نشریه مهندسی عمران امیرکبیر

نشریه مهندسی عمران امیرکبیر، دوره ۵۴، شماره ۸، سال ۱۴۰۱، صفحات ۳۱۷۹ تا ۳۱۹۶
DOI: 10.22060/ceej.2022.19048.7047

کمانش خمشی سوله های یک دهانه بدون حرکت جانبی با تعیین و حل معادله مشخصه

عباس حق اللهی[۱*]، علی اصغر صفوی[۲]

۱- دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران
۲- دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه گلستان، علی آباد کتول، گلستان، ایران

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۹/۰۷/۰۳
بازنگری: ۱۴۰۰/۰۳/۲۹
پذیرش: ۱۴۰۰/۰۴/۰۶
ارائه آنلاین: ۱۴۰۰/۱۲/۰۱

کلمات کلیدی:
ستون‌های با مقطع متغیر
کمانش مقید
معادله دیفرانسیل
روش انرژی
معادله مشخصه

خلاصه: کمانش خمشی یکی از حالات حدی کمانش در ستون‌هایی است که دست‌کم یک محور تقارن دارند. به خاطر فقدان حل دقیق معادله دیفرانسیل تغییر شکل در ستون‌های غیرمنشوری، تعیین بار بحرانی آن‌ها با روش‌های عددی و تقریبی صورت می‌گرفت که منجر به جواب‌های تقریبی می‌شد. هدف این تحقیق بررسی تحلیلی کمانش خمشی درون‌صفحه و مقید در برابر حرکت جانبی برای سازه‌های صنعتی یک دهانه است که به قاب‌های شیب‌دار (سوله‌ها) موسوم هستند و از اعضای با جان شیب‌دار ساخته شده‌اند. در سازه‌های مدنظر تکیه‌گاه‌های پای ستون‌ها، تماما مفصلی یا گیردار است و فرض اویلر- برنولی برای رفتار اعضا در نظر گرفته شده است. ابتدا معادله دیفرانسیل ستون تغییر شکل یافته و دیاگرام آزادهای مناسب مد نظر قرار گرفت، سپس از معادلات تعادل و دیفرانسیل به طور همزمان در انرژی ارتجاعی خمشی استفاده گردید. با برابری کار خارجی و انرژی ارتجاعی خمشی، معادله مشخصه کمانش (برای تعیین بار بحرانی) حاصل و شرایط رسم نمودار فراهم شد. نمودارهای طراحی برای تعیین ضریب طول موثر (محور قائم دستگاه مختصات) بر حسب نسبت طول تیر مورب به ارتفاع ستون (محور افقی) رسم شدند. با افزایش فزاینده‌ی مقادیر روی محور افقی دستگاه مختصات، سختی خمشی تیرها بسیار کم و سختی اتصال آن‌ها به سرِ ستون‌ها مشابه اتصال مفصلی می‌شود. نهایتا چند مثال با روش پیشنهادی و روش‌های تقریبی حل و مقایسه شد. در روش پیشنهادی تنها با داشتن دو پارامتر هندسی ساده از قاب شیب‌دار، سپس با کمک منحنی مربوط و با محاسباتی کوتاه می‌توان ضریب طول موثر را تعیین کرد. نتایج تحلیلی و استفاده آسان از نمودارهای طراحی از مزایای این مطالعه نسبت به مطالعات دیگران است.

۱- مقدمه

اویلر برای به دست آوردن بار بحرانی یک ستون دو سر مفصل با مقطع ثابت از معادله دیفرانسیل حاکم بر تغییر شکل جانبی ستون استفاده نمود. این معادله برای اعضای منشوری دارای جواب دقیق و تحلیلی است، اما برای عضوی که ممان اینرسی مقطع آن در طول تغییر می‌کند به دست آوردن حل دقیق آن بسیار مشکل یا غیرممکن است. در این حالت می‌توان از روش‌های تقریبی استفاده کرد. از روش‌های ثبت شده برای محاسبه‌ی بار بحرانی کمانش ارتجاعی ستون‌های با مقطع متغیر می‌توان راه‌حل‌های تیموشنکو [۱]، مورلی [۲] و دینیک [۳] را یاد کرد. همه این راه‌حل‌ها تقریبی بوده و ستون با کمک ستون‌های پله‌ای متوالی تقریب زده می‌شد. نخستین بار، با کمک توابع بسل حلی برای محاسبه‌ی بار بحرانی کمانش ارتجاعی ستون‌های غیرمنشوری توسط کارتر و گر [۴] ارائه گردید. از راه‌حل‌های اخیر با روش تفاضلات محدود، کار ایرمونگر [۵] و از روش اجزای محدود مطالعه کارابالیس و بِسکاس [۶] را می‌توان نام برد. براون [۷] با تحلیل تغییر شکل‌های بال‌های تیر I-شکل غیرمنشوری در پیچش، معادله دیفرانسیل تغییر شکل مقطع را در پیچش غیریکنواخت به دست آورد. او معادله‌ی به دست آمده را در بررسی کمانش خمشی-پیچشی تیر غیرمنشوری با تکیه‌گاه‌های ساده مورد استفاده قرار داد. ارموپولس و آنتونی کاوناديس [۸] روشی را برای پیدا کردن ماتریس سختی خمشی معادل عضو با مقطع متغیر ارائه نمودند و تابع تغییر شکل عضو منشوری معادل را برای تابع تغییر شکل یک عضو غیرمنشوری، در نظر گرفتند. ارموپولس [۹] در مطالعه‌ای به پایداری قاب‌های با مقاطع متغیر پرداخت و پایداری اعضای با مقطع متغیر را -که تحت بارهای متمرکز در طول هستند- بررسی کرد. در آن تحقیق با فرمول‌بندی معادلات کمانش، بار بحرانی آن‌ها محاسبه گردید و نتایج به صورت نمودارهایی ارائه شد. ویلیامز و بنرجی [۱۰] تحقیقی را انجام دادند که

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: haghollahi@sru.ac.ir

دامنه‌ی وسیعی از اشکال هندسی مقطع ستون‌های غیرمنشوری با تغییرات خطی ابعاد در تمام یا برخی از اجزای تشکیل دهنده‌ی مقطع (بال‌ها و یا جان) را شامل می‌شد که می‌تواند دارای بارهای محوری متمرکز یا گسترده در طول عضو باشند. یِؤن‌بین یانگ [۱۱] پایداری تیر ستون‌های I–شکل غیرمنشوری را مورد بررسی قرار داد. در آن مطالعه رفتار قاب‌های صفحه‌ای بدون مهاربند –که از تیر و ستون‌های با مقطع متغیر ساخته شده است– مورد بررسی قرار گرفت. در آن مقاله با ساختن ماتریس سختی عضو مقطع متغیر شش درجه آزاد که عمق آن به صورت خطی تغییر می‌کند، اثر تغییر مقطع در طول عضو روی سختی جانبی، مقاومت و ارتعاش آن مورد بحث قرار گرفته است. برادفورد [۱۲] در مقاله‌ای پس از به دست آوردن معادلات تعادل یک تیر I–شکل با مقطع متغیر، تاثیر لنگر پیچشی را روی آن با فرمول‌بندی روش اجزای محدود بررسی کرد. ایشان از روش کار مجازی و فرمول‌بندی لاگرانژین به هنگام شده استفاده کرد. ویلیامز و گری استن [۱۳] با استفاده از روش اجزای محدود کمانش پیچشی–خمشی تیر I–شکل غیرمنشوری را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در تحقیق خود اثر پیچش و خمش را به صورت همزمان مطالعه کردند. حسین جوبران القحطانی [۱۴] بر اساس روش‌های انرژی رفتار تیر ستون‌های مقطع متغیر را در خمش و کمانش مورد مطالعه قرار داد. وی از آنالیز کمانش ناگهانی [1] در مطالعه پایداری سازه‌ها استفاده نمود و نتیجه گرفت که ستون‌های با مقطع متغیر ممکن است بار بحرانی بیشتری از ستون‌های منشوری هم‌وزن خود داشته باشند. لی و شو [۱۵] کمانش جانبی تیرهای I–شکل با مقطع متغیر را بررسی کردند. ایشان رابطه نیرو– تغییر شکل را برای انواع تغییر شکل‌های تیر محاسبه کردند و برای محاسبه انرژی پتانسیل کل در فرایند کمانش جانبی تیر از روش‌های حساب تغییرات بهره گرفتند. یاو [۱۶] به پایداری تیرهای I–شکل با مقطع متغیر تحت لنگرهای پیچشی پرداخت. وی لنگر پیچشی اعمالی به مقطع را به صورت ترکیب پیچش سنت–ونانت و پیچش تابیدگی در نظر گرفت و تیر را به صورت سه تیر مجاور در نظر گرفت که مقطع آن‌ها اجزای مقطع تیر اصلی (جان و دو بال) است. وی نشان داد که ناپایداری بال‌ها ناشی از پیچش تابیدگی می‌تواند منجر به کاهش مقاومت پیچشی مقطع شود. عسگریان و همکاران [۱۷] مسئله کمانش جانبی–پیچشی تیرهای با مقطع دلخواه و متغیر در طول را بررسی کردند. ایشان از روش تقریبی متکی بر سری‌های توانی بهره گرفتند و انرژی پتانسیل کل را با توجه به انرژی ارتجاعی و کار بارهای خارجی محاسبه کردند. سلطانی و همکاران [۱۸] در مقاله‌ای تحلیل ناپایداری ارتجاعی کمانش خمشی– پیچشی و ارتعاش آزاد تیرهای با مقطع متغیر را با روش سری‌های توانی انجام دادند. سلطانی و همکاران [۱۹] در تحقیقی مشابه پژوهش پیشین بر اساس روش سری‌های توانی و اصل کار مجازی، ماتریس‌های جرم و سختی را برای تحلیل ارتعاش آزاد و کمانش خمشی– پیچشی در تیر با مقطع متغیر و شکل دلخواه ساختند. توابع شکل مورد نیاز را با کمک مشتق‌گیری از سری‌های توانی –که تقریبی از توابع جابجایی بود– به دست آوردند. کواک [۲۰] کمانش جانبی– پیچشی تیرهای I–شکل با مقطع متغیر را بررسی کرد. وی معادله دیفرانسیل تغییر شکل تیر با مقطع منشوری را با انجام اصلاحاتی برای تیر با مقطع متغیر به کار برد. با بررسی هندسه تغییر شکل مقطع در حین کمانش جانبی– پیچشی تیر روش‌های رایلی–ریتز و باقی‌مانده‌های وزن‌دار در حل معادله دیفرانسیل تغییر شکل، مسئله مورد نظر را حل کرد. رهایی و کاظمی [۲۱] تحلیل کمانشی ستون‌های غیرمنشوری را بر اساس مودهای ارتعاشی و روش‌های انرژی انجام دادند. ایشان در این مطالعه با به کار بستن شکل‌های مودی ارتعاش و اصل ایستا کردن انرژی پتانسیل کل، بار بحرانی کمانش ستون را به دست آوردند. برادفورد و ولی پور [۲۲] در پژوهشی تابع شکل تیر با مقطع متغیر و تکیه‌گاه‌های ارتجاعی را معرفی کردند. ایشان در این تحقیق از اصل کار مجازی استفاده کردند و معادلات را بر اساس فرض اویلر– برنولی، رفتار ارتجاعی برای مصالح و عدم رخداد کمانش موضعی به دست آوردند. کانستانتناکوپولوس و همکاران [۲۳] پایداری یک تیر ستون تنها را با انواع اشکال تغییر مقطع در طول عضو بررسی کردند. از جمله اشکال تغییر مقطع در طول عضو می‌توان به صورت پله‌ای، شیب‌دار به یک سمت و افزایش عمق عضو از طرفین به سمت میانه طول تیر اشاره کرد. علاوه بر نیروی فشاری اعمالی، اثر لنگرها، نیروهای محوری متمرکز و تغییر شکل‌های اولیه را در تحلیل مسئله بررسی کردند. دربندی و همکاران [۲۴] با روش تئوری اختلالات به کمانش ستون‌های با مقطع متغیر پرداختند. در آن تحقیق به حل معادله دیفرانسیل حاکم بر کمانش خمشی ستون با رفتار اویلر– برنولی به روش مذکور پرداخته شد. تابع تغییر شکل به صورت یک تابع نمایی از حاصل جمع یک سری توانی فرض شد. حدیدی و همکاران [۲۵] به تحلیل غیرخطی مرتبه دوم تیرهای با مقطع متغیر پرداختند. ایشان در فرایند حل معادله دیفرانسیل تغییر شکل از روش سری‌های توانی استفاده کردند و حضور بارهای متمرکز در طول تیر را نیز در نظر گرفتند. ویی و همکاران [۲۶] کمانش خمشی ستون‌های غیرمنشوری را که در معرض بار متمرکز انتهایی و بار گسترده هستند، بررسی کردند و معادله دیفرانسیل حاکم بر

1 snap-through analysis

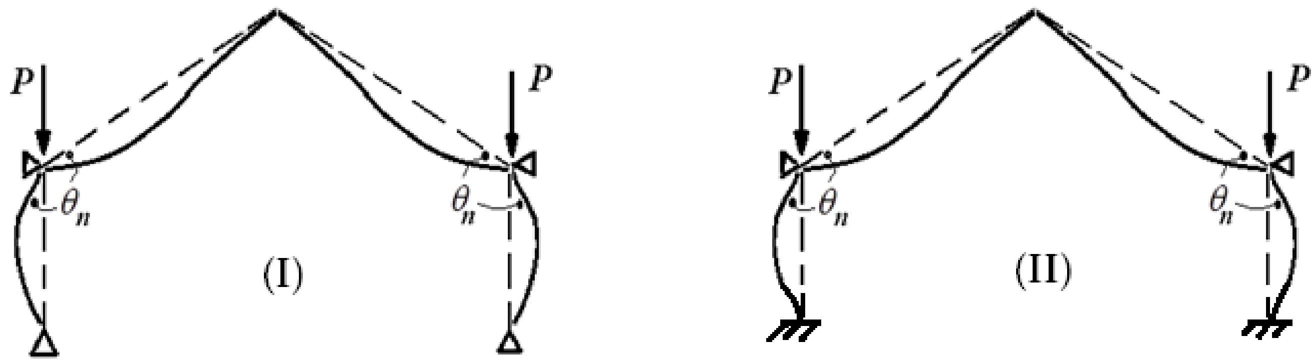
تغییر شکل حین کمانش ستون با شرایط انتهایی گوناگون را به صورت معادله انتگرال در آورده، کم‌ترین مقدار ویژه متناظر با معادله انتگرال را به دست آوردند. پایداری و ارتعاش آزاد ستون‌های با مقطع متغیر که در انتها دارای فنرهای الاستیک هستند با روش تربیع دیفرانسیلی توسط طاها و اِسان [۲۷] انجام گردید. ایشان پس از به دست آوردن معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش و کمانش ستون، از روش تربیع دیفرانسیلی در حل تقریبی معادله دیفرانسیل استفاده کردند. شوشتری و خواجوی [۲۸] روشی را برای یافتن توابع شکل و ماتریس سختی تیرهای غیرمنشوری معرفی کردند. در این پژوهش حرکت‌های جسم صلب از تابع کرنش‌ها جدا گردید و توابع درونیابی کرنش برحسب تغییر شکل‌های گرهی المان تیر به دست آمد. روکو و همکاران [۲۹] روش مدل میله هنکی را برای تحلیل کمانش خمشی ستون‌های غیرمنشوری به کار بستند. در این مدل، ستون مورد نظر به چندین تکه ستون صلب تقسیم می‌شود که هر دو ستون صلب مجاور با یک فنر دورانی به هم متصل شده‌اند. سختی دورانی هر فنر بر مبنای ممان اینرسی مقطع ستون در آن محل محاسبه می‌شود. بار بحرانی مود اول کمانش ستون اولیه تقریبا با کوچک‌ترین ریشه معادله‌ای برابر است که در آن دترمینان ماتریس ضرایب با مقدار صفر برابر است. دقت جواب بستگی به تعداد تکه‌های صلب دارد. نیکولیک و سالینیک [۳۰] به تعیین بار بحرانی کمانش خمشی ستون‌های غیرمنشوری با روشی مشابه مدل میله هنکی، موسوم به روش میله‌های صلب چندگانه [1] پرداختند. در این روش بین هر دو تکه ستون صلب مجاور دو فنر (دورانی و انتقالی) در نظر گرفته شده است. سختی هر فنر دورانی و انتقالی به ترتیب، متناظر با سختی خمشی و سختی برشی تکه ستون در محل مورد نظر است.

آنچه تاکنون اشاره شد، تحقیقات انجام شده روی ستون‌های ماهیچه‌ای منفرد بود. تعدادی از تحقیقات انجام شده روی رفتار و پایداری ستون‌های غیرمنشوریِ تشکیل دهنده‌ی قاب‌ها، در ادامه آمده است: راه‌حل تقریبی لی و همکاران [۳۱] که با استفاده از روش ریلی-ریتز و با الهام از روش سری‌های توانی و حساب تغییرات انجام شده که نتیجه‌ی آن یک سری نمودار با علائم و پارامترهای مشابه نمودارهای ژولیان و لورنس بوده است. در این روش قاب مورد نظر با اعضای مقطع متغیر به یک قاب ساده‌ی چهارگوش -که دارای دو ستون (در طرفین) و دو تیر (در بالا و پایین) است- تبدیل می‌شود. راه‌حل تقریبی پیشنهادی فریدون ایرانی [۳۲] با یک سری فرضیات و حل معادله‌ی دیفرانسیل تقریبی کمانش قاب با اعمال شرایط تعادل و پیوستگی در گره‌های آن انجام شد. کارابالیس و همکاران [۳۳] برای محاسبه‌ی بار بحرانی قاب‌های صفحه‌ای دارای مقطع متغیر روشی ارائه کردند. این روش با به دست آمدن ماتریس سختی کل سازه بر اساس جواب معادله دیفرانسیل تغییر شکل ستون، بار بحرانی ستون‌های قاب به دست آمد. صفاری و همکاران [۳۴] با در نظر گرفتن سهمی درجه‌ی دو برای تغییرات تابع ممان اینرسی ستون و تیر در یک قاب شیب‌دار یِک دهانه‌ی متقارن، مسئله را بررسی کرده و حاصل تلاش آن‌ها نمودارهای بدون بعد ضریب طول موثر بوده است. در مدل هندسی آن‌ها، تیرها و ستون‌ها از اعضای I- شکل با مقطع متغیر ساخته شده‌اند. مومنی و تاجی زادگان [۳۵]، ریاحی و همکاران [۳۶] در مقالات جداگانه و مشابه، با کمک روابط شیب افت در حضور نیروی محوری برای عضو با مقطع متغیر و استفاده از روابطی که در مقاله لی و همکاران [۳۱] آمده است، نمودارهای ضریب طول موثر سوله‌های تک دهانه را برای حالات کمانش با حرکت جانبی آزاد و مقید ترسیم کردند. در هر دو مقاله اخیر از سهم ممان اینرسی جان در ممان اینرسی مقطع صرف نظر شده است. رضایی پژند و همکاران [۳۷] در مقاله‌ای پایداری قاب‌های پرتال (با ستون‌های مقطع متغیر و با اتصالات نیمه‌گیردار به تیر) را بررسی کردند و حالات حرکت جانبی آزاد و مقید را برای قاب در نظر گرفتند. مقطع ستون‌های I- شکل را در بال‌ها فرض و از وجود جان در محاسبات و تابع ممان اینرسی صرف نظر کردند. تابع ممان اینرسی مقطع ستون را با یک تک جمله‌ای جبری درجه‌ی n از متغیر طول (x) تقریب زده و در معادله دیفرانسیل تغییر شکل استفاده شد.

همچنان که مشاهده می‌شود در تمامی مطالعات مطرح شده چه برای ستون‌های منفرد و چه ستون‌های تشکیل دهنده قاب‌ها، تعیین بار بحرانی ستون‌های با مقطع متغیر با روش‌های عددی و تقریبی انجام شده است و این مسئله به خاطر در دسترس نبودن حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل تغییر شکل در ستون‌های مزبور بوده است. اکنون با کمک نرم‌افزارهای ریاضی می‌توان معادلات مزبور را به صورت تحلیلی حل کرد و از نتیجه‌ی آن در معادلات تعیین بار بحرانی (یا ضریب طول موثر) استفاده کرد.

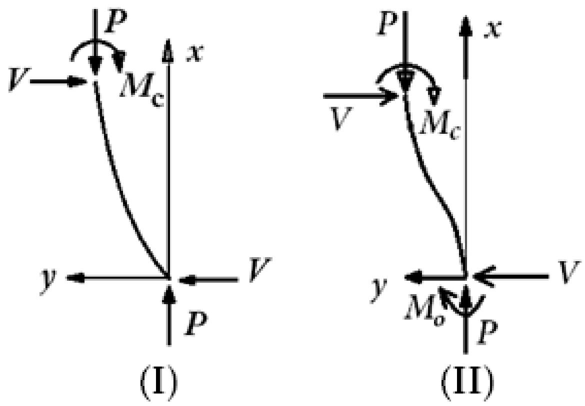
در مقاله حاضر حالت کمانش سوله‌ها با ستون‌های مقید در برابر حرکت جانبی با روشی تحلیلی و بهره جستن از حل تحلیلی معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله کمانش و حصول معادله مشخصه آن بررسی شده است. از حالات اجرایی ممکن برای این ستون‌ها، -ستون‌های سوله‌ای که داخل قاب آن دیوارچینی صورت گرفته است (سوله‌های انتهایی انبارها) و سوله‌هایی که برای جلوگیری از حرکت جانبی درون صفحه‌ی قاب (مثلا جابجایی ناشی

1 Multiple rigid rods



شکل ۱. وضعیت سازه بارگذاری شده قبل و بعد از کمانش (شکل چپ: سوله با تکیه‌گاه‌های مفصلی-شکل راست: سوله با تکیه‌گاه‌های گیردار)

Fig. 1. Configuration of the loaded structure in buckling and before it (left shape: gabled frame with hinged bases- right shape: gabled frame with rigid bases)



شکل ۲. دیاگرام آزاد تکه‌ای از ستون کمانش یافته از سازه های (I) و (II)

Fig. 2. Free diagram of a part of the buckled column from the structures (I) and (II) Figure 2. Free diagram of a part of the buckled column from the structures (I) and (II)

از اثر ضربه جرثقیل) در داخل یا از بیرون مهاربندی شده است- نام برد. در حالت اخیر، عدم حضور مهاربندی مزبور منجر به مود کمانشی آزاد در برابر حرکت جانبی و ظرفیت بسیار پایین‌تری برای ستون‌ها خواهد بود. در این مقاله برای محاسبه‌ی بار کمانش خمشی ارتجاعی ابتدا ضریب طول موثر تعیین می‌شود. ضریب طول موثر بر اساس مشخصات هندسی سوله (نسبت طول تیر مورب به ارتفاع ستون، ضریب تغییرات عمق مقطع ستون و نسبت طول غیرمنشوری به طول کلی تیر مورب) و با استفاده از نمودارهای ترسیم شده تعیین می‌شود. سپس با کمک رابطه اویلر بار کمانش خمشی ارتجاعی بر حسب ضریب طول موثر تعیین می‌گردد.

۲- مدل بارگذاری، وضعیت کمانش و تحلیل مسئله

شکل سوله، وضعیت بارگذاری و شکل کمانش یافته آن در شکل ۱ آمده است. سوله با تکیه‌گاه‌های مفصلی و گیردار به ترتیب با سازه‌های (I) و (II) نام‌گذاری شده است.

معادلات دیفرانسیل حاکم بر تغییر شکل جانبی ستون در حین کمانش (شکل ۲) مطابق با معادلات (۱) و (۱') است.

$$M_c = Pv - Vx = -EI_c v'' \quad (۱)$$

$$M_c = Pv - Vx - M_0 = -EI_c v'' \quad (۱')$$

در این روابط M_c، v، E، V، M_o و I_c به ترتیب، معرف تابع لنگر خمشی، تابع جابجایی جانبی، ضریب الاستیسیته مصالح ستون، نیروی برشی، لنگر پای ستون و تابع ممان اینرسی مقطع ستون هستند. برای کار خارجی انجام شده در لحظه‌ی کمانش و برابری آن با مجموع انرژی خمشی در مجموعه‌ی ستون‌ها و تیرها داریم (Δ_h افت ناگهانی محل‌های اثر بار P در اثر کمانش است):

$$W_{ext} = 2\times(P\times\Delta_h)\approx 2\times P\left(\frac{1}{2}\int_0^l v'^2\right) = U_c+U_b \qquad (۲)$$

مجموع انرژی ارتجاعی خمشی در ستون‌ها:

$$U_c = 2\times\int_0^l \frac{M_c{}^2}{2EI_c}dx \; U_c = 2\times\int_0^l \frac{M_c{}^2}{2EI_c}dx \qquad (۳)$$

با جایگذاری هر یک از مقادیر معادل با M_c، به جای یک توان از آن در رابطه‌ی انرژی، معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$U_c=\int_0^l \frac{M_c\times M_c}{EI_c}dx = \int_0^l \frac{(Pv-Vx)\times(-EI_cv'')}{EI_c}dx \qquad (۴)$$

$$U_c=\int_0^l \frac{M_c\times M_c}{EI_c}dx = \int_0^l \frac{(Pv-Vx-M_0)\times(-EI_cv'')}{EI_c}dx \qquad (۴')$$

بنابراین معادلات (۴) و (۴') به صورت معادله (۵) نوشته می‌شوند:

$$U_c = \int_0^l -(Pv-Vx)v''dx$$
$$U_c = \int_0^l -(Pv-Vx-M_0)v''dx \qquad (۵)$$

حال با کمک روش جزء به جزء دو معادله زیر به دست می‌آیند:

$$U_c = -P\left(vv' - \int v'^2 dx\right)_0^l + V\left(xv' - \int v'dx\right)_0^l \qquad (۶)$$

$$U_c = -P\left(vv' - \int v'^2 dx\right)_0^l + V\left(xv' - \int v'dx\right)_0^l + M_0(v')_0^l \qquad (۶')$$

در طرف راست دو معادله‌ی (۶) و (۶')، حاصل عبارت داخل پرانتز اول و دوم، پس از اعمال شرایط مرزی، به ترتیب با $-\int_0^l v'^2dx$ و $-l\theta$ برابر هستند، شایان ذکر است که مشتق تابع جابجایی در سر ِستون در دستگاه مختصات آن (v'_l) مقداری منفی است (θ مقدار دوران سر ِستون است). ضمنا به خاطر عدم جابجایی جانبی دو انتهای ستون، مقادیر $(vv')_0^l$ و $\int_0^l v'dx$ مساوی با صفر است و در معادله دوم، مقدار داخل پرانتز سوم برابر با $-\theta$ است. نتیجتا مجموع انرژی خمشی در ستون‌ها برابر است با:

$$U_c = P\int_0^l v'^2\, dx - Vl\theta \qquad (۷)$$

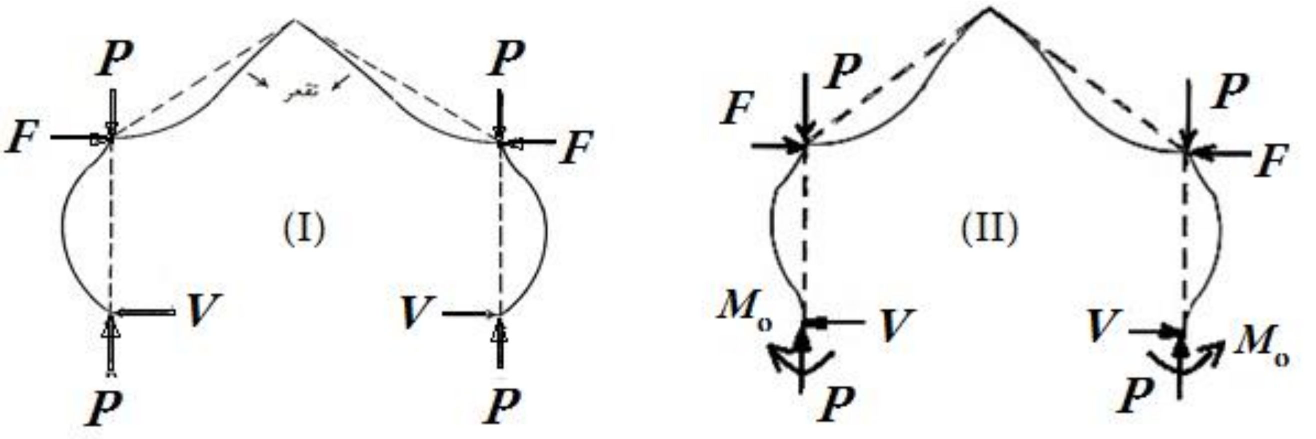
$$U_c = P\int_0^l v'^2\, dx - \theta(Vl+M_0) \qquad (۷')$$

از طرفی $W_{ext} = P\int_0^l v'^2dx$، بنابراین با توجه به معادله $W_{ext}=U_c+U_b$ ، برای مجموع انرژی ارتجاعی خمشی تیرها قاب (I) و (II)، به ترتیب، نتایج $U_b=Vl\theta$ و $U_b=(M_0+Vl)\theta$ به دست می‌آید. حال با توجه به دستگاه مختصات انتخابی برای تغییر شکل تیر –که مبدأ مختصات در سر ستون، محور x روی راستای تیر (پیش از تغییر شکل) و به سمت راس سوله و محور y عمود بر محور x و به طرف داخل قاب است– دو معادله زیر به دست می‌آیند (شکل‌های ۳ و ۴):

$$v_b'' = -\frac{M_b}{EI_b} \Rightarrow (v_b')_0^s = 0-\theta = -\theta = -\int_0^s \frac{M_b}{EI_b}dx = -\int_0^s \frac{Vl+(V-F)x\sin\alpha}{EI_b}dx \qquad (۸)$$

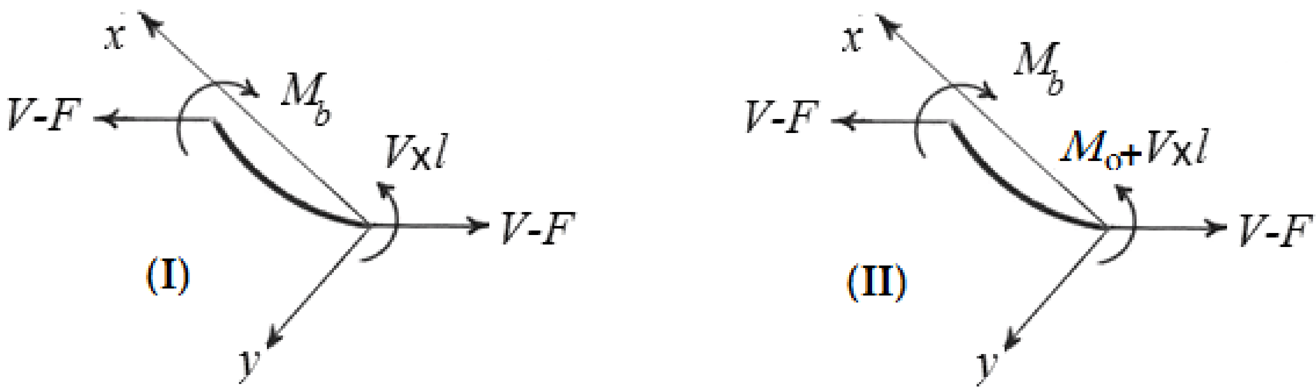
$$(v_b')_0^s = 0-\theta = -\theta = -\int_0^s \frac{M_b}{EI_b}dx = -\int_0^s \frac{M_0+Vl+(V-F)x\sin\alpha}{EI_b}dx \qquad (۸')$$

(بخاطر کمانش متقارن سازه، چرخش تیر در تاج (x=s) صفر است و با توجه به دستگاه مختصات در نظر گرفته شده برای تغییر شکل تیر و ستون، مقدار v_b' در محل اتصال تیر به ستون ($x=0$) مقداری مثبت و برابر چرخش در سر ستون (θ) است).



شکل ۳. نیروها در نقاط مرزی تیر و ستون.

Fig. 3. Forces at the boundary points between the beam and column



شکل ۴. دیاگرام آزاد قسمتی از تیر، جدا شده از مجاورت اتصال آن به ستون

Fig. 4. Free diagram of a part of a beam, separated from the vicinity of its connection to the column

با کمک معادله‌ی (۸)، مقدار معادل با θ را در U_b جایگذاری کرده، می‌توان نوشت:

$$U_b = Vl\theta = Vl\int_0^s \frac{Vl + (V-F)x\sin\alpha}{EI_b}dx \tag{۹}$$

از سوی دیگر:

$$U_b = 2\int_0^s \frac{{M_b}^2}{2EI_b}dx = \int_0^s \frac{[Vl + (V-F)x\sin\alpha]^2}{EI_b}dx \tag{۱۰}$$

بنابراین برای سازه (I):

$$\int_0^s \frac{[Vl + (V-F)x\sin\alpha]^2}{EI_b}dx = Vl\int_0^s \frac{Vl + (V-F)x\sin\alpha}{EI_b}dx \tag{۱۱}$$

و برای سازه (II) معادله (۱۱') را می‌توان نوشت:

$$U_b=(M_0+Vl)\theta=(M_0+Vl)\int_0^s \frac{M_0+Vl+(V-F)x\sin\alpha}{EI_b}dx=\int_0^s \frac{\left[M_0+Vl+(V-F)x\sin\alpha\right]^2}{EI_b}dx \qquad (۱۱')$$

با ضرب Vl در عبارت درون انتگرال و انتقال جملات به یک سمت تساوی می‌توان نوشت:

$$\int_0^s \frac{Vl(V-F)x\sin\alpha+\left[(V-F)x\sin\alpha\right]^2}{EI_b}dx=0 \qquad (۱۲)$$

حال اگر $\sin\alpha\neq 0$ و بگیریم $\eta=\frac{V}{F}$، با تقسیم طرفین رابطه‌ی (۱۲) بر $F^2\sin\alpha$ معادله (۱۳) حاصل می‌شود:

$$l\eta I_4+(\eta-1)I_5\sin\alpha=0 \qquad (۱۳)$$

بطوریکه:

$$I_4=\int_0^s \frac{x}{I_b}dx \qquad I_5=\int_0^s \frac{x^2}{I_b}dx \qquad (۱۴)$$

بنابراین:

$$\frac{V}{F}=\frac{I_5\sin\alpha}{lI_4+I_5\sin\alpha} \qquad (۱۵)$$

متناظر با معادله (۱۵)، معادله زیر برای سوله (II) حاصل می‌شود.

$$M_0+Vl=\frac{I_5}{I_4}(F+V)\sin\alpha \qquad (۱۵')$$

مجددا رابطه انرژی ارتجاعی مجموع تیرها بازنویسی می‌شود:

$$U_b=\int_0^s \frac{[Vl+(V-F)x\sin\alpha]^2}{EI_b}dx=Vl\theta \qquad (۱۶)$$

$$U_b=\int_0^s \frac{[M_0+Vl+(V-F)x\sin\alpha]^2}{EI_b}dx=(M_0+Vl)\theta \qquad (۱۶')$$

با توجه به معادله‌ی دیفرانسیل تغییر شکل ستون (معادلات ۱ و ’۱) در سوله‌های (I) و (II)، پس از اعمال شرایط مرزی صفر، تابع جواب (تابع جابجایی جانبی ستون) به گونه‌ای حاصل می‌شود که مشتق آن در x=l یعنی v'_l و همچنین M_0 بر V قابل قسمت است. یعنی چرخش سرِ ستون بخش بر V یعنی $\frac{\theta}{V}$ عبارتی برحسب نیروی محوری است ($\theta=-v'_l$) و می‌توان نامگذاری‌های معادلات (۱۷) و (’۱۷) را در نظر گرفت:

$$f(P)=\frac{v'_l}{V}=-\frac{\theta}{V} \qquad (۱۷)$$

$$g_1(P)=\frac{v'_l}{V}=-\frac{\theta}{V},\ g_2(P)=\frac{M_0}{V} \qquad (۱۷')$$

به جای پارامترهای F و F+V در معادلات (۱۶) و (’۱۶) مقادیر معادل آن‌ها را با کمک معادلات (۱۵) و (’۱۵) برحسب V و M_o+Vl گذاشته، سپس با تقسیم کردن طرفین معادلات حاصل شده، به ترتیب بر $V^۲$ و $(M_o$+ Vl)V و انتقال جملات به یک طرف تساوی می‌توان نوشت:

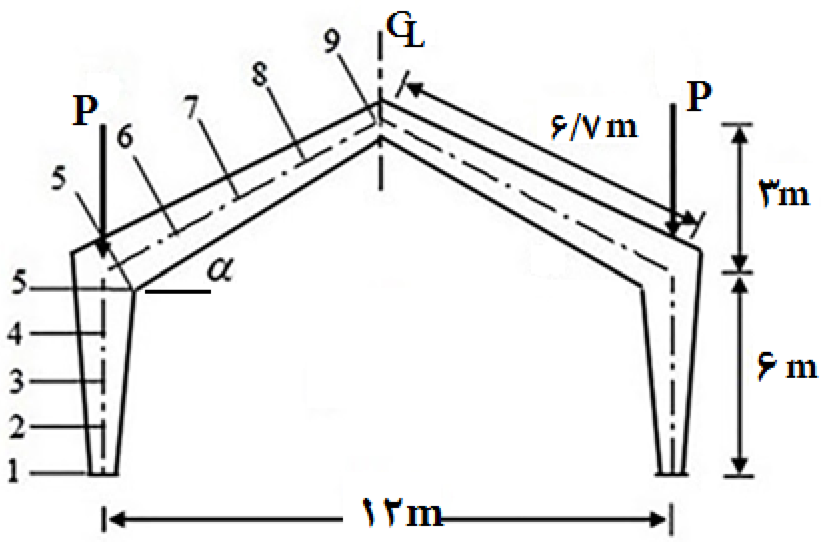
$$\frac{l}{E}\int_0^s \frac{\left(1-\frac{I_4}{I_5}x\right)^2}{I_b}dx+f(P)=0\Rightarrow$$
$$\frac{l}{E}\left[\int_0^s \frac{1}{I_b}dx-2\frac{I_4}{I_5}\int_0^s \frac{1}{I_b}dx+\left(\frac{I_4}{I_5}\right)^2\int_0^s \frac{x^2}{I_b}dx\right]+f(P)=0 \qquad (۱۸)$$

$$\frac{[g_2(P)+l]}{E}\int_0^s \frac{\left(1-\frac{I_4}{I_5}x\right)^2}{I_b}dx+g_1(P)=0\Rightarrow$$
$$\frac{[g_2(P)+l]}{E}\left[\int_0^s \frac{1}{I_b}dx-2\frac{I_4}{I_5}\int_0^s \frac{1}{I_b}dx+\left(\frac{I_4}{I_5}\right)^2\int_0^s \frac{x^2}{I_b}dx\right]+g_1(P)=0 \qquad (۱۸')$$

با در نظر گرفتن $I_3=\int_0^s \frac{1}{I_b}dx$، معادلات مشخصه به صورت زیر ساده می‌گردند:

$$f(P)+\frac{l}{E}\left(I_3-\frac{I_4^2}{I_5}\right)=0 \qquad (۱۹)$$

$$g_1(P)+\frac{[g_2(P)+l]}{E}\left(I_3-\frac{I_4^2}{I_5}\right)=0 \qquad (۱۹')$$



شکل ۵. طول اعضا و شکل بارگذاری سوله مثال ۱ و شماره مقاطع عرضی اعضای آن

Fig. 5. Length of the members, loading and numbered cross sections in example.1

جدول ۱. مشخصات هندسی مقاطع عرضی انتهایی ستون و تیر مثال ۱

Table 1. Geometric characteristics of end cross sections of the column and the beam in Example. 1

شماره مقطع ستون	d (mm)	Ix (mm^4)
۱	۳۰۰	۳۶۰۰x۱۰^۴
۵	۶۰۰	۱۸۰۰۰ x۱۰^۴
شماره مقطع تیر	d (mm)	Ix (mm^4)
۵	۶۰۰	۱۸۰۰۰ x۱۰^۴
۹	۳۶۰	۵۵۵۲ x۱۰^۴

در دو رابطه‌ی اخیر $f(P)$، $g_1(P)$ و $g_2(P)$ توابعی برحسب بار بحرانی ستون است. کوچک‌ترین ریشه‌ی این دو معادله (معادله مشخصه)، همان بار بحرانی مود اول کمانش سازه متناظر (I یا II) است.

۳- مثال‌های عددی

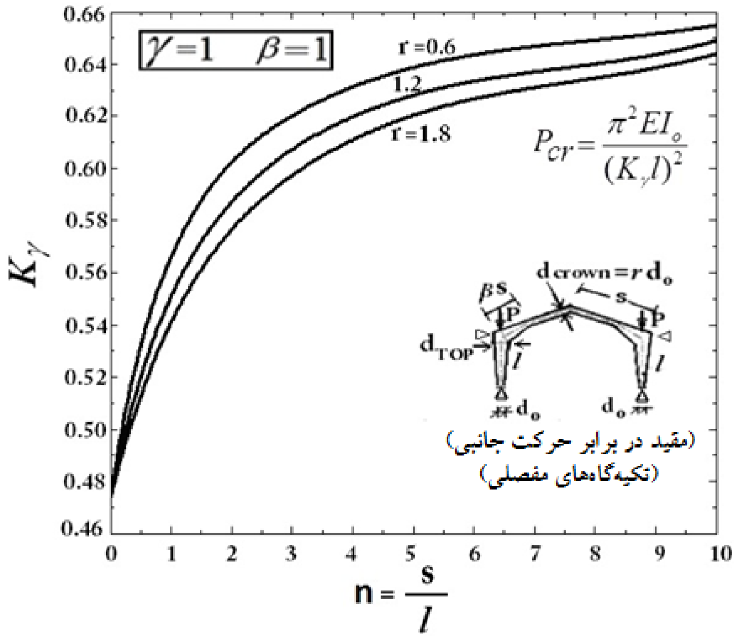
۳- ۱- مثال ۱

ضریب طول موثر ستون‌های سوله مقید در برابر حرکت جانبی (شکل ۵) برای دو حالت سوله‌های با تکیه‌گاه‌های مفصلی و گیردار به طور جداگانه خواسته شده است. مصالح سوله از فولاد و با ضریب الاستیسیته MPa ۲×۱۰^۵ ساخته شده است. سایر اطلاعات در جدول ۱ آمده است.

۳- ۱- ۱- روش پیشنهادی

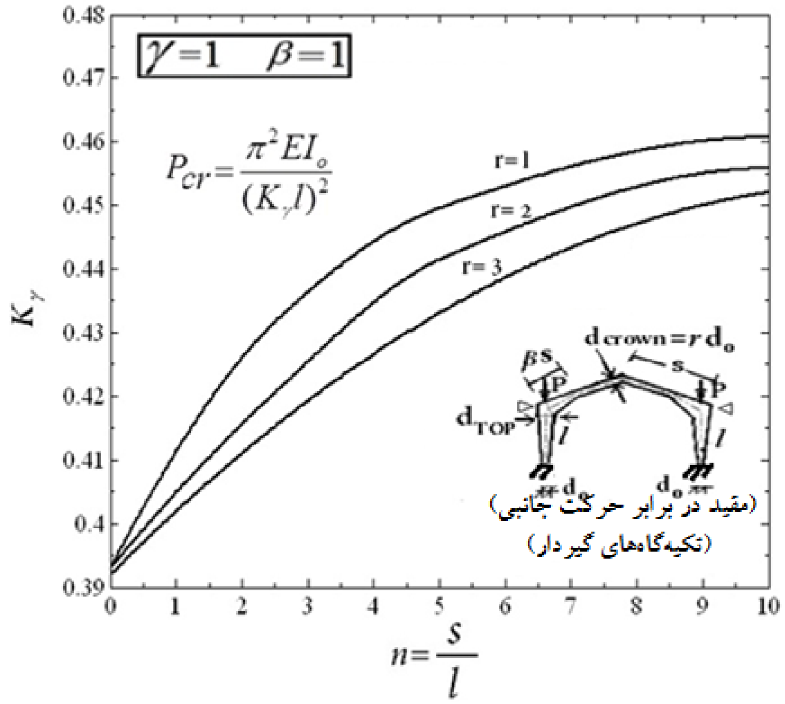
در این سوله $\gamma = \frac{d_{TOP}}{d_o} - 1 = \frac{600}{300} - 1 =$ ۱ و $\beta =$ ۱ (نسبت طول ناحیه غیرمنشوری تیر به کل طول آن مساوی با واحد است)، بنابراین با توجه به اشکال ۶ و ۷ به ترتیب برای سوله‌های با تکیه‌گاه‌های مفصلی و گیردار می‌توان ضریب طول موثر را تعیین کرد:

$$r = \frac{d_{crown}}{d_0} = \frac{360}{300} = ۱/۲ \qquad n = \frac{s}{l} = \frac{6.7}{6} = ۱/۱۱۶$$



شکل ۶. ضریب طول موثر سوله تک دهانه با تکیه‌گاه‌های مفصلی در حالت مقید در برابر حرکت جانبی ($\gamma=1$ و $\beta=1$)

Fig. 6. Effective length coefficient of one-bay gabled frames with hinged bases for non-sway buckling ($\gamma=1$& $\beta=1$).



شکل ۷. ضریب طول موثر سوله تک دهانه با تکیه‌گاه‌های گیردار در حالت مقید در برابر حرکت جانبی ($\gamma=1$ و $\beta=1$)

Fig. 7. Effective length coefficient of one-bay gabled frames with rigid bases for non-sway buckling ($\gamma=1$ & $\beta=1$)

سوله با تکیه‌گاه‌های مفصلی (سازه I): $K_{\gamma} =$ ۰/۵۵۶

سوله با تکیه‌گاه‌های گیردار (سازه II): $K_{\gamma} =$ ۰/۴۱۲.

بار بحرانی کمانش ارتجاعی خمشی برای دو حالت تکیه‌گاهی:

$$(I)\ :\ P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_0}{(K_\gamma l)^2} = \frac{\pi^2 \times 2e5 \times 3600\,e4}{(0.556 \times 6000)^2} = 6\,385\,283\,N \approx 6\,385\ \ kN$$

$$(II)\ :\ P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_0}{(K_\gamma l)^2} = \frac{\pi^2 \times 2e5 \times 3600\,e4}{(0.412 \times 6000)^2} = 11\ 628\ 811\,N \approx 11\ 629\ \ kN$$

۳- ۱- ۲- حل مسئله با روش مراجع [۳۸ و ۳۱]

در این روش نیمه‌ی سوله (با توجه به تقارن آن) با یک قاب مستطیلی صلب با چهار عضو، معادل می‌شود. در آن قاب، ستون‌ها مثل ستون‌های سوله است ولی تیرهای بالا و پایین منشوری هستند به طوری که سختی خمشی تیر بالایی و پایینی به ترتیب برابر با سختی خمشی تیر موروب در مجاورت اتصال به ستون و سختی خمشی اتصال پای ستون به پی است. در حالت مفصلی و گیردار بودن پای ستون‌ها، سختی خمشی تیر پایینی در قاب مستطیلی برابر با صفر و بی نهایت فرض می‌شود. حال باید سختی خمشی تیر بالایی در قاب فرضی تعیین شود. در سوله متقارن و مقید در برابر حرکت جانبی، هنگام کمانش، راس سوله دوران نمی‌کند. پس تیر موروب به صورت یک تیر با انتهای گیردار (انتهای کوچک) است که انتهای دیگر (انتهای بزرگ) آن به ستون متصل است. در این حالت در یک تیر منشوری سختی خمشی برابر با $\frac{4EI}{l}$ خواهد بود. در اشکال بعدی منظور از P/Pex_0 نسبت نیروی محوری در تیر موروب (در بارگذاری خارجی اعمالی) به بار اویلر تیر منشوری دو سر مفصل با مقطع کوچک‌تر است. ضمنا حروف T و C معرف کششی یا فشاری بودن نیروی محوری تیر می‌باشد. ضریب γ معرف نسبت تغییر عمق مقطع در تیر است و در این مثال برای تیر با مقدار ۰/۶۶ برابر است ($\frac{d_5}{d_9} - 1 = \frac{600}{360} - 1$). ضمنا بار ثقلی به سر ستون‌ها اعمال شده و نیروی محوری در تیر صفر است (P_b=۰).

بار بحرانی ستون دو سر مفصل با مقطع ساخته شده از انتهای کوچک‌تر تیر:

$$P_{ex9} = \frac{\pi^2 EI_9}{{b_T}^2} = \frac{\pi^2 \times 2e5 \times 5552e4}{6700^2} = 2441347\,N \approx 2441\,kN$$

نسبت نیروی فشاری تیر به بار بحرانی P_{ex9} مساوی با صفر است. پس سختی خمشی تیر موروب در مجاورت اتصال به ستون با توجه به عدم دوران راس سوله و شکل ۸ محاسبه می‌شود (I_9 و s ممان اینرسی انتهای کوچک‌تر تیر و طول آن است):

$$K_{AA} = 2.2 \times \frac{4EI_9}{s}$$

اکنون ممان اینرسی تیر بالایی در قاب معادل مستطیلی محاسبه می‌شود:

$$K_{AA} = 2.2\left({}^{4EI_9}\!\big/_{b_T}\right) = \frac{4EI_T}{b_T} \Rightarrow .$$

$$I_T = 2.2\,I_9 = 2.2 \times 5552e4 = 12\,214$$

بنابراین:

$$G_T = \frac{b_T I_0}{l\,I_T} = \frac{6700 \times 3600e4}{6000 \times 12\ 214e4} = 0.33$$

ضمنا مقادیر ضریب G_B به ترتیب، برای تکیه‌گاه‌های مفصلی و گیردار برابر با بی‌نهایت و صفر است. ضریب γ برای ستون به صورت $\gamma = \frac{d_5}{d_1} - 1 = 1$ محاسبه می‌شود، اکنون با توجه به منحنی‌های مقادیر متنوع G_B از شکل ۹ ضریب طول موثر و بار بحرانی ستون محاسبه می‌شود:

سوله با تکیه‌گاه‌های مفصلی:

$$K_\gamma = 0.60 \Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_0}{(K_\gamma l)^2} =$$

$$\frac{\pi^2 \times 2e5 \times 3600e4}{(0.60 \times 6000)^2} = 5\,483\,110\,N \approx 5\,483\,kN$$

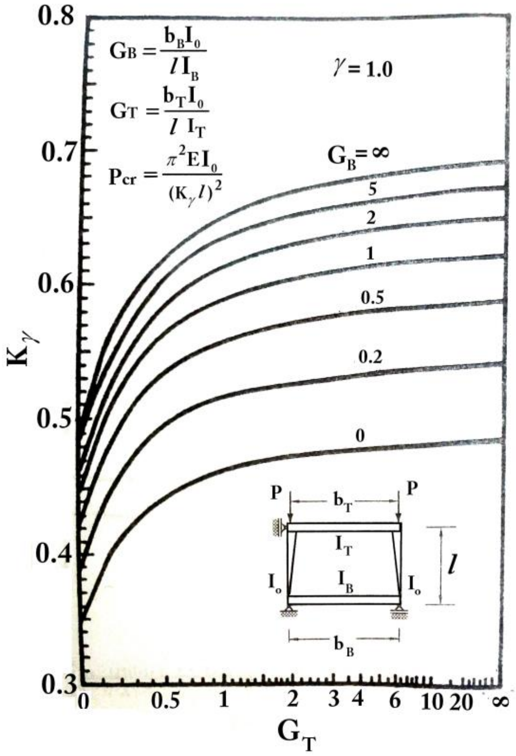
سوله با تکیه‌گاه‌های گیردار:

$$K_\gamma = 0.43 \Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_0}{(K_\gamma l)^2} =$$

$$\frac{\pi^2 \times 2e5 \times 3600e4}{(0.43 \times 6000)^2} = 10\ 675\ 610\,N \approx 10\ 675\,kN$$

۳- ۲- مثال ۲

مثال قبلی با انجام تغییراتی، دوباره حل می‌شود. تیر را منشوری و مقطع آن را مشابه با مقطع شماره ۵ در نظر گرفته، تکیه‌گاه‌های پای ستون‌ها مفصلی هستند. سایر مشخصات هندسی بدون تغییر می‌مانند.



شکل ۸. مقادیر $K_A / \frac{4E_o}{l}$ **(مراجع [۳۸ و ۳۱])**

Fig. 8. The values of $K_A / \frac{4E_o}{l}$ **(Refs. [31] & [38])**

۳- ۲- ۱- روش پیشنهادی

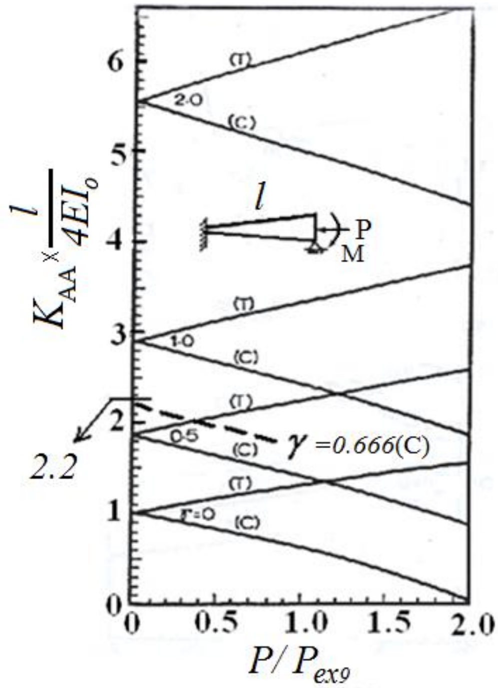
در این مثال $r=d_{crown}/d_o=600/300=2$ ، ضمنا چون تمام طول تیر منشوری است، می‌توان در نظر گرفت $\beta=1$ (مثل این است که تمام طول تیر را غیرمنشوری و با شیب ناچیز در تغییرات عمق فرض کرد). ضمنا $\gamma=1$ خواهد بود و شکل ۶ همچنان قابل استفاده است. منحنی با r=۲ در این نمودار رسم نشده، با برونیابی از منحنی r=۱.۸ می‌توان ضریب طول موثر را به دست آورد:

$$K_\gamma = 0.54$$

۳- ۲- ۲- حل مسئله با روش مراجع [۳۸ و ۳۱]

محاسبه G_T:

$$G_T = \frac{b_T I_o}{l\ I_T} = \frac{6700 \times 3600e4}{6000 \times 18000e4} = 0.22$$



شکل ۹. ضریب طول موثر ستون‌های سوله مقید با $\gamma=1$ **(مراجع [۳۸ و ۳۱])**

Fig. 9. Effective length coefficient of gabled frames with $\gamma=1$ **for non-sway buckling (Refs. [31] & [38])**

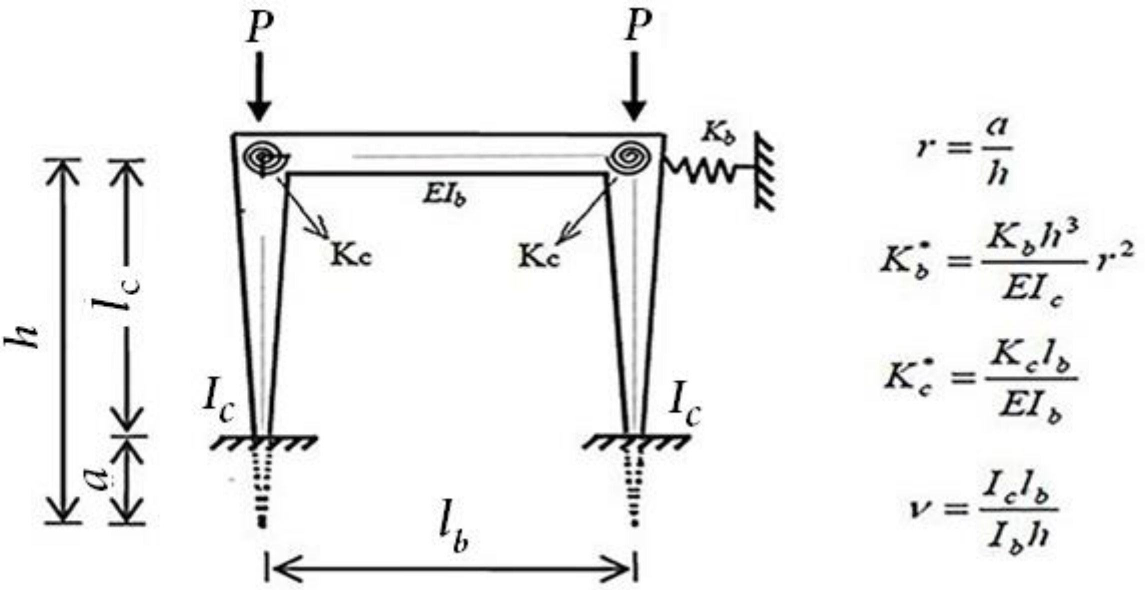
با دانستن آنکه $G_B=\infty$ و با کمک شکل ۹:

$$K_\gamma = 0.59$$

۳- ۲- ۳- حل مسئله با روش مرجع [۳۷]

در این مطالعه، سختی خمشی اتصالات بین تیر و ستون‌های طرفین با فنرهای پیچشی به سختی K_c مدل شده است. ممان اینرسی مقطع پای ستون حول محور خمش با I_c نشان داده شده است. تیر، افقی و منشوری با ممان اینرسی I_b حول محور خمش است. شایان ذکر است که به خاطر آن که در سوله بارگذاری شده مثال فعلی، در تیرها نیروی محوری پدید نمی‌آید، با فرض ثابت ماندن سختی خمشی تیرها، شیب‌دار بودن آن‌ها اهمیتی ندارد و می‌توان از سازه معرفی شده این روش استفاده کرد (شکل ۱۰). سختی متناظر با مهار شدگی جانبی قاب با فنری به سختی K_b مدل شده است. حال برای حل این مثال باید پارامترهای مورد نیاز محاسبه شوند. ممان اینرسی مقطع پای ستون حول محور خمش (I_c):

$$I_c = 3600\,e4\,mm^4$$



شکل ۱۰. مشخصات هندسی قاب مورد مطالعه، فنرهای معادل سختی اتصالات و الگوی بارگذاری [۳۷]

Fig. 10. Geometric characteristics of the studied frame, equivalent springs of connections stiffness and the loading pattern [37]

برای حالت مقید در برابر حرکت جانبی $K_b=\infty$ است و نتیجتا:

$$K_b^*=\frac{K_b h^3}{EI_c}r^2=\infty$$

از سوی دیگر اتصال بین سر ستون و ابتدای تیر، گیردار است، بنابراین $K_C^*=\frac{K_c l_b}{EI_b}=\infty$ خواهد بود. عمق مقطع سرِ ستون دو برابر عمق در پای ستون است، پس مقادیر r و h در شکل ۱۰ به سادگی محاسبه می‌شوند:

$$h=2\times l_c=12\,000\ mm \qquad r=a/h=0.5$$

اکنون پارامتر v تعیین می‌گردد:

$$\nu=\frac{I_c\,l_b}{I_b h}=\frac{3600\ e4\times(2\times 6700)}{18\,000\ e4\times(2\times 6000)}=0.22$$

با توجه به شکل ۱۱ ضریب k محاسبه می‌شود:

$$k=0.95$$

ممان اینرسی مقطع میانی ستون:

$$I_m=1/12 t_w h_m^{\,3}+1/2 A_f d_m^{\,2}=$$

$$=1/12\times 4\times 444^3+1/2\times 600\times 450^2=8993\ e4\,mm^4$$

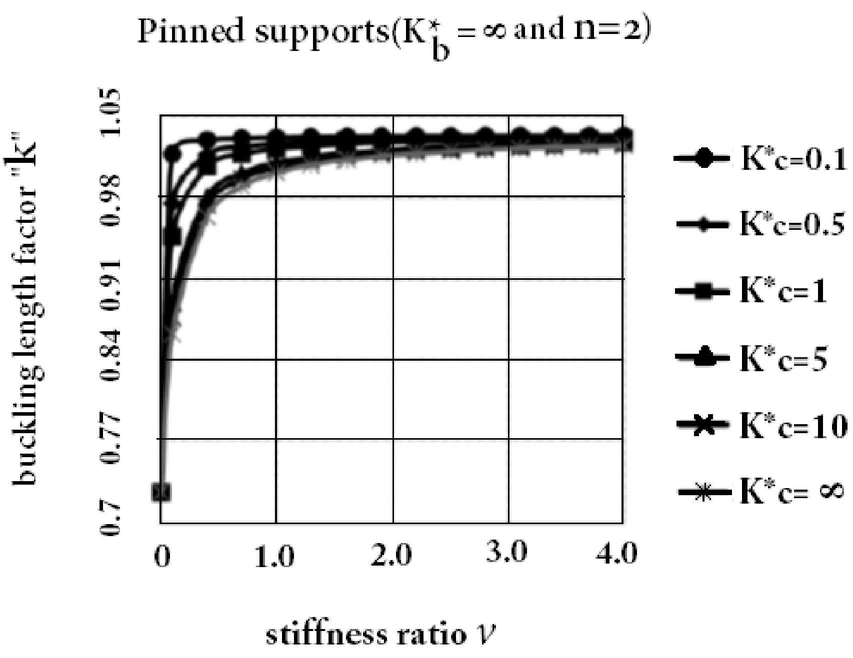
بار بحرانی کمانش ارتجاعی ستون:

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI_m}{(kl_c)^2}=\frac{\pi^2\times 2e5\times 8993\,e4}{(0.95\times 6000)^2}=5\,463\,437\ N$$

حال ضریب طول موثر ستون محاسبه می‌گردد:

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI_o}{(K_\gamma l)^2}=\frac{\pi^2\times 2e5\times 3600\,e4}{(K_\gamma\times 6000)^2}=5\,463\,437\ N\Rightarrow \qquad K_\gamma=0.60$$

همچنان که مشاهده می شود، پاسخ‌های به دست آمده از سه روش به یکدیگر نزدیک است، البته مقادیر ضریب طول موثر محاسبه شده از دو روش انتهایی به یکدیگر نزدیک‌تر هستند و این احتمالا به خاطر آن است که در دو روش اخیر به طور تقریبی از وجود جان در محاسبات صرف نظر شده است.



شکل ۱۱. نمودار ضریب طول کمانشی برای ستون‌های با جان متغیر [۳۷]

Fig. 11. The chart of buckling length coefficient of web-tapered columns [37]

۳- ۳- مثال ۳

ضریب طول موثر یک ستون دو سر مفصل با جان متغیر، به طول ۴ متر که مقاطع دو انتهای آن در شکل ۱۲ نشان داده شده، برای حالت کمانش در صفحه جان خواسته شده است. ضریب الاستیسیته مصالح ستون MPa ۲۰۰۰۰۰ است.

۳- ۳- ۱- حل با روش پیشنهادی

در این مثال $\gamma = \frac{d_{TOP}}{d_o} - 1 = \frac{400}{200} - 1 = 1$، تکیه‌گاه مفصلی سر ستون مثل تیر با طول بسیار زیاد (سختی خمشی صفر) عمل می‌کند ($\frac{s}{l} \to \infty$ =n).

با اختصاص مقداری بزرگ برای این نسبت در برنامه نوشته شده و یا برون‌یابی منحنی مورد نظر از شکل ۶ می‌توان ضریب طول موثر را به دست آورد:

$$K_\gamma = 0.66$$

۳- ۳- ۲- حل با روش مراجع [۳۸ و ۳۱]

با کمک شکل ۹ و دانستن $G_T=G_B=\infty$ ضریب طول موثر تعیین می‌شود:

$$K_\gamma = 0.69$$

۳- ۳- ۳- حل مسئله با روش مرجع [۳۷]

با فرض $l_b \to \infty$ در شکل ۱۰:

$$v = \frac{I_c l_b}{I_b h} = \infty$$

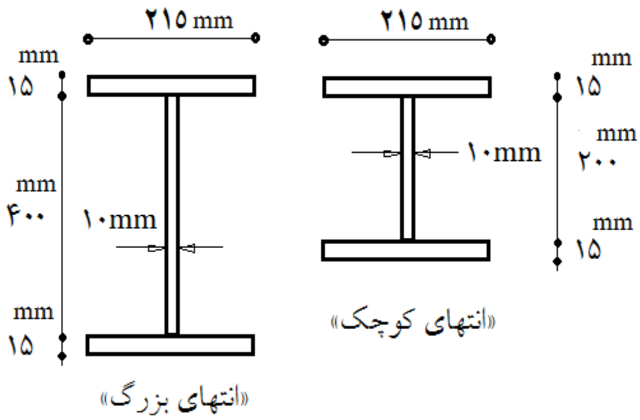
با توجه به $v \to \infty$ در شکل ۱۱:

$$k = 1.03$$

ممان اینرسی مقطع عرضی ستون در وسط طول آن برابر است با:

$$I_m = 1/12 t_w h_m^3 + 1/2 A_f d_m^2 =$$

$$1/12 \times 10 \times 300^3 + 1/2 \times (215 \times 15) \times 315^2 = 18\,250\ e4\,mm^4$$



شکل ۱۲. مشخصات هندسی ستون دو سر مفصل مثال ۳

Fig. 12. Geometric characteristics of the hinged-hinged column in Example. 3

بار بحرانی کمانش ارتجاعی ستون:

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI_m}{(kl_c)^2}=\frac{\pi^2\times 2e5\times 18\,250\,e4}{(1.03\times 4000)^2}=21\,222\,616\,N\approx 21\,223\,kN$$

ممان اینرسی مقطع ستون در پای آن:

$$I_o=1/12\,t_w h_o^{\,3}+1/2A_f d_o^{\,2}=$$
$$1/12\times 10\times 200^3+1/2\times(215\times 15)\times 215^2=8120\;e4\,mm^4$$

اکنون ضریب طول موثر ستون قابل محاسبه است:

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI_o}{(K_\gamma l)^2}=\frac{\pi^2\times 2e5\times 8120\,e4}{(K_\gamma\times 4000)^2}=\;21\,222\,616\,N\qquad\Rightarrow K_\gamma=0.69$$

۳- ۳- ۴- روش مرجع [۳۹]

در این مرجع از مفهوم ستون با مقطع معادل استفاده می‌شود، که به فاصله از انتهای کوچک ستون قرار دارد. ممان اینرسی مقاطع دو انتهای ستون:

$$I_{small}=\frac{1}{12}t_w h_o^{\,3}+\frac{1}{2}A_f d_o^{\,2}=$$
$$\frac{1}{12}\times 10\times 200^3+\frac{1}{2}\times(215\times 15)\times 215^2=81\,204\,479\;mm^4$$

$$I_{large}=\frac{1}{12}t_w h_{TOP}^{\;3}+\frac{1}{2}A_f d_{TOP}^{\;2}=$$
$$\frac{1}{12}\times 10\times 400^3+\frac{1}{2}\times(215\times 15)\times 415^2=331\,046\,146\,mm^4$$

فاصله مقطع ستون معادل از انتهای کوچک:

$$x=0.5l\left(\frac{I_{small}}{I_{large}}\right)^{0.0732}=0.5\times 4000\times\left(\frac{81\,204\,479}{331\,046\,146}\right)^{0.0732}=1804.5\,mm$$

ممان اینرسی ستون معادل از رابطه $I'=\frac{1}{12}t_w[h_0(\frac{\gamma}{l}x+1)]^3+\frac{1}{2}A_f\left[h_0(\frac{\gamma}{l}x+1)+t_f\right]^2$ قابل محاسبه است:

$$I'=\frac{1}{12}\times 10\times[200\times(\frac{1}{4000}\times 1804.5+1)]^3+$$
$$\frac{1}{2}\times 215\times 15\left[200\times(\frac{1}{4000}\times 1804.5+1)+15\right]^2=170\,595\,353\,mm^4$$

بار بحرانی کمانش خمشی:

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI'}{l^2}=\frac{\pi^2\times 2e5\times 170\,595\,353}{4000^2}=21\,046\,358\,N\approx 21\,046\,kN$$

جدول ۲. مقادیر محاسبه شده برای ضریب طول موثر (K_γ).

Table 2. Obtained values for effective length coefficients (K_γ)

	روش پیشنهادی	مراجع [۳۸ و ۳۱]	مرجع [۳۹]	مرجع [۳۷]
مثال ۱	۰/۵۵۶ (تکیه‌گاه‌های مفصلی) ۰/۴۱۲ (تکیه‌گاه‌های گیردار)	۰/۶۰(تکیه‌گاه‌های مفصلی) ۰/۴۳(تکیه‌گاه‌های گیردار)	*	*
مثال ۲	۰/۵۴	۰/۵۹	*	۰/۶۰
مثال ۳	۰/۶۶	۰/۶۹	۰/۶۹	۰/۶۹

*: این مثال با روش این مرجع قابل حل نیست.

اکنون ضریب طول موثر محاسبه می شود:

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI_o}{(K_\gamma l)^2}=\frac{\pi^2\times 2e5\times 81\,204\,479}{(K_\gamma\times 4000)^2}=21\,046\,358\,N\Rightarrow \qquad K_\gamma=0.69$$

جواب‌های به دست آمده از روش‌های مختلف به یکدیگر نزدیک است و محاسبات روش سوم در رسیدن به جواب طولانی‌تر است. نتایج حل سه مثال با روش‌های گوناگون در جدول ۲ گردآوری شده است.

۴- -نتیجه‌گیری

در این مقاله محاسبه بار بحرانی کمانش خمشی ارتجاعی بر اساس تعیین معادله مشخصه کمانش ستون‌های سوله‌های مقید در برابر حرکت جانبی و با روش انرژی و معادلات ریاضی ارائه شده است. روش کار بدین صورت انجام شد که با کمک معادله دیفرانسیل تغییر شکل و روش‌های ریاضی، معادله انرژی ارتجاعی خمشی بازنویسی می‌شود. با استفاده از برابری کار خارجی با انرژی خمشی، نهایتا معادله مشخصه مسئله کمانش نوشته شد. کوچک‌ترین ریشه معادله مشخصه همان بار بحرانی مود اول کمانش است. برای کاربردی کردن نتایج، نمودارهای ضریب طول موثر ترسیم شد. نهایتا برای صحت‌سنجی نتایج، مثال‌هایی حل شد. در روش پیشنهادی تنها با داشتن دو پارامتر هندسی ساده از قاب شیب‌دار و سپس با کمک منحنی مربوط می‌توان ضریب طول موثر را تعیین کرد. در مثال‌های حل شده ضریب طول موثر با روش‌های دیگران نسبت به روش پیشنهادی با مقادیر بیش‌تر و با فرآیندی طولانی‌تر به دست آمده است. با توجه به مثال‌های حل شده نتایج زیر حاصل می‌شود:

۱-روش مطرح شده با دقت مطلوبی ضریب طول موثر را به دست می‌دهد، ضمنا حل مثال با روش پیشنهادی از سایر روش‌ها کوتاه‌تر و ساده‌تر انجام می‌شود.

۲- ضریب طول موثر (و بار بحرانی) در حالتی که بار به صورت متمرکز در سر ستون وارد می‌شود، به زاویه شیب تیرها وابسته نیست.

۳- اختلاف مقادیر به دست آمده برای ضریب طول موثر بین روش پیشنهادی و روش دیگران کم‌تر از ۰/۰۵ است (اختلاف نسبی کم‌تر از ۸٪).

۴- حالتی که طول تیر مورب خیلی کوتاه و به سمت صفر میل می‌کند، ستون سوله به شکل یک ستون تنها که تکیه‌گاه بالایی آن گیردار است، نزدیک می‌شود. مقادیر ضریب طول موثر ستون‌های تنها که تکیه‌گاه بالایی آن گیردار است، -با کمک نمودارهای موجود و با در نظر گرفتن (n=۰) روی محور افقی نمودارهایی که با روش پیشنهادی ترسیم می‌شود- قابل تعیین است.

منابع

[1] S.P. Timoshenko, Buckling of bars of variable cross section, Bull. Polytechnic Inst., Kiev, U.S. S. R., (1908(.

[2] A. Morley, Critical loads for long tapering struts, Engineering, 104 (1917) 295-298.

[3] A. Dinnik, Design of columns of varying cross-section, Trans. ASME, 51 (1929) 105-114.

[4] J.M. Gere, W.O. Carter, Critical buckling loads for tapered columns, Journal of the Structural Division, 88(1) (1962) 1-12.

[5] M. Iremonger, Finite difference buckling analysis of non-uniform columns, Computers & Structures, 12(5) (1980) 741-748.

[6] D. Karabalis, D. Beskos, Static, dynamic and stability analysis of structures composed of tapered beams, Computers & Structures, 16(6) (1983) 731-748.

[7] C.J. Brown, Approximate stiffness matrix for tapered beams, Journal of Structural Engineering, 110(12) (1984) 3050-3055.

[8] J.C. Ermopoulos, A.N. Kounadis, Stability of frames with tapered built-up members, Journal of Structural Engineering, 111(9) (1985) 1979-1992.

[9] J.C. Ermopoulos, Buckling of tapered bars under stepped axial loads, Journal of Structural Engineering, 112(6) (1986) 1346-1354.

[10] J. Banerjee, F. Williams, Exact Bernoulli-Euler static stiffness matrix for a range of tapered beam-columns, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 23(9) (1986) 1615-1628.

[11] Y.B. Yang, J. D. Yau, Stability of beams with tapered I-sections, Journal of engineering mechanics, 113(9) (1987) 1337-1357.

[12] M.A. Bradford, P.E. Cuk, Elastic buckling of tapered monosymmetric I-beams, Journal of Structural Engineering, 114(5) (1988) 977-996.

[13] F.W. Williams, G. Aston, Exact or lower bound tapered column buckling loads, Journal of Structural Engineering, 115(5) (1989) 1088-1100.

[14] H.J. Al-Gahtani, Exact stiffnesses for tapered members, Journal of structural engineering, 122(10) (1996) 1234-1239.

[15] L. Zhang, G.S. Tong, Lateral buckling of web-tapered I-beams: A new theory, Journal of Constructional Steel Research, 64(1) (2008) 1379-1393.

[16] J.D. Yau, Stability of tapered I-beams under torsional moments, Finite Elements in Analysis and Design, 42(10) (2006) 914-927.

[17] B. Asgarian, M. Soltani, F. Mohri, Lateral-torsional buckling of tapered thin-walled beams with arbitrary cross-sections, Thin-walled structures, 62 (2013) 96-108.

[18] M. Soltani, B. Asgarian, F. Mohri, Elastic instability and free vibration analyses of tapered thin-walled beams by the power series method, Journal of constructional steel research, 96 (2014) 106-126.

[19] M. Soltani, B. Asgarian, F. Mohri, Finite element method for stability and free vibration analyses of non-prismatic thin-walled beams, Thin-Walled Structures, 82 (2014) 245-261.

[20] M. Kováč, Lateral-torsional buckling of web-tapered I-beams: 1D and 3D FEM approach, Procedia Engineering, 40 (2012) 217-222.

[21] A. Rahai, S. Kazemi, Buckling analysis of non-prismatic columns based on modified vibration modes, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 13(8) (2008) 1721-1735.

[22] H.R. Valipour, M.A. Bradford, A new shape function for tapered three-dimensional beams with flexible connections, Journal of Constructional Steel Research, 70 (2012) 43-50.

[23] G. Konstantakopoulos, I. G. Raftoyiannis, G. T. Michaltsos, Stability of steel columns with non-uniform cross-sections, The Open Construction and Building Technology Journal, 6 (2012) 1-7.

[24] S. Darbandi, R. Firouz-Abadi, H. Haddadpour, Buckling of variable section columns under axial loading, Journal of Engineering Mechanics, 136(4) (2010) 472-476.

[25] A. Hadidi, B.F. Azar, H.Z. Marand, Second-Order Nonlinear Analysis of Steel Tapered Beams Subjected to Span Loading, Advances in Mechanical Engineering, (2014), Article ID 237983.

[26] D.J. Wei, S.X. Yan, Z.P. Zhang, X.F. Li, Critical load for buckling of non-prismatic columns under self-weight and tip force, Mechanics Research Communications, 37(6) (2010) 554-558.

[27] M. Taha, M. Essam, Stability behavior and free vibration of tapered columns with elastic end restraints using the DQM method, Ain Shams Engineering Journal, 4(3) (2013) 515-521.

[28] A. Shooshtari, R. Khajavi, An efficient procedure to find shape functions and stiffness matrices of nonprismatic

Euler–Bernoulli and Timoshenko beam elements, European Journal of Mechanics-A/Solids, 29(5) (2010) 826-836.

[29] E. Ruocco, H. Zhang, C. Wang, Hencky bar-chain model for buckling analysis of non-uniform columns, Structures, 6 (2016) 73-84.

[30] A. Nikolić, S. Šalinić, Buckling analysis of non-prismatic columns: A rigid multibody approach, Engineering Structures, 143 (2017) 511-521.

[31] G.C. Lee, M. Morrell, R.L. Ketter, Design of Tapered Members, Welding Research Council Bulletin, No. 173, (1971)

[32] F. Irani, Stability of one bay symmetrical frames with nonuniform members, International Journal of Engineering, 1(4) (1988) 193-200.

[33] N. Bazeos, D.L. Karabalis, Efficient computation of buckling loads for plane steel frames with tapered members, Engineering Structures, 28(5) (2006) 771-775.

[34] H. Saffari, R. Rahgozar, R. Jahanshahi, An efficient method for computation of effective length factor of columns in a steel gabled frame with tapered members, Journal of Constructional Steel Research, 64(4) (2008) 400-406.

[35] R. Tajizadegan, A.M. Momeni, Development of Slope-Deflection Equations and use of them to obtain effective length coefficient and critical load, Fourth National Congress of Civil Engineering (NCCE04), Tehran University, Iran (in Persian), (2008).

[36] H. Tajmir Riahi, A. Shojaei Barjoui, S. Bazazzadeh, S. M. A. Etezady, Buckling analysis of non-prismatic columns using slope-deflection method, 15th World Conference on Earthquake Engineering, Lisbon, Portugal, (2012).

[37] M. Rezaiee-Pajand, F. Shahabian, M. Bambaeechee, Stability of non-prismatic frames with flexible connections and elastic supports, KSCE Journal of Civil Engineering, 20(2) (2016) 832-846.

[38] AISC, Specification for structural steel buildings, (1999).

[39] AISC, R. Kaehler, D. White, Y. Kim, Steel design guide 25; frame design using web-tapered members, Chicago, (2011).

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

A. Haghollahi , A.A Safavi, Evaluation of Non-sway Flexural Buckling of One-bay Gabled Frames by Solving Characteristic Equation, Amirkabir J. Civil Eng., 54(8) (2022) 3179-3196.

DOI: 10.22060/ceej.2022.19048.7047

این صفحه عمداً خالی است