-101.
- [7] S.M. Nasiri, A. Basti, R. Hashemi, A. Darvizeh, Effects of normal and through-thickness shear stresses on the forming limit curves of AA3104-H19 using advanced yield criteria, International Journal of Mechanical Sciences, 137 (2018) 15-23.
- [8] C. Wang, Y. Yi, S. Huang, F. Dong, H. He, K. Huang, Y. Jia, Experimental and theoretical investigation on the forming limit of 2024-O aluminum alloy sheet at cryogenic temperatures, Metals and Materials International, 27(12) (2021) 5199-5211.
- [9] R. Uppaluri, D. Helm, A convex fourth order yield function for orthotropic metal plasticity, European

پیش کرنش بالا وابسته به مسیر بارگذاری هستند. در فرایندهای با بارگذاری چند مرحله‌ای، اگر مقدار مؤثر پیش کرنش از مقدار کرنش مؤثر حالت کرنش صفه‌های در بارگذاری خطی بیشتر شود، تنش‌های حدی وابسته به مسیر بارگذاری خواهند بود و دیگر نمودار حد تنش شکل‌دهی مستقل از مسیر کرنش نیست.

۵- در محاسبه مقدار کرنش مؤثر بحرانی که تعیین کننده مستقل از مسیر بودن تنش‌های حدی است، مدل ساختاری مورد استفاده نیز مؤثر است. در این مقاله اثرات مدل‌های کارسختی بکار رفته در تعیین وابستگی نمودار حد تنش شکل‌دهی به مسیر کرنش، بیشتر از توابع تسلیم انتخابی است. بنابراین مستقل از مسیر بودن تنش‌های حدی در محاسبات، علاوه بر مقدار پیش کرنش به مدل کارسختی و معیار تسلیم بکار گرفته شده نیز بستگی دارد.

## ۵- فهرست علائم

نماد	تعریف
$A, B, c$	پارامترهای ثابت مدل سخت شوندگی وس
$A_{1-9}$	پارامترهای ثابت معیار تسلیم Gotoh
$a$	توان معیار تسلیم Yld $2000-2d$
$f$	عامل نقص اولیه
$f'$	عامل نقص
$F, G, H, L, M, N$	پارامترهای ثابت معیار تسلیم هیل ۴۸
$F_j, G_j$	توابع خطرا در تعیین ضرایب معیار $d$
$K, n$	پارامترهای ثابت مدل سخت شوندگی سوئیفت
$L', L''$	ضرایب تابع تسلیم Yld $2000-2d$
$X', X''$	تansورهای تبدیل یافته تنش انحرافی
$t.$	ضخامت اولیه
$r_\theta$	ضریب ناهمسانگردی تحت زاویه $\theta$ نسبت به راستای نورد
$\alpha$	نسبت تنش‌ها
$\alpha_{1-8}$	پارامترهای ثابت معیار تسلیم Yld $2000-2d$
$\epsilon$	کرنش اولیه
$d\bar{\epsilon}$	نمودار کرنش مؤثر
$\epsilon_3$	کرنش در راستای ضخامت ورق
$d\epsilon_1, d\epsilon_2, d\epsilon_3$	مؤلفه‌های نمو کرنش اصلی
$d\epsilon_{nn}, d\epsilon_{tt}, d\epsilon_{nt}$	مؤلفه‌های نمو کرنش در مختصات شیار
$\theta$	زاویه راستای شیار با راستای تنش اصلی ماکزیمم
$\rho$	نسبت کرنش‌ها
$\bar{\sigma}$	تنش مؤثر
$\sigma_\theta$	مقدار تنش تسلیم تحت زاویه $\theta$ نسبت به راستای نورد
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	مؤلفه‌های تنش اصلی
$\sigma_{nn}, \sigma_{tt}, \sigma_{nt}$	تنش در راستای شیار
$\phi$	تابع تسلیم

- change effect on forming limit diagram of AA5083, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 76(5) (2015) 1343-1352.
- [19] H. Wang, Y. Yan, F. Han, M. Wan, Experimental and theoretical investigations of the forming limit of 5754O aluminum alloy sheet under different combined loading paths, International Journal of Mechanical Sciences, 133 (2017) 147-166.
- [20] M. Erfanian, R. Hashemi, A comparative study of the extended forming limit diagrams considering strain path, through-thickness normal and shear stress, International Journal of Mechanical Sciences, 148 (2018) 316-326.
- [21] S. Sojodi, A. Basti, S.R. Falahatgar, S.M.M. Nasiri, Investigation on the forming limit diagram of AA5754-O alloy by considering strain hardening model, strain path, and through-thickness normal stress, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 113(9) (2021) 2495-2511.
- [22] Z. Hou, Z. Liu, M. Wan, X. Wu, B. Yang, X. Lu, An investigation on anisotropy behavior and forming limit of 5182-H111 aluminum alloy, Journal of Materials Engineering and Performance, 29(6) (2020) 3745-3756.
- [23] B. Sener, E.S. Kilicarslan, M. Firat, Modelling anisotropic behavior of AISI 304 stainless steel sheet using a fourth-order polynomial yield function, Procedia Manufacturing, 47 (2020) 1456-1461.
- [24] B. Ma, M. Wan, Z. Cai, W. Yuan, C. Li, X. Wu, W. Liu, Investigation on the forming limits of 5754-O aluminum alloy sheet with the numerical Marciniak-Kuczynski approach, International Journal of Mechanical Sciences, 142 (2018) 420-431.
- [25] F. Barlat, J.W. Yoon, O. Cazacu, On linear transformations of stress tensors for the description of plastic anisotropy, International Journal of Plasticity, 23(5) (2007) 876-896.
- Journal of Mechanics-A/Solids, 87 (2021) 104196.
- [10] Q.-T. Pham, S.-H. Oh, Y.-S. Kim, An efficient method to estimate the post-necking behavior of sheet metals, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 98(9) (2018) 2563-2578.
- [11] K. Young-Suk, L. Bong-Hyun, Y. Seung-Han, Prediction of forming limit curve for pure titanium sheet, Transactions of Nonferrous Metals Society of China, 28(2) (2018) 319-327.
- [12] Q.T. Pham, M.G. Lee, Y.S. Kim, Characterization of the isotropic-distortional hardening model and its application to commercially pure titanium sheets, International Journal of Mechanical Sciences, 160 (2019) 90-102.
- [13] A. Graf, W. Hosford, Effect of changing strain paths on, Metallurgical transactions A, 24(11) (1993) 2503-2512.
- [14] K. Yoshida, T. Kuwabara, K. Narihara, S. Takahashi, Experimental verification of the path-independence of forming limit stresses, Int J Form Process, 8(SI) (2005) 283-298.
- [15] K. Yoshida, T. Kuwabara, Effect of strain hardening behavior on forming limit stresses of steel tube subjected to nonproportional loading paths, International journal of plasticity, 23(7) (2007) 1260-1284.
- [16] M. Nurcheshmeh, D.E. Green, Investigation on the strain-path dependency of stress-based forming limit curves, International journal of material forming, 4(1) (2011) 25-37.
- [17] M. Nurcheshmeh, D.E. Green, Prediction of forming limit curves for nonlinear loading paths using quadratic and non-quadratic yield criteria and variable imperfection factor, Materials & Design, 91 (2016) 248-255.
- [18] F. Zhalehfari, R. Hashemi, S.J. Hosseiniipour, Experimental and theoretical investigation of strain path

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

S. Sojodi, A. Basti , S. R. Falahatgar, S. M. Mirfalah Nasiri , *Investigation on the Effect of Different Constitutive Models on the Forming Limit of the Sheet under Nonlinear Strain Path , Amirkabir J. Mech Eng., 54(4) (2022) 925-944.*

DOI: [10.22060/mej.2022.20519.7256](https://doi.org/10.22060/mej.2022.20519.7256)

