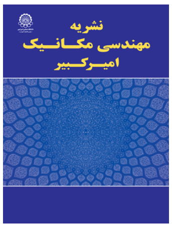



Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 54(6) (2022) 259-262
DOI: 10.22060/mej.2022.20718.7301

# Nonlinear Torsional Vibrations of Axially Loaded Pretwisted Beam with Primary Resonance Excitations

S. Sina[1]*, H. Haddadpour[2]

[1] Department of Mechanical and Mechatronics Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran
[2] Department of Aerospace Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

**ABSTRACT:** Frequently used thin walled beams have low torsional stiffness and their torsional deformations may be of such magnitudes that it is not adequate to treat the angles of cross section rotation as small. In this paper, nonlinear torsional vibrations of thin walled beams will be investigated. The method of multiple scales will be implemented as a solution method and different nonlinear phenomena will be studied. The obtained results are compared with the available results in the literature which reveals an excellent agreement between different solution methodologies. The outcomes of this study show that beam nonlinear torsional dynamics and the related phenomena could influence the linear torsional dynamic of beams under axial load, e.g. rotating beams. Forced torsional vibrations of a beam with the excitation in the form of primary resonance of the first and second modes have been investigated. It has been demonstrated that in the case of the beam with two ends clamped boundary conditions, three-to-one internal resonance will appear. The primary resonance of the first and second modes has been solved in two sets of boundary conditions, torsionally clamped-fixed and torsionally fixed-fixed. Nonlinear response, amplitude-phase equations, fixed points, and their stability have been studied.

**Review History:**

Received: Oct. 28, 2021
Revised: Apr. 02, 2022
Accepted: May, 08, 2022
Available Online: Jun. 04, 2022

**Keywords:**

Beam torsional vibration
Nonlinear vibration
Pretwist angle
Axial load
Primary resonance

## 1- Introduction

Nonlinear torsional vibrations of the beam have great practical importance in advanced engineering structures. It is shown in the literature (e.g. Ref. [1-3]) that the collective effect of axial load and pretwist angle leads to some interesting phenomena in torsional vibrations of beam-like structures. Nonlinear torsional vibrations of pretwisted axially loaded thin walled beam under primary resonance excitation of the first and second torsional modes will be investigated in this paper.

Methodology

The problem of nonlinear torsional vibrations of a beam with primary resonance excitation is addressed in the following context:

There is not any material or geometric coupling between the beam's bending and torsional degrees of freedom,

Only axial and torsional degrees of freedom are retained in the displacement field,

The beam will undergo large torsional motions

Primary and secondary warpings in conjunction with warping inertia are considered in the model,

Hamilton's principle is implemented in order to extract the governing equations of motion and the corresponding boundary conditions,

The governing equations of motion are cast into one equation neglecting axial inertia,

It is shown that the collective effect of pretwist angle and axial load leads to static untwist.

Primary resonance of the first and second modes is considered.

Fig. 1 shows the thin walled beam with pretwist angle which is considered in this paper.

The stain field could be stated as follows [1],

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{zz}(n,s,z,t)=\varepsilon_{zz}^{0}(s,z,t)+n\varepsilon_{zz}^{n}(s,z,t),\\
&\varepsilon_{zz}^{0}(s,z,t)=w_0'-\phi''(z,t)F(s)+\frac{1}{2}\left(\underline{\phi'^2}+2\beta'\phi'\right)\left(x_p^2+y_p^2\right),\\
&\varepsilon_{zz}^{n}(s,z,t)=r_t(s,z)\phi''(z,t),\\
&\gamma_{sz}(s,z,t)=\Psi\phi'(z,t).
\end{aligned} \tag{1}$$

The nonlinear governing differential equation of motion is as follows:

$$\ddot{\phi}-\phi''+\frac{k_4}{k_1L^2}\phi''''=\frac{k_2}{k_1L}\phi'\phi''+\frac{k_3}{k_1L^2}\phi'^2\phi''+F\cos\Omega\hat{t}. \tag{2}$$

Utilizing the method of multiple time scales as [4],

*Corresponding author's email: a.sina@shahroodut.ac.ir

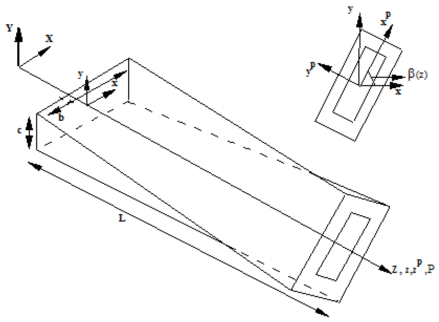



**Fig. 1. Schematic of the beam with pretwist angle**

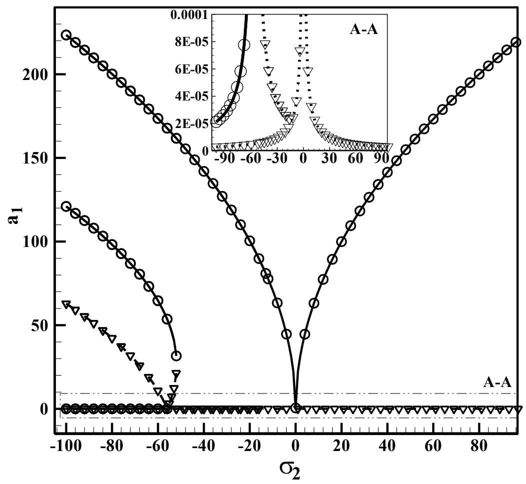



**Fig. 2. First torsional mode amplitude versus frequency for the primary resonance of the first mode of the torsionally clamped-free beam, solid line with circle represent stable node; dashed line with triangle represent unstable saddle.**

$$\phi(z,t)=\varepsilon\phi_1(\hat{z},T_0,T_2)+\varepsilon^2\phi_2(\hat{z},T_0,T_2)+\varepsilon^3\phi_3(\hat{z},T_0,T_2)+\dots \tag{3}$$

The governing equations will be obtained as,

$$\begin{aligned}
&D_0^2\phi_1-\phi_1''+\frac{k_4}{k_1L^2}\phi_1''''=0,\\
&D_0^2\phi_2-\phi_2''+\frac{k_4}{k_1L^2}\phi_2''''=\frac{k_2}{k_1L}\phi_1'\phi_1''+\delta_s f\cos\Omega T_0,\\
&D_0^2\phi_3-\phi_3''+\frac{k_4}{k_1L^2}\phi_3''''=-2D_0D_2\phi_1+\frac{k_2}{k_1L}\left(\phi_1'\phi_2''+\phi_1''\phi_2'\right)\\
&\qquad+\frac{k_3}{k_1L^2}\phi_1'^2\phi_1''+\delta_p f\cos\Omega T_0.
\end{aligned} \tag{4}$$

The corresponding parameters are defined in the paper. The primary resonances of first and second modes have been solved in two sets of boundary conditions, torsionally clamped-fixed and torsionally fixed-fixed. Nonlinear response, amplitude-phase equations, fixed points, and their stability have been studied. The effect of internal resonance is also addressed.

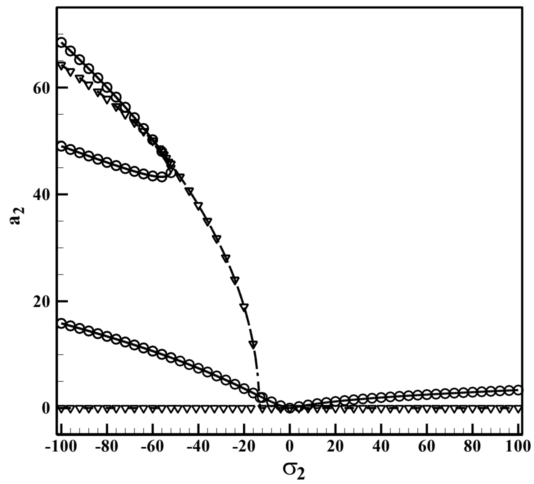



**Fig. 3. Second torsional mode amplitude versus frequency for the primary resonance of the first mode of the torsionally clamped-free beam, solid line with circle represent stable node; dashed line with triangle represent unstable saddle.**

## 2- Results and Discussion

The paper contains various results concerning the primary resonance of first and second torsional modes with/without internal resonance in both torsionally fixed-fixed and fixed-free boundary conditions. The linear vibration problem in various boundary conditions is also addressed. Figs. 2 and 3 show the amplitude of the first and second torsional modes of the clamped-free beam in primary resonance conditions. The geometric and material properties of the beam are represented in the full paper.

The obtained results show that the problem consists of multiple fixed points for different values of detuning parameters.

It should be noted that clamped-free torsional boundary conditions lead to a 3 to 1 internal resonance between first and second torsional modes.

Fig. 4 shows the amplitude-frequency plot of the first torsional mode for the torsionally clamped-clamped under primary resonance excitation of the first mode. Geometric and material properties of the beam are represented in the full paper and for the sake of brevity not included here.

## 3- Conclusion

Nonlinear forced torsional vibration of pretwisted beam under axial loading is considered. Primary resonance of first and second torsional modes is considered. The structural model incorporates a number of non-classical effects such as restrained warping, trapeze effect, and warping inertia.

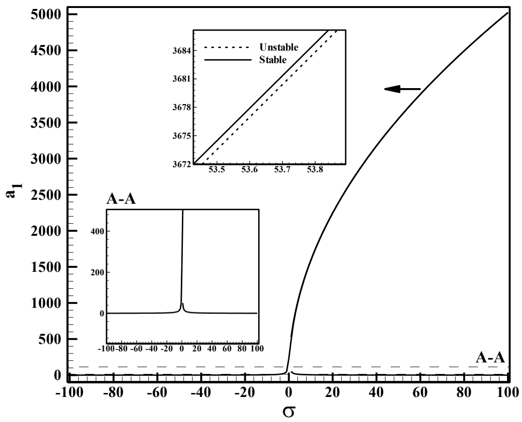



**Fig. 4. first torsional mode amplitude versus frequency for the primary resonance of the first mode of torsionally clamped-clamped beam.**

Nonlinear equations of motion are derived using Hamilton's principle and are solved using the method of multiple scales. A number of conclusions are outlined as,

The cumulative effect of axial loading and pretwist angle leads to an untwist phenomenon which is demonstrated and validated against existing results.

Linear torsional vibrations of the beam in different boundary conditions have been investigated.

Torsional vibration of the beam with clamped-free torsional boundary condition consists of 3 to 1 internal resonance between first and second torsional modes.

Internal resonance acts as a mechanism for the transfer of energy between vibration modes.

System response at resonance condition will consist of both natural frequencies of first and second modes and some other harmonics. The latter ones stem from the pretwist angle and axial loading and consist of 2×first natural frequency, 2×second natural frequency, and summation and extraction of first and second natural frequencies.

It is shown that the nonlinear Wagner term has a stiffening nature while the trapeze effect has to soften effect I beam's torsional vibrations.

## References


[1] S. Sina, H. Haddadpour, Axial–torsional vibrations of rotating pretwisted thin walled composite beams, International Journal of Mechanical Sciences, 80 (2014) 93-101.

[2] J. Sicard, J. Sirohi, Modeling of the large torsional deformation of an extremely flexible rotor in hover, AIAA journal, 52(8) (2014) 1604-1615.

[3] J.F. Sicard, J. Sirohi, An analytical investigation of the trapeze effect acting on a thin flexible ribbon, Journal of Applied Mechanics, 81(12) (2014) 121007.

[4] A.H. Nayfeh, D.T. Mook, Nonlinear oscillations, John Wiley & Sons, 2008.



**HOW TO CITE THIS ARTICLE**

*S. Sina, H. Haddadpour, Nonlinear Torsional Vibrations of Axially Loaded Pretwisted Beam with Primary Resonance Excitations, Amirkabir J. Mech Eng., 54(6) (2022) 259-262.*

**DOI:** 10.22060/mej.2022.20718.7301

## نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۴، شماره ۶، سال ۱۴۰۱، صفحات ۱۲۷۱ تا ۱۳۰۲
DOI: 10.22060/mej.2022.20718.7301

# ارتعاشات غیرخطی پیچشی تیر با نیروی محوری و دارای زاویه پیچش اولیه تحت تحریک تشدید اصلی

سیدعلی سینا*[1]، حسن حدادپور[2]

۱- دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران
۲- دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

**تاریخچه داوری:**
دریافت: ۱۴۰۰/۰۸/۰۶
بازنگری: ۱۴۰۱/۰۱/۱۳
پذیرش: ۱۴۰۱/۰۲/۱۸
ارائه آنلاین: ۱۴۰۱/۰۳/۱۴

**کلمات کلیدی:**
پیچش تیر
ارتعاشات غیرخطی
زاویه پیچش اولیه
نیروی محوری
تشدید اصلی

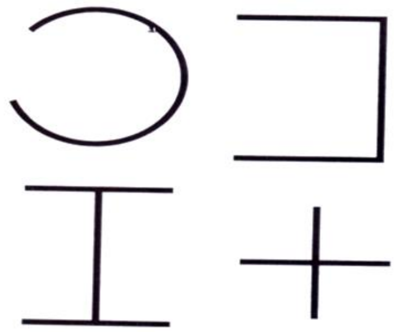
**خلاصه:** در این مقاله، ارتعاشات غیرخطی پیچشی تیر در شرایط تحریک تشدید اصلی مورد بررسی قرار گرفته است. در معادلات غیرخطی حاکم بر حرکت، اثرات مربوط به قید اعوجاج و زاویه پیچش اولیه و نیروی محوری و اینرسی پیچشی در نظر گرفته شده است. وجود همزمان نیروی محوری و زاویه پیچش اولیه منجر به پدیده واپیچش می‌شود. معادلات غیرخطی بی‌بعد شده حاکم بر ارتعاشات پیچشی تیر در شرایط تشدید اصلی با استفاده از روش اغتشاشی مقیاس‌های چندگانه به ازای شرایط مرزی مختلف حل شده است. تشدید اصلی مود اول و مود دوم به صورت جداگانه مورد بررسی قرار گرفته است. حل تحلیلی برای پاسخ پیچشی تیر در حالتهای مختلف تحریک ارائه گردیده است. بررسی پاسخ‌ها نشانگر ظهور هارمونیک‌هایی علاوه بر هارمونیک اصلی در پاسخ است. علاوه بر این، تحلیل معادلات حاکم نشان می‌دهد که مسئله در پاره‌ای شرایط شامل پدیده تشدید داخلی سه به یک هست. معادلات دامنه پاسخ و فاز به ازای شرایط تشدید مختلف ارائه و نتایج عددی مرتبط نیز ذکر گردیده است. پایداری جواب‌ها، اندرکنش بین مودها و امکان انتقال انرژی بین مودهای ارتعاشی به صورت ویژه مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج ارائه شده موید اهمیت پدیده‌های غیرخطی در ارتعاشات پیچشی تیر است.

## ۱- مقدمه

ارتعاشات پیچشی تیر اهمیت خود را در بسیاری از کاربردها نشان داده است. ارتعاشات پیچشی طبیعت غالب ارتعاشات ناشی از واماندگی آیرودینامیکی[1] و ناپایداری واماندگی فلاتر[2] در پره توربین‌های بادی و بالگرد است [۱]. بطوریکه مدل اونرا[3] برای پیشبینی نیروهای آیرودینامیکی ناپایا ناشی از حرکت پیچشی ایروفویل حین رخداد پدیده واماندگی آیرودینامیکی توسعه یافته است[۲]. حتی پدیده ناپایداری فلاتر یک درجه آزادی پیچشی به واسطه نسبت جرمی بالا سازه به سیال در پره توربوماشین‌ها به وقوع می‌پیوندد [۳ و ۴]. کوپلینگ کشش-پیچش عامل اصلی پدیده واپیچش[4] در پره‌های دوار است [۵ و ۶]. در کاربردی دیگر، مفهوم کنترل غیرفعال پیچش پره برای دستیابی به بازدهی آیرودینامیکی دلخواه در تیلت روتور ایکس وی ۱۵[5] برمبنای استفاده از کوپلینگ الاستیک مابین کشش و پیچش موجود در مواد کامپوزیت توسعه یافت. در این راستا طرح پیچش اولیه و دوخت سازه‌ای[6] پره به صورت ترکیبی از طراحی‌های بهینه مربوط به مود پروازی بالگرد و مود پروازی هواپیما در راستای دستیابی به حداکثر بازدهی آیرودینامیکی پیشنهاد می‌شود [۷ و ۸]. همچنین کوپلینگ کشش-پیچش عنصر کلیدی در ارتعاشات خودتحریک در ابزار ماشینکاری (لرزش[7]) است [۹]. استفاده از این کوپلینگ در طراحی موتورهای اولتراسونیک پیزوالکتریک از دیگر کاربردهای جذاب دینامیک پیچشی المان تیر سازه‌ای در صنعت است [۱۰]. در این کاربردها موج پیچشی در عبور از رزوناتور تقویت می‌شود. موج پیچشی در مبدل به گونه‌ای تولید می‌شود که فرکانس آن با فرکانس مود پیچشی رزوناتور یکسان باشد. رزوناتور نیز در واقع یک تیر است. کاربردهای ذکر شده و بسیاری کاربردهای دیگر مؤید اهمیت تجزیه و تحلیل دقیق دینامیک پیچشی تیرها است.

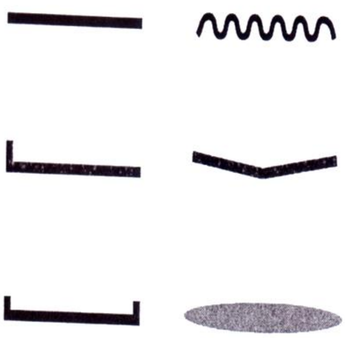
1 Stall induced vibrations
2 Stall flutter
3 ONERA model
4 Untwist
5 XV-15 Tilt rotor aircraft
6 Structural tailoring
7 Chattering

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: a.sina@shahroodut.ac.ir



شکل ۱. نمونه‌هائی از سطح مقطع تیرهای کلاس T [۱۱].

Fig. 1. Examples of Class T beam's cross section [11].



شکل ۲. نمونه‌هائی از سطح مقطع تیرهای کلاس S[۱۱].

Fig. 2. Examples of Class S beam's cross section [11].

نظریه‌های مختلف مهندسی در تحلیل تیرها بیشتر به تعیین عبارات و یا ابزارهای ارزیابی برای موارد زیر می‌پردازند [۱۱]:

- مجموعه‌ای از ثوابت الاستیک برای بیان خواص سختی تیر در صفحه سطح مقطع تیر (در نظریه‌های مهندسی، مدل تیر شامل سختی‌های خمشی و پیچشی می‌شوند که با عباراتی نظیر $EI$ و $GJ$ بیان می‌شوند).
- مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل تک‌بعدی معمولی یا جزئی که ثوابت مذکور در بند قبل در آن‌ها به کار می‌روند.
- حداقل یک مجموعه از مولفه‌های تنش سه بعدی بر حسب متغیرهای تک‌بعدی که از حل معادلات مذکور در بند قبل به دست می‌آیند (در نظریه‌های مهندسی تیر با روابطی نظیر $My/I$ برای تنش محوری بیان می‌شوند).

استفاده از نظریه‌های مختلف مهندسی در تحلیل تیرها شدیداً وابسته به کاربرد است. مطابق آنچه هاجز [۱۱] بیان کرده است، تیرها از دیدگاه کلی به سه کلاس T، $S$ و $R$ تقسیم می‌شوند.

تیرهای کلاس T: این طبقه شامل تیرهای جدار نازک با مقطع باز است که نمونه‌هائی از آن در شکل ۱ دیده می‌شود. تیرهای این طبقه از نظر پیچشی نرم هستند و سختی پیچشی تیر به میزان قابل توجهی کمتر از سختی خمشی آن است. تیرهای I شکل که دارای کاربرد گسترده در صنعت هستند در این کلاس تیرها قرار می‌گیرند. به طور کلی پره بالگرد به صورت تیر I شکل در نظر گرفته می‌شود.

تیرهای کلاس $S$: شکل کلی مقطع این تیرها نواری است و مشابه کلاس $T$ دارای دو طول مشخصه هستند. این تیرها علاوه بر آنکه از نظر پیچشی نرم هستند، در یک جهت نیز از نظر خمشی نرم هستند. به بیان دیگر یکی از سختی‌های خمشی بسیار بزرگتر از سختی خمشی دیگر و سختی پیچشی تیر است. بال‌های با ضریب منظری بالا از این نوع تیرها هستند. پاره‌ای از پره‌های بالگرد در این کلاس تیر قرار می‌گیرند.

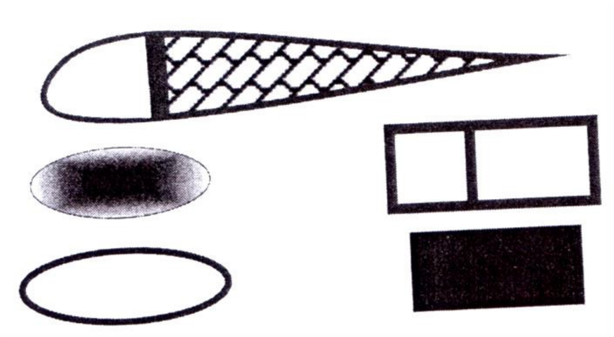
تیرهای کلاس $R$: تیرهای معمولی در این دسته قرار می‌گیرند. در واقع این دسته مربوط به تیرهائی است که در کلاس $S$ و $T$ قرار نمی‌گیرند. این تیرها مشخصه طولی معینی که به طور خاص در کرنش در اثر خمش و پیچش در نظر گرفته شود، ندارند و همه سختی‌های خمشی و پیچشی در آن‌ها از یک مرتبه هستند. این طبقه شامل تیرهای توپر و جدار نازک سلولی می‌شود.

اهمیت پدیده‌های مربوط به اعوجاج مقید و اثر ذوزنقه‌ای در پیچش کلاس‌های مختلف تیر در جدول ۱ خلاصه شده است.

در ادامه فعالیت‌های محققین با تاکید بر تحقیقاتی که در چارچوب نظریه‌های مهندسی تیر به بررسی مساله پیچش در تیرها پرداخته‌اند، مرور می‌شود.

در سال ۱۸۵۳ مهندس فرانسوی سن–ونَنت نظریه پیچش سن–ونَنت را در آکادمی علوم فرانسه ارائه کرد. بر اساس این نظریه تیر با سطح مقطع دایره تحت گشتاور پیچشی ثابت در طول دهانه تیر به گونه‌ای تغییر شکل می‌یابد که پیچش هر مقطع در صفحه خود بدون هرگونه اعوجاج[۱] است. این پیچش خالص اصطلاحاً پیچش سن–ونَنت نامیده می‌شود. در تیرهای با سطح مقطع غیرمدور تحت اثر گشتاور پیچشی، اعوجاج نیز ظاهر می‌شود. در تیرهای با سطح مقطع غیرمدور علاوه بر تنش برشی مربوط به پیچش سن–ونَنت تنش‌های برشی و محوری مربوط به اعوجاج نیز وجود دارند. در

1 Warping



**شکل ۳. نمونه‌هائی از سطح مقطع تیرهای کلاس R [۱۱].**

**Fig. 3. Examples of Class R beam's cross section [11].**

**جدول ۱. اهمیت مدلسازی اثر ولاسو (وارپینگ مقید) و اثر ذوزنقه‌ای بر حسب شکل سطح مقطع تیر [۱۱].**

**Table 1. The priority of modeling of the Vlasov's effect (restrained warping) and trapeze effect versus beam's cross section**

| کلاس تیر | نظریه ولاسو | اثر ذوزنقه‌ای |
|---|---|---|
| $R$ | غیرضروری | غیرضروری |
| $S$ | غیرضروری | ضروری |
| $T$ | ضروری | ضروری |

هر حال در پیچش سن-ونِنت، اعوجاج به صورت تابعی از نرخ پیچش فرض می‌شود. البته نرخ پیچش در طول تیر ثابت فرض می‌شود و تنها تابعی از فاصله نقطه در سطح مقطع از مرکز پیچش است. بر پایه این فرضیات میدان جابجائی مربوطه شکل می‌گیرد. برای به دست آوردن اعوجاج از مدل‌های مختلفی نظیر تابع اعوجاج و یا تابع تنش سن-ونِنت استفاده می‌شود. لازم به ذکر است که با استفاده از این مدل‌ها، سختی پیچشی سن‌ونِنت ( $GJ$ ) برای انواع مقاطع مختلف باز و بسته به دست می‌آید. از لحاظ نظری اگر قیدی برای اعوجاج وجود نداشته باشد، همه مقاطع تیر تنها تحت اثر پیچش سن-ونِنت خواهند بود که مقدار اعوجاج را برای مقاطع مختلف در راستای دهانه تیر ثابت فرض می‌کند. اما در عمل شرایط مرزی و هندسه اعوجاج را مقید می‌نماید. تنش محوری ایجاد شده در اثر قید اعوجاج منجر به تولید گشتاور پیچشی می‌شود. ولاسو [۱۲] در سال ۱۹۴۰ نظریه پیچشی برای در نظر گرفتن اثر قید وارپینگ توسعه داد. این نظریه پیچش غیریکنواخت[1] نامیده می‌شود. درحالی که نظریه پیچش سن‌ونِنت پیچش یکنواخت نامیده می‌شود. مطابق نظریه ولاسو نرخ پیچش در طول دهانه تیر ثابت نیست و چرخش سطح مقطع تیر با استفاده از معادله دیفرانسیلی از مرتبه چهار به دست می‌آید و مفاهیم سختی اعوجاج مقید و گشتاورک[2] نیز در فضای مفاهیم مربوط به پیچش ظاهر شدند.

برای دستیابی به حداکثر کارآئی، پره‌های دوار معمولاً دارای زاویه پیچش اولیه[3] هستند. در تحلیل ارتعاشات پیچشی این پره‌ها اثر جمعی نیروهای محوری گریز از مرکز و زاویه پیچش اولیه باید درنظر گرفته شود. باکلی [۱۳]، وگنر [۱۴] و گودیر [۱۵] به اثر نیروهای محوری کششی در افزایش سختی پیچشی تیر اشاره کردند. اگر تیر در حالت یکنواخت به صورت مجموعه‌ای از تارهای مستقیم فرض شود، با پیچیدن تیر این تارها در مقطع تیر مطابق الگوی پیچش تیر حرکت خواهند کرد. تنش‌های محوری که در راستای تارها عمل می‌کنند، در حضور زاویه پیچش اولیه گشتاوری را حول تار خنثی تیر ایجاد می‌کنند، که اثر وگنر[4] نامیده می‌شود. بر مبنای این

1 Non-uniform torsion

2 Bimoment

3 Pretwist angle

4 Wagner effect

فرضیه، هوبولت و بروکز [۱۶] در تشریح معادلات حاکم بر خمش درون و بیرون صفحه و پیچش پره‌های دارای زاویه پیچش اولیه به دو مؤلفه خطی اشاره کردند که مربوط به اثر نیروی محوری بر دینامیک پیچشی پره می‌شد. این دو مؤلفه شامل یک گشتاور که ناشی از اثر جمعی تنش محوری کششی و پیچش الاستیک تیر بوده و تیر را سخت‌تر می‌کند و گشتاور دیگری که ناشی از اثر جمعی تنش محوری کششی و زاویه پیچش اولیه بوده و منجر به پدیده واپیچش در تیر می‌شود. اوهتسوکا [۵] با استفاده از تئوری تیر و با درنظر گرفتن اثر وارپینگ، پدیده واپیچش در تیرهای تحت بار محوری را به هر دو روش تحلیلی و تجربی تحلیل کرد. واشیزو [۱۷] چارچوبی بسیار دقیق در تحلیل تیرهای خمیده و دارای زاویه پیچش اولیه ارائه کرد. البته کارهای تحقیقاتی روزن [۱۸ و ۱۹] در این زمینه نیز شایسته یادآوری است. در چارچوب الاستیسیته غیرخطی هاجز [۶] از معادلات تانسوری برای انتقال جابجائی‌ها از مختصات خمیده به مختصات متعامد محلی استفاده کرد. بر مبنای نتایج این تحقیق، دو مؤلفه مربوط به پدیده واپیچش از یک مرتبه بوده و اثر کوپلینگ کشش-پیچش در تحلیل دینامیک پیچشی تیر باید درنظر گرفته شود. هاجز و همکاران [۲۰ و ۲۱] مطالعه آثار این پدیده را در دینامیک تیرهای دوار ادامه دادند. قابل ذکر است که در تحقیقات ایشان، این پدیده اثر ذوزنقه‌ای نامیده شده است. فولتن و هاجز [۲۰] آیروالاستسیته غیرخطی پره‌های کامپوزیتی بالگرد در حالت هاور را با درنظر گرفتن اثر ذوزنقه‌ای بررسی کردند. هاجز و همکاران [۲۱] ثابت‌های مربوط به مقطع تیرهای نواری غیرایزوتروپ با زاویه پیچش اولیه را با استفاده از تئوری غیرخطی به دست آوردند. در این تحقیق نظریه پوسته لایه‌ای سه بعدی به معادلات یک بعدی غیرخطی کاهش یافته است. از آنجا که اثر ذوزنقه‌ای از تحلیل غیرخطی مقطع به دست می‌آید، پاپسکو و هاجز[۲۲] ثوابت مربوط به مقطع تیر را با استفاده از روش غیرخطی و عددی به دست آوردند. این روش قادر به تبیین اثر ذوزنقه‌ای در تیرهای از هر جنس و با هر هندسه است. در هر حال، پژوهش‌های صورت گرفته در این زمینه همگی به لزوم درنظر گرفتن اثر ذوزنقه‌ای در تحلیل تیرهای با زاویه پیچش اولیه تحت اثر بار محوری اذعان دارند. در بازه زمانی مشابه، محققان فعال در زمینه مطالعه رفتار پیچشی تیرها تحت اثر گشتاور پیچشی نیز به اهمیت ترم کوتاه‌شوندگی غیرخطی در رفتار پیچشی تیرها پی بردند [۲۹-۲۳].

در طول دهه‌های گذشته موضوع مدلسازی و تحلیل رفتار دینامیکی تیرهای با زاویه پیچش اولیه و تحت اثر نیروی محوری مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. در ادامه به پاره‌ای از فعالیت‌هائی که اخیراً صورت گرفته است، اشاره می‌شود. ساکار و ساپونکو [۳۰] پایداری دینامیکی پره‌های دوار با زاویه پیچش اولیه و با مقطع ایرفویل شکل را بررسی کردند. آن‌ها اثر پارامترهای مختلف نظیر شعاع هاب پره، زاویه پیچش اولیه ثابت[1] و متغیر در طول دهانه تیر، سرعت دورانی و فاصله مرکز برش تا مرکز هندسی مقطع را بر پایداری پره بررسی کردند. ارتعاشات و پایداری دینامیکی تیرهای چرخان (حول محور طولی تیر) تحت بار محوری فشاری پالس‌گونه توسط چن [۳۱] بررسی شد. سینها و تورنر [۳۲] با استفاده از تئوری ورق نازک ارتعاشات پره‌های توربوماشین‌ها را بررسی کردند. اثر بار محوری شبه استاتیک نیز در این مطالعه در نظر گرفته شده بود. ساراویا و همکاران [۳۳] با استفاده از خطی‌سازی مدل اجزا محدود لاگرانژی غیرخطی دارای هفت درجه آزادی در هر گره، ارتعاشات آزاد و پایداری دینامیکی تیرهای کامپوزیتی جدار نازک دوار را بررسی کردند. مدل اجزا محدود بر مبنای تئوری تیرهای جدار نازک و با در نظر گرفتن غیرایزوتروپ بودن ماده، جابجائی برشی و اثر وارپینگ استخراج شده بود. رفتار دینامیکی نانوتیوب کربنی دوار نیز توسط دیپاک و همکاران [۳۴] با استفاده از اجزا محدود طیفی تشریح گردید. یائو و همکاران [۳۵] پاسخ دینامیکی غیرخطی تیرهای دوار جدار نازک با زاویه پیچش اولیه و سرعت دورانی متغیر را در حضور جریان گاز مافوق صوت دما بالا را بررسی کردند. در این مطالعه نیروهای آیرودینامیکی با استفاده از تئوری پیستون مرتبه اول مدل شده بودند و روش مقیاس‌های چندگانه[2] برای استخراج معادلات چهارگانه حاکم بر دامنه و فاز حرکت در حالت تشدید داخلی یک به یک[3] و تشدید اصلی[4] به کار گرفته شده بودند.

اخیراً در زمینه رفتار پیچشی تیرها، سلیم و داوالوس [۳۶] نظریه ولاسو[5] را برای تحلیل خطی تیرهای کامپوزیتی لایه لایه[6] مقطع باز و بسته با در نظر گرفتن اثر وارپینگ به کار بردند. موهری و همکاران [۳۷] مدلی غیرخطی برای مطالعه رفتار الاستیک تیر جدار نازک تحت تغییر شکل‌های پیچشی بزرگ ارائه نمودند. در مدل ارائه شده اثرات کوتاه‌شوندگی، جابجائی‌های قبل از کمانش و کوپلینگ خمش-پیچش در نظر گرفته شده‌اند. حل معادلات حاکم بر مدل اجزا محدود غیرخطی با استفاده از روش نیوتن-رافسون تکراری افزایشی صورت گرفته است. کیم و شین [۳۸] زاویه پیچش و تنش‌های محوری تیر جدار نازک کامپوزیتی با مقطع تک یا چند سلولی

1 Stagger/Presetting angle
2 Method of multiple scales
3 1:1 internal resonance
4 Internal resonance
5 Vlasov theory
6 Laminated

تحت گشتاور پیچشی را محاسبه کردند. لیو و همکاران [۳۹] ارتعاشات خطی محوری-پیچشی تیر دارای زاویه پیچش اولیه را بررسی کردند. در این تحقیق فرضیات به کار رفته در تعیین اثر وارپینگ بر پیچش تیر به صورت ویژه مورد بررسی و ارزیابی قرار گرفتند. ساپونتزاکیس و تسیپیراس [۴۰] ارتعاشات غیرخطی پیچشی تیر یکنواخت بدون زاویه پیچش اولیه با مقطع متقارن در دو محور[1] را با روش حل اجزا مرزی بررسی کردند. پراساد و هرورسمپت [۴۱] اثر ذوزنقه‌ای را در حضور پدیده تورق[2] برای تیرهای کامپوزیتی با زاویه اولیه پیچش بررسی کردند. سینا و حدادپور [۴۲] به بررسی ارتعاشات غیرخطی پیچشی تیر جدار نازک بدون زاویه پیچش اولیه پرداختند. اثرات غیرخطی مربوط به تغییرشکلهای پیچشی بزرگ در نظر گرفته شده و معادلات حاکم بر ارتعاشات غیرخطی پیچشی تیر استخراج گردیده است. شکل مودهای غیرخطی و پایداری آنها مورد بررسی قرار گرفته‌اند. ایشان در تحقیقی دیگر [۴۳] ، با درنظر گرفتن اثرات غیرخطی زاویه پیچش اولیه و نیروی محوری ناشی از دوران به بررسی اثر واپیچش و تعیین میزان اهمیت آن در ارتعاشات خطی پیچشی-محوری تیرهای جدار نازک کامپوزیتی دوار پرداختند. سیکارد و سیروهی [۴۴ و ۴۵] به بررسی تحلیلی و تجربی اثر ذوزنقه‌ای در رفتار الاستیک پیچشی تیرهای دوار نرم دارای زاویه پیچش اولیه پرداختند. نتایج مطالعات این محققین بیانگر اهمیت مدلسازی رفتار غیرخطی پیچشی تیر بود. به گونه‌ای که عدم درنظر گرفتن اثر ذوزنقه‌ای می‌تواند به حدود ۵۰ درصد خطا در تعیین میزان پیچش نوک پره منجر شود. هان و بوچاوا [۴۶] در چارچوب نظریه هندسی دقیق تیر به بررسی رفتار غیرخطی پیچشی-محوری تیر تحت نیروی محوری پرداختند. اهمیت اثر ذوزنقه‌ای در کاربردهای مربوط به پره بالگرد به صورت ویژه مورد بررسی قرار گرفته است. اخیراً، هافمیر و هاگسبرگ [۴۷] با در نظر گرفتن رابطه بین پیچش و جابجایی‌های محوری و مدلسازی دقیق پدیده اعوجاج به بررسی امکان استفاده از این پدیده در میرا نمودن ارتعاشات پیچشی پره توربینهای بادی پرداختند.

علی‌رغم فعالیتهای تحقیقاتی گسترده‌ای که در زمینه بررسی رفتار غیرخطی پیچشی تیرها صورت گرفته است، ارتعاشات واداشته غیرخطی پیچشی تیرها کمتر مورد بررسی قرار گرفته است. ماهیت غیرخطی سیستم می‌تواند منجر به ظهور پدیده‌های متعددی شود که در سیستم‌های خطی دیده نمی‌شوند. از جمله این پدیده‌ها می‌توان به حل چندتائی[3]، پرش[4]،

1 Doubly symmetric
2 Delamination
3 Multiple solutions
4 Jump

سیکل محدود[5]، تشدیدهای مادون هارمونیک[6]، مافوق هارمونیک[7]، ترکیبی[8] و انشعاب‌های چند دوره‌ای[9] و آشوب[10] اشاره کرد. نمونه‌ای دیگر از پدیده‌های غیرخطی در سیستم‌های چند درجه آزادی و پیوسته اندرکنش مودهای مختلف است که می‌تواند منجر به جابجائی انرژی بین مودهای مختلف سیستم شود. معمولاً انرژی از مودهای با فرکانس بالا و دامنه کوچک به مودهای با فرکانس پائین و دامنه بزرگ منتقل می‌شود. در غیاب اندرکنش بین مودها، پاسخ حالت پایای[11] یک سیستم میرا[12] تنها شامل مود تحریک شده است. اگر چه جابجائی انرژی بین مودها می‌تواند خطرناک باشد، اما استفاده از این پدیده برای انتقال انرژی از سیستم اصلی به یک سیستم ثانویه بسیار سودمند است. از این واقعیت در جاذب‌های ارتعاشی اوتوپارامتریک استفاده می‌شود. تحقیقات بسیار زیادی در مورد اندرکنش غیرخطی مودها صورت گرفته است. بر پایه نتایج تحقیقات صورت گرفته در صورتیکه دو یا چند فرکانس طبیعی سیستم غیرخطی و فرکانس تحریک هم‌شمارنده[13] باشند، پاسخ زمانی می‌تواند شامل مودهای خطی متعددی باشد [۵۱-۴۸]. وجود بیشتر از یک مود در پاسخ، منجر به پیچیده‌تر شدن پاسخ و افزایش تعداد معادلات مورد نیاز برای تحلیل سیستم می‌شود. تشدید داخلی یا رزونانس اوتوپارامتریک به حالتی از اندرکنش غیرخطی مودها گفته می‌شود که در آن فرکانس‌های طبیعی خطی ( $\omega_i$ ) شمارنده و یا تقریباً شمارنده یکدیگر هستند. در بررسی ارتعاشات واداشته سیستم غیرخطی بسته به رابطه فرکانس تحریک خارجی ( $\Omega$ ) با فرکانس‌های طبیعی سیستم ( $\omega_i$ ) به ترتیب پدیده‌های زیر به وقوع می‌پیوندند.

تشدید اصلی مود اول $\Omega \approx \omega_1$

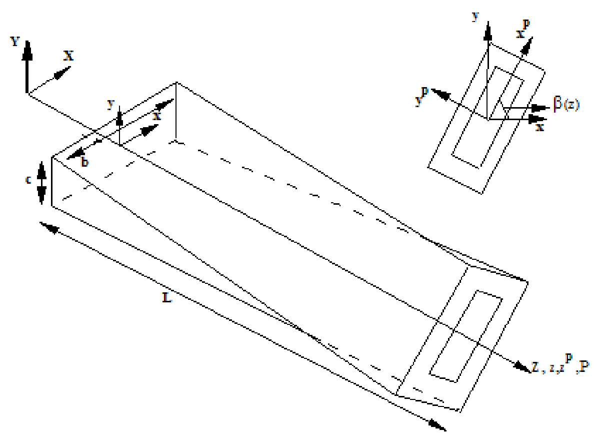
تشدید اصلی مود دوم $\Omega \approx \omega_2$

تشدید مادون هارمونیک از مرتبه یک دوم مود اول $\Omega \approx 2\omega_1$

تشدید مادون هارمونیک از مرتبه یک دوم مود دوم $\Omega \approx 2\omega_2$

تشدید ترکیبی خارجی جمعی $\Omega \approx \omega_2 + \omega_1$

5 Limit cycle
6 Subharmonic resonance
7 Superharmonic resonance
8 Combination resonance
9 Priod multiplying
10 Chaos
11 Steadt state response
12 Damped system
13 Commensurate




**شکل ۴. شماتیک تیر با زاویه پیچش اولیه**

**Fig. 4. Schematic of beam with pretwist angle.**

مقاله حاضر به بررسی ارتعاشات واداشته غیرخطی پیچشی تیر با زاویه پیچش اولیه با استفاده از روشهای نیمه تحلیلی اغتشاشی می‌پردازد. تا آنجا که نگارنده اطلاع دارد، بررسی ارتعاشات غیرخطی واداشته پیچشی تیر و تحلیل پدیده تشدید اصلی برای اولین بار ارائه می‌گردد. ارتعاشات غیرخطی پیچشی تیر در حضور تحریک تشدید اصلی مود اول و دوم مورد بررسی قرار گرفته است. انواع شرایط مرزی در پیچش در نظر گرفته می‌شوند. در تحلیل‌ها شرایط تشدید داخلی نیز در نظر گرفته شده است. تشدید مود اول و دوم و نحوه تغییرات دامنه و فاز حرکت بر حسب شدت شرایط تشدید خارجی در حضور تشدید داخلی و بدون حضور تشدید داخلی بررسی شده است. نتایج به دست آمده نشانگر اهمیت پدیده‌های غیرخطی در دینامیک پیچشی تیرها است.

## ۲- معادلات غیرخطی حاکم بر حرکت

تیر مطابق شکل ۴ تحت نیروی محوری P در نظر گرفته شده است. مدل مورد استفاده در این مقاله، محدود به تیرهای با مقطع دارای دو محور تقارن است. در غیر این صورت جابجایی‌های پیچشی و محوری با جابجایی‌های خمشی همراه می‌شوند، که در مقاله حاضر در نظر گرفته نشده است. مختصات مرجع $\left(x^p, y^p, z\right)$ به عنوان مختصات محلی تعریف شده است که در آن محورهای اصلی $x^p$ و $y^p$ منطبق بر مقطع تیر هستند که حول محور طولی با زاویه پیچش اولیه می‌چرخند. محورz- در جهت دهانه تیر و بر مرکز تقارن مقطع تیر منطبق فرض شده است.

تغییرشکل‌های پیچشی تیر در مقایسه با دیگر تغییرشکل‌های آن بزرگ فرض شده‌اند. در میدان جابجایی تنها عباراتی که مرتبط با پیچش و جابجائی محوری هستند، ذکر شده‌اند. بر این مبنا موقعیت نقطه پس از جابجائی که با پانویس $d$ نمایش داده می‌شود، با عبارت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} x_d &= x^p\cos(\beta+\phi) - y^p\sin(\beta+\phi), \\ y_d &= x^p\sin(\beta+\phi) + y^p\cos(\beta+\phi), \\ z_d &= z + R_0 + w_0 - \phi'(z,t)\left(F_w + nr_t(s)\right), \end{aligned} \tag{۱}$$

که در عبارت فوق $\phi$ و $w$. به ترتیب بیانگر پیچش الاستیک و جابجائی محوری میانگین تیر هستند. البته علامت پرایم معرف مشتق مکانی نسبت به محور z- است. تابع وارپینگ اولیه $F_w$ برای تیر جعبه‌ای به صورت زیر است.

$$F_w = \int_0^s \left[r_n(s) - \Psi\right] ds. \tag{۲}$$

فاصله عمودی مرکز برش سطح مقطع تیر تا بردار مماس و عمود بر کنتور میانی جدار، به ترتیب $r_n(s)$ و $r_t(s)$ و تابع پیچشی $\Psi$ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$r_n(s) = -y(s)\frac{dx}{ds} + x(s)\frac{dy}{ds},$$
$$r_t(s) = x(s)\frac{dx}{ds} + y(s)\frac{dy}{ds}, \quad (۳)$$
$$\Psi = \frac{\oint_C r_n(s)ds}{\oint_C ds} = \frac{2A_c}{S},$$

که $A_c$ و $S$ به ترتیب محیط و مساحت سطح مقطع تیر هستند. میدان جابجائی مدل به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= x_d - x \equiv x(\cos\phi - 1) - y\sin\phi, \\ v(x,y,z,t) &= y_d - y \equiv x\sin\phi + y(\cos\phi - 1), \\ w(x,y,z,t) &= w_0 - \phi'(z,t)\left(F_w + nr_t(s)\right). \end{aligned} \quad (۴)$$

میدان کرنش به صورت زیر به دست می‌آید [۴۳].

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz}(n,s,z,t) &= \varepsilon_{zz}^0(s,z,t) + n\varepsilon_{zz}^n(s,z,t), \\ \varepsilon_{zz}^0(s,z,t) &= w_0' - \phi''(z,t)F(s) + \frac{1}{2}\left(\underline{\phi'^2} + 2\beta'\phi'\right)\left(x_p^2 + y_p^2\right), \\ \varepsilon_{zz}^n(s,z,t) &= r_t(s,z)\phi''(z,t), \\ \gamma_{sz}(s,z,t) &= \Psi\phi'(z,t). \end{aligned} \quad (۵)$$

ترم مشخص شده با خط در کرنش محوری مولفه‌ای غیرخطی است که در مدل پیچشی ولاسو وجود ندارد و اصطلاحاً کرنش وگنر نامیده می‌شود.

معادله حاکم بر تغییر شکل‌های پیچشی بزرگ تیر با استفاده از اصل همیلتون و در غیاب نیروهای حجمی و سطحی به صورت زیر به دست می‌آید [۴۴].

$$\begin{aligned} &\delta\phi : \left(-a_{66}\hat{\phi}''\right)'' + \\ &\left[\frac{T_z\widehat{I}_p}{S}\hat{\phi}' + \frac{3}{2}B\,\beta'\hat{\phi}'^2 + \frac{B}{2}\hat{\phi}'^3 + B\,\beta'^2\hat{\phi}' + a_{77}\hat{\phi}'\right]' - \\ &I_p\ddot{\hat{\phi}} = -\left[\frac{T_z\widehat{I}_p}{S}\beta'\right]. \end{aligned} \quad (۶)$$

به واسطه وجود گشتاور پیچشی ثابت در سمت راست معادله، پیچش اولیه استاتیک در تیر القا می‌شود که معادله حاکم بر این پیچش استاتیک که با $\phi_s$ نشان داده می‌شود، عبارتست از

$$-a_{66}\phi_s'''' + \left(\frac{T_z\widehat{I}_p}{S} + B\beta'^2 + a_{77}\right)\phi_s' = -\frac{T_z\widehat{I}_p}{S}\beta'. \quad (۷)$$

با در نظر گرفتن $\hat{\phi} = \phi_s + \phi$، معادله (۶) به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} &\delta\phi : \left(-a_{66}\phi''\right)'' + [\left(\frac{T_z\widehat{I}_p}{S} + B\,\beta'^2 + a_{77}\right)\phi' + \\ &\frac{3}{2}B\,\beta'\left(\phi'^2 + 2\phi_s'\phi'\right) + \\ &\frac{B}{2}\left(\phi'^3 + 3\phi_s'^2\phi' + 3\phi_s'\phi'^2\right)]' - I_p\ddot{\phi} = 0. \end{aligned} \quad (۸)$$

اگر مولفه‌های خطی و غیرخطی در معادله (۸) جداسازی شوند، معادله زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} &\delta\phi : \left(-a_{66}\phi''\right)'' + [(\frac{T_z\widehat{I}_p}{S} + B\,\beta'^2 + a_{77} + \\ &3B\,\beta'\phi_s' + \frac{3B}{2}\phi_s'^2)\phi' + \\ &\frac{3}{2}B\left(\beta' + \phi_s'\right)\phi'^2 + \frac{B}{2}\phi'^3]' - I_p\ddot{\phi} = 0. \end{aligned} \quad (۹)$$

توجه شود که معادله حاکم بر ارتعاشات خطی پیچشی تیر در این حالت عبارتست از

$$\begin{aligned} &\delta\phi : \left(-a_{66}\phi''\right)'' + [(\frac{T_z\widehat{I}_p}{S} + B\,\beta'^2 + a_{77} + \\ &3B\,\beta'\phi_s' + \frac{3B}{2}\phi_s'^2)\phi']' - I_p\ddot{\phi} = 0. \end{aligned} \quad (۱۰)$$

در ادامه معادله حاکم بر ارتعاشات غیرخطی پیچشی تیر با تحریک تشدید اصلی[1] بررسی می‌شود. در این راستا ابتدا مسئله با تعریف متغیرهای کمکی زیر ساده‌سازی می‌شود.

1 Primary resonance

$$k_1 = \frac{1}{I_p}\left(\frac{T_z \hat{I}_p}{S}\phi' + B\beta'^2 + a_{77} + 3B\beta'\phi_s' + \frac{3B}{2}\phi_s'^2\right),$$
$$k_2 = \frac{3B}{I_p}\left(\beta' + \phi_s'\right), k_3 = \frac{3B}{2I_p}, k_4 = \frac{a_{66}}{I_p}. \quad (۱۱)$$

اگر متغیرهای بی‌بعد زمان و مکان به صورت زیر تعریف شوند،

$$\hat{t} = \frac{\sqrt{k_1}}{L}t, \qquad \hat{z} = \frac{z}{L}, \quad (۱۲)$$

صورت کلی مسئله با درنظر گرفتن تحریک خارجی نوسانی ( $F$ ) به صورت زیر خواهد بود.

$$\ddot{\phi} - \phi'' + \frac{k_4}{k_1 L^2}\phi'''' = \frac{k_2}{k_1 L}\phi'\phi'' + \frac{k_3}{k_1 L^2}\phi'^2\phi'' + F\cos\Omega\hat{t}, \quad (۱۳)$$

که مشتق‌های زمانی و مکانی در معادله (۱۳) به ترتیب نسبت به $\hat{t}$ و $\hat{z}$ تعریف می‌شوند.

## ۳- ارتعاشات خطی

معادله حاکم بر ارتعاشات خطی پیچشی تیر با زاویه پیچش اولیه و تحت بارگذاری محوری در معادله (۱۰) آمده است. این معادله نشاندهنده اثر زاویه پیچش اولیه تیر، نیروی محوری و اثر وگنر در طبیعت خطی پیچشی تیر است. با توجه به اطلاعات فعلی نگارنده این مقاله، این بیان از دینامیک پیچشی تیر تاکنون ارائه نگردیده است. مؤلفه‌های $T_z \hat{I}_p / S$ و $B\beta'^2$ بیانگر اثر نیروی محوری و زاویه پیچش اولیه در سختی پیچشی تیر هستند که قبلاً توسط محققین ارائه شده بودند. در این بخش، مسئله ارتعاشات آزاد خطی پیچشی تیر با شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای حل این مسئله از روش جداسازی متغیرهای زمانی و مکانی استفاده می‌شود. برای حل مسئله در این حالت از روش گلرکین توسعه‌یافته[1] استفاده می‌شود.

برای بررسی ارتعاشات آزاد، ابتدا باید پیچش استاتیک $\phi_s$ محاسبه شود. $\phi_s$ علاوه بر معادله (۷) باید شرایط مرزی مربوط به پیچش را نیز ارضا کند. شرایط مرزی ضروری[2] و طبیعی[3] پیچشی تیر بر حسب متغیرهای جابجائی به ترتیب به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\phi = 0, \phi' = 0, \quad (۱۴)$$

$$-a_{66}\phi'' = 0, -a_{66}\phi''' + \left(\frac{T_z \hat{I}_p}{S} + B\beta'^2 + a_{77}\right)\phi' = -\frac{T_z \hat{I}_p}{S}\beta'. \quad (۱۵)$$

به بیان دیگر، شرایط مرزی پیچشی در هر طرف تیر برای حالت‌های آزاد، گیردار و تکیه‌گاه ساده به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$-a_{66}\phi'' = 0, -a_{66}\phi''' + \left(\frac{T_z \hat{I}_p}{S} + B\beta'^2 + a_{77}\right)\phi' = -\frac{T_z \hat{I}_p}{S}\beta', \quad (۱۶)$$

$$\phi = 0, \phi' = 0, \quad (۱۷)$$

$$\phi = 0, -a_{66}\phi''' + \left(\frac{T_z \hat{I}_p}{S} + B\beta'^2 + a_{77}\right)\phi' = -\frac{T_z \hat{I}_p}{S}\beta'. \quad (۱۸)$$

پس از تعیین $\phi_s$، معادله (۱۰) باید تحلیل شود. بدین‌منظور از جداسازی متغیرها به صورت زیر استفاده می‌شود.

$$\phi(z,t) = \Phi(z)\sin(\omega t). \quad (۱۹)$$

جاگذاری معادله (۱۹) در معادله (۱۰) منجر به معادله (۲۰) می‌شود.

$$\delta\phi : \left(-a_{66}\Phi''\right)'' + [(\frac{T_z \hat{I}_p}{S} + B\beta'^2 + a_{77} + 3B\beta'\phi_s' + \frac{3B}{2}\phi_s'^2)\Phi']' + I_p\omega^2\Phi = 0, \quad (۲۰)$$

که در این حالت شرایط مرزی پیچشی در هر طرف تیر برای شرایط مرزی آزاد، گیردار و تکیه‌گاه ساده به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند.

1 Extended Galerkin method
2 Essential boundary conditions
3 Natural boundary conditions

$$-a_{66}\Phi''=0,-a_{66}\Phi'''+\left(\frac{T_z\hat{I}_p}{S}+B\beta'^2+a_{77}+3B\beta'\phi_s'+\frac{3B}{2}\phi_s'^2\right)\Phi'=0, \tag{۲۱}$$

$$\Phi=0,\Phi'=0, \tag{۲۲}$$

$$\Phi=0,-a_{66}\Phi'''+\left(\frac{T_z\hat{I}_p}{S}+B\beta'^2+a_{77}+3B\beta'\phi_s'+\frac{3B}{2}\phi_s'^2\right)\Phi'=0. \tag{۲۳}$$

فرم کلی حل معادله (۲۰) برای شرایط مرزی یکسرگیردار-یکسر آزاد در پیچش به صورت زیر است.

$$\Phi=c_1\cosh\lambda_1 z+c_2\sinh\lambda_1 z+c_3\cos\lambda_2 z+c_4\sin\lambda_2 z, \tag{۲۴}$$

که $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ از حل معادله مشخصه مربوطه به دست می‌آیند. ضرائب $c_۱$ تا $c_۴$ نیز با ارضا شرایط مرزی پیچشی دو سر تیر به دست می‌آیند.

## ۴- حل اغتشاشی معادلات غیرخطی حاکم بر حرکت

برای به دست آوردن معادلات دامنه-فاز حاکم بر دامنه و فاز مودهای پیچشی از روش مقیاس‌های چندگانه[1] استفاده می‌شود. بر این مبنا متغیرهای جدید زمانی به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$T_n=\varepsilon^n t \quad n=0,1,2,\cdots, \tag{۲۵}$$

در ادامه مشتق‌های نسبت به زمان با مشتقات جزئی نسبت به متغیرهای جدید به صورت زیر جایگزین می‌شوند.

$$\frac{d}{dt}=\frac{dT_0}{dt}\frac{\partial}{\partial T_0}+\frac{dT_1}{dt}\frac{\partial}{\partial T_1}+\cdots=D_0+\varepsilon D_1+\cdots,\quad \frac{d^2}{dt^2}=D_0^2+2\varepsilon D_0D_1+\varepsilon^2(D_1^2+2D_0D_2)+\cdots. \tag{۲۶}$$

بسط مرتبه دوم جواب معادله (۱۳) به صورت زیر خواهد بود.

$$\phi(z,t)=\varepsilon\phi_1(\hat{z},T_0,T_2)+\varepsilon^2\phi_2(\hat{z},T_0,T_2)+\varepsilon^3\phi_3(\hat{z},T_0,T_2)+\dots \tag{۲۷}$$

برای آنکه اثر تشدید توسط مولفه‌های غیرخطی معادله بالانس شود، در حالت رزونانس اصلی $F$ به صورت $\varepsilon^۲ f$ و در حالت رزونانس مادون هارمونیک به صورت $\varepsilon^۲ f$ مقیاس می‌شود. با جاگذاری معادله (۲۷) در معادله (۱۳) و برابر قرار دادن ضرائب مرتبه‌های یکسان $\varepsilon$ معادلات زیر به دست می‌آیند.

$$\varepsilon: D_0^2\phi_1-\phi_1''+\frac{k_4}{k_1L^2}\phi_1''''=0, \tag{۲۸}$$

$$\varepsilon^2: D_0^2\phi_2-\phi_2''+\frac{k_4}{k_1L^2}\phi_2''''=\frac{k_2}{k_1L}\phi_1'\phi_1''+\delta_s f\cos\Omega T_0, \tag{۲۹}$$

$$\varepsilon^3: D_0^2\phi_3-\phi_3''+\frac{k_4}{k_1L^2}\phi_3''''=-2D_0D_2\phi_1+\frac{k_2}{k_1L}(\phi_1'\phi_2''+\phi_1''\phi_2')+\frac{k_3}{k_1L^2}\phi_1'^2\phi_1''+\delta_p f\cos\Omega T_0. \tag{۳۰}$$

در حالت تشدید اصلی $\delta_s=۰$ و $\delta_p=۱$ است. در حالیکه در مورد رزونانس‌های مادون هارمونیک و ترکیبی $\delta_s=۱$ و $\delta_p=۰$ است. در ادامه سیستم معادلات برای حالت‌های غیرتشدیدی و تشدید داخلی سه به یک و با توجه به شرایط مرزی دو سر تکیه‌گاه ساده و یک‌سر تکیه‌گاه ساده-یک‌سر آزاد، حل می‌شوند. آنچنان‌که قبلاً نیز ذکر شد، شرط لازم برای ظهور تشدید داخلی بین مودهای اول و دوم پیچشی آن است که فرکانس مود دوم سه برابر و یا در حدود سه برابر فرکانس مود اول باشد.

### تشدید واداشته اصلی در حضور تشدید داخلی

در این بخش ارتعاشات غیرخطی تیر با شرایط مرزی پیچشی یک‌سر گیردار و یک‌سر آزاد با زاویه پیچش اولیه بررسی می‌شود. این شرایط مرزی دارای شرط لازم برای تشدید داخلی سه به یک است [۴۲]. در ادامه فرض

1 Method of multiple scales

می‌شود که هیچ‌یک از این دو مود در رزونانس داخلی با مودهای دیگر شرکت ندارند. برای مدل کردن نسبت فرکانسی بین مودهای اول و دوم متغیر تنظیم‌گر $\sigma_1$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\omega_2 = 3\omega_1 + \varepsilon\sigma_1. \tag{۳۱}$$

حل عمومی معادله (۱۷) به صورت زیر فرض می‌شود.

$$\phi_1 = A_1(T_2)\psi_1(\hat{z})e^{i\omega_1 T_0} + A_2(T_2)\psi_2(\hat{z})e^{i\omega_2 T_0} + cc, \tag{۳۲}$$

که $\psi_i(\hat{z})$ شکل مودهای خطی سیستم هستند. با فرض $\delta_s = ۰$، با جاگذاری معادله (۳۲) در معادله (۲۹) معادله زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
&D_0^2\phi_2 - \phi_2'' + \frac{k_4}{k_1L^2}\phi_2'''' = \\
&\frac{k_2}{k_1L}\psi_1'\psi_1''A_1^2e^{2i\omega_1T_0} + \frac{k_2}{k_1L}\psi_1'\psi_1''A_1\bar{A}_1 + \\
&\frac{k_2}{k_1L}A_2^2\psi_2'\psi_2''e^{2i\omega_2T_0} + \frac{k_2}{k_1L}\psi_2'\psi_2''A_2\bar{A}_2 + \\
&\frac{k_2}{k_1L}\left(\psi_1'\psi_2'' + \psi_1''\psi_2'\right)A_1A_2e^{i(\omega_2+\omega_1)T_0} + \\
&\frac{k_2}{k_1L}\left(\psi_1'\psi_2'' + \psi_1''\psi_2'\right)\bar{A}_1A_2e^{i(\omega_2-\omega_1)T_0} + cc,
\end{aligned} \tag{۳۳}$$

حل معادله اخیر به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}
\phi_2 = -\frac{k_2}{k_1L}\Big[&\Gamma_{11}(\hat{z})A_1^2e^{2i\omega_1T_0} + \\
&\Gamma_{21}(\hat{z})A_1\bar{A}_1 + \Gamma_{12}(\hat{z})A_2^2e^{2i\omega_2T_0} + \\
&\Gamma_{22}(\hat{z})A_2\bar{A}_2 + \Gamma_3(\hat{z})A_1A_2e^{i(\omega_2+\omega_1)T_0} \\
&+\Gamma_4(\hat{z})\bar{A}_1A_2e^{i(\omega_2-\omega_1)T_0} + cc\Big].
\end{aligned} \tag{۳۴}$$

معادله حاکم بر $\Gamma$ به صورت زیر است.

$$-\frac{k_4}{k_1L^2}\Gamma_{1n}'''' + \Gamma_{1n}'' + 4\omega_n^2\Gamma_{1n} = \psi_n'\psi_n'', \tag{۳۵}$$

$$-\frac{k_4}{k_1L^2}\Gamma_{2n}'''' + \Gamma_{2n}'' = \psi_n'\psi_n'', \tag{۳۶}$$

$$-\frac{k_4}{k_1L^2}\Gamma_3'''' + \Gamma_3'' + (\omega_1+\omega_2)^2\Gamma_3 = \psi_1'\psi_2'' + \psi_1''\psi_2', \tag{۳۷}$$

$$-\frac{k_4}{k_1L^2}\Gamma_4'''' + \Gamma_4'' + (\omega_2-\omega_1)^2\Gamma_4 = \psi_1'\psi_2'' + \psi_1''\psi_2', \tag{۳۸}$$

و شرایط مرزی $\Gamma$ نیز با توجه به شرایط مرزی اصلی مسئله تعیین می‌شود. با عنایت به معادلات (۳۴) تا (۳۸) واضح است که $\Gamma$ها کارکردی شکل مود گونه دارند. با جاگذاری معادلات (۳۲) و (۳۴) در معادله (۳۰)، معادله زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
&D_0^2\phi_3 - \phi_3'' + \frac{k_4}{k_1L^2}\phi_3'''' = \\
&-2i\,\omega_1A_1'\psi_1e^{i\omega_1T_0} - 2i\,\omega_2A_2'\psi_2e^{i\omega_2T_0} + \\
&\left[\frac{k_3}{k_1L^2}\left(\psi_1'^3\right)' - \left(\frac{k_2}{k_1L}\right)^2\left(\psi_1'\Gamma_{11}' + 2\psi_1'\Gamma_{21}'\right)'\right]A_1^2\bar{A}_1e^{i\omega_1T_0} + \\
&\left[\frac{k_3}{k_1L^2}\left(\psi_2'^3\right)' - \left(\frac{k_2}{k_1L}\right)^2\left(\psi_2'\Gamma_{12}' + 2\psi_2'\Gamma_{22}'\right)'\right]A_2^2\bar{A}_2e^{i\omega_2T_0} + \\
&[\frac{2k_3}{k_1L^2}\left(\psi_1'\psi_2'^2\right)' - \left(\frac{k_2}{k_1L}\right)^2 \times \\
&\left(\psi_2'\Gamma_3' + \psi_2'\Gamma_4' + 2\psi_1'\Gamma_{22}'\right)']A_1A_2\bar{A}_2e^{i\omega_1T_0} + \\
&[\frac{2k_3}{k_1L^2}\left(\psi_2'\psi_1'^2\right)' - \left(\frac{k_2}{k_1L}\right)^2 \times \\
&\left(\psi_1'\Gamma_3' + \psi_1'\Gamma_4' + 2\psi_2'\Gamma_{21}'\right)']A_2A_1\bar{A}_1e^{i\omega_2T_0} + \\
&\left[\frac{k_3}{3k_1L^2}\left(\psi_2'^3\right)' - \left(\frac{k_2}{k_1L}\right)^2\left(\psi_1'\Gamma_{11}'\right)'\right]A_1^3e^{3i\omega_1T_0} + \\
&[\frac{k_3}{k_1L^2}\left(\psi_2'\psi_1'^2\right)' - \left(\frac{k_2}{k_1L}\right)^2 \times \\
&\left(\psi_1'\Gamma_4' + \psi_2'\Gamma_{11}'\right)']A_2\bar{A}_1^2e^{i(\omega_2-2\omega_1)T_0} + \\
&\frac{1}{2}fe^{i\Omega T_0} + cc + NST.
\end{aligned} \tag{۳۹}$$

$NST$ معرف عبارتهایی است که منجر به ظهور جوابهای نامحدود در دستگاه معادلات نمی‌شوند. از آنجا که مسئله همگن مربوط به معادله اخیر دارای حل غیربدیهی[1] است، مسئله غیرهمگن تنها در حالتی دارای حل است که سمت راست معادله (۳۹) به هر حل مسئله همگن مربوطه متعامد

1 Nontrivial solution

باشد. دقت شود که بخش همگن معادله اخیر مسئله‌ای خودالحاق[1] است که حل آن عبارتست از $\psi_n \exp\left(\pm i\,\omega_n T_0\right)$ در مسئله تشدید اصلی مود اول (به عبارت دیگر $\Omega=\omega_1+\varepsilon\sigma_2$)، سمت راست معادله (۳۹) باید بر $\psi_1 \exp\left(-i\,\omega_1 T_0\right)$ و $\psi_2 \exp\left(-i\,\omega_2 T_0\right)$ متعامد باشد. بنابراین

$$\begin{aligned}
&2i\,\omega_1 A_1^* + 8S_{11}A_1^2\overline{A_1} + \\
&8S_{12}A_1A_2\overline{A_2} + 8\Lambda_1\overline{A_1}^2 A_2 e^{i\sigma_1 T_1} - \\
&\frac{1}{2} f_1 e^{i\sigma_2 T_1} = 0, \\
&2i\,\omega_2 A_2^* + 8S_{22}A_2^2\overline{A_2} + \\
&8S_{21}A_1\overline{A_1}A_2 + 8\Lambda_2 A_1^3 e^{-i\sigma_1 T_1} = 0.
\end{aligned} \tag{۴۰}$$

به همین ترتیب در مسئله تشدید اصلی مود دوم (به عبارت دیگر $\Omega=\omega_2+\varepsilon\sigma_2$) معادلات حاکم بر دامنه و فاز مودهای شرکت کننده در دینامیک پیچشی تیر به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}
&2i\,\omega_1 A_1^* + 8S_{11}A_1^2\overline{A_1} + 8S_{12}A_1A_2\overline{A_2} + \\
&8\Lambda_1\overline{A_1}^2 A_2 e^{i\sigma_1 T_1} = 0, \\
&2i\,\omega_2 A_2^* + 8S_{22}A_2^2\overline{A_2} + 8S_{21}A_1\overline{A_1}A_2 + \\
&8\Lambda_2 A_1^3 e^{-i\sigma_1 T_1} - \frac{1}{2} f_2 e^{i\sigma_2 T_1} = 0.
\end{aligned} \tag{۴۱}$$

ضرائب به کار رفته در معادلات (۴۰) و (۴۱) در ادامه معرفی شده‌اند.

$$\begin{aligned}
&8S_{11} = -\int_0^1 \left[\frac{k_3}{k_1L^2}\psi_1'^3 - \left(\frac{k_2}{k_1L}\right)^2\left(\psi_1'\Gamma_{11}' + 2\psi_1'\Gamma_{21}'\right)\right]'\psi_1\,dx, \\
&8S_{12} = -\int_0^1 \left[\frac{2k_3}{k_1L^2}\psi_1'\psi_2'^2 - \left(\frac{k_2}{k_1L}\right)^2\left(\psi_2'\Gamma_3' + \psi_2'\Gamma_4' + 2\psi_1'\Gamma_{22}'\right)\right]'\psi_1\,dx, \\
&8S_{21} = -\int_0^1 \left[\frac{2k_3}{k_1L^2}\psi_2'\psi_1'^2 - \left(\frac{k_2}{k_1L}\right)^2\left(\psi_1'\Gamma_3' + \psi_1'\Gamma_4' + 2\psi_2'\Gamma_{21}'\right)\right]'\psi_2\,dx, \\
&8S_{22} = -\int_0^1 \left[\frac{k_3}{k_1L^2}\psi_2'^3 - \left(\frac{k_2}{k_1L}\right)^2\left(\psi_2'\Gamma_{12}' + 2\psi_2'\Gamma_{22}'\right)\right]'\psi_2\,dx, \\
&8\Lambda_1 = -\int_0^1 \left[\frac{k_3}{k_1L^2}\psi_2'\psi_1'^2 - \left(\frac{k_2}{k_1L}\right)^2\left(\psi_1'\Gamma_4' + \psi_2'\Gamma_{11}'\right)\right]'\psi_1\,dx, \\
&8\Lambda_2 = -\int_0^1 \left[\frac{k_3}{3k_1L^2}\psi_1'^3 - \left(\frac{k_2}{k_1L}\right)^2\left(\psi_1'\Gamma_{11}'\right)\right]'\psi_2\,dx, \\
&f_n = \int_0^1 f\,\psi_n\,dz.
\end{aligned} \tag{۴۲}$$

اعمال انتگرال‌گیری جزء به جزء بر $S_{12}$ و $S_{21}$ و با در نظر گرفتن شرایط مرزی بیانگر مساوی بودن این دو متغیر است. از طرف دیگر $\Lambda_1$ نیز سه برابر $\Lambda_2$ است. برای تحلیل جواب‌های سیستم، $A_n$ در معادله (۴۰) به صورت زیر جایگزین می‌شوند.

$$A_n = \frac{1}{2} a_n e^{i\beta_n}. \tag{۴۳}$$

با جایگزینی معادله (۴۳) در معادله (۴۰) و جداکردن بخش‌های حقیقی و موهومی مربوطه، معادلات دامنه–فاز برای تشدید اصلی مود اول به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$a_1^* = -9\Lambda a_1^2 a_2 \sin\gamma_1 + \frac{1}{2} f_1 \sin\gamma_2, \tag{۴۴}$$

$$a_2^* = \Lambda a_1^3 \sin\gamma_1, \tag{۴۵}$$

$$a_1\beta_1^* = s_{11}a_1^3 + 3s_{21}a_1a_2^2 + 9\Lambda a_1^2 a_2\cos\gamma_1 - \frac{1}{2} f_1\cos\gamma_2, \tag{۴۶}$$

$$a_2\beta_2^* = s_{22}a_2^3 + s_{21}a_1^2a_2 + \Lambda a_1^3\cos\gamma_1, \tag{۴۷}$$

که

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 = \beta_2 - 3\beta_1 + \sigma_1T_1, \gamma_2 = \sigma_2T_1 - \beta_1, \\
&s_{11} = \frac{S_{11}}{\omega_1}, s_{22} = \frac{S_{22}}{\omega_2}, s_{21} = \frac{S_{21}}{\omega_2}, \Lambda = \frac{\Lambda_2}{\omega_2}, f_1 = \frac{F_1}{\omega_1}.
\end{aligned} \tag{۴۸}$$

قابل توجه است که برای مسئله تشدید اصلی مود دوم (به عبارت دیگر $\Omega=\omega_2+\varepsilon\sigma_2$)، معادلات دامنه–فاز به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$a_1^* = -9\Lambda a_1^2 a_2 \sin\gamma_1, \tag{۴۹}$$

$$a_2^* = \Lambda a_1^3 \sin\gamma_1 + \frac{1}{2} f_2 \sin\gamma_2, \tag{۵۰}$$

1 Self adjoint problem

$$a_1\beta_1^* = s_{11}a_1^3 + 3s_{21}a_1a_2^2 + 9\Lambda a_1^2 a_2 \cos\gamma_1, \tag{۵۱}$$

$$a_2\beta_2^* = s_{22}a_2^3 + s_{21}a_1^2 a_2 + \Lambda a_1^3 \cos\gamma_1 - \frac{1}{2} f_2 \cos\gamma_2, \tag{۵۲}$$

که

$$\gamma_2 = \sigma_2 T_1 - \beta_2,\ f_2 = \frac{F_2}{\omega_2}. \tag{۵۳}$$

با جاگذاری معادله (۴۳) در معادله (۳۲)، با استفاده از معادلات (۴۸) برای حذف $\beta_1$ و $\beta_2$ و با استفاده از تعریف $\sigma_1$ و $\sigma_2$، حل تقریبی پاسخ پیچشی تیر تا مرتبه دوم (با فرض $\varepsilon = 1$) به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}
&\phi(\hat z,t) = a_1\psi_1(\hat z)\cos(\omega_1 t + \beta_1) + \\
&a_2\psi_2(\hat z)\cos(\omega_2 t + \beta_2) - \\
&\frac{k_2}{k_1 L}\{a_1^2\left[\Gamma_{11}(\hat z)\cos(2\omega_1 t + 2\beta_1) + \Gamma_{21}(\hat z)\right] + \\
&a_2^2\left[\Gamma_{12}(\hat z)\cos(2\omega_2 t + 2\beta_2) + \Gamma_{22}(\hat z)\right] + \\
&a_1a_2[\left[\Gamma_3(\hat z)\cos((\omega_1+\omega_2)t + \beta_1 + \beta_2) + \right. \\
&\Gamma_4(\hat z)\cos((\omega_2-\omega_1)t + \beta_2 - \beta_1)]\ \} + \dots
\end{aligned} \tag{۵۴}$$

که $a_1$، $a_2$، $\beta_1$ و $\beta_2$ با استفاده از معادلات (۴۴) تا (۴۷) به دست می‌آیند. همچنان که ملاحظه می‌شود توابع $\Gamma_{ij}$ در معادله (۵۴) نقشی مشابه شکل مودها دارند. از آن گذشته جواب علاوه بر فرکانس‌های مربوط به مودهای اول و دوم شامل فرکانس‌های دیگری نظیر دو برابر فرکانس اول، دو برابر فرکانس دوم، مجموع فرکانس اول و دوم و تفاضل فرکانس‌های اول و دوم نیز هست. این هارمونیک‌ها در اثر حضور مولفه‌های غیرخطی مرتبه دو در معادلات حاکم ایجاد شده‌اند.

البته $A_n$ در معادله (۴۰) را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت.

$$A_n = \frac{1}{2}(p_n - iq_n)e^{i\nu_n T_1}, \tag{۵۵}$$

که

$$A_n = \frac{1}{2}(p_n - iq_n)e^{i\nu_n T_1}, \tag{۵۶}$$

با جاگذاری دو معادله (۵۵) و (۵۶) در معادله (۴۰) و جداکردن معادلات مربوط به بخش‌های حقیقی و موهومی و با استفاده از معادله (۴۸) فرم دیگری از معادلات دامنه-فاز برای تشدید اصلی مود اول به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
&p_1^* = \nu_1 q_1 + s_{11}q_1(p_1^2 + q_1^2) + \\
&3s_{21}q_1(p_2^2 + q_2^2) + \\
&9\Lambda\left[q_2(p_1^2 - q_1^2) - 2p_1p_2q_1\right],
\end{aligned} \tag{۵۷}$$

$$\begin{aligned}
&q_1^* = \nu_1 p_1 - s_{11}p_1(p_1^2 + q_1^2) - \\
&3s_{21}p_1(p_2^2 + q_2^2) - \\
&9\Lambda\left[p_2(p_1^2 - q_1^2) + 2p_1q_1q_2\right] + \frac{1}{2}f_1,
\end{aligned} \tag{۵۸}$$

$$\begin{aligned}
&p_2^* = -\nu_2 q_2 + s_{22}q_2(p_2^2 + q_2^2) + \\
&s_{21}q_2(p_1^2 + q_1^2) + \Lambda(3p_1^2q_1 - q_1^3),
\end{aligned} \tag{۵۹}$$

$$\begin{aligned}
&q_2^* = \nu_2 p_2 - s_{22}p_2(p_2^2 + q_2^2) - \\
&s_{21}p_2(p_1^2 + q_1^2) + \Lambda(3p_1q_1^2 - p_1^3).
\end{aligned} \tag{۶۰}$$

برای مسئله تشدید اصلی مود دوم نیز معادلات دامنه-فاز به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
&p_1^* = \nu_1 q_1 + s_{11}q_1(p_1^2 + q_1^2) + \\
&3s_{21}q_1(p_2^2 + q_2^2) + \\
&9\Lambda\left[q_2(p_1^2 - q_1^2) - 2p_1p_2q_1\right],
\end{aligned} \tag{۶۱}$$

$$\begin{aligned}
&q_1^* = \nu_1 p_1 - s_{11}p_1(p_1^2 + q_1^2) - \\
&3s_{21}p_1(p_2^2 + q_2^2) - \\
&9\Lambda\left[p_2(p_1^2 - q_1^2) + 2p_1q_1q_2\right],
\end{aligned} \tag{۶۲}$$

$$\begin{aligned}
&p_2^* = -\nu_2 q_2 + s_{22}q_2(p_2^2 + q_2^2) + \\
&s_{21}q_2(p_1^2 + q_1^2) + \\
&\Lambda(3p_1^2q_1 - q_1^3),
\end{aligned} \tag{۶۳}$$

$$q_2^* = \nu_2 p_2 - s_{22} p_2 \left(p_2^2 + q_2^2\right) - s_{21} p_2 \left(p_1^2 + q_1^2\right) + \Lambda\left(3 p_1 q_1^2 - p_1^3\right) + \frac{1}{2} f_2. \quad (۶۴)$$

در این حالت حل تقریبی مرتبه اول پاسخ پیچشی تیر به صورت زیر خواهد بود.

$$\phi(\hat{z},t) = \left(p_1 \cos\Omega t + q_1 \sin\Omega t\right)\psi_1(\hat{z}) + \left(p_2 \cos 3\Omega t + q_2 \sin 3\Omega t\right)\psi_2(\hat{z}). \quad (۶۵)$$

که $p_i$ و $q_i$ با استفاده از معادلات (۵۷) تا (۶۰) به دست می‌آیند.

## تشدید واداشته اصلی بدون حضور تشدید داخلی

### شرایط مرزی محوری آزاد

در این قسمت پدیده تشدید اصلی در ارتعاشات پیچشی غیرخطی تیر جدار نازک یکنواخت و با مقطع I شکل با شرایط مرزی دو سر تکیه‌گاه ساده بررسی می‌شود. در این حالت، نسبت بین فرکانس دوم و اول خطی در حدود سه است که با توجه به حضور مولفه‌های غیرخطی مرتبه سه در معادله غیرخطی حاکم بر ارتعاشات پیچشی احتمال ایجاد تشدید داخلی سه به یک وجود دارد. اگرچه شرط لازم برای ظهور پدیده تشدید داخلی وجود دارد اما وجود نسبت صحیح بین فرکانس‌های اول و دوم طبیعی نمی‌تواند به ظهور مودهای کوپله و باز توزیع انرژی بین مودهای مختلف سیستم منجر شود. این مسئله با توجه به معادلات (۴۴) تا (۴۷) بیشتر قابل توضیح است. غیر صفر بودن $\Lambda$ کلید فعال شدن همزمان $a_1$ و $a_2$ و به عبارتی فعال شدن پدیده تشدید داخلی است. $\Lambda$ مطابق معادله (۴۲) تابعی از $k_2$ و $k_3$ که به ترتیب ضریب مولفه‌های غیرخطی مرتبه دوم و سوم سیستم هستند، می‌باشد. با توجه به تعریف $k_2$ که در معادله (۱۱) آمده است، قابلیت زاویه پیچش اولیه به عنوان عامل فعال‌ساز تشدید داخلی در سیستم اثبات می‌شود. بنابراین زاویه پیچش اولیه می‌تواند به عنوان ابزاری غیرفعال[1] برای ایجاد تشدید داخلی در سیستم به کار رود.

در ادامه با استفاده از روش اغتشاشی مستقیم پدیده تشدید اصلی در ارتعاشات پیچشی تیر با شرایط مرزی دو سر تکیه‌گاه ساده بررسی می‌شود. با توجه به مطالب ذکر شده در بند قبل، می‌توان جواب مرتبه اول سیستم ،حل عمومی معادله (۲۸)، در تشدید اصلی مود $n$ام پیچشی را به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\phi_1 = A_n(T_2)\psi_n(\hat{z})e^{i\omega_n T_0} + cc. \quad (۶۶)$$

با طی فرآیندی مشابه روندی که در بخش قبل ذکر شد، معادله زیر به دست می‌آید.

$$2i\omega_n A_n^* + 8S_{nn}A_n^2\overline{A_n} - \frac{1}{2}f_n e^{i\sigma_2 T_1} = 0, \quad (۶۷)$$

برای تحلیل جواب‌های سیستم، $A_n$ در معادله فوق به صورت زیر جایگزین می‌شود.

$$A_n = \frac{1}{2}a_n e^{i\beta_n}. \quad (۶۸)$$

با بازنویسی معادله (۶۷) و جداکردن بخش‌های حقیقی و موهومی مربوطه، معادلات دامنه-فاز به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$a_n^* = \frac{1}{2}f_n \sin\left(\sigma_2 T_2 - \beta_n\right), \quad (۶۹)$$

$$a_n\beta_n^* = s_{nn}a_n^3 - \frac{1}{2}f_n\cos\left(\sigma_2 T_2 - \beta_n\right). \quad (۷۰)$$

که

$$8S_{nn} = -\int_0^1 \left[\frac{k_3}{k_1 L^2}\psi_n'^3\right]'\psi_n\,dx,\ s_{nn} = \frac{S_{nn}}{\omega_n}. \quad (۷۱)$$

با تعریف

$$\lambda_n = \sigma_2 T_2 - \beta_n, \quad (۷۲)$$

فرم خودگردان[2] معادلات (۶۹) و (۷۰) به صورت زیر به دست می‌آیند.

1 Passive

2 Autonomus

$$a_n^* = \frac{1}{2} f_n \sin \lambda_n, \qquad (۷۳)$$

$$a_n \lambda_n^* = \sigma_2 a_n - s_{nn} a_n^3 + \frac{1}{2} f_n \cos \lambda_n. \qquad (۷۴)$$

معادلات (۷۳) و (۷۴) معادلات حاکم بر دامنه و فاز مود $n$ ام هستند. همچنان که ملاحظه می‌شود دامنه و فاز حرکت تابعی از مقیاس‌های زمانی آرام $T_۲$ هستند. البته فاز و در نتیجه فرکانس حرکت تابعی از دامنه حرکت و در نتیجه تابعی از انرژی سیستم هستند. نوسانات حالت پایا با شرط $a_n^* = \lambda_n^* = ۰$ به دست می‌آیند. بنابراین برای به دست آوردن نقاط ثابت پاسخ سیستم معادله غیرخطی ذیل باید به صورت عددی حل شود.

$$\frac{1}{4} f_n^2 = \left(\sigma_2 - s_{nn} a_n^2\right)^2 a_n^2, \qquad (۷۵)$$

که معادله پاسخ–فرکانس حاکم بر پاسخ تک‌مودی سیستم است. آنچنان که به صورت مفصل توسط محققین تشریح شده است، دامنه پاسخ مطابق معادله (۷۵) به ازای پاره‌ای از مقادیر متغیر دیتونینگ دارای سه مقدار (دو مقدار پایدار و یک مقدار ناپایدار) است. این پدیده علت اصلی پدیده پرش[۱] در سیستم‌های غیرخطی است.

برای مطالعه پایداری جواب‌ها اجزای اغتشاشی به حل حالت پایای معادله (۷۵)، اضافه می‌شوند. بنابراین،

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n0} + a_{n1}, \\ \lambda_n &= \lambda_{n0} + \lambda_{n1}, \end{aligned} \qquad (۷۶)$$

که $\lambda_{n۰}$ و $a_{n۰}$ حل حالت پایای معادله (۷۵) هستند. با جاگذاری معادله (۷۶) در معادلات (۷۳) و (۷۴) و بسط عبارات مربوطه و جداکردن عبارات خطی بر حسب $a_{n۱}, \lambda_{n۱}$ معادلات زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} & a_{n1}' - \left(\frac{f_n}{2} \cos \lambda_{n0}\right) \lambda_{n1} = 0, \\ & \lambda_{n1}' + \left(2 s_{nn} a_{n0} + \frac{f_n}{2 a_{n0}^2} \cos \lambda_{n0}\right) a_{n1} - \\ & \left(\frac{f_n}{2 a_{n0}} \sin \lambda_{n0}\right) \lambda_{n1} = 0. \end{aligned} \qquad (۷۷)$$

پایداری با استخراج مقادیر ویژه ماتریس ضرائب معادله (۷۷) به دست می‌آید. برای پایداری مقادیر ویژه باید فاقد جزء حقیقی مثبت باشند. بنابراین پاسخ حالت پایا در صورتی ناپایدار خواهد بود که

$$\left(\sigma - s_{nn} a_{n0}^2\right)\left(\sigma - 3 s_{nn} a_{n0}^2\right) \prec 0. \qquad (۷۸)$$

## شرایط مرزی محوری غیرقابل جابجائی

مطابق مرجع [۴۳]، در این حالت $T_z$ در معادله (۶) باید با عبارت $\frac{k_{۱۱} \widehat{I}_p}{۲L} \int_۰^L \phi'^۲ dz$ جایگزین شود. بنابراین متغیرهای معادله (۱۱) به صورت زیر اصلاح می‌شوند.

$$\begin{aligned} & k_1 = \frac{1}{I_p}\left(B\beta'^2 + a_{77} + 3B\beta'\phi_s' + \frac{3B}{2}\phi_s'^2\right), \\ & k_2 = \frac{3B}{I_p}\left(\beta' + \phi_s'\right), k_3 = \frac{3B}{2I_p}, k_4 = \frac{a_{66}}{I_p}, k_5 = \frac{k_{11}\widehat{I}_p^2}{2LSI_p}. \end{aligned} \qquad (۷۹)$$

البته معادله (۱۳) نیز باید به صورت زیر اصلاح شود.

$$\begin{aligned} & \ddot{\phi} - \phi'' + \frac{k_4}{k_1 L^2} \phi'''' = \frac{k_2}{k_1 L} \phi' \phi'' + \\ & \frac{k_3}{k_1 L^2} \phi'^2 \phi'' + \frac{k_5}{k_1} \int_0^1 \phi'^2 dz \, \phi'' + F \cos \Omega \hat{t}. \end{aligned} \qquad (۸۰)$$

ادامه فرآیند کاملاً مشابه بخش ۴-۲-۱- است با این تفاوت که در معادلات مربوطه $S_{nn}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

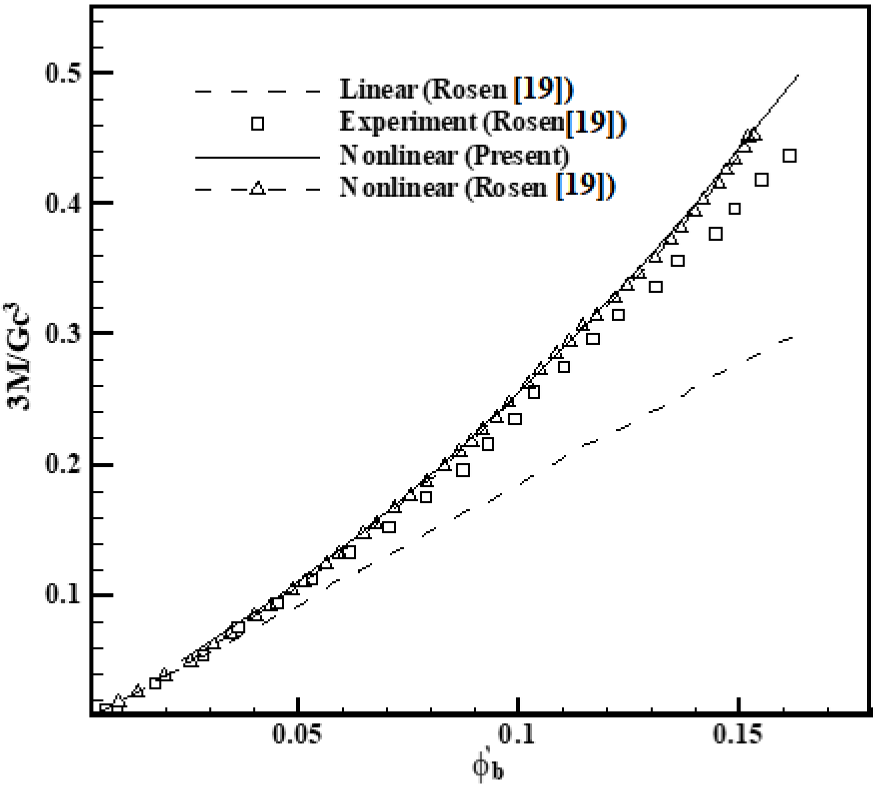
$$\begin{aligned} & 8S_{nn} = -\int_0^1 \left[\frac{k_3}{k_1 L^2} \psi_n'^3 + \frac{k_5}{k_1} \int_0^1 \psi_n'^2 dz \, \psi_n'\right]' \psi_n \, dx, \\ & s_{nn} = \frac{S_{nn}}{\omega_n}. \end{aligned} \qquad (۸۱)$$

## ۵- نتایج عددی

### صحت‌سنجی نتایج

برای اعتبارسنجی نتایج، مقایسه بین نتایج مطالعه حاضر و نتایج موجود در تحقیقات دیگران انجام گرفته است که صحت و دقت نتایج را نشان می‌دهد. در شکل ۵ پیچش الاستیک استاتیک غیرخطی تیر با مقطع نازک

1 Jump phenomenon




**شکل ۵. پیچش الاستیک استاتیک ($\phi'$) به صورت تابعی از گشتاور پیچشی اعمالی ($^{۳M}/_{Gc^{۳}}$) تحت بار کششی ثابت $T_z = ۲۸/۶N$ در تیر با مقطع نازک مستطیلی با ابعاد و خواص** $L = ۶۰۰\,\text{mm}, c = ۰/۵\,\text{mm}, b = ۱۰\,\text{mm}, E = ۱/۹۲\times۱۰^{۵}\,\text{N}/\text{mm}^{۲}, G = ۷/۴۵\times۱۰^{۴}\,\text{N}/\text{mm}^{۲}$.

**Fig. 5. Static untwist ($\phi'$) versus pitching moment ($3M/Gc^3$) under constant axial load of $T_z = 28.6N$ for beam with strip section of** $L = 600\,mm, c = 0.5\,\text{mm}, b = 10\,\text{mm}, E = 1.92\times10^5\,\text{N}/\text{mm}^2, G = 7.45\times10^4\,\text{N}/\text{mm}^2$

تحت بار کششی ثابت در گشتاورهای مختلف پیچشی با نتایج روزن [۱۹] مقایسه شده است که نتایج هر دو مطالعه تطابق خوبی با یکدیگر دارند.

## ارتعاشات خطی: بررسی اثر شرایط مرزی

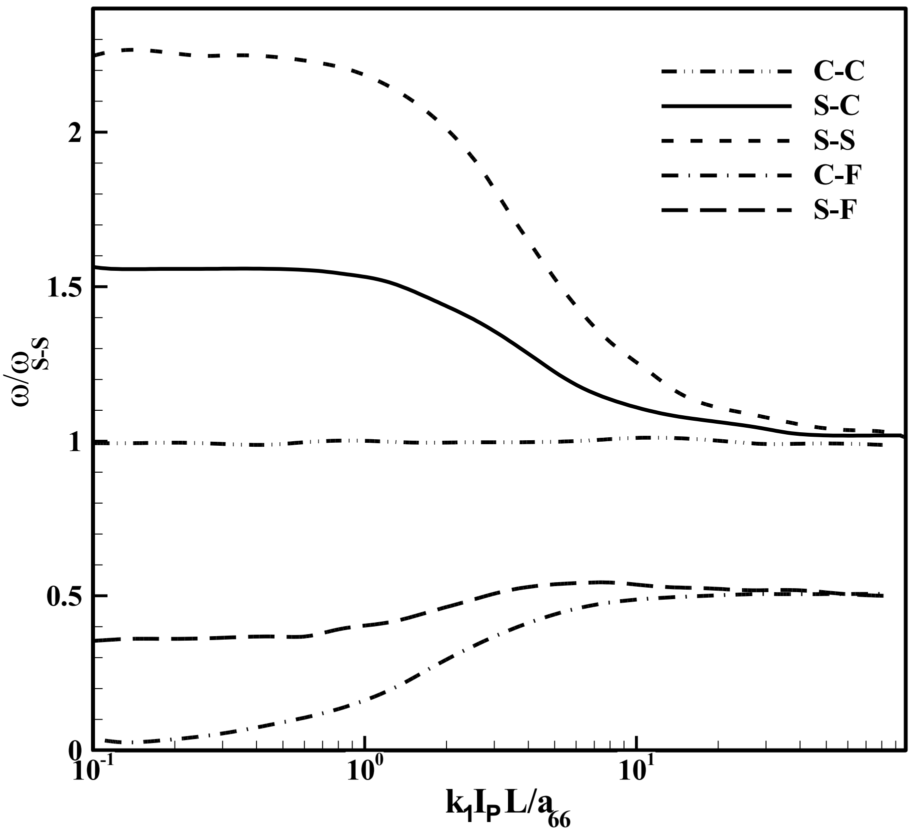
در این بخش، فرکانس طبیعی اول پیچشی تیر بدون زاویه پیچش اولیه و نیروی محوری در شرایط مرزی مختلف ارائه می‌گردد. در شکل ۶ فرکانس طبیعی اصلی بی‌بعد پیچشی تیر در شرایط مرزی مختلف به ازای مقادیر مختلف سختی پیچشی تیر رسم گردیده است.

چنان‌که در شکل ۶ مشاهده می‌شود، کاهش نسبت سختی پیچشی سن ونِنت به سختی اعوجاج منجر به اثرگذاری بیشتر شرایط مرزی گیردار یا ساده در فرکانسهای طبیعی پیچشی تیر می‌شود. به ازای مقادیر مشخصی از نسبت سختی پیچشی سن ونِنت به سختی اعوجاج، شرایط مرزی گیردار و ساده در پیچش رفتاری مشابه هم دارند و در واقع اثر اعوجاج قابل چشمپوشی می‌شود.

## ارتعاشات غیرخطی: شرایط مرزی پیچشی یکسر گیردار-یکسر آزاد

در ادامه مسئله تشدید اصلی مود اول و دوم ارتعاشات پیچشی تیر جدار نازک شرایط مرزی پیچشی یک‌سر تکیه‌گاه ساده و یک‌سر آزاد با زاویه پیچش اولیه بررسی می‌شود. مقطع مستطیل شکل توپر و با زاویه پیچش اولیه در نظر گرفته شده است. ابعاد و خواص مربوطه در جدول ۲ آمده است.

شایان ذکر است که ضرائب هندسی تیر جدار نازک با مقطع مستطیلی به صورت زیر محاسبه می‌شوند.




**شکل ۶. فرکانس طبیعی اول بی‌بعد پیچشی تیر یکنواخت بر حسب $k_1I_pL/a_{۶۶}$ به ازای شرایط مرزی مختلف، C، S و F به ترتیب معرف شرایط مرزی گیردار، ساده و آزاد در پیچش هستند.**

**Fig. 6. Dimensionless fundamental frequency of uniform beam versus $k_1I_pL/a_{66}$ in different boundary conditions. C, S, F represent clamped, simply supported and free boundary condition, respectively.**

**جدول ۲. خواص جنس و هندسه تیر جدار نازک با زاویه پیچش اولیه و تحت تحریک پیچشی خارجی.**

**Table 2. Material and geometric properties of pretwisted thin walled beam under external pitching moment**

| ماده | | هندسه | |
|---|---|---|---|
| مدول یانگ، $E(GPa)$ | ۲۰۵ | طول، $L(\mathrm{m})$ | ۰/۰۸ |
| ضریب پوآسون، $\nu$ | ۰/۲۵ | پهنا، $b(\mathrm{m})$ | ۰/۰۰۸ |
| چگالی، $\rho(\mathrm{kg/m^۳})$ | ۷۷۰۰ | ارتفاع، $c(\mathrm{m})$ | ۰/۰۰۲ |
| | | نرخ زاویه پیچش اولیه، $\beta$ | ۲π/۷ |

$$J = bc^3\left[\frac{1}{3} - 0.21\frac{c}{b}\left(1 - \frac{c^4}{12b^4}\right)\right],$$
$$I_p = \frac{cb^3}{12},\ I_{pp} = \frac{cb^5}{80}. \tag{۸۲}$$

با عنایت به شرایط مرزی، $\phi'_s$ عبارتست از

$$\phi'_s = \frac{-\frac{PI_p}{A}\beta'}{GJ + \frac{PI_p}{A} + B\beta'^2}. \tag{۸۳}$$

## ارتعاشات آزاد خطی

نتایج مربوط به فرکانس طبیعی خطی مدل نشان می‌دهد که اولین فرکانس طبیعی خطی در حدود ۲۱۸۱/۸۶ هرتز و فرکانس دوم خطی در حدود ۶۵۴۵/۵۹ هرتز است. برای بار فشاری ۹۸۶ نیوتن مقدار زاویه $\phi_s$ در نوک تیر حدود ۰/۲۶۸ درجه است. اثر این زاویه القائی به همراه ترم‌های غیرخطی در بررسی ارتعاشات غیرخطی پیچشی تیر تحت اثر بار محوری در نظر گرفته خواهد شد.

## تشدید اصلی مود اول

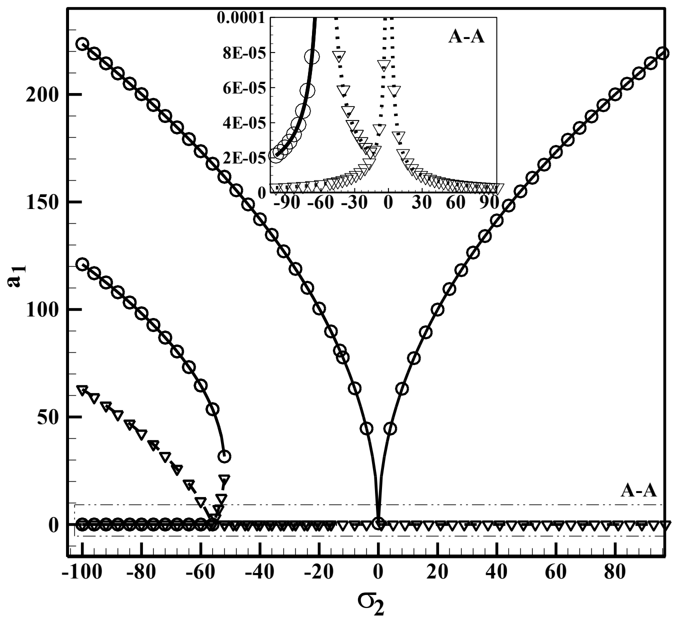
شکل ۷ و شکل ۸ به ترتیب نمودار دامنه- فرکانس مود اول و مود دوم در حالت تشدید اصلی مود اول به ازای $f_1 = 10^{-3}$ و $\sigma_1 = -40$ را نشان می‌دهند. آنچنانکه ملاحظه می‌شود، دامنه سیستم به ازای مقادیر $\sigma_2 \leq -14$ دارای پنج جواب است در

در حالیکه به ازای $-13 \leq \sigma_2 \leq 100$ دامنه سیستم دارای دو جواب است. البته به ازای $\sigma_2 = 0$ دامنه سیستم دارای یک جواب است. نتایج بیانگر وجود هر دو نوع جواب با دامنه بزرگ (از مرتبه چند صد رادیان) و کوچک (از مرتبه چند ده میکرو رادیان) در سیستم است. شکل ۸ بیانگر وجود حداکثر دو جواب مرتبه پائین برای دامنه مود اول است. درحالی که تنها یک جواب با مرتبه پایین برای مود دوم وجود دارد. در ادامه رفتار ریشه‌های مختلف سیستم بررسی می‌شود.

شکل ۸ نمودار دامنه- فرکانس مربوط به مود دوم در شرایط رزونانسی $f_1 = 10^{-3}$ و $\sigma_1 = -40$ را نشان می‌دهد. همانگونه که در تشریح شکل ۷ بیان شد، تعداد جواب‌های مربوط به دامنه مود دوم نیز با تغییر فرکانس تحریک تغییر می‌کند. تعداد جواب‌ها مشابه مود اول بین دو تا پنج جواب متغیر است. مطابق نتایج به دست آمده، دامنه مود دوم دارای مقادیری بین ۰ تا ۷۰ رادیان خواهد بود. البته مباحث پایداری و اثر شرایط اولیه و میزان انرژی سیستم و دامنه اعتبار مدل، تعیین کننده رفتار فیزیکی و واقعی سیستم است. از حیث کاربردی، مطالعه رفتار شاخه‌های پائینی نمودار و نقاط تلاقی شاخه‌های بالائی با شاخه پائینی دارای اهمیت است. صفر بودن دامنه مود دوم بیانگر غیر فعال بودن مکانیسم انتقال انرژی بین دو مود است که در جواب‌های مرتبه پائین سیستم رخ می‌دهد. در ادامه میزان انتقال انرژی بین دو مود در اثر کوپلینگ‌های غیرخطی بررسی می‌شود.

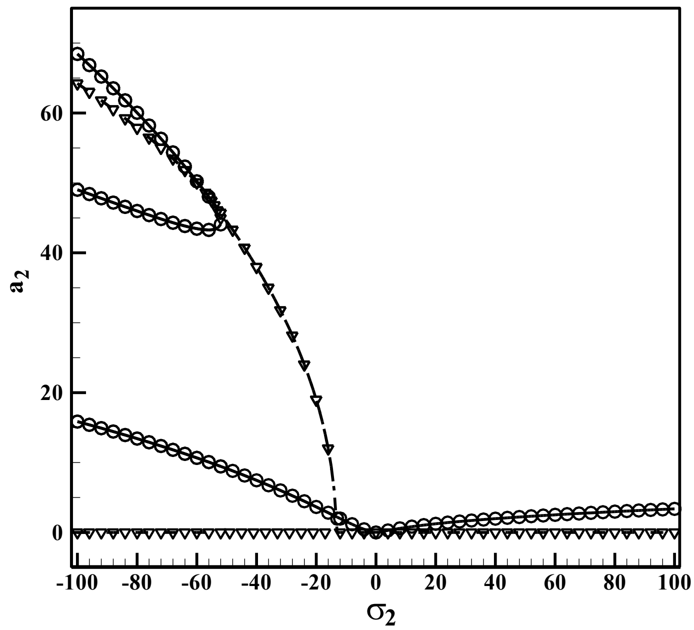
در راستای بررسی کیفی نحوه توزیع انرژی، عبارت $a_1^2 / (a_1^2 + a_2^2)$ معرف نسبت انرژی فرکانس $\omega_1$ به کل انرژی سیستم در نظر گرفته می‌شود. به همین ترتیب $a_2^2 / (a_1^2 + a_2^2)$ بیانگر نسبت انرژی با محتوای فرکانسی $\omega_2$ به کل انرژی سیستم است. آنچنانکه در شکل ۹-الف ملاحظه می‌شود، جواب اول سیستم مربوط به جواب‌های پایدار و از مرتبه بالا سیستم است. اگرچه انتقال انرژی در این شاخه از جواب‌ها وجود دارد اما در هر حال جواب اول جوابی با غلبه مود اول خطی است. در شکل ۹-ب شاخه دوم جواب‌های سیستم نشان داده شده است. در این شاخه جواب‌ها به ازای $\sigma_2 \leq -52$ کلیه نقاط مرکز پایدار و بقیه زینی ناپایدار هستند. بنابراین جواب‌های مرتبه پائین این شاخه جواب همگی ناپایدار هستند. البته رفتار این شاخه از جواب‌ها از حیث انتقال انرژی بین مودها قابل توجه است. توضیح آن که به ازای $\sigma_2 \leq -52$ رفتار غالب سیستم کوپل پایدار و با غلبه مود اول است. اما به ازای $-51 \leq \sigma_2 \leq -13$ جواب تک مودی و با غلبه مود دوم است. اگر چه این بخش از جواب‌ها ذاتاً ناپایدار هستند اما پمپاژ کامل انرژی از مود اول به مود دوم رخ می‌دهد و اصطلاحاً حرکت سیستم در مود دوم محلی[1] می‌شود. دقت شود که رفتار ریشه دوم تاکنون بر مبنای جواب‌های مرتبه بالای سیستم شکل گرفته بود. اما به ازای مقادیر $\sigma_2 \leq -12$ جواب‌های مرتبه پایین ناپایدار سیستم ظاهر می‌شوند. اگر چه مطابق معادلات دامنه-فاز امکان جواب تک مودی بر مبنای مود اول در سیستم وجود ندارد، اما مطابق شکل ۷ و شکل ۸ رفتار سیستم با دقت خوبی بر مبنای غلبه مود اول سیستم است. مطابق شکل ۹-ج به ازای $\sigma_2 \leq -52$ کلیه نقاط مرکز پایدار و طبیعت سیستم بر مبنای جواب‌های مرتبه بالای سیستم شکل گرفته و تک مودی بر مبنای مود دوم سیستم است. اما به ازای $-51 \leq \sigma_2 \leq -13$ جواب‌های مرتبه پائین سیستم ظاهر شده که از نوع زینی ناپایدار هستند. جواب سیستم در این حالت کوپل و با غلبه مود اول است. این ریشه به ازای بقیه مقادیر $\sigma_2$ دارای طبیعتی کوپل و بر مبنای جواب‌های مرتبه بالای

1 Localization



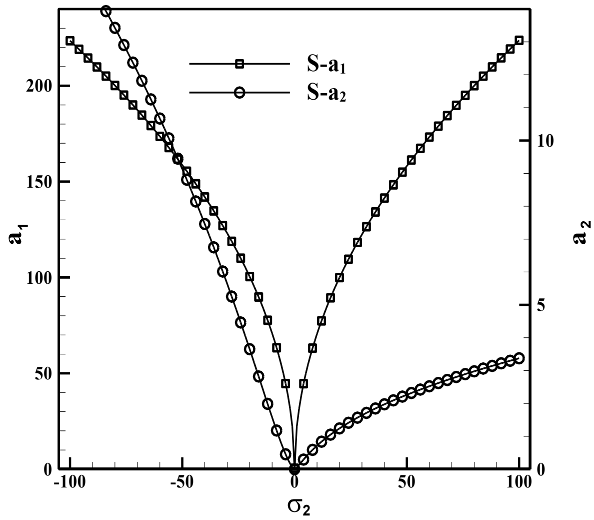

شکل ۷. نمودار دامنه- فرکانس مود اول در حالت تشدید اصلی مود اول $f_1 = ۱۰^{-۳}$ و $\sigma_1 = -۴۰$ ، خطوط ممتد به همراه علامت دایره بیانگر نقاط پایدار از نوع مرکز و خط‌چین به همراه علامت مثلث بیانگر نقاط ناپایدار از نوع زینی است. بزرگنمائی بخش A-A نیز در تصویر اضافه شده است.

**Fig. 7. First torsional mode amplitude versus frequency for primary resonance of the first mode of torsionally clamped-free beam and $f_1 = 10^{-3}$ and $\sigma_1 = -40$, solid line with circle represent stable node; dashed line with triangle represent unstable saddle.**



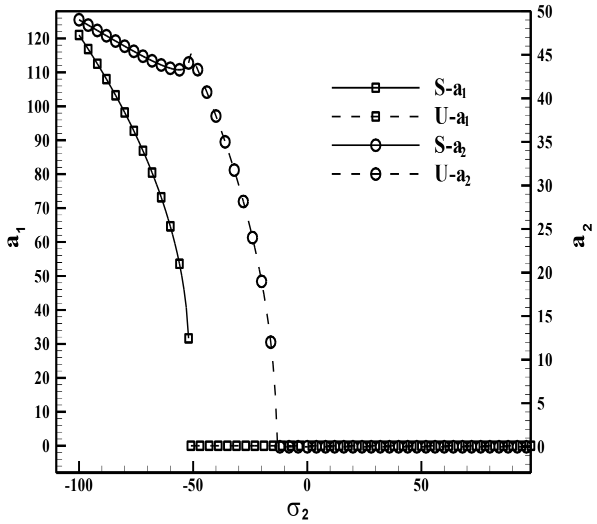

شکل ۸. نمودار دامنه- فرکانس مود دوم در حالت تشدید اصلی مود اول $f_1 = ۱۰^{-۳}$ و $\sigma_1 = -۴۰$ ، خطوط ممتد به همراه علامت دایره بیانگر نقاط پایدار از نوع مرکز و خط‌چین به همراه علامت مثلث بیانگر نقاط ناپایدار از نوع زینی است.

**Fig. 8. Second torsional mode amplitude versus frequency for primary resonance of the first mode of torsionally clamped-free beam and $f_1 = 10^{-3}$ and $\sigma_1 = -40$, solid line with circle represent stable node; dashed line with triangle represent unstable saddle.**



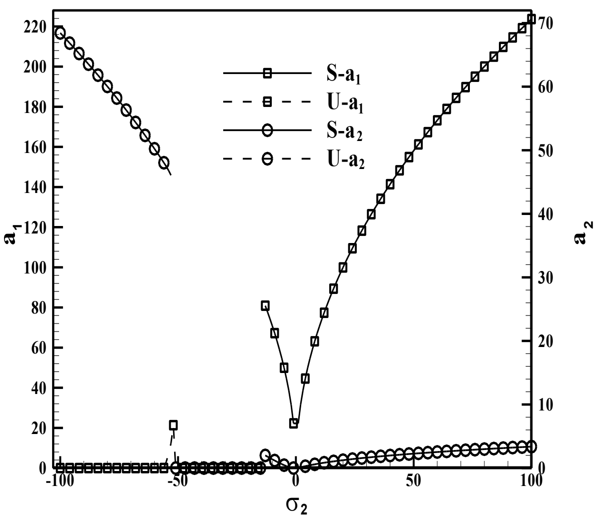

الف- ریشه اول، کلیه نقاط مرکز پایدار.

**(a): First branch: stable branch consisting stable nodes**



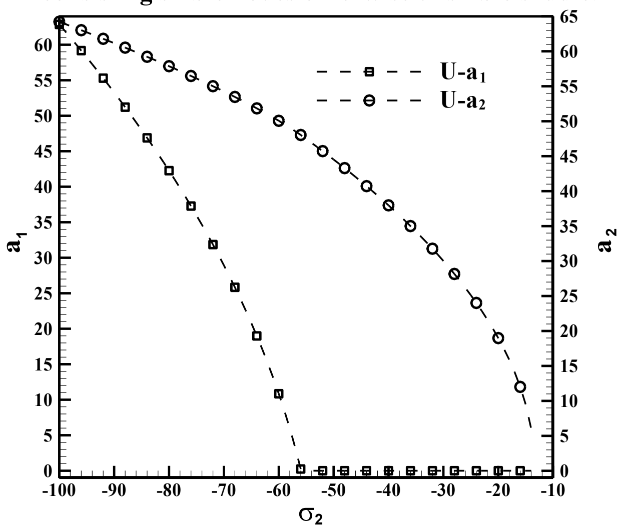

ب- ریشه دوم، به ازای $\sigma_2 \le -52$ کلیه نقاط مرکز پایدار و بقیه زینی ناپایدار.

**(b): Second branch: for $\sigma_2 \le -52$ the branch is consisting stable nodes otherwise unstable saddle.**




ج- ریشه سوم، به ازای $\sigma_2 \le -56$ کلیه نقاط مرکز پایدار و $-55 \le \sigma_2 \le -13$ زینی ناپایدار و بقیه نقاط مرکز پایدار.

**(c): Third branch: for $\sigma_2 \le -56$ the branch is consisting stable nodes, for $-55 \le \sigma_2 \le -13$ is consisting unstable saddle otherwise stable nodes.**

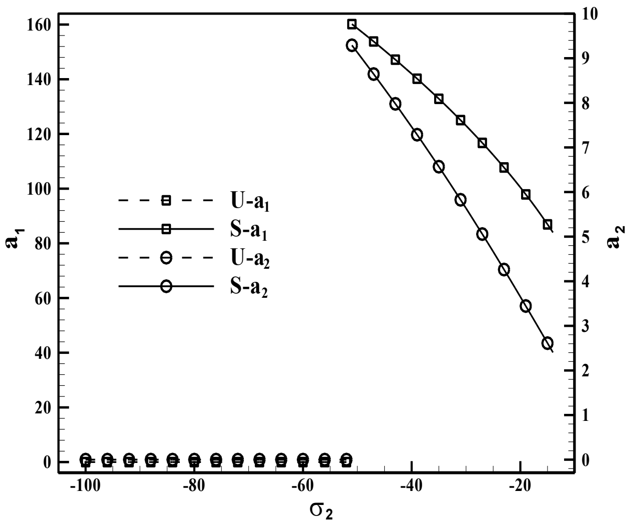



د- ریشه چهارم، به ازای کلیه نقاط زینی ناپایدار.

**(d): Fourth branch: Unstable saddle**

**شکل ۹. نحوه تغییرات دامنه مود اول و دوم در هر دسته از ریشه‌های مربوط به نقاط ثابت معادله پیچش تیر جدار نازک با زاویه پیچش اولیه و تحت بار محوری $f_1 = 10^{-3}$ و $\sigma_1 = -40$ در تحریک تشدید اصلی مود اول، علامت‌های S و U به ترتیب معرف جواب‌های پایدار و ناپایدار هستند.(ادامه دارد)**

**Fig. 9. Variation of first and second torsional mode amplitudes for different branch of fixed points of torsional vibrations of pretwisted beam under constant axial loading with torsional moment excitations of first mode with $f_1 = 10^{-3}$ and $\sigma_1 = -40$. S and U represent stable and unstable solutions, respectively.(Continude)**




ه- ریشه پنجم، به ازای $\sigma_2 \leq -52$ کلیه نقاط زینی ناپایدار و بقیه مرکز پایدار.

**شکل ۹. نحوه تغییرات دامنه مود اول و دوم در هر دسته از ریشه‌های مربوط به نقاط ثابت معادله پیچش تیر جدار نازک با زاویه پیچش اولیه و تحت بار محوری $f_1 = 10^{-3}$ و $\sigma_1 = -40$ در تحریک تشدید اصلی مود اول، علامت‌های S و U به ترتیب معرف جواب‌های پایدار و ناپایدار هستند.**

**Fig. 9. Variation of first and second torsional mode amplitudes for different branch of fixed points of torsional vibrations of pretwisted beam under constant axial loading with torsional moment excitations of first mode with $f_1 = 10^{-3}$ and $\sigma_1 = -40$. S and U represent stable and unstable solutions, respectively.**

سیستم و با غلبه مود اول است. ریشه چهارم سیستم که شامل جواب‌های از مرتبه بالای سیستم است، به ازای مقادیر $-100 \leq \sigma_2 \leq -13$ ظاهر می‌شود. این ریشه به ازای مقادیر $\sigma_2 \leq -56$ دارای جواب‌های کوپل با توزیع تقریباً یکسان انرژی بین مودهای اول و دوم است اما به ازای $-55 \leq \sigma_2$ جواب‌های تک مودی و با غلبه مود دوم ظاهر می‌شوند. ریشه پنجم مطابق شکل ۹-ه به ازای $\sigma_2 \leq -52$ دارای طبیعت کوپل ناپایدار بر مبنای جواب‌های مرتبه پائین سیستم مربوط به مود اول سیستم است. اما به ازای $-51 \leq \sigma_2 \leq -13$ جواب‌های مرتبه بالای سیستم در قالب مود کوپل پایدار و با غلبه مود اول سیستم ظاهر می‌شوند. در هر حال جواب تک مودی بر مبنای مود اول وجود ندارد اما مود دوم در جواب تک مودی پایدار ظاهر می‌شود. در مورد جواب‌های مرتبه پائین سیستم نیز جواب‌ها کوپل هستند اما غلبه کامل با مود اول است. دقت شود که بروز این رفتار در جواب‌های مرتبه پائین سیستم که جواب‌های اصلی فیزیکی هستند، بیانگر اثر ناچیز مکانیسم تشدید داخلی در انتقال انرژی از مود اول به مود دوم است. یعنی حتی اگر اثر ترم‌های غیرخطی در سیستم آنقدر مهم باشد که پدیده تشدید داخلی به وقوع بپیوندد، باز هم انتقال انرژی در جواب‌های فیزیکی سیستم چندان اهمیت ندارد. اما اثر تشدید داخلی در مقوله پایداری کاملاً نمایان است و جواب‌های مرتبه پائین سیستم ناپایدارند. ذکر این نکته ضروری به نظر می‌رسد که اگر انرژی سیستم در حدی باشد که طبیعت غیرخطی سیستم چندان دارای اهمیت نباشد، طبیعی است که بر مبنای تحلیل‌های خطی سیستم با تحریک تشدید مود اول شاهد نوسانات غیرکوپل پایدار خواهد بود. اما در حالتی که جابجائی‌ها و همان انرژی سیستم در حدی باشد که مؤلفه‌های غیرخطی و در نتیجه تشدید داخلی در سیستم مهم شود، آنگاه جواب سیستم مشابه آنچه در این بخش توضیح داده شد خواهد بود. البته تشدید داخلی بیشتر اثر خود را در جواب‌های مرتبه بالای سیستم نشان می‌دهد که جواب‌هائی کوپل و یا تک مودی بر مبنای مود دوم هستند. دقت شود که تشدید داخلی نمی‌تواند منجر به انتقال کامل انرژی از مود اول به مود دوم در جواب‌های مرتبه پائین سیستم شود. پس آنچه که در خصوص امکان ظهور مود غیرکوپل دوم پیشبینی می‌شد، ناظر به جواب‌های مرتبه بالای سیستم است. جواب‌های پایدار مرتبه بالای سیستم به ازای تنظیم‌گر نزدیک صفر دارای مقادیری

نزدیک به جواب‌های ناپایدار مرتبه پائین سیستم می‌شود که از حیث کاربردی دارای اهمیت است. جواب پایدار از مرتبه پائین با غلبه مود اول دارد. جواب‌های مرتبه بالای سیستم بیشتر کوپل و یا تک مودی از نوع مود دوم هستند. در هر حال از حیث کاربردی مطالعه رفتار شاخه‌های پائینی نمودار و نقاط تلاقی شاخه‌های بالائی با شاخه پائینی دارای اهمیت است.

## تشدید اصلی مود دوم

در ادامه مسئله تشدید اصلی مود دوم برای تیر با خواص مذکور در جدول ۲ و تحت بار محوری فشاری ۹۸۶ نیوتن بررسی می‌شود. در این راستا نقاط ثابت مربوط به ارتعاشات پیچشی تیر از حل عددی سیستم معادلات مذکور در معادلات (۶۱) تا (۶۴) به دست می‌آیند. برای بررسی پایداری نقاط ثابت نیز مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین مربوط به هر نقطه ثابت محاسبه می‌شوند.

شکل ۱۰ نحوه تغییرات دامنه مود اول و دوم در هر دسته از ریشه‌های مربوط به نقاط ثابت معادله پیچش تیر جدار نازک با زاویه پیچش اولیه و تحت بار محوری $f_۲ = ۱۰^{-۳}$ و $\sigma_۱ = -۴۰$ در تحریک تشدید اصلی مود دوم را نشان می‌دهد. همانگونه که ملاحظه میشود دینامیک جواب‌های مرتبه بالای سیستم در شکل ۹ و شکل ۱۰ بسیار شبیه یکدیگر است. این واقعیت بیانگر تأثیرپذیری ناچیز جواب‌های مرتبه بالای سیستم از فرکانس تحریک است. البته دقت شود که این جواب‌ها تأثیرپذیری شگرفی از متغیر دیتونینگ $\sigma_2$ دارند. قبلاً گفته شد که پدیده حاکم در جواب‌های مرتبه بالای سیستم تشدید داخلی است. بدیهی است که متغیر دیتونینگ به واسطه اثرگذاری بر شدت تشدید داخلی دارای چنان اثری بر جواب‌های مرتبه بالای سیستم است.

بررسی رفتار ریشه اول در شکل ۹ و شکل ۱۰ نشان می‌دهد که این ریشه در مقادیر دیتونینگ برابر صفر دارای مقادیری از مرتبه پائین است. از آنجا که این ریشه بیانگر جواب‌های پایدار سیستم است، جواب‌های مرتبه پائین متعلق به این دسته از ریشه‌ها از نظر کاربردی حائز اهمیت هستند. این مقادیر در جدول ۳ نشان داده شده‌اند. ریشه‌های مرتبه بالای سیستم در شکل ۹ و شکل ۱۰ دارای مقادیر مشابه هستند ولی ریشه‌های مرتبه پائین همانطور که در جدول ۳ نیز دیده می‌شود، مقادیر یکسانی ندارند.

به عبارت دیگر در جواب‌های مرتبه بالا یک طبیعت و آن هم طبیعت مربوط به تشدید داخلی در هر دو تحریک غالب است اما در جواب‌های مرتبه پائین طبیعت مربوط به هر مود نیز اثرگذار است. گواه این مطلب در بزرگنمائی بخش A-A شکل ۷ دیده می‌شود که تشدید در دو مقدار متغیر دیتونینگ رخ می‌دهد که یکی متأثر از طبیعت مود اول و دیگری مربوط به پدیده تشدید داخلی است. اما در مورد تشدید مود دوم در حضور پدیده تشدید داخلی تشدید در نقطه‌ای غیر از $\sigma_۲$ برابر صفر رخ می‌دهد که بیانگر کارکرد تشدید داخلی در جابجا کردن نقطه تشدید مود دوم است. نکته دیگری که در شکل ۱۱ به آن اشاره شده است، وجود جواب پایدار در میان جواب‌های مرتبه پائین و ناپایدار سیستم است که در توضیح جدول ۳ به آن اشاره شد.

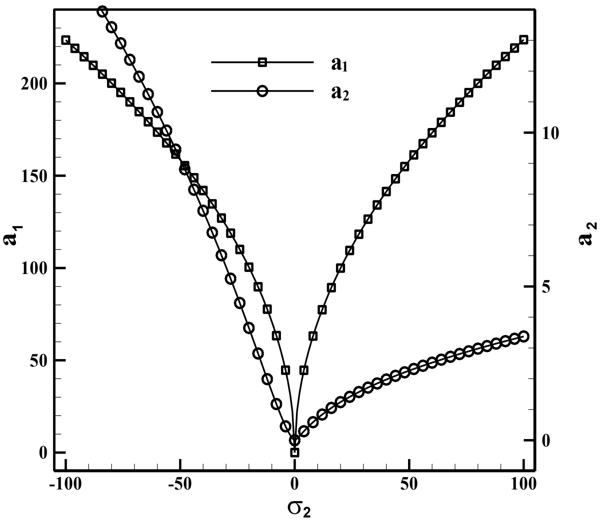
## ارتعاشات غیرخطی: تیر با شرایط مرزی پیچشی دو سر تکیه‌گاه ساده

### شرایط مرزی محوری آزاد

در این قسمت پدیده تشدید اصلی در ارتعاشات پیچشی تیر جدار نازک یکنواخت و با مقطع I شکل با شرایط مرزی دو سر تکیه‌گاه ساده بررسی می‌شود. همچنانکه قبلاً نیز ذکر شد، معادله حاکم بر ارتعاشات غیرخطی پیچشی تیر از مرتبه سوم است و مولفه‌های غیرخطی مرتبه دوم نیز در آن وجود ندارند. نیروی محوری و زاویه پیچش اولیه تیر نیز صفر در نظر گرفته شده است. خواص تیر در جدول ۴ آمده است. فرکانس‌های اول و دوم خطی مربوطه در جدول ۵ آمده است.

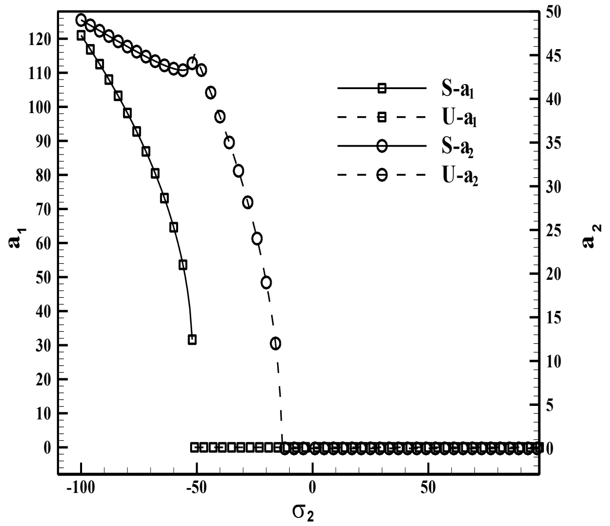
همچنان که ملاحظه می‌شود فرکانس اول مطالعه حاضر با آنچه با استفاده از روش اجزا محدود در مرجع [۵۲] به دست آمده است، تطابق بسیار خوبی دارد.

همچنانکه ملاحظه می‌شود نسبت بین فرکانس دوم و اول خطی در حدود سه است که با توجه به حضور مولفه‌های غیرخطی مرتبه سه در معادله غیرخطی حاکم بر ارتعاشات پیچشی احتمال ایجاد تشدید داخلی سه به یک وجود دارد. اگرچه شرط لازم برای ظهور پدیده تشدید داخلی وجود دارد اما وجود نسبت صحیح بین فرکانس‌های اول و دوم طبیعی نمی‌تواند به ظهور مودهای کوپله و باز توزیع انرژی بین مودهای مختلف سیستم منجر شود. این مسئله با توجه به معادلات (۴۴) تا (۴۷) بیشتر قابل توضیح است. غیر صفر بودن $\Lambda$ کلید فعال شدن همزمان $a_۱$ و $a_۲$ و به عبارتی فعال شدن پدیده تشدید داخلی است. $\Lambda$ مطابق معادله (۴۲) تابعی از $k_۱$ و $k_۳$ که به ترتیب ضریب مولفه‌های غیرخطی مرتبه دوم و سوم سیستم هستند، می‌باشد. با توجه به تعریف $k_۲$ که در معادله (۱۱) آمده است، قابلیت زاویه پیچش اولیه به عنوان عامل فعال‌ساز تشدید داخلی در سیستم اثبات می‌شود.



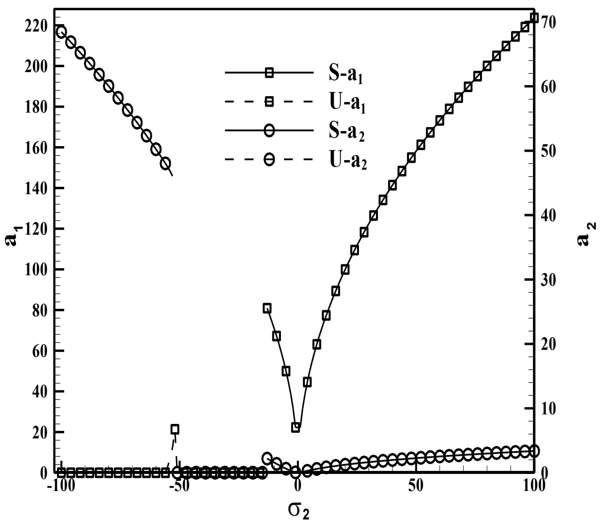

الف- ریشه اول، کلیه نقاط مرکز پایدار.

**(a): First branch: stable branch consisting stable nodes**



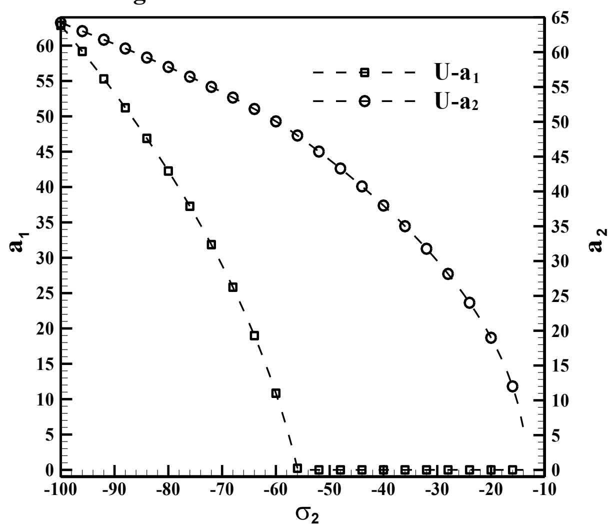

ب- ریشه دوم، به ازای $\sigma_2 \leq -52$ کلیه نقاط مرکز پایدار و بقیه زینی ناپایدار.

**(b): Second branch: for $\sigma_2 \leq -52$ the branch is consisting stable nodes otherwise unstable saddle.**




ج- ریشه سوم، به ازای $\sigma_2 \leq -56$ کلیه نقاط مرکز پایدار و $-55 \leq \sigma_2 \leq -13$ زینی ناپایدار و بقیه نقاط مرکز پایدار.

**(c): Third branch: for $\sigma_2 \leq -56$ the branch is consisting stable nodes, for $-55 \leq \sigma_2 \leq -13$ is consisting unstable saddle otherwise stable nodes.**

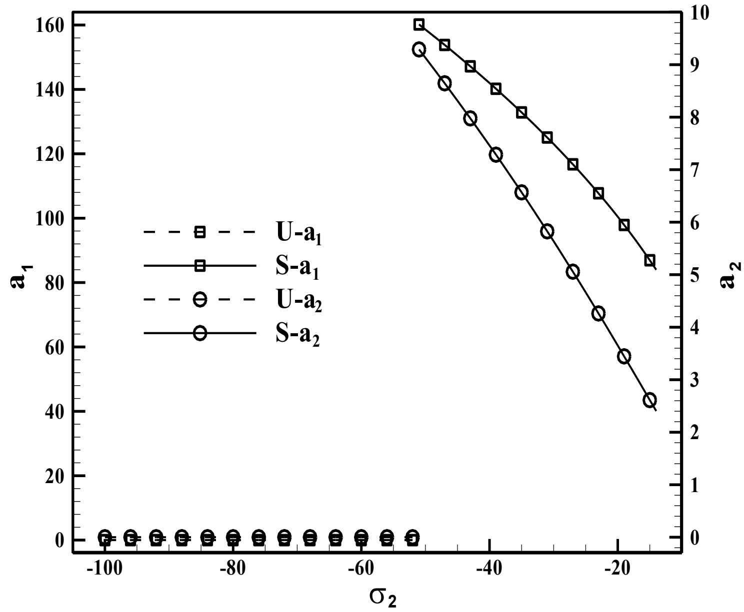



د- ریشه چهارم، به ازای کلیه نقاط زینی ناپایدار.

**(d): Fourth branch: Unstable saddle**

**شکل ۱۰. تغییرات دامنه مود اول و دوم در هر دسته از ریشه‌های مربوط به نقاط ثابت معادله پیچش تیر جدار نازک با زاویه پیچش اولیه و تحت بار محوری $f_1 = 10^{-3}$ و $\sigma_1 = -40$ در تحریک تشدید اصلی مود دوم، علامت‌های S و U به ترتیب معرف جواب‌های پایدار و ناپایدار هستند. (ادامه دارد)**

**Fig. 10. Variation of first and second torsional mode amplitudes for different branch of fixed points of torsional vibrations of pretwisted beam under constant axial loading with torsional moment excitations of second mode with $f_1 = 10^{-3}$ and $\sigma_1 = -40$. S and U represent stable and unstable solutions, respectively.(Continude)**




ه- ریشه پنجم، به ازای ۵۲- $\le \sigma_۲$ کلیه نقاط زینی ناپایدار و بقیه مرکز پایدار.

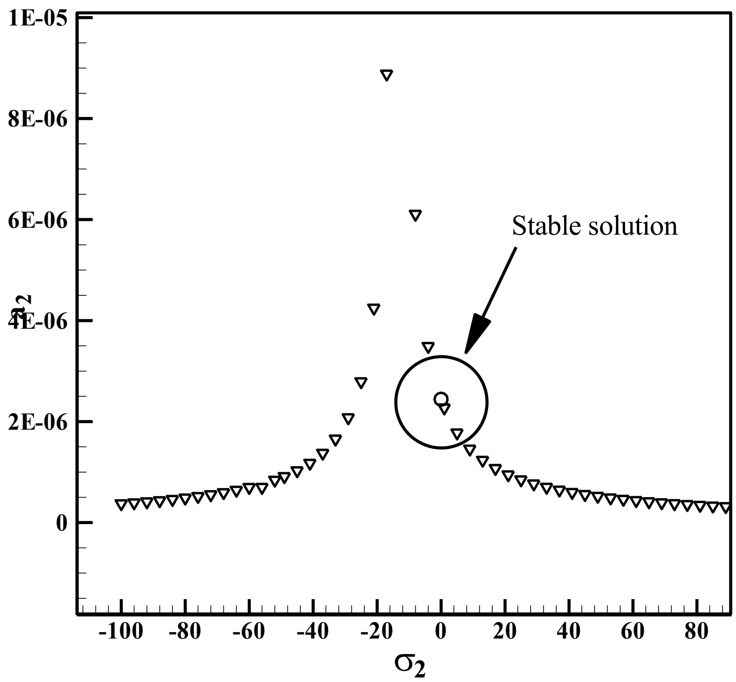
شکل ۱۰. تغییرات دامنه مود اول و دوم در هر دسته از ریشه‌های مربوط به نقاط ثابت معادله پیچش تیر جدار نازک با زاویه پیچش اولیه و تحت بار محوری $f_۱ = ۱۰^{-۳}$ و $\sigma_۱ = -۴۰$ در تحریک تشدید اصلی مود دوم، علامت‌های S و U به ترتیب معرف جواب‌های پایدار و ناپایدار هستند.

**Fig. 10. Variation of first and second torsional mode amplitudes for different branch of fixed points of torsional vibrations of pretwisted beam under constant axial loading with torsional moment excitations of second mode with $f_1 = 10^{-3}$ and $\sigma_1 = -40$. S and U represent stable and unstable solutions, respectively.**

جدول ۳. مقادیر دامنه مود اول و دوم در دسته اول جواب‌های مربوط به شکلهای ۹ و ۱۰ و به ازای متغیر دیتونینگ $\sigma_۲$ برابر صفر.

**Table 3. Amplitudes of first and second torsional modes for first branch of the fixed points representing in Figs. 9 and 10 with $\sigma_2 = 0$**

| | تشدید اصلی مود اول | تشدید اصلی مود دوم |
|---|---|---|
| $a_۱$ | ۰/۵۲۵۲ | ۰ |
| $a_۲$ | ۰/۰۰۱۲ | $۲/۴۴۳۱ \times ۱۰^{-۶}$ |




**شکل ۱۱. نمودار دامنه- فرکانس جواب‌های مرتبه پائین مربوط به مود دوم در حالت تشدید اصلی مود دوم $f_{۲} = ۱۰^{-۳}$ و $\sigma_{۱} = -۴۰$ علامت دایره بیانگر نقاط پایدار از نوع مرکز و علامت مثلث بیانگر نقاط ناپایدار از نوع زینی است.**

**Fig. 11. Second torsional mode amplitude versus frequency for primary resonance of the first mode of torsionally clamped-free beam and $f_1 = 10^{-3}$ and $\sigma_1 = -40$, solid line with circle represent stable node; dashed line with triangle represent unstable saddle.**

**جدول ۴. خواص و ابعاد تیر با مقطع I شکل.**

**Table 4. Material and geometric properties of I beam.**

| خواص ماده | | ابعاد هندسی | |
|---|---|---|---|
| $E\,(\mathrm{GPa})$ | ۲۱۰ | طول $L\,(\mathrm{m})$ ، | ۴ |
| $G\,(\mathrm{GPa})$ | ۸۱ | طول وب تیر $b\,(\mathrm{m})$ ، | ۰/۲ |
| $I_p\,(\mathrm{kNs}^{۲})$ | ۰/۴۳۴۸۲۸ | ارتفاع جان تیر $c\,(\mathrm{m})$ ، | ۰/۲ |
| $J\,(\mathrm{m}^{۴})$ | $۲/۰۸\times۱۰^{-۷}$ | ضخامت وب و جان تیر $t\,(\mathrm{m})$ ، | ۰/۰۱ |
| $C_s\,(\mathrm{m}^{۶})$ | $۱/۲\times۱۰^{-۷}$ | چگالی $\rho\,(\mathrm{kg/m}^{۳})$ ، | ۸۰۰۲ |
| $I_n\,(\mathrm{m}^{۶})$ | $۱/۶۳۱\times۱۰^{-۷}$ | $S\,(\mathrm{m}^{۲})$ | $۵/۸\times۱۰^{-۳}$ |
| | | $\beta$ | ۰ |

$a_{۶۶} = EC_s, a_{۷۷} = GJ, B = EI_n$

**جدول ۵. فرکانس‌های اول و دوم پیچشی تیر I شکل.**

**Table 5. First and second torsional natural frequencies of I beam.**

| | $\omega_۱$ | $\omega_۲$ |
|---|---|---|
| مرجع [۵۳] | ۲۱۴/۲۳ | - |
| مطالعه حاضر | ۲۱۴/۳۶ | ۶۶۹/۶۴۸ |

بنابراین زاویه پیچش اولیه می‌تواند به عنوان ابزاری غیرفعال[1] برای ایجاد تشدید داخلی در سیستم به کار رود. این موضوع دارای اهمیت کاربردی بسیار زیادی در طراحی مبدل‌های اولتراسونیک است [۵۳].

در ادامه با استفاده از روش اغتشاشی مستقیم پدیده تشدید اصلی در ارتعاشات پیچشی تیر با شرایط مرزی دو سر تکیه‌گاه ساده بررسی می‌شود. با توجه به مطالب ذکر شده در بند قبل، می‌توان جواب مرتبه اول سیستم ،حل عمومی معادله (۲۸)، در تشدید اصلی مود $n$ام پیچشی را به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\phi_1 = A_n(T_2)\psi_n(\hat{z})e^{i\omega_n T_0} + cc. \tag{۸۴}$$

با طی فرآیندی مشابه روندی که در بخش ۴-۱ ذکر شد، معادله زیر به دست می‌آید.

$$2i\omega_n A_n^* + 8S_{nn}A_n^2\overline{A_n} - \frac{1}{2}f_n e^{i\sigma_2 T_1} = 0. \tag{۸۵}$$

برای تحلیل جواب‌های سیستم، $A_n$ در معادله فوق به صورت زیر جایگزین می‌شود.

$$A_n = \frac{1}{2}a_n e^{i\beta_n}. \tag{۸۶}$$

با بازنویسی معادله (۸۵) و جداکردن بخش‌های حقیقی و موهومی مربوطه، معادلات دامنه-فاز به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$a_n^* = \frac{1}{2}f_n \sin(\sigma_2 T_2 - \beta_n), \tag{۸۷}$$

$$a_n\beta_n^* = s_{nn}a_n^3 - \frac{1}{2}f_n \cos(\sigma_2 T_2 - \beta_n). \tag{۸۸}$$

که

$$8S_{nn} = -\int_0^1 \left[\frac{k_3}{k_1 L^2}\psi_n'^3\right]'\psi_n\,dx,\ \ s_{nn} = \frac{S_{nn}}{\omega_n}. \tag{۸۹}$$

با تعریف

$$\lambda_n = \sigma_2 T_2 - \beta_n, \tag{۹۰}$$

فرم خودگردان[2] معادلات (۸۷) و (۸۸) به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$a_n^* = \frac{1}{2}f_n \sin\lambda_n, \tag{۹۱}$$

$$a_n\lambda_n^* = \sigma_2 a_n - s_{nn}a_n^3 + \frac{1}{2}f_n\cos\lambda_n. \tag{۹۲}$$

معادلات (۹۱) و (۹۲) معادلات حاکم بر دامنه و فاز مود $n$ام هستند. همچنان که ملاحظه می‌شود دامنه و فاز حرکت تابعی از مقیاس‌های زمانی آرام $T_۲$ هستند. البته فاز و در نتیجه فرکانس حرکت تابعی از دامنه حرکت و در نتیجه تابعی از انرژی سیستم هستند.

1 Passive

2 Autonomus

نوسانات حالت پایا با شرط $a_n^* = \lambda_n^* = 0$ به دست می‌آیند. بنابراین برای به دست آوردن نقاط ثابت پاسخ سیستم معادله غیرخطی ذیل باید به صورت عددی حل شود.

$$\frac{1}{4} f_n^2 = \left(\sigma_2 - s_{nn} a_n^2\right)^2 a_n^2, \qquad (۹۳)$$

که معادله پاسخ-فرکانس حاکم بر پاسخ تک‌مودی سیستم است. آنچنانکه به صورت مفصل توسط محققین تشریح شده است، دامنه پاسخ مطابق معادله (۹۳) به ازای پاره‌ای از مقادیر متغیر دیتونینگ دارای سه مقدار (دو مقدار پایدار و یک مقدار ناپایدار) است. این پدیده علت اصلی پدیده پرش[1] در سیستم‌های غیرخطی است.

برای مطالعه پایداری جواب‌ها اجزای اغتشاشی به حل حالت پایای معادله (۹۳)، اضافه می‌شوند. بنابراین،

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n0} + a_{n1}, \\ \lambda_n &= \lambda_{n0} + \lambda_{n1}, \end{aligned} \qquad (۹۴)$$

که $\lambda_{n0}$ و $a_{n0}$ حل حالت پایای معادله (۹۳) هستند. با جاگذاری معادله (۹۴) در معادلات (۹۱) و (۹۲) و بسط عبارات مربوطه و جداکردن عبارات خطی بر حسب $a_{n1}, \lambda_{n1}$ معادلات زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} & a_{n1}' - \left(\frac{f_n}{2}\cos\lambda_{n0}\right)\lambda_{n1} = 0, \\ & \lambda_{n1}' + \left(2 s_{nn} a_{n0} + \frac{f_n}{2a_{n0}^2}\cos\lambda_{n0}\right) a_{n1} - \\ & \left(\frac{f_n}{2a_{n0}}\sin\lambda_{n0}\right)\lambda_{n1} = 0. \end{aligned} \qquad (۹۵)$$

پایداری با استخراج مقادیر ویژه ماتریس ضرائب معادله (۹۵) به دست می‌آید. برای پایداری مقادیر ویژه باید فاقد جزء حقیقی مثبت باشند. بنابراین پاسخ حالت پایا در صورتی ناپایدار خواهد بود که

$$\left(\sigma - s_{nn} a_{n0}^2\right)\left(\sigma - 3 s_{nn} a_{n0}^2\right) \prec 0. \qquad (۹۶)$$

## شرایط مرزی محوری غیرقابل جابجائی

مطابق مرجع [۴۳]، در این حالت $T_z$ در معادله (۶) باید با عبارت $\frac{k_{11}\hat{I}_p}{2L}\int_0^L \phi'^2 dz$ جایگزین شود. بنابراین متغیرهای معادله (۱۱) به صورت زیر اصلاح می‌شوند.

$$\begin{aligned} & k_1 = \frac{1}{I_p}\left(B\beta'^2 + a_{77} + 3B\beta'\phi_s' + \frac{3B}{2}\phi_s'^2\right), \\ & k_2 = \frac{3B}{I_p}\left(\beta' + \phi_s'\right), k_3 = \frac{3B}{2I_p}, \\ & k_4 = \frac{a_{66}}{I_p}, k_5 = \frac{k_{11}\hat{I}_p^2}{2LSI_p}. \end{aligned} \qquad (۹۷)$$

البته معادله (۱۳) نیز باید به صورت زیر اصلاح شود.

$$\begin{aligned} & \ddot{\phi} - \phi'' + \frac{k_4}{k_1 L^2}\phi'''' = \frac{k_2}{k_1 L}\phi'\phi'' + \\ & \frac{k_3}{k_1 L^2}\phi'^2\phi'' + \frac{k_5}{k_1}\int_0^1 \phi'^2 dz\, \phi'' + F\cos\Omega\hat{t}. \end{aligned} \qquad (۹۸)$$

ادامه فرآیند کاملاً مشابه بخش ۴-۲-۱- است با این تفاوت که در معادلات مربوطه $S_{nn}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

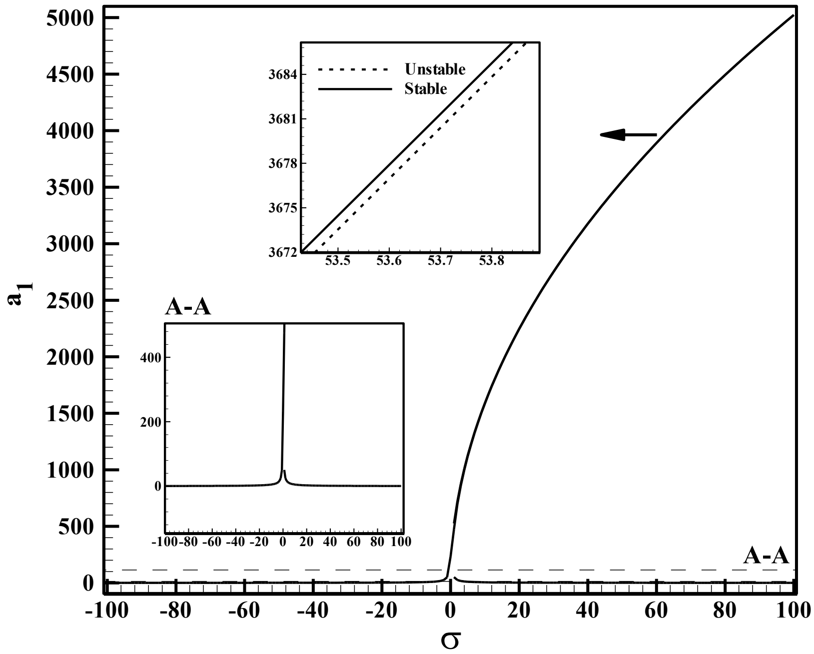
$$\begin{aligned} & 8S_{nn} = -\int_0^1\left[\frac{k_3}{k_1 L^2}\psi_n'^3 + \frac{k_5}{k_1}\int_0^1 \psi_n'^2 dz\,\psi_n'\right]'\psi_n\,dx, \\ & s_{nn} = \frac{S_{nn}}{\omega_n}. \end{aligned} \qquad (۹۹)$$

## نتایج عددی

در این بخش تغییرات دامنه بر حسب فرکانس در حالت تحریک تشدید مود اول برای تیر با شرایط مرزی دو سر تکیه‌گاه ساده در پیچش و دو سر آزاد محوری با خصوصیات مندرج در جدول ۴، مورد بحث قرار گرفته است. نمودار دامنه- فرکانس در شکل ۱۲ نشان داده شده است.

همچنان که ملاحظه می‌شود پدیده سه جوابی شدن سیستم در شکل ۱۲ ملاحظه می‌شود. در کاربرد مورد نظر جواب‌های مرتبه بالای سیستم اهمیت کاربردی ندارند. در هر حال سیستم از خود طبیعت سخت شونده را نشان می‌دهد.

1 Jump phenomenon




**شکل ۱۲. نمودار دامنه- فرکانس مود اول در حالت تشدید اصلی مود اول $f_2=10^{-3}$ و $\sigma_1=-40$ خطوط ممتد به همراه علامت دایره بیانگر نقاط پایدار از نوع مرکز و خط‌چین به همراه علامت مثلث بیانگر نقاط ناپایدار از نوع زینی است. بزرگنمائی بخش A-A نیز در تصویر اضافه شده است.**

**Fig. 12. First torsional mode amplitude versus frequency for primary resonance of the first mode of torsionally clamped-free beam and $f_2=10^{-3}$ and $\sigma_1=-40$, solid line with circle represent stable node; dashed line with triangle represent unstable saddle. Close-up of A-A is intersected.**

## ۶- نتیجه‌گیری

ارتعاشات غیرخطی واداشته پیچشی تیر در برابر تحریک تشدید اصلی مود اول و دوم مورد بررسی قرار گرفت. با درنظر گرفتن اثرات اعوجاج و قید اعوجاج و اثر ذوزنقه‌ای، معادلات غیرخطی حاکم بر ارتعاشات پیچشی تیر تحت نیروی محوری ارائه شد و معادلات بی‌بعد شده با استفاده از روش اغتشاشی مقیاس‌های چندگانه مستقیم حل شدند. تحریک تشدید اصلی مود اول و دوم در هر دو حالت وجود یا عدم وجود تشدید داخلی بین مود پیچشی اول و دوم مورد بررسی قرار گرفت.

- وجود نیروی محوری و زاویه پیچش اولیه در تیر منجر به پدیده واپیچش می‌شود. مدلسازی غیرخطی این پدیده انجام شد و نتایج مربوطه در مقایسه با تحقیقات دیگران مورد ارزیابی قرار گرفت که موید دقت مناسب نتایج است.
- ارتعاشات خطی پیچشی تیر به ازای شرایط مرزی مختلف به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار گرفت. در مورد تیرهای دارای سختی سن ونت نسبتاً کم در پیچش در مقایسه با سختی اعوجاج، نتایج بیانگر اهمیت تفکیک بین شرایط مرزی گیردار و ساده است. در حالی که در تیرهای دارای سختی سن ونت نسبتاً زیاد در پیچش در مقایسه با سختی اعوجاج، نتایج مربوط به شرایط مرزی گیردار و ساده نزدیک به هم است.
- با بررسی معادلات حاکم بر ارتعاشات پیچشی غیرخطی تیر مشاهده شد که تیر با شرایط مرزی دوسر تکیه‌گاه ساده در پیچش، علیرغم شمارنده بودن فرکانس طبیعی مود اول و دوم پیچشی فاقد پدیده تشدید داخلی است. در حالی که در تیر با شرایط مرزی یک‌سر آزاد و یک‌سر تکیه‌گاه ساده در پیچش، تشدید داخلی وجود دارد.
- وجود تشدید داخلی منجر به انتقال انرژی بین مودهای ارتعاشی پیچشی می‌گردد. در این حالت پاسخ مرتبه اول به ازای تحریک تشدید هریک از مودهای اول یا دوم، شامل هر دو مود ارتعاشی است.
- به واسطه وجود زوایه پیچش اولیه و نیروی محوری، در این حالت ترم‌های غیرخطی مرتبه دوم نیز در معادله حاکم وجود داشتند که منجر به ظهور هارمونیک‌های خاصی در پاسخ می‌شوند. نتایج نشان داد که این هارمونیک‌ها که پاسخ مرتبه دوم سیستم متأثر از آن‌ها هستند شامل دو برابر

فرکانس اول، دو برابر فرکانس دوم، مجموع فرکانس اول و دوم و تفاضل فرکانس‌های اول و دوم می‌شود.

- در مثال عددی معادلات دامنه–فاز سیستم برای به دست آوردن نقاط ثابت سیستم در تشدید اصلی مود اول و دوم حل شدند. نتایج بیانگر اهمیت ارتعاشات غیرخطی در زمینه مسائل مرتبط با پایداری بود. در این حالت، سیستم دارای دو یا پنج جواب بود که از حیث بزرگی مقدار دامنه به دو دسته جواب‌های مرتبه پائین و مرتبه بالا تقسیم می‌شوند. جواب‌های مرتبه پائین که به نوعی توسعه یافته جواب‌های سیستم خطی هستند، ناپایدارند. جواب‌های مرتبه بالا کاملاً متأثر از پدیده تشدید داخلی هستند و این طبیعت به صورت یکسان در تشدید اصلی مود اول و دوم خود را نشان می‌دهد. بررسی دقیق جواب‌ها، اندرکنش جواب‌های مختلف سیستم و مطالعه پایداری جواب‌ها به صورت تفصیلی ارائه شده است.
- قابلیت زاویه پیچش اولیه به عنوان عامل فعال‌ساز تشدید داخلی نشان داده شد. زاویه پیچش اولیه می‌تواند به عنوان ابزاری غیرفعال برای ایجاد تشدید داخلی در سیستم به کار رود. این موضوع دارای اهمیت کاربردی بسیار زیادی است.
- نتایج بیانگر طبیعت سخت‌شونده سیستم به ازای عبارات غیرخطی مربوط به کرنش وگنر است. در حالی که اثر ذوزنقه‌ای منجر به رفتار نرم‌شونده در سیستم می‌شود.

## ۷- فهرست علائم

### علائم انگلیسی

| | |
|---|---|
| $k_i$ | $i=1...4$ متغیر کمکی معرفی شده در معادله (۶) |
| $T_z$ | نیروی محوری، N |
| $\hat{I}_p$ | گشتاور دوم قطبی خط وسط مقطع معرفی شده در معادله (۲۴) مرجع [۴۳]، $m^3$ |
| $S$ | طول خط وسط مقطع معرفی شده در معادله (۲۳) مرجع [۴۳]، m |
| $B$ | کمیتی از سطح مقطع معرفی شده در معادله (۲۲) مرجع [۴۳]، $Nm^4$ |
| $a_{11}$ | سختی‌گون محوری تیر معرفی شده در معادله (۱۸) مرجع [۴۳]، N |
| $a_{17}$ | سختی‌گون پیچشی-محوری تیر معرفی شده در معادله (۲۰) مرجع [۴۳]، Nm |
| $a_{77}$ | سختی‌گون پیچشی تیر معرفی شده در معادله (۲۱) مرجع [۴۳]، $Nm^2$ |
| $a_{66}$ | سختی‌گون اعوجاجی تیر معرفی شده در معادله (۱۹) مرجع [۴۳]، $Nm^4$ |
| $I_p$ | عبارت جرمی کاهش یافته سطح مقطع تیر معرفی شده در معادله (۳۲) مرجع [۴۲]، $Ns^2$ |
| $T_i$ | $i=0,1,2$، مقیاس‌های زمانی معرفی شده در معادله (۲۰) مورد استفاده در حل اغتشاشی |
| $A_i$ | $i=1,2$ ، دامنه پاسخ مورد استفاده در حل اغتشاشی معرفی شده در معادله (۲۷) یا (۶۱) یا (۷۹) |
| $NST$ | عبارت‌هایی که منجر به جواب نامحدود در حل اغتشاشی نمی‌شوند. |
| $a_i$ | $i=1,2$، مورد استفاده در حل اغتشاشی معرفی شده در معادله (۳۸) یا (۶۳) یا (۸۱) |
| $p_i$ | $i=1,2$، مورد استفاده در حل اغتشاشی معرفی شده در معادله (۵۰) |
| $q_i$ | $i=1,2$، مورد استفاده در حل اغتشاشی معرفی شده در معادله (۵۰) |
| $v_i$ | $i=1,2$، مورد استفاده در حل اغتشاشی معرفی شده در معادله (۵۰) |
| $f_i$ | $i=1,2$، مورد استفاده در حل اغتشاشی معرفی شده در معادله (۳۷) |
| $L$ | طول تیر، m |
| $b$ | عرض تیر، m |
| $c$ | ارتفاع تیر، m |
| $t$ | ضخامت تیر، m |
| $E$ | مدول الاستیسیته، $N/m^2$ |
| $GJ$ | سختی پیچشی سن ونِنت تیر توپر، $Nm^2$ |
| $I_{pp}$ | کمیتی هندسی از سطح مقطع معرفی شده در معادله (۷۷)، $m^6$ |
| $C_s$ | کمیتی هندسی از سطح مقطع معرفی شده در پانویس جدول ۳، $m^6$ |
| $I_n$ | کمیتی هندسی از سطح مقطع معرفی شده در پانویس جدول ۳، $m^6$ |

### علائم یونانی

| | |
|---|---|
| $\Phi$ | تابعی از مکان معرفی شده در معادله (۲۴) |
| $\beta'$ | زاویه پیچش اولیه |
| $\Omega$ | فرکانس تحریک، rad/s |
| $\omega$ | فرکانس معرفی شده در معادله (۱۹)، rad/s |
| $\omega_i$ | فرکانس طبیعی $i$ام، rad/s |
| $\phi$ | پیچش الاستیک، rad |
| $\hat{\phi}$ | پیچش الاستیک کلی، rad |
| $\phi_s'$ | نرخ پیچش استاتیک اولیه، rad/m |
| $\delta_s$ | تابع دلتا کرونکر |
| $\delta_p$ | تابع دلتا کرونکر |
| $\sigma$ | متغیر تنظیم‌گر |
| $\sigma_i$ | متغیر تنظیم‌گر $i$ام |
| $\psi$ | شکل مود |
| $\psi_i$ | شکل مود $i$ام |
| $\Gamma$ | توابعی از مکان مورد استفاده در حل اغتشاشی معرفی شده در معادلات (۳۵) تا (۳۸) |
| $\Lambda_i$ | $i=۱,۲$، مورد استفاده در حل اغتشاشی معرفی شده در معادله (۴۲) |
| $\gamma_i$ | $i=۱,۲$، مورد استفاده در حل اغتشاشی معرفی شده در معادلات (۴۸) و (۵۳) |
| $\beta_i$ | $i=۱,۲$، مورد استفاده در حل اغتشاشی معرفی شده در معادله (۴۳) یا (۶۸) یا (۸۶) |
| $\beta_0$ | نرخ زاویه پیچش اولیه، rad/m |
| $\nu_i$ | $i=۱,۲$، مورد استفاده در حل اغتشاشی معرفی شده در معادله (۵۶) |
| $\rho$ | چگالی، $\mathrm{kg}/\mathrm{m}^۳$ |
| $\lambda_i$ | $i=۱,۲$، مورد استفاده در حل اغتشاشی معرفی شده در معادله (۷۳) |

### زیرنویس

| | |
|---|---|
| $s$ | مختصات سطح مقطع در راستای محیط |
| $n$ | مختصات سطح مقطع در راستای ضخامت |

### بالانویس

| | |
|---|---|
| * | مشتق نسبت به مقیاس‌های زمانی، مورد استفاده در حل اغتشاشی |
| ‾ | معرف مزدوج مختلط کمیت ها |

## منابع


[1] S. Sarkar, H. Bijl, Nonlinear aeroelastic behavior of an oscillating airfoil during stall-induced vibration, Journal of Fluids and Structures, 24(6) (2008) 757-777.

[2] C. Tran, D. Petot, Semi-empirical model for the dynamic stall of airfoils in view of the application to the calculation of responses of a helicopter blade in forward flight, (1980).

[3] J. Marshall, M. Imregun, A review of aeroelasticity methods with emphasis on turbomachinery applications, Journal of fluids and structures, 10(3) (1996) 237-267.

[4] D. Whitehead, Torsional flutter of unstalled cascade blades at zero deflection. R&M-3429, British ARC, (1966).

[5] M. Ohtsuka, Untwist of rotating blades, (1975).

[6] D.H. Hodges, Torsion of pretwisted beams due to axial loading, (1980).

[7] O. Bauchau, R. Loewy, P. Bryan, Approach to ideal twist distribution in tilt rotor VTOL blade designs, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, NY, RTC Report No. D-86-2, (1986).

[8] R. LAKE, M. NIXON, M. WILBUR, J. SINGLETON, P. MIRICK, A demonstration of passive blade twist control using extension-twistcoupling, in: 33rd Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, 1992, pp. 2468.

[9] P.V. Bayly, S.A. Metzler, A.J. Schaut, K.A. Young, Theory of torsional chatter in twist drills: model, stability analysis and composition to test, J. Manuf. Sci. Eng., 123(4) (2001) 552-561.

[10] D. Wajchman, K.-C. Liu, J. Friend, L. Yeo, An ultrasonic piezoelectric motor utilizing axial-torsional coupling in a pretwisted non-circular cross-sectioned prismatic beam, ieee transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control, 55(4) (2008) 832-840.

[11] D.H. Hodges, Nonlinear composite beam theory, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006.

[12] V. Vlasov, Thin-walled elastic beams, national science

[26] B. Rozmarynowski, C. Szymczak, Non-linear free torsional vibrations of thin-walled beams with bisymmetric cross-section, Journal of Sound and Vibration, 97(1) (1984) 145-152.

[27] M.M. Attard, Nonlinear shortening and bending effect under pure torque of thin-walled open beams, Thin-walled structures, 4(3) (1986) 165-177.

[28] M.M. Attard, Nonlinear theory of non-uniform torsion of thin-walled open beams, Thin-walled structures, 4(2) (1986) 101-134.

[29] N.S. Trahair, Non-Linear Elastic Non-Uniform Torsion (No. R828), (2003).

[30] G. Şakar, M. Sabuncu, Dynamic stability analysis of pretwisted aerofoil cross-section blade packets under rotating conditions, International Journal of Mechanical Sciences, 50(1) (2008) 1-13.

[31] W.-R. Chen, Parametric instability of spinning twisted Timoshenko beams under compressive axial pulsating loads, International journal of mechanical sciences, 52(9) (2010) 1167-1175.

[32] S.K. Sinha, K.E. Turner, Natural frequencies of a pre-twisted blade in a centrifugal force field, Journal of Sound and Vibration, 330(11) (2011) 2655-2681.

[33] C.M. Saravia, S.P. Machado, V.H. Cortínez, Free vibration and dynamic stability of rotating thin-walled composite beams, European Journal of Mechanics-A/Solids, 30(3) (2011) 432-441.

[34] B. Deepak, R. Ganguli, S. Gopalakrishnan, Dynamics of rotating composite beams: A comparative study between CNT reinforced polymer composite beams and laminated composite beams using spectral finite elements, International Journal of Mechanical Sciences, 64(1) (2012) 110-126.

[35] M. Yao, Y. Chen, W. Zhang, Nonlinear vibrations of blade with varying rotating speed, Nonlinear Dynamics, 68(4) (2012) 487-504.

[36] H.A. Salim, J.F. Davalos, Torsion of open and closed thin-walled laminated composite sections, Journal of composite materials, 39(6) (2005) 497-524.

[37] F. Mohri, N. Damil, M.P. Ferry, Large torsion finite

foundation, Washington, DC, USA, (1961).

[13] J. Buckley, The bifilar property of twisted strips, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 28(168) (1914) 778-787.

[14] H. Wagner, Torsion and buckling of open sections, 1936.

[15] J. Goodier, Elastic torsion in the presence of initial axial stress, (1950).

[16] J.C. Houbolt, G.W. Brooks, Differential equations of motion for combined flapwise bending, chordwise bending, and torsion of twisted nonuniform rotor blades, National Advisory Committee for Aeronautics, 1957.

[17] K. Washizu, Some considerations on a naturally curved and twisted slender beam, Journal of Mathematics and Physics, 43(1-4) (1964) 111-116.

[18] A. Rosen, The effect of initial twist on the torsional rigidity of beams—another point of view, (1980).

[19] A. Rosen, Theoretical and experimental investigation of the nonlinear torsion and extension of initially twisted bars, (1983).

[20] D.H. Hodges, D. Harursampath, V.V. Volovoi, C.E. Cesnik, Non-classical effects in non-linear analysis of pretwisted anisotropic strips, International Journal of Non-Linear Mechanics, 34(2) (1999) 259-277.

[21] D. Harursampath, D.H. Hodges, Asymptotic analysis of the non-linear behavior of long anisotropic tubes, International journal of non-linear mechanics, 34(6) (1999) 1003-1018.

[22] B. Popescu, D.H. Hodges, Asymptotic treatment of the trapeze effect in finite element cross-sectional analysis of composite beams, International Journal of Non-Linear Mechanics, 34(4) (1999) 709-721.

[23] M. Cullimore, The shortening effect, a nonlinear feature of pure torsion, Engineering structures, (1949) 153-164.

[24] M. Gregory, Elastic Torsion of Members of Thin Open Cross Sections, Department of Civil Engineering, University of Tasmania, 1961.

[25] W. Tso, A. Ghobarah, Non-linear non-uniform torsion of thin-walled beams, International Journal of Mechanical Sciences, 13(12) (1971) 1039-1047.

element model for thin-walled beams, Computers & structures, 86(7-8) (2008) 671-683.

[38] N.-I. Kim, D.K. Shin, Torsional analysis of thin-walled composite beams with single-and double-celled sections, Engineering structures, 31(7) (2009) 1509-1521.

[39] K.-C. Liu, J. Friend, L. Yeo, The axial–torsional vibration of pretwisted beams, Journal of Sound and Vibration, 321(1-2) (2009) 115-136.

[40] E. Sapountzakis, V. Tsipiras, Nonlinear nonuniform torsional vibrations of bars by the boundary element method, Journal of Sound and Vibration, 329(10) (2010) 1853-1874.

[41] P. Prasad, D. Harursampath, Closed-form nonlinear sectional analysis of pretwisted anisotropic beam with multiple delaminations, (2012).

[42] S. Sina, H. Haddadpour, H. Navazi, Nonlinear free vibrations of thin-walled beams in torsion, Acta Mechanica, 223(10) (2012) 2135-2151.

[43] S. Sina, H. Haddadpour, Axial–torsional vibrations of rotating pretwisted thin walled composite beams, International Journal of Mechanical Sciences, 80 (2014) 93-101.

[44] J. Sicard, J. Sirohi, Modeling of the large torsional deformation of an extremely flexible rotor in hover, AIAA journal, 52(8) (2014) 1604-1615.

[45] J.F. Sicard, J. Sirohi, An analytical investigation of the trapeze effect acting on a thin flexible ribbon, Journal of Applied Mechanics, 81(12) (2014) 121007.

[46] S. Han, O.A. Bauchau, On the nonlinear extension-twist coupling of beams, European Journal of Mechanics-A/Solids, 72 (2018) 111-119.

[47] D. Hoffmeyer, J. Høgsberg, Damping of torsional vibrations in thin-walled beams by viscous bimoments, Mechanics of Advanced Materials and Structures, 28(3) (2021) 308-320.

[48] A.H. Nayfeh, B. Balachandran, Modal interactions in dynamical and structural systems, (1989).

[49] A.H. Nayfeh, D.T. Mook, Nonlinear oscillations, John Wiley & Sons, 2008.

[50] D. Sado, Energy transfer in two-degree-of-freedom vibrating systems–a survey, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 31(1) (1993) 151-173.

[51] M. Ruijgrok, Studies in parametric and autoparametric resonance, Universiteit Utrecht, Faculteit Wiskunde en Informatica, 1995.

[52] E. Sapountzakis, V. Tsipiras, Shear deformable bars of doubly symmetrical cross section under nonlinear nonuniform torsional vibrations—application to torsional postbuckling configurations and primary resonance excitations, Nonlinear Dynamics, 62(4) (2010) 967-987.

[53] H.D. Al-Budairi, Design and analysis of ultrasonic horns operating in longitudinal and torsional vibration, University of Glasgow, 2012.

**چگونه به این مقاله ارجاع دهیم**

*S. Sina, H. Haddadpour, Nonlinear Torsional Vibrations of Axially Loaded Pretwisted Beam with Primary Resonance Excitations , Amirkabir J. Mech Eng., 54(6) (2022) 1271-1302.*

**DOI:** 10.22060/mej.2022.20718.7301

این صفحه عمداً خالی است