نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۴، شماره ۶، سال ۱۴۰۱، صفحات ۱۴۲۳ تا ۱۴۴۲
DOI: 10.22060/mej.2022.20773.7310

بررسی عددی رفتار الاستیک- پلاستیک و آسیب استخوان کورتیکال با اعمال یک مدل آسیب جدید

مسعود نصیری[۱]، مجتبی ذوالفقاری[۱*]، وحید طهماسبی[۲]، حامد حیدری[۳]

۱-دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اراک، اراک، ایران
۲- دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه صنعتی اراک، اراک، ایران
۳- دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۴۰۰/۰۸/۱۹
بازنگری: ۱۴۰۱/۰۲/۰۲
پذیرش: ۱۴۰۱/۰۳/۱۰
ارائه آنلاین: ۱۴۰۱/۰۴/۰۳

کلمات کلیدی:
استخوان کورتیکال
الاستیسیته
پلاستیسیته
آسیب
جراحی ارتوپدی

خلاصه: به‌دلیل نیازهایی که در جراحی‌های ارتوپدی وجود دارد، رفتار مکانیکی استخوان کورتیکال در بارگذاری سیکلی و نرخ کرنش فیزیولوژیک، مورد بررسی قرار گرفته است. تأکید برروی توسعه قانون ساختاری است که بتواند رفتار حین بارگذاری، باربرداری و بارگذاری مجدد که در آزمایش‌ها مشاهده شده را ایجاد کند. این مدل‌ها با ترکیب المان‌های رئولوژیک و اصول انرژی فرمول‌بندی خواهند شد. ابتدا دو مدل یک‌بعدی مستقل از نرخ کرنش فرمول‌بندی شده، یکی دارای یک متغیر آسیب و دیگری دارای دو متغیر آسیب مجزا در کشش و فشار است، مورد بررسی قرار گرفته و با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی، ضرایب هر مدل به‌دست آمده است. با مقایسه نتایج شبیه‌سازی و داده‌های آزمایشگاهی، اصلاح لازم برروی مدل‌ها صورت گرفته است. درنهایت با ترکیب معیار تسلیم ناهمسانگرد برسلر- پیستر و مدل یک‌بعدی مستقل از نرخ همراه دو متغیر آسیب، مدل سه‌بعدی متناظر حاصل شد. این مدل سه‌بعدی در قالب روش اجزاء محدود صریح پیاده‌سازی شده و نتیجه آن با نتایج شبیه‌سازی مدل یک‌بعدی و داده‌های تجربی سازگاری قابل قبولی نشان داد. این مدل سه‌بعدی مناسب شبیه‌سازی هندسه‌های پیچیده خواهد بود. ضریب‌تعیین برای مدل‌های یک‌بعدی ، RI ، $RI \pm$ ، RI ، $RI \pm$ اصلاح شده و مدل سه بعدی به ترتیب مقادیر ۰/۸۸۲۱۷۴، ۰/۹۶۵۶۶۵، ۰/۹۹۵۵۰۸، ۰/۹۹۶۲۷۹ و ۰/۹۸۴۸۶۶ حاصل شده است.

۱- مقدمه

بی‌نقص بودن اسکلت[۱] به‌عنوان عضو حامل بار و حفاظت کننده از اعضاء حیاتی بدن در برابر عوامل خارجی، برای سلامتی انسان بسیار ضروری است. استخوان‌بندی به‌عنوان عضو حامل بار در فعالیت‌های فیزیکی و حفاظت کننده از اعضاء حیاتی بدن در برابر عوامل خارجی کاربرد دارد. استخوان براساس ظاهر ماکروسکوپی[۲] به دو نوع کورتیکال[۳] و ترابکولار[۴] تقسیم‌بندی شده است. تفاوت این دو نوع بافت از روی میزان تخلخل مشخص می‌شود. استخوان کورتیکال میزان تخلخل حدود ۵-۱۰ درصد است و تقریباً ۸۰ درصد جرم اسکلت را تشکیل می‌دهد. از طرف دیگر استخوان ترابکولار دارای میزان تخلخل بین ۴۵-۹۵ درصد است و تقریباً ۲۰ درصد جرم اسکلت را تشکیل داده است [۱].

بیشترین نواحی شکستگی‌ها به‌ترتیب مربوط به کفل، ساعد، و مهره کمر است. از این میان شکستگی در مهره کمر بیشتر باعث افزایش خطر مرگ‌ومیر می‌شود. برای پیش‌بینی این نوع شکست‌ها، قانون ساختاری مورد نیاز است که شامل اثر نرخ[۵] کرنش و آسیب[۶] در بارگذاری بالاتر از حد الاستیک[۷] باشد. در مواردی که روش‌های محافظه‌کارانه مثل فیزیوتراپی[۸] برای درمان شکستگی مهره کمر کارایی نداشته باشد، از روش تزریق ماده زیستی[۹] به درون مهره شکسته برای تثبیت کردن و استحکام بخشیدن به آن استفاده می‌شود [۲]. برای چنین موادی سازگاری زیستی، زمان سفت شدن و خواص مکانیکی مشابه بافت استخوان به‌منظور کارایی بهتر و جلوگیری از آسیب‌های بعدی مهم است و باید به‌دقت معین شوند. در تمام موارد ذکرشده وجود یک قانون ساختاری برای بافت استخوان نیاز است که توانایی توصیف

1 Skeleton
2 Macroscopic
3 Cortical
4 Trabecular

5 Rate
6 Damage
7 Elastic
8 Physical therapy
9 Biomaterial

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: m-zolfaghari@araku.ac.ir

رفتار بافت استخوان، تحت بارگذاری سیکلی[1] ، بالاتر از حد الاستیک و همراه نرخ کرنش متوسط را داشته باشد.

رفتار مکانیکی استخوان با توجه به بار مکانیکی که در معرض آن قرار دارد، متفاوت است و تأثیر پاسخ آن عمدتاً به چگونگی اعمال بار بستگی دارد. بنابراین، برای ارزیابی استحکام آن، اندازه‌گیری شاخص‌های کنترل‌کننده کیفیت استخوان مورد نیاز است [۳]. در تحقیقی گارسیا [۴] با هدف برنامه‌های کاربردی در جراحی‌های ارتوپدی، فک و صورت، قوانین ساختاری الاستیک- پلاستیک و آسیب مستقل از نرخ و وابسته به نرخ کرنش فیزیولوژیکی در بارگذاری سیکلی برای استخوان کورتیکال را محاسبه نموده است. او برای تدوین قوانین ساختاری از توالی بارگذاری، باربرداری و بارگذاری مجدد[2] طی فرایند ازمایشگاهی تست کشش استفاده کرده است. او در پژوهشی دیگر، قانون ساختاری سه بعدی توصیف کننده رفتار مکانیکی ماکروسکوپی[3] الاستیک- پلاستیک و آسیب سه‌بعدی مستقل از نرخ کرنش مربوط به بافت استخوان، را با توجه به تجزیه و تحلیل سیستم‌های ایمپلنت- استخوان، پیشنهاد کرد. مدل پیشنهادی یک فرمول‌بندی ریاضی را در چارچوب مواد استاندارد تعمیم یافته[4] ایجاد و برای سه مد تکامل متمایز مواد که جنبه‌های الاستیک، پلاستیک و آسیب نزدیک به‌هم دارند، بررسی کرد [۵]. گارسیا و همکاران [۶] در ادامه پژوهش‌های خود، یک قانون ساختاری یک‌بعدی مستقل از نرخ کرنش برای استخوان فشرده[5]، به‌جهت شبیه‌سازی تجمع آسیب[6] در هنگام بارگذاری کششی یا فشاری، ارائه دادند. مارتینا و همکاران [۷] براساس داده‌های تجربی، یک مدل ساختاری یک‌بعدی ویسکوالاستیک پلاستیک- آسیب را توسعه داده‌اند. این مدل می‌تواند رفتار غیرخطی بافت استخوان کورتیکال تحت شرایط بارگذاری خزش-بازیابی را پیش‌بینی کرده و با استفاده از زیرروال‌های کاربر در نرم‌افزار اجزای محدود اباکوس پیاده‌سازی شده است. لی و همکاران [۸] یک مدل ساختاری الاستیک- پلاستیکی همسانگرد عرضی[7] وابسته به نرخ کرنش برای توصیف رفتار استخوان اسفنجی[8] ایجاد کردند. تست‌های فشاری با نرخ کرنش از ۰/۰۱ تا ۱۰ برثانیه در جهت محوری و شعاعی انجام شد. در منحنی‌های تنش-کرنش بدست آمده قسمت عمده را مرحله الاستیک خطی و مرحله

1 Cyclic
2 Loading, unloading, and reloading
3 Macroscopic
4 Generalized standard materials
5 Compact
6 Damage accumulation
7 Transverse
8 Cancellous

پلاستیک قسمت کوچکی را قبل از شکستگی، نشان می‌دهد، و مدل توسعه یافته از طریق زیرروال مواد کاربر[9] یومت[10] در نرم‌افزار ال اس-دیانا[11] پیاده‌سازی شده است. در تحقیقی دیگر لی و همکاران [۹] یک مدل الاستو ویسکوپلاستیک برای بیان رفتار استخوان ترابکولار غیرخطی تحت بارهای فشاری ارائه دادند. این مدل نیز به‌عنوان یک زیرروال ماده تعریف شده توسط کاربر در کد تجزیه و تحلیل المان محدود تعریف شد و نتایج شبیه‌سازی با نتایج تست‌های فشار برروی استخوان ترابکولار مقایسه و مدل ساختاری پیشنهادی، روش محاسباتی و کتابخانه مواد تأیید شد. آزمایش نفوذ[12]، تست دیگری است که پاولیکوفسکی و همکاران [۱۰] با استفاده از آن مدل میکروساختاری جدید برای استخوان ترابکولار انسان با خاصیت ویسکوالاستیک غیرخطی، را استخراج کردند. مدل ساختاری با استفاده از زیربرنامه یومت در نرم‌افزار المان محدود اباکوس پیاده‌سازی شد، در نهایت، رفتار ویسکوالاستیک پیش‌بینی شده بافت توسط مدل ساختاری پیشنهادی به‌خوبی با پاسخ واقعی استخوان ترابکولار مطابقت داشت. در یکی از تحقیقات اخیر، رفتار تجربی و عددی تست خزش سیکلی و بازیابی[13] استخوان کورتیکال گاو مورد بررسی قرار گرفت. لوورنیچ و همکاران [۷] مدل ساختاری ویسکوالاستیک، ویسکوپلاستیک و آسیب یک‌بعدی را توسعه داده و یک الگوریتم کارآمد برای انتگرال‌گیری مدل ساختاری پیشنهادی ماده با استفاده از زیرروال مواد کاربر در نرم‌افزار اجزای محدود اباکوس استخراج و پیاده‌سازی شد. الگوریتم محاسبات یک توانایی خوب برای توصیف رفتار کششی استخوان کورتیکال گاو برای شرایط مکانیکی خاص را نشان می‌دهد. در مطالعه‌ای دیگر، میرزاعلی و همکاران [۱۱] با هدف شناسایی برهم‌کنش آسیب پیوسته بین حالت‌های بارگذاری کششی و فشاری در ساختارهای ایمپلنت- استخوان، یک مدل ساختاری یک بعدی جدید را ارائه دادند، که نشان می‌دهد که چگونه آسیب جمع شده[14] در یک حالت بارگذاری[15] بر رفتار مکانیکی در حالت بارگذاری دیگر تأثیر می‌گذارد. ان جی و همکاران [۱۲] روند شکست فشاری استخوان کورتیکال براساس یک مدل آسیب را بررسی نمودند. آن‌ها با استفاده از یک مدل پلاستیک آسیب ترد، پاسخ ساختاری و روند شکست استخوان کورتیکال را با استفاده از چندین تست فشاری ارزیابی کردند. نتایج شبیه‌سازی المان محدود نشان داد که آسیب فشاری در منطقه

9 User material subroutine
10 UMAT
11 LS-DYNA
12 Indentation
13 Recovery
14 Accumulated
15 Loading mode

مرکزی که در آن حداکثر کرنش پلاستیک معادل[1] محاسبه می‌شود، آغاز شده و منتشر می‌شود، که هم‌زمان با تخریب[2] سختی فشاری و به‌دنبال آن مقدار زیادی از اتلاف انرژی کرنش است. در یکی از مطالعات اخیر، رنگ و لو [۱۳] یک مدل ساختاری نیمه تجربی برای توصیف رفتار پس از تسلیم استخوان براساس روابط تجربی مدول الاستیک، کرنش پلاستیک و پاسخ‌های ویسکوالاستیک استخوان با کرنش اعمال شده پیشنهاد کردند. در این مدل، یک تابع نمایی برای توصیف افت مدول (انباشت آسیب) با افزایش کرنش اعمال شد. علاوه‌براین، یک تابع قانون توانی برای توصیف افزایش تغییرشکل پلاستیک با تجمع آسیب استفاده شد. در نهایت، مدل ویسکوالاستیک خطی برای توصیف رفتار ویسکوالاستیک استخوان به‌عنوان تابع زمان و نرخ بارگذاری پیشنهاد شد. برای تأیید مدل، تمام ثابت‌های ماده مورد نیاز برای روابط تجربی بین مدول یانگ، تغییرشکل پلاستیک، تغییرشکل ویسکوالاستیک و تغییرشکل اعمال‌شده با استفاده از یک پروتکل بارگذاری پیش‌رونده جدید روی استخوان کورتیکال انسان به‌دست آمد. سپس، منحنی تنش-کرنش یکنواخت به‌دست‌آمده از نمونه‌های استخوان، مدل ساختاری پیشنهادی برازش داده شد و ثابت‌های ماده پیش‌بینی و با نمونه‌های تجربی مقایسه شد. تجزیه و تحلیل نشان داد که مدل ساختاری پیشنهادی در ارزیابی رفتار استخوان پس از تسلیم دقیق است. در پژوهشی دیگر، پاولیکوفسکی و بارسز [۱۴] یک قانون ساختاری براساس مطالعات تجربی انجام شده برروی نمونه‌های استخوان کورتیکال گاو را استخراج نمودند. بافت استخوان به‌عنوان یک ماده ویسکوالاستیک غیرخطی درنظر گرفته شده و قانون ساختاری از تابع انرژی کرنش فرضی[3] گرفته شده است. ثابت‌های الاستیک و رئولوژیکی براساس تست‌های ازمایشگاهی، در سه نرخ کرنش مختلف مشخص شدند. به‌منظور اعتبارسنجی عددی مدل ساختاری، تانسور مرتبه چهارم سختی با استفاده از زیربرنامه کاربر یومت به نرم‌افزار اجزای محدود اباکوس معرفی شد. نتایج نشان می‌دهد مدل ساختاری فرموله شده در مدل‌سازی رفتار فشاری استخوان تحت دامنه‌های مختلف بار بسیار مفید است. شویدرزیک و زیست [۱۵] یک مدل ساختاری آسیب الاستیک ویسکوپلاستیک ناهمسانگرد جدید برای استخوان با استفاده از یک معیار تسلیم بیضوی خارج از مرکز[4] و سخت شوندگی ایزوتروپی غیرخطی[5] ارائه دادند. یک الگوریتم عددی در حلگر نرم‌افزار المان محدود آباکوس به‌عنوان یک زیربرنامه کاربر یومت، توسعه داده و اجرا شده است. رماچ و همکاران [۱۶] مدل سخت شدن ناهمسانگرد را در شبیه‌سازی اجزای محدود نانوتورفتگی استخوان کورتیکال برای پیش‌بینی رفتار مکانیکی استفاده کردند. مدل جانسون-کوک به‌عنوان مدل ساختاری انتخاب شده و برای شناسایی ثابت‌های مجهول مواد از مدل‌سازی اجزا محدود در ترکیب با بهینه‌سازی عددی استفاده شده و سپس حل‌های اجزا محدود با نتایج تجربی مقایسه شدند که تطابق خوبی بین منحنی‌های عددی با منحنی‌های بارگذاری هدف پیدا شده است. پراساناونکاتسان و پاندیتوان [۱۷] مدل کاوپر-سیموندز، مدل جانسون-کوک و ترکیب مدل جانسون-کوک و کاوپر-سایموندز در نرخ‌های کرنش مختلف را برای شبیه‌سازی برش استخوان مورد استفاده قرار دادند. نمونه‌های تهیه‌شده با استفاده از دو استخوان ران عقب برداشت‌شده از یک گاو سه و نیم ساله با نرخ‌های مختلف کرنش مورد بررسی قرار گرفتند. مطالعه نسبی انجام شده در میان تنش‌های پیش‌بینی‌شده از این مدل‌ها نشان داده که میانگین درصد خطای مطلق با استفاده از مدل کاپر-سیموندز ۱۰/۲۹،۹۱/۴۱ و ۱۱/۱۱ درصد و با استفاده از مدل جانسون کوک ۲/۰۳، ۷/۱۹ و ۳/۶۲ درصد به‌ترتیب برای نرخ‌های کرنش ۰/۰۰۰۱، ۰/۰۰۱ و ۱ برثانیه بوده است. با این حال، ترکیب مدل جانسون-کوک همراه با مدل کاوپر-سیموندز تنش را با حداکثر ۲/۰۳ درصد میانگین درصد مطلق خطا پیش‌بینی کرده است. لی و همکاران [۱۸] از روش میله فشاری هاپکینسون برای آزمایش استخوان کورتیکال گاو، جهت به‌دست آوردن منحنی‌های تنش-کرنش وابسته به نرخ کرنش استفاده کردند. یک رابطه ساختاری تحت تأثیر نرخ کرنش و خواص ویسکوالاستیک استفاده شده است. در این مدل، الاستیک خطی با اجزای ویسکوالاستیک غیرخطی برای توصیف وابستگی غیرخطی به نرخ کرنش ترکیب شده است. از نظر بافت‌شناسی، بار بیش از حد استخوان در کشش و فشار منجربه تمایز اندازه، توزیع و جهت‌گیری ترک می‌شود که طی بارگذارهای ترکیبی مختلف با یکدیگر تعامل دارند، مدل‌های رئولوژیکی می‌تواند این روند را توصیف کرده و منحنی‌های تنش-کرنش تجربی را با واقع‌گرایی بی‌سابقه تولید کنند. یک مدل مستقل از نرخ کرنش، توسط زیست و ولفرام [۱۹] برای بافت استخوان به‌همراه برهم‌کنش آسیب میکروساختار بین حالت کششی و فشاری استخراج کردند. بررسی آن‌ها نشان داد تجمع میکرو آسیب باعث تخریب[6] مدول الاستیک و کاهش استحکام استخوان خواهد شد. مطابقت کیفی مدل با آزمایشات تجربی امکان بررسی بیومکانیکی استخوان‌ها و

1 Maximum equivalent plastic
2 Degradation
3 Postulated
4 Eccentric elliptical
5 Nonlinear isotropic hardening

6 Degrades

سیستم‌های ایمپلنت- استخوان را در معرض بارهای سیکلی در تنش و فشار را فراهم می‌کند. کرایم و همکاران [۳] با رویکرد محاسباتی، رفتار مکانیکی استخوان کورتیکال براساس یک مدل ساختاری را بررسی نموده و ناهمسانگردی، ویسکوپلاستیک بودن و آسیب را در قانون رفتار مواد وارد کرده و تکامل آسیب براساس بارگذاری اعمال شده را رسم نمودند. این مدل محاسباتی جدید درک بهتری از پارامترهای اصلی مؤثر بر رفتار استخوان را فراهم می‌کند.

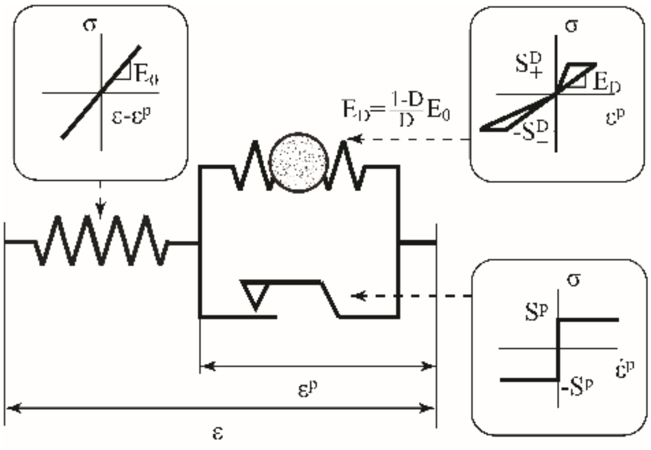
مکانیزم تکامل آسیب همراه با معیار تسلیم به‌عنوان یکی از موضوعات نامشخص در تجزیه و تحلیل شکست مواد استخوان کورتیکال درنظر گرفته شده است. در این پژوهش، فرمول‌بندی دو مدل یک‌بعدی مستقل از نرخ کرنش برای استخوان کورتیکال بیان خواهد شد. یکی از آن‌ها شامل دو متغیر آسیب مجزا در کشش و فشار و دیگری تنها دارای یک متغیر آسیب هستند. بنابراین هدف اولیه محاسبه ضرایب مربوط به هر مدل توسط تطابق با داده‌های آزمایشگاهی بوده، سپس نتایج عددی هر مدل با داده‌های تجربی مقایسه می‌شود. در نهایت، با انتخاب معیار تسلیم مناسب سه‌بعدی سازی مدل یک‌بعدی به‌روشی جدید انجام می‌گیرد و از مدل سه‌بعدی به‌دست‌آمده برای شبیه‌سازی یک مورد مطالعاتی استفاده می‌شود.

۲- مدل رئولوژیکی[۱] یک‌بعدی و تعریف متغیرها

هدف این مدل رئولوژیکی توصیف رفتار مکانیکی ماکروسکوپی مشاهده شده از بافت استخوان در شرایط بارگذاری چرخه‌ای است. با توجه به داده‌های تجربی حاصل از بارگذاری سیکلی [۴]، می‌توان سه مد[۲] اصلی تغییرشکل برای بافت استخوان درنظر گرفت، ناحیه اول مربوط به نمودار این داده‌ها، الاستیک خالص با سختی الاستیک است، ناحیه دوم، مد آسیب، که مربوط به تولید و باز شدن ریز ترک‌ها است که منجربه کاهش مدول و تجمع کرنش می‌شود. ناحیه سوم، مد پلاستیک، به‌دلیل اصطکاک ناشی از لغزش ریز ترک‌ها است که منجربه کرنش‌های ماندگار[۳] شده، اما موجب افزایش آسیب نمی‌شود.

در ابتدا، دو قانون ساختاری الاستیک- پلاستیک و آسیب یک‌بعدی و مستقل از نرخ بررسی می‌شود. که اولی تنها دارای یک متغیر آسیب است و با علامت RI نشان داده می‌شود. دومی دارای دو متغیر آسیب مجزا در حالت کشش و فشار است که با علامت $\pm RI$ نشان داده می‌شود. آرایش

1 Rheological
2 Mode
3 residual



شکل ۱. آرایش المان‌های رئولوژیک یک‌بعدی برای مدل‌های مستقل از نرخ [۴]

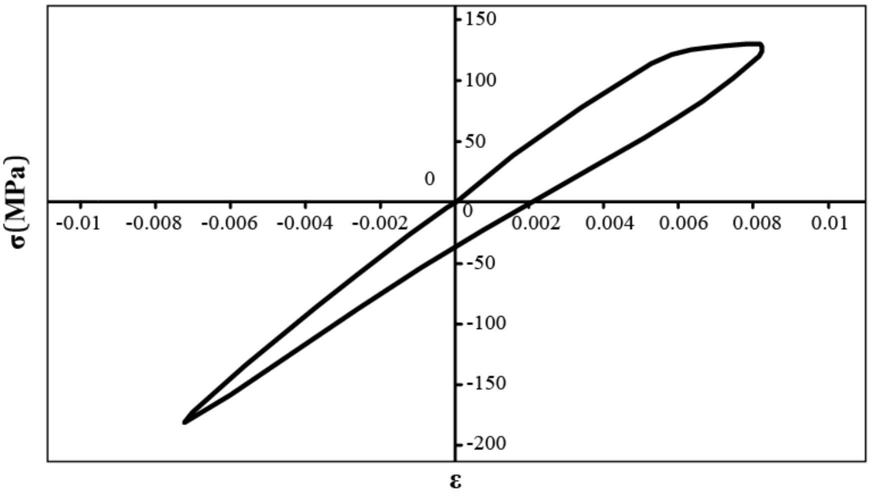
Fig. 1. Arrangement of one-dimensional rheological elements for rate-independent models [4]

رئولوژیکی تمام مدل‌های یک بعدی از اتصال سری یک فنر الاستیک اصلی با المان آسیب تشکیل شده که المان آسیب خود از اتصال موازی یک فنر الاستیک آسیب‌پذیر فرعی با مانع پلاستیک تشکیل شده است. فنر الاستیک فرعی دارای دو تنش آستانه آسیب مجزا در کشش و فشار است. فنر الاستیک فرعی در مدل‌های RI و $\pm RI$، متحمل آسیب مستقل از نرخ است، شکل ۱.

۲- ۱- مدل RI

معرفی حداقل دو متغیر حالت درونی برای درنظر گرفتن پیشینه ماده و فرآیندهای اتلاف، ضروری است [۴]. مقدار آسیب به‌وجود آمده در ماده توسط متغیر آسیب D بیان می‌شود که نشان‌دهنده کاهش سختی ماده است. $D=0$ نشانگر ماده سالم و $D\to 0$ نشانگر ماده آسیب‌دیده به‌صورت کامل است. مدل RI توسط سه متغیر مستقل کرنش ε، کرنش پلاستیک ε^p و $0\leq D<1$ معین می‌شود.

مدول الاستیک استخوان کورتیکال سالم با $E_{.}>۰$ نشان داده می‌شود و توسط فنر الاستیک خطی اصلی مدل می‌شود. همچنین سه تابع وابسته به آسیب استفاده می‌شود. اولی تابع سخت‌شوندگی پلاستیک $S^p(D)\geq 0$ است که برای نشان دادن افزایش تنش تسلیم پلاستیک نسبت به افزایش آسیب، تعریف می‌شود. دو تابع دیگر، توابع سخت‌شوندگی آسیب $S_+^D(D)>۰$ و $S_-^D(D)>۰$ هستند که به‌ترتیب برای نشان دادن تغییر تنش آستانه آسیب در کشش و فشار نسبت به تغییر آسیب، تعریف



شکل ۲. منحنی سیکلی تنش-کرنش در نرخ کرنش فیزیولوژیکی مربوط به بافت استخوان کورتیکال [۵]

Fig. 2. Stress-strain cycle curve at physiological strain rate related to cortical bone tissue [5]

می‌شوند[۴].

$$S^{p}(D)=\chi^{p}\left(1-\exp(-lD)\right) \qquad (۱)$$

$$S^{D}_{\pm}(D)=S^{D}_{0\pm}\left(1+\chi^{D}\left(1-\exp(-kD)\right)\right) \qquad (۲)$$

$X^{P}\geq ۰$ و $l>۰$ ضرایب سخت‌شوندگی پلاستیک هستند. $S^{D}_{-}>۰$ ، S^{D}_{+}به‌ترتیب تنش‌های اولیه آستانه آسیب در کشش و فشار هستند. X^{D} و $k>۰$ ضرایب سخت‌شوندگی آسیب هستند. بنابراین شش ثابت به‌طور کامل مدل RI را برای استخوان کورتیکال مشخص می‌کنند.

۲-۱-۱- مدل $RI\pm$

در این مدل از دو متغیر آسیب استفاده می‌شود و به نسبت مدل RI، دارای پیچیدگی بیشتری است. وضعیت آسیب توسط دو متغیر آسیب کششی D_{+} و آسیب فشاری D_{-} توصیف می‌شود. آرایش المان‌های رئولوژیک مدل $RI\pm$ همانند مدل RI است، شکل ۱. با توجه به ناهمسانگرد بودن سخت‌شوندگی در این مدل، دو تابع سخت‌شوندگی $S^{p}_{+}(D_{-})$ و $S^{p}_{-}(D_{+})$به‌جای $S^{p}(D)$ تعریف می‌شوند [۴]:

$$S^{p}_{+}(D_{-})=\chi^{p}\left(1-\exp(-lD_{-})\right) \qquad (۳)$$

$$S^{p}_{-}(D_{+})=\chi^{p}\left(1-\exp(-lD_{+})\right) \qquad (۴)$$

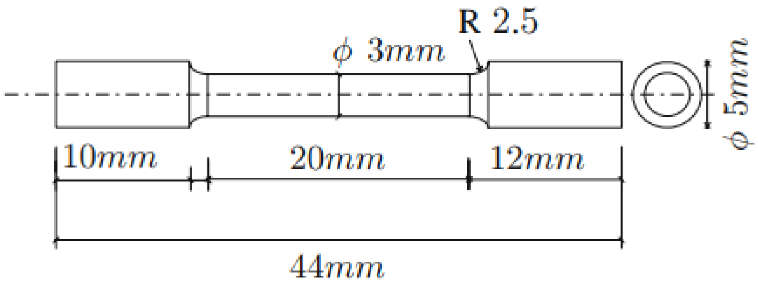
توابع سخت‌شوندگی آسیب نیز مشابه قبل تعریف می‌شود [۴]:

$$S^{D}_{\pm}(D_{+},D_{-})=S^{D}_{0\pm}\left(1+\chi^{D}\left(1-\exp\left(-k\left(D_{+}+D_{-}\right)\right)\right)\right) \qquad (۵)$$

۳- معین‌سازی ضرایب مدل‌های یک‌بعدی و شبیه‌سازی عددی

جهت به‌دست آوردن ضرایب هر مدل برای استخوان کورتیکال نیاز به داده‌های تجربی خواهد بود. این داده‌ها باید شامل مقادیر تنش و کرنش در یک سیکل کششی- فشاری همراه نرخ کرنش مشخص باشند، تا بتوان تمام ضرایب مدل را مشخص کرد. در این‌جا از داده‌هایی که در کارهای قبلی به‌دست آمده استفاده شده است [۵]. این داده‌ها که در ابتدا با نمودار در دسترس بودند، توسط نرم‌افزار گت‌دیتا[1] رقومی‌سازی شده و نتیجه در شکل ۲ آمده است. منحنی تنش-کرنش در شکل ۲ مربوط به نرخ کرنش $۳/۴\times۱۰^{-۳}$ برثانیه است. نمونه تحت آزمایش، دمبلی شکل با مقطع دایره‌ای به قطر ۳ میلی‌متر و طول ۲۰ میلی‌متر می‌باشد، شکل ۳.

1 GetData



شکل ۳. هندسه نمونه کشش استخوان کورتیکال گاو

Fig. 3. Sample geometry of bovine cortical bone tension

جدول ۱. ضرایب مدل RI و $RI\pm$

Table 1. Coefficients of models RI and $RI\pm$

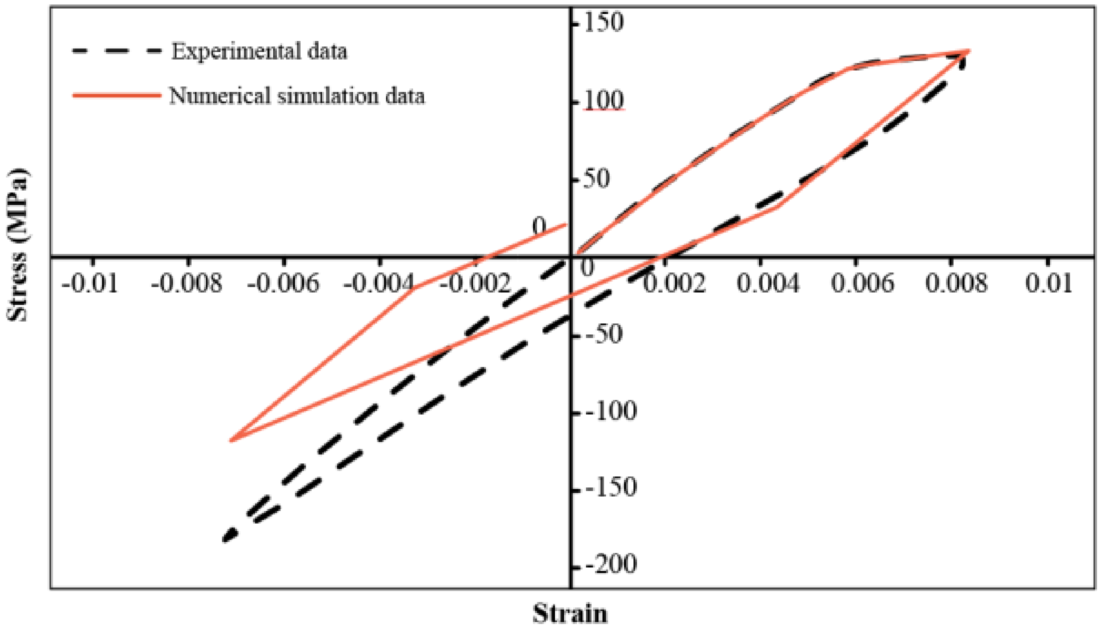
ضرایب	واحد	مدل RI	مدل $RI\pm$
$E_.$	مگاپاسکال	۲۵۰۰۰	۲۵۰۰۰
$S_{.+}^{D}$	مگاپاسکال	۴	۲
$S_{.-}^{D}$	مگاپاسکال	۹/۶	۳/۸
χ^{P}	مگاپاسکال	۵۲/۹	۷۹/۹
χ^{D}	-	۱۹/۸	۶۵
k	-	۱۵/۳	۱۵
l	-	۶/۱	۲۱/۹

به‌منظور اجرا عددی هر یک از مدل‌های یک‌بعدی، الگوریتم عددی هر یک را با استفاده از برنامه‌نویسی به زبان فرترن[1]، پیاده‌سازی شده است. با قرار دادن برنامه‌ها در حلقه‌های بهینه‌سازی و استفاده از روش حداقل مربعات[2] برای نزدیک کردن نتایج عددی به داده‌های تجربی، ضرایب مدل‌ها به‌دست آمده است. با استفاده از این روش و قسمت بارگذاری کششی داده‌های تجربی، ضرایب $S_{.+}^{D}$، X^{D} و k و با قسمت باربرداری داده‌ها، ضرایب X^{P} و l معین خواهند شد و به‌وسیله داده‌های مربوط به بارگذاری فشاری ضریب $S_{.-}^{D}$ مشخص شده است. لازم به‌ذکر است که ضریب مدول یانگ $E_.$ به‌صورت منفرد و فقط با اندازه‌گیری شیب قسمت اولیه و خطی داده‌های تجربی به‌دست آمده است. ضرایب به‌دست‌آمده در جدول ۱ فهرست شده‌اند.

نتایج شبیه‌سازی عددی مدل‌های یک‌بعدی RI و $RI\pm$ در مقایسه با داده‌های تجربی، به‌ترتیب در شکل‌های ۴ و ۵ رسم شده‌اند و ضریب تعیین[3] به‌ترتیب برای مدل یک‌بعدی RI و $RI\pm$ مقادیر ۰/۸۸۲۱۷۴ و ۰/۹۶۵۶۶۵ بدست آمده و علت آن درنظر گرفتن اثر سرعت در المان پلاستیک و در المان آسیب است.

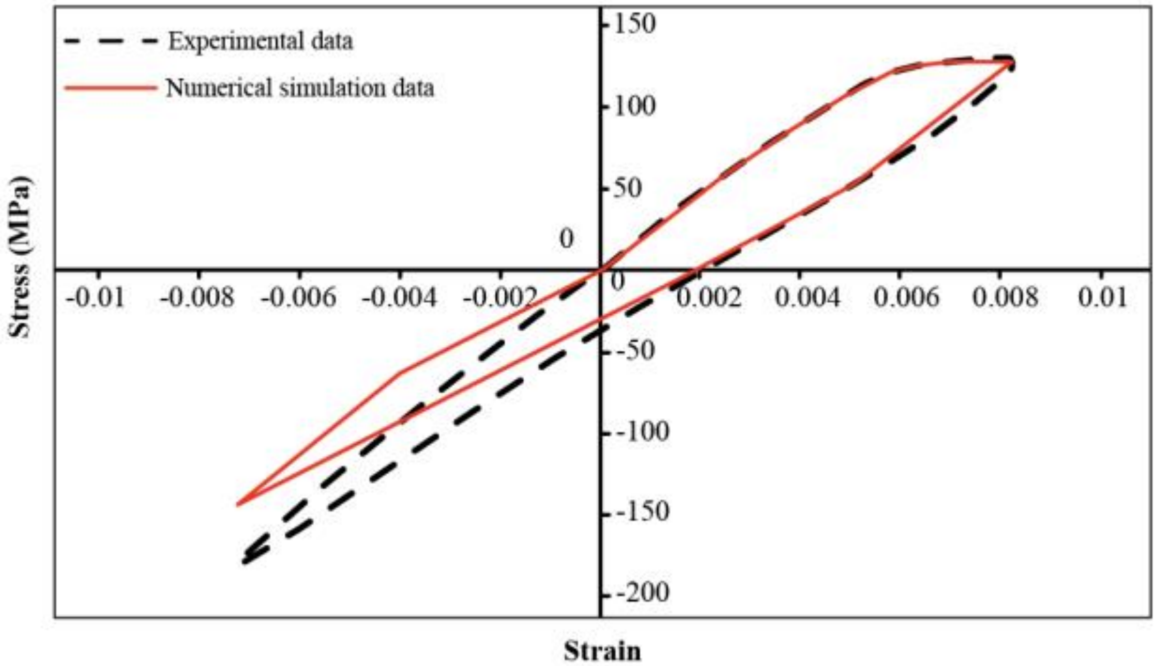
با مقایسه داده‌های تجربی و نتایج اجرای عددی مدل‌ها، مشخص شده است که مدل با احتساب دو متغیر مجزا آسیب در کشش و فشار، دارای دقت بیشتری در پیش‌بینی نتایج تجربی خواهد بود. حال که ضرایب مدل‌ها در

1 Fortran
2 Least squares
3 Coefficient of determination



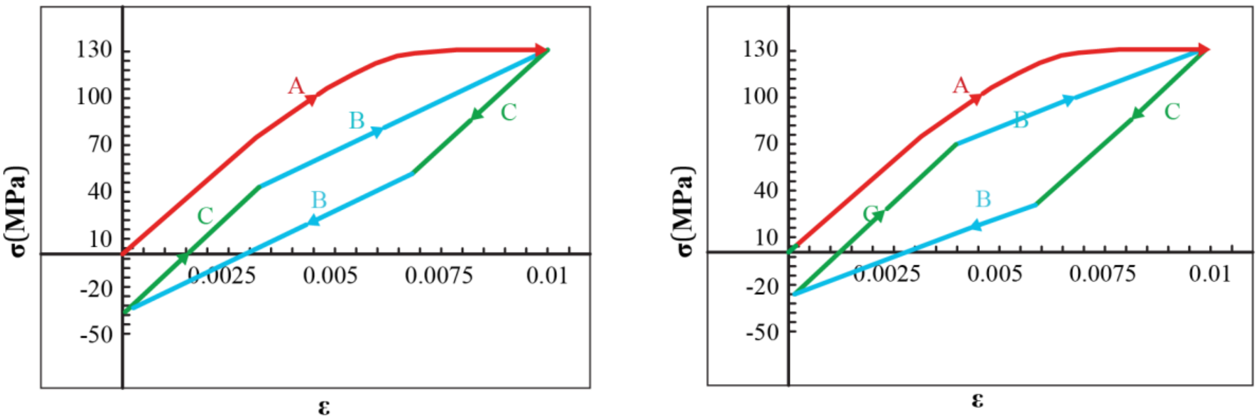
شکل ۴. منحنی تنش-کرنش مدل RI در مقایسه با آزمایش

Fig. 4. Model RI stress-strain curve compared to the experiment



شکل ۵. منحنی تنش-کرنش مدل $RI\pm$ در مقایسه با آزمایش

Fig. 5. Model $RI\pm$ stress-strain curve compared to the experiment



(a) (b)

شکل ۶. منحنی سیکلی تنش-کرنش مربوط به مدل (b) و مدل (a) به همراه سه مُد تغییرشکل: مُد الاستیک (C)، مُد آسیب (A) و مُد پلاستیک (B)

Fig. 6. The stress-strain cyclic curve of Model (b) and Model (a) with three deformation modes: elastic mode (C), damage mode (A) and plastic mode (B)

دسترس هستند، مدل‌ها را برای بررسی ویژگی منحصربه‌فرد بافت استخوان، می‌توان شبیه‌سازی عددی کرد. با شبیه‌سازی دو مدل RI و $RI\pm$ در بارگذاری سیکلی کرنش کنترل با دامنه کرنش ۰/۰۱، این ویژگی که ناشی از انتخاب دو متغیر آسیب مجزا است، مشخص خواهد شد.

همان‌طورکه در شکل ۶ مشهود است، قسمت مُد پلاستیک بارگذاری مجدد در منحنی سیکلی تنش-کرنش مربوط به مدل $RI\pm$، در امتداد مبدأ مختصات قرار دارد اما مدل RI فاقد این ویژگی مختص بافت استخوان است. دلیل این تفاوت در تعداد متغیرهای آسیب و تابعیت سخت‌شوندگی پلاستیک به متغیرهای آسیب است. در مدل RI با افزایش پارامتر آسیب، سخت‌شوندگی پلاستیک در دو جهت کشش و فشار افزایش پیدا می‌کند ولی در مدل $RI\pm$ با افزایش پارامتر آسیب کششی، سخت‌شوندگی پلاستیک فقط در جهت عکس آن یعنی فشار، افزایش می‌یابد و بلعکس با افزایش پارامتر آسیب فشاری، سخت‌شوندگی پلاستیک فقط در جهت عکس آن یعنی کشش، افزایش می‌یابد.

۴- اصلاح مدل‌های یک‌بعدی

از نمودارهای ارائه‌شده در بخش دوم نتیجه‌گیری می‌شود که مدل‌ها در قسمت کششی، قابلیت نسبتاً مناسبی در پیش‌بینی داده‌های تجربی را دارند اما در قسمت فشاری این‌طور نیست. در قسمت فشاری شیب منحنی مدل با شیب منحنی آزمایش سازگاری ندارد. به این دلیل که در مدل‌های ارائه‌شده، بازیابی مدول یانگ در انتقال از کشش به فشار، در نظر گرفته نشده است. این بازیابی در مدول یانگ در مرحله فشار به‌دلیل بسته شدن ترک‌های ایجادشده در مرحله کشش است. این اثر را می‌توان با استفاده از یک ضریب اصلاحی در تعریف مدول یانگ ماده آسیب‌دیده در نظر گرفت [۴]:

$$w=\begin{cases}1 & \text{if } \varepsilon\geq 0\\ w_- & \text{if } \varepsilon<0\end{cases} \tag{۶}$$

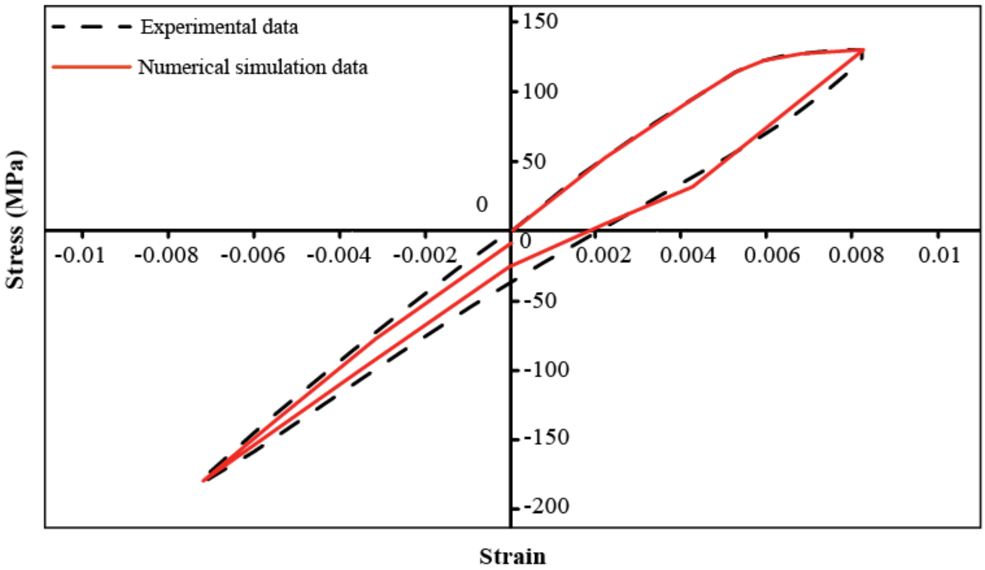
$$E_D=\frac{1-wD}{wD}E_0 \tag{۷}$$

که w ضریب اصلاح مدول یانگ ماده آسیب‌دیده و E_D مدول یانگ آسیب‌دیده است. با درنظر گرفتن معادلات (۶) و (۷) در فرمول‌بندی و الگوریتم عددی مدل‌ها، روند قبلی تکرار خواهد شد. ضریب w_- به‌همان ترتیبی که ضرایب قبلی معین شدند، به‌دست می‌آید. با این تفاوت که با وارد شدن ضریب w به فرمول‌بندی‌ها، مقدار بهینه‌شده S_-^D نیز تغییر می‌کند. ضرایب به‌دست‌آمده برای مدل‌های اصلاح‌شده در جدول ۲ آمده است.

جدول ۲. ضرایب اصلاحی مدل RI و $RI\pm$

Table 2. Correction coefficients of models RI and $RI\pm$

ضرایب	واحد	مدل RI	مدل $RI\pm$
$S_{.-}^{D}$	مگاپاسکال	۸/۹	۳/۶
w_{-}	-	۰/۳	۰/۵



شکل ۷. منحنی تنش-کرنش مدل RI اصلاح‌شده در مقایسه با آزمایش

Fig. 7. Modified stress-strain curve of Model RI compared to the experiment

نتایج شبیه‌سازی عددی مدل‌های RI و $RI\pm$ اصلاح‌شده در مقایسه با داده‌های تجربی، به‌ترتیب در شکل ۷ و شکل ۸ رسم شده‌اند، و ضریب تعیین به‌ترتیب برای مدل یک‌بعدی RI و $RI\pm$ اصلاح شده مقادیر ۰/۹۹۵۵۰۸ و ۰/۹۹۶۲۷۹ بدست آمده و علت آن درنظر گرفتن اثر سرعت در المان پلاستیک و در المان آسیب است.

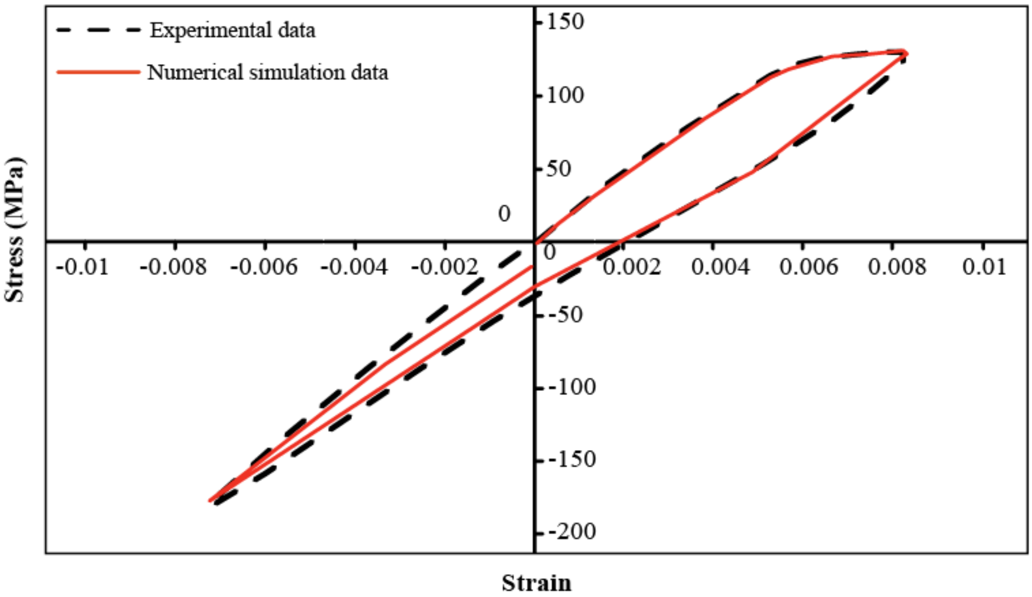
۵- سه بعد سازی و کاربرد

به‌جهت کاربرد، مدل یک‌بعدی آسیب مستقل از نرخ $RI\pm$ به سه‌بعد تعمیم داده خواهد شد. این سه‌بعدی سازی، برمبنای سه متغیر حالت درونی است. کرنش پلاستیک اسکالر ε^p با تانسور مرتبه دوم متقارن ε^p جایگزین می‌شود و برای سادگی متغیرهای آسیب D_+ و D_- به‌صورت اسکالر باقی می‌مانند. بنابراین در این مدل، آسیب همسانگرد خواهد بود. به این معنا که اثر آسیب بر تمام ضرایب تانسور مرتبه چهارم سختی الاستیک به‌صورت یکسان است.

از معیار تسلیم برسلر- پیستر[1] برای استفاده کاربردی از مدل استفاده می‌شود. این معیار برای بیان تابع تسلیمی که دارای استحکام متفاوت در کشش و فشار است، تحت بارگذاری چند محوره استفاده می‌شود [۲۰]. این معیار، معیاری تک ضابطه‌ای و بدون نقطه تکینی و دارای جمله‌ای برای نشان دادن تسلیم در وضعیت تنش هیدرواستاتیک فشاری است [۲۰]:

$$Y\left(\sigma,S_{+},S_{-}\right)=\sqrt{3J_2}-c_1I_1-c_2I_1^2-c_3\pounds 0 \qquad (۸)$$

1 Bresler-Pister yield criterion



شکل ۸. منحنی تنش-کرنش مدل $RI\pm$ اصلاح‌شده در مقایسه با آزمایش

Fig. 8. Modified stress-strain curve of Model $RI\pm$ compared to the experiment

$$c_1 = \left(\frac{S_+ - S_-}{S_+ + S_-}\right)\left(\frac{4S_b^2 - S_b\left(S_+ + S_-\right) + S_+S_-}{4S_b^2 + 2S_b\left(S_+ - S_-\right) - S_+S_-}\right) \quad (۹)$$

$$c_2 = \left(\frac{1}{S_+ + S_-}\right)\left(\frac{S_b\left(3S_+ + S_-\right) - 2S_+S_-}{4S_b^2 + 2S_b\left(S_+ - S_-\right) - S_+S_-}\right) \quad (۱۰)$$

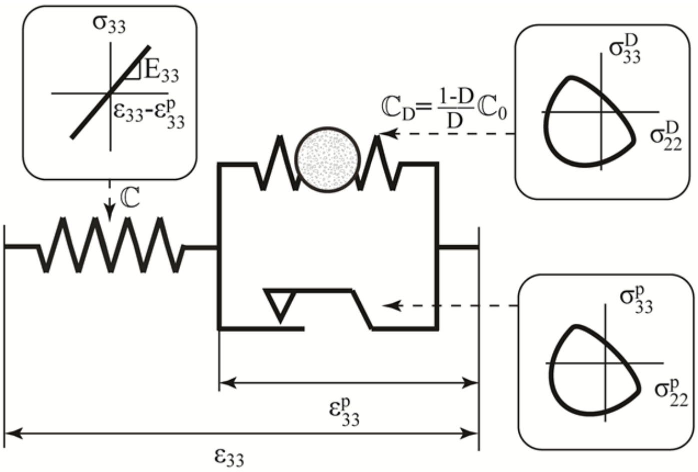
$$c_3 = S_- + c_1 S_- - c_2 S_-^2 \quad (۱۱)$$

که I_1 و J_2 به‌ترتیب ناورداهای اصلی اول و دوم تنش هستند. c_1 ، c_2 و c_3 ضرایب معیار می‌باشند که توسط استحکام‌های کششی S_+ ، فشاری S_- و فشاری دومحوره S_b معین می‌شوند. با توجه به معیارهای استفاده‌شده در کارهای قبلی انتخاب $S_b = \frac{S_-}{\sqrt{۲}}$، مناسب به‌نظر می‌رسد [۲۱]. این معیار پیاده‌سازی الگوریتم عددی قانون جریان را ساده می‌کند. همچنین تسلیم در این معیار، علاوه‌بر تنش نرمال کششی و تنش برشی به تنش نرمال فشاری نیز وابسته است. بنابراین این معیار در وضعیت تنش هیدرواستاتیک فشاری، ماده را دارای مقاومت محدود فرض می‌کند. درنتیجه معیار تسلیم برسلر- پیستر می‌تواند معیار مناسبی برای بیان آستانه تسلیم پلاستیک و آسیب استخوان در سه‌بعدی سازی مدل $RI\pm$ باشد.

شکل ۹ نحوه اتصال المان‌های رئولوژیک سه‌بعدی برای مدل الاستیک- پلاستیک و آسیب سه‌بعدی را نشان می‌دهد. در این مدل، سختی الاستیک فنر خطی اصلی برابر با تانسور مرتبه چهارم $\mathbb{C}$ است. در قیاس با مدل یک‌بعدی RI، سختی فنر آسیب‌پذیر برابر با $\mathbb{C}_D = \frac{۱-D}{D}\mathbb{C}$ خواهد بود.

مدل رئولوژیک توسط سه متغیر مستقل ، $\boldsymbol{\varepsilon}$، $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ و D توصیف می‌شود. همانند حالت یک‌بعدی از افراز معمول کرنش به دو بخش الاستیک و پلاستیک $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$ استفاده می‌شود. با فرض الاستیسیته همسانگرد، تانسور سختی توسط دو ضریب مشخص می‌گردد، معادلات (۱۲) و (۱۳):

$$C = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \quad (۱۲)$$



شکل ۹. آرایش المان‌های رئولوژیک قانون ساختاری سه‌بعدی برای استخوان کورتیکال

Fig. 9. Arrangement of rheological elements of three-dimensional structural law for cortical bone

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (۱۳)$$

که λ و μ ضرایب لامه[1] و ν نسبت پواسون[2] است.

انرژی پتانسیل آزاد مدل رئولوژیک برابر است با [۴]:

$$\boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,\boldsymbol{D}\right)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^p\right):\mathbb{C}:\left(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^p\right)+\frac{1}{2}\frac{1-\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{\varepsilon}^p: & \text{if } \boldsymbol{D}>0\\ \mathbb{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^p+\boldsymbol{I}_{[0,1)}\left(\boldsymbol{D}\right) & \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}:\mathbb{C}:\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{I}_{\{0\}}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^p\right) & \text{if } \boldsymbol{D}=0\end{cases} \qquad (۱۴)$$

$\boldsymbol{I}_{\{\cdot\}}$ تابع نشانگر[3]. قوانین حالتی که از انرژی پتانسیل آزاد به‌دست می‌آیند، برابر است با [۴]:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\Psi}}=\partial_{\varepsilon}\boldsymbol{\Psi}=\begin{cases}\mathbb{C}:\left(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^p\right) & \text{if } 0<\boldsymbol{D}<1\\ \mathbb{C}:\boldsymbol{\varepsilon} & \text{if } \boldsymbol{D}=0\end{cases} \qquad (۱۵)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\Psi}^{p}=-\partial_{\varepsilon^p}\Psi=\begin{cases}\mathbb{C}:\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{1}{\boldsymbol{D}}\mathbb{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^p & \text{if } 0<\boldsymbol{D}<1\\ \text{Sym} & \text{if } \boldsymbol{D}=0\end{cases} \qquad (۱۶)$$

$$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{\Psi}}^{\boldsymbol{D}}=-\partial_{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{\Psi}=\begin{cases}\frac{1}{2\boldsymbol{D}^2}\boldsymbol{\varepsilon}^p:\mathbb{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^p & \text{if } 0<\boldsymbol{D}<1\\ \left[0,+\infty\right) & \text{if } \boldsymbol{D}=0\end{cases} \qquad (۱۷)$$

$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{\Theta}}^{\boldsymbol{D}}$ انرژی آسیب، Sym نشان‌دهنده فضای تانسور متقارن مرتبه دوم است. تنش تعریف‌شده در فنر آسیب‌پذیر، برابر [۴]:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{D}}=\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\Psi}}-\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\Psi}}^{p}=\begin{cases}\mathbb{C}_{\mathrm{D}}:\boldsymbol{\varepsilon}^p & \text{if } 0<\boldsymbol{D}<1\\ \text{Sym} & \text{if } \boldsymbol{D}=0\end{cases} \qquad (۱۸)$$

دوگان انرژی پتانسیل آزاد که از طریق تبدیل لژاندر- فنکل به‌دست می‌آید [۴]:

1 Lamé parameters
2 Poisson’s ratio
3 Indicator function

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Psi}^*\left(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}^p,\boldsymbol{W}^D\right)=\\&\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\sigma}^p:\boldsymbol{\varepsilon}^p-\boldsymbol{W}^D\boldsymbol{D}-\boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,\boldsymbol{D}\right)\\&\boldsymbol{\Psi}^*\left(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}^p,\boldsymbol{W}^D\right)=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}:\mathbb{S}:\end{aligned} \tag{۱۹}$$

با $\mathbb{S}=\mathbb{C}^{-1}$، داریم [۴]:

$$\boldsymbol{\sigma}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^p\right):\mathbb{S}:\left(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^p\right)}-\sqrt{2\boldsymbol{W}^D}\right)^2 \tag{۲۰}$$

که $\partial_{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\Psi}^*=\boldsymbol{\varepsilon}$ ، $-\partial_{\boldsymbol{\sigma}^p}\boldsymbol{\Psi}^*=\boldsymbol{\varepsilon}^p$ و $-\partial_{W^D}\boldsymbol{\Psi}^*=\boldsymbol{D}$ می‌باشد.
پتانسیل اتلاف به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۴]:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Phi}\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p,\dot{\boldsymbol{D}};\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,\boldsymbol{D}\right)=\\&\boldsymbol{\Phi}^p\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p;\boldsymbol{D}\right)+\boldsymbol{\Phi}^D\left(\dot{\boldsymbol{D}};\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,\boldsymbol{D}\right)\end{aligned} \tag{۲۱}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^p\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p;\boldsymbol{D}\right)=\boldsymbol{Y}^p\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p,\boldsymbol{D}\right) \tag{۲۲}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^D\left(\dot{\boldsymbol{D}};\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,\boldsymbol{D}\right)=\boldsymbol{f}\left(\dot{\boldsymbol{D}};\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,\boldsymbol{D}\right)+\boldsymbol{I}_{[0,+\infty)}\left(\dot{\boldsymbol{D}}\right) \tag{۲۳}$$

$$\phi\left(\dot{\boldsymbol{D}};\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,\boldsymbol{D}\right)=\boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{D}\right)\dot{\boldsymbol{D}} \tag{۲۴}$$

$$\boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{D}\right)=\frac{\boldsymbol{Y}^{D2}\left(\boldsymbol{D}\right)}{2\left(1-\boldsymbol{D}\right)^2} \tag{۲۵}$$

که $\boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{D}\right)$ انرژی آستانه آسیب، $\boldsymbol{Y}^p\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p,\boldsymbol{D}\right)$ تابع تسلیم پلاستیک مطابق با معیار برسلر- پیستر در فضای نرخ کرنش است.

قوانین مکمل یا معادلات ساختاری که از پتانسیل اتلاف به‌دست می‌آیند [۴]:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\Phi}}^p=-\partial_{\dot{\varepsilon}^p}\boldsymbol{\Phi}=\begin{cases}\boldsymbol{N}^p\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\right) & \text{if } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p>0\\\left\{\boldsymbol{\sigma}^p|\boldsymbol{Y}^p\left(\boldsymbol{\sigma}^p,\boldsymbol{D}\right)<0\right\} & \text{if } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p=0\end{cases} \tag{۲۶}$$

$$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{\Phi}}^D=-\partial_{\dot{D}}\boldsymbol{\Phi}=\begin{cases}\varnothing & \text{if } \dot{\boldsymbol{D}}<0\\\left(-\infty,\phi'\left(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,\boldsymbol{D}\right)\right] & \text{if } \dot{\boldsymbol{D}}=0\\\phi'\left(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,\boldsymbol{D}\right) & \text{if } \dot{\boldsymbol{D}}>0\end{cases} \tag{۲۷}$$

که ϕ' مشتق ϕ نسبت به $\dot{\boldsymbol{D}}$ است، بنابراین برابر با $\boldsymbol{h}_{\pm}$ می‌شود.
دوگان پتانسیل اتلاف نیز به همان روش مشابه، با تبدیل لژاندر- فنکل به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Phi}^*\left(\boldsymbol{\sigma}^p,\boldsymbol{W}^D;\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,\boldsymbol{D}\right)=\\&\boldsymbol{\sigma}^p:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p+\boldsymbol{W}^D\dot{\boldsymbol{D}}-\boldsymbol{\Phi}\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p,\dot{\boldsymbol{D}};\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,\boldsymbol{D}\right)\rightarrow\\&\boldsymbol{\Phi}^*\left(\boldsymbol{\sigma}^p,\boldsymbol{W}^D;\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,\boldsymbol{D}\right)=\\&\boldsymbol{I}_{\left[-S_-^p(\boldsymbol{D}),S_+^p(\boldsymbol{D})\right]}\left(\boldsymbol{Y}^p\left(\boldsymbol{\sigma}^p,\boldsymbol{D}\right)\right)+\boldsymbol{I}_{\left(-\infty,\phi'\left(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,\boldsymbol{D}\right)\right]}\left(\boldsymbol{W}^D\right)\end{aligned} \tag{۲۸}$$

قوانین جریان مربوط به متغیرهای درونی $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ و $\boldsymbol{D}$، توسط مشتق‌گیری از پتانسیل اتلاف به‌دست می‌آیند:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p=\partial_{\sigma_{\Phi}^p}\boldsymbol{\Phi}^*=\begin{cases}0 & \text{if } \boldsymbol{Y}^p\left(\boldsymbol{\sigma}^p,\boldsymbol{D}\right)<0\\\boldsymbol{\Lambda}^p\boldsymbol{N}^p\left(\boldsymbol{\sigma}^p\right) & \text{if } \boldsymbol{Y}^p\left(\boldsymbol{\sigma}^p,\boldsymbol{D}\right)=0\\\varnothing & \text{if } \boldsymbol{Y}^p\left(\boldsymbol{\sigma}^p,\boldsymbol{D}\right)>0\end{cases} \tag{۲۹}$$

$$\dot{\boldsymbol{D}}=-\partial_{W^D}\boldsymbol{\Phi}^*=\begin{cases}0 & \text{if } \boldsymbol{W}^D<\phi'\left(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,\boldsymbol{D}\right)\\\left[0,+\infty\right) & \text{if } \boldsymbol{W}^D=\phi'\left(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,\boldsymbol{D}\right)\\\varnothing & \text{if } \boldsymbol{W}^D>\phi'\left(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,\boldsymbol{D}\right)\end{cases} \tag{۳۰}$$

که $\boldsymbol{\Lambda}^p$ ضریب لاگرانژ پلاستیسیته و $\boldsymbol{N}^p$ عمود برون‌سو بر سطح تسلیم پلاستیک در فضای تنش است. تابع تسلیم پلاستیک را می‌توان

به‌صورت معادله (۳۱) تعریف کرد:

$$Y^p\left(\sigma^p, D\right) = \sqrt{\sigma^p : \mathbb{H} : \sigma^p} - c_1 I : \sigma^p - c_2 \sigma^p : \mathbb{L} : \sigma^p - c_3 \quad (۳۱)$$

$\mathbb{H}$ و $\mathbb{L}$ تانسور مرتبه چهارم معیار تسلیم برسلر- پیستر است. بنابراین قانون جریان در معادله (۲۹) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^p = \Lambda^p N^p\left(\sigma^p\right), \quad N^p\left(\sigma^p\right) = \dfrac{\partial Y^p}{\partial \sigma^p}\left(\sigma^p\right) \\ Y^p\left(\sigma^p, D\right) \le 0, \quad dY^p\left(\sigma^p, D\right) = 0 \end{cases} \quad (۳۲)$$

معادلات خط اول، قانون جریان مربوطه است که جهت نرخ کرنش پلاستیک را به‌عنوان عمود بر سطح دامنه الاستیک معرفی می‌کند. نامعادلات خط دوم، شرایط سازگاری و تسلیم پلاستیک هستند.

با استفاده از معادله (۲۷) می‌توان دامنه غیرآسیب را به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{aligned} &Y^D\left(\sigma^D, \varepsilon, \varepsilon^p, D\right) = \\ &\sqrt{\sigma^D : \mathbb{H} : \sigma^D} - c_1 I : \sigma^D - c_2 \sigma^D : \mathbb{L} : \sigma^D - c_3 \end{aligned} \quad (۳۳)$$

برای اجرای مدل در برنامه آنالیز اجزا محدود باید الگوریتم عددی افزایش متغیرهای مدل در هر گام محاسباتی بیان شود. در شروع هر گام محاسباتی، وضعیت مدل توسط سه پارامتر $\varepsilon_.$، $\varepsilon^p_.$ و $D_.$ مشخص می‌شود. برای وقتی‌که $D_. \neq ۰$ است، متغیرهای مزدوج $\sigma_.$، $\sigma^p_.$ و $W^D_.$ از قوانین حالت به‌دست خواهند آمد. در ابتدا گام محاسباتی باید هر دو معیار پلاستیک و آسیب برآورده شوند، یعنی:

$$\begin{aligned} &Y^p\left(\sigma^p_0, D_0\right) \le 0 \quad , \\ &Y^D\left(W^D_0, \varepsilon_0, \varepsilon^p_0, D_0\right) \le 0 \end{aligned} \quad (۳۴)$$

با داشتن کرنش کل ε در انتهای گام محاسباتی، متغیرهای مزدوج امتحانی $\sigma_T = \sigma\left(\varepsilon, \varepsilon^p_.\right)$، $\sigma^p_T = \sigma^p\left(\varepsilon^p_., D_.\right)$ و $W^D_T = W^D\left(\varepsilon^p_., D_.\right)$ به‌دست آمده، که ممکن است معیار پلاستیک یا آسیب را نقض کنند. اگر $D_. = ۰$ باشد، آن‌گاه σ^p_T و W^D_T تعریف نشده خواهند بود. بنابراین نمی‌توان معیارهای پلاستیک و آسیب را آزمود. این خلأ محاسباتی توسط تعریف معیار معادل کلی که وابسته به تنش کل است، برطرف می‌شود:

$$\begin{aligned} &Y\left(\sigma_T, S^D_{0+}, S^D_{0-}\right) = \\ &\sqrt{\sigma_T : \mathbb{H} : \sigma_T} - c_1 I : \\ &\sigma_T - c_2\ \sigma_T : \mathbb{L} : \sigma_T - c_3 \end{aligned} \quad (۳۵)$$

هدف نهایی الگوریتم این است که در انتهای گام محاسباتی با ε معلوم، ε^p و D و هم‌چنین متغیرهای مزدوج متناظر σ، σ^p و W^D به‌دست آیند، به‌طوری‌که معیارهای پلاستیک و آسیب برآورده شوند. به‌منظور جایگزین کردن ضرب ماتریسی با ضرب دونقطه‌ای و تانسوری و استفاده از ماتریس ۶×۶ به‌جای تانسورهای متقارن مرتبه چهارم می‌توان از نحوه نمایش اصلاح‌شده برای تانسورهای مرتبه دوم استفاده کرد:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (۳۶)$$

لازم‌به‌ذکر است که این روش در ساده‌سازی ضرب دونقطه‌ای و تانسوری، فقط در مورد تانسورهای متقارن قابل اجرا است.

همانند مدل یک‌بعدی، سه مُد تغییر شکل وجود دارد:

الف) مُد الاستیک:

$Y^p\left(\sigma^p_T, D_.\right) \le ۰$ و $Y^D\left(W^D_T, \varepsilon_., \varepsilon^p_., D_.\right) \le ۰$

در این حالت، $\dot{\varepsilon}^p \neq ۰$ و $\dot{D} = ۰$ است، بنابراین $\varepsilon^p = \varepsilon^p_.$، $D = D_.$ و:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{p} \right) \tag{۳۷}$$

ب) مُد پلاستیک:

$Y^{p}\left(\boldsymbol{\sigma}_{T}^{p}, D_{.}\right) > ۰$ و $Y^{D}\left(W_{T}^{D}, \boldsymbol{\varepsilon}_{.}, \boldsymbol{\varepsilon}_{.}^{p}, D_{.}\right) \leq ۰$

در این حالت، $\dot{\varepsilon}^{p} \neq ۰$ و $\dot{D} = ۰$ است، بنابراین $D = D_{.}$ و با استفاده از قانون جریان در معادله (۳۲) برای $d\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$ خواهیم داشت:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{p} = \Lambda^{p} N^{p} \left(\boldsymbol{\sigma}^{p} \right) \tag{۳۸}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{p} = \boldsymbol{\varepsilon}_{0}^{p} + d\boldsymbol{\varepsilon}^{p} \tag{۳۹}$$

با استفاده از معادلات (۳۸) و (۳۹)، شرایط سازگاری و بسط تیلور[1] تابع تسلیم حول نقطه اولیه:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{p} = \boldsymbol{\varepsilon}_{0}^{p} + D \frac{N^{p} : \mathbb{C} : d\boldsymbol{\varepsilon} + Y^{p}}{N^{p} : \mathbb{C} : N^{p}} N^{p} \tag{۴۰}$$

در اینجا $\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$ نهایی توسط یک الگوریتم تکراری به‌دست خواهد آمد.

ج) مُد آسیب:

در این حالت، $Y^{D}\left(W_{T}^{D}, \boldsymbol{\varepsilon}_{.}, \boldsymbol{\varepsilon}_{.}^{p}, D_{.}\right) > ۰$ و $Y^{p}\left(\boldsymbol{\sigma}_{T}^{p}, D_{.}\right) > ۰$ و $\dot{\varepsilon}^{p} \neq ۰$ و $\dot{D} \neq ۰$ است و علاوه‌بر برقرار بودن معادلات (۳۸) و (۳۹) داریم:

$$D_{\pm} = D_{\pm 0} + dD_{\pm} \tag{۴۱}$$

با بسط تیلور تابع تسلیم پلاستیک و تابع آستانه آسیب حول نقطه اولیه:

$$dD_{\pm} = D \frac{(1-D) \Lambda^{p} N^{D} : \mathbb{C} : N^{p} + D Y^{D}}{N^{D} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{p} - D^{2} Y^{D'}} \tag{۴۲}$$

$$\Lambda^{p} = D \frac{N^{p} : \mathbb{C} : d\boldsymbol{\varepsilon} + Y^{D} \dfrac{N^{p} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{p} + D^{2} Y^{p'}}{N^{D} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{p} - D^{2} Y^{D'}} + Y^{p}}{N^{p} : \mathbb{C} : N^{p} - (1-D) N^{D} : \mathbb{C} : N^{p} \dfrac{N^{p} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{p} + D^{2} Y^{p'}}{N^{D} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{p} - D^{2} Y^{D'}}} \tag{۴۳}$$

که $Y^{p'}$ و $Y^{D'}$ به‌ترتیب مشتق‌های توابع تسلیم پلاستیک و آستانه آسیب برحسب پارامتر آسیب درون متغیرهای استحکام است، که:

$$\begin{aligned} Y'(S_{+}, S_{-}) = {} & -I : \boldsymbol{\sigma} \left(\frac{\partial c_{1}}{\partial S_{+}} \frac{\partial S_{+}}{\partial D_{\pm}} + \frac{\partial c_{1}}{\partial S_{-}} \frac{\partial S_{-}}{\partial D_{\pm}} \right) - \boldsymbol{\sigma} : \\ & \mathbb{L} : \boldsymbol{\sigma} \left(\frac{\partial c_{2}}{\partial S_{+}} \frac{\partial S_{+}}{\partial D_{\pm}} + \frac{\partial c_{2}}{\partial S_{-}} \frac{\partial S_{-}}{\partial D_{\pm}} \right) - \\ & \left(\frac{\partial c_{3}}{\partial S_{+}} \frac{\partial S_{+}}{\partial D_{\pm}} + \frac{\partial c_{3}}{\partial S_{-}} \frac{\partial S_{-}}{\partial D_{\pm}} \right) \end{aligned} \tag{۴۴}$$

مشتق ضرایب در معادله (۴۴) نیز به‌ترتیب زیر به‌دست خواهند آمد:

$$\frac{\partial c_{1}}{\partial S_{+}} = \frac{S_{-} \left(\left(8 - 3\sqrt{2} \right) S_{-}^{2} + 2\sqrt{2} S_{-} S_{+} + \left(4 - 3\sqrt{2} \right) S_{+}^{2} \right)}{2 (S_{-} + S_{+})^{2} \left(\left(-2 + \sqrt{2} \right) S_{-} - \left(-1 + \sqrt{2} \right) S_{+} \right)^{2}} \tag{۴۵}$$

$$\frac{\partial c_{1}}{\partial S_{-}} = \frac{S_{+} \left(\left(-8 + 3\sqrt{2} \right) S_{-}^{2} - 2\sqrt{2} S_{-} S_{+} + \left(-4 + 3\sqrt{2} \right) S_{+}^{2} \right)}{2 (S_{-} + S_{+})^{2} \left(\left(-2 + \sqrt{2} \right) S_{-} - \left(-1 + \sqrt{2} \right) S_{+} \right)^{2}} \tag{۴۶}$$

$$\frac{\partial c_{2}}{\partial S_{+}} = \frac{\left(-14 + 11\sqrt{2} \right) S_{-}^{2} - 2 \left(-2 + \sqrt{2} \right) S_{-} S_{+} + \left(-10 + 7\sqrt{2} \right) S_{+}^{2}}{2 (S_{-} + S_{+})^{2} \left(\left(-2 + \sqrt{2} \right) S_{-} - \left(-1 + \sqrt{2} \right) S_{+} \right)^{2}} \tag{۴۷}$$

$$\frac{\partial c_{2}}{\partial S_{-}} = \frac{\left(-1 + \sqrt{2} \right) S_{-}^{2} - 2 \left(-7 + 5\sqrt{2} \right) S_{-} S_{+} - \left(-1 + \sqrt{2} \right) S_{+}^{2}}{(S_{-} + S_{+})^{2} \left(\left(-2 + \sqrt{2} \right) S_{-} - \left(-1 + \sqrt{2} \right) S_{+} \right)^{2}} \tag{۴۸}$$

$$\frac{\partial c_{3}}{\partial S_{+}} = \frac{S_{-}^{2} \left(\left(11 - 7\sqrt{2} \right) S_{-}^{2} + 2 \left(-1 + \sqrt{2} \right) S_{-} S_{+} + \left(7 - 5\sqrt{2} \right) S_{+}^{2} \right)}{(S_{-} + S_{+})^{2} \left(\left(-2 + \sqrt{2} \right) S_{-} - \left(-1 + \sqrt{2} \right) S_{+} \right)^{2}} \tag{۴۹}$$

1 Taylor series

$$\frac{\partial c_3}{\partial S_-}=-\frac{S_+^2\left(5\left(-2+\sqrt{2}\right)S_-^2+2\left(14-11\sqrt{2}\right)S_-S_++\left(-2+\sqrt{2}\right)S_+^2\right)}{2\left(S_-+S_+\right)^2\left(\left(-2+\sqrt{2}\right)S_--\left(-1+\sqrt{2}\right)S_+\right)^2} \tag{۵۰}$$

بنابراین Λ^p، D_+، و D_- با یک الگوریتم تکراری به‌صورت هم‌زمان به‌دست خواهند آمد. در هر گام محاسباتی برای تعیین وضعیت کشش و فشار از علامت عبارت $n\left(\varepsilon,\varepsilon^p\right)$ استفاده شده، که در حالت الاستیسیته همسانگرد $n\left(\varepsilon\right)=\varepsilon_{۱۱}+\varepsilon_{۲۲}+\varepsilon_{۳۳}$ است.

تانسور ژاکوبین پیوسته[1] $\mathbb{J}$ مقدار نمو تنش به نسبت نمو کرنش را مشخص می‌کند. در این بخش تانسور ژاکوبین پیوسته در سه مُد الاستیک، پلاستیک و آسیب در نظر گرفته شده است.

الف) مُد الاستیک: حالت $\dot{\varepsilon}^p=۰$ و $\dot{D}=۰$

در این حالت $d\dot{\varepsilon}^p=۰$ است، بنابراین:

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbb{C}:\left(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^p\right)\rightarrow d\boldsymbol{\sigma}=\mathbb{C}:d\boldsymbol{\varepsilon} \tag{۵۱}$$

$$\mathbb{J}=\mathbb{C} \tag{۵۲}$$

ب) مُد پلاستیک: حالت $\dot{\varepsilon}^p\neq۰$ و $\dot{D}=۰$

در این حالت $dD_\pm=۰$ است، بنابراین با بسط تیلور تابع تسلیم پلاستیک حول نقطه صفر:

$$\begin{gathered}dY^p\left(\boldsymbol{\sigma}^p,D_0\right)=0\rightarrow\frac{\partial Y^p}{\partial\boldsymbol{\sigma}^p}:d\boldsymbol{\sigma}^p=0\rightarrow\\ N^p:\left(\mathbb{C}:d\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{\Lambda^p}{D}\mathbb{C}:N^p\right)=0\end{gathered} \tag{۵۳}$$

$$\Lambda^p=D\frac{N^p:\mathbb{C}:d\boldsymbol{\varepsilon}}{N^p:\mathbb{C}:N^p} \tag{۵۴}$$

$$\Lambda^p=D\frac{N^p:\mathbb{C}:d\boldsymbol{\varepsilon}}{N^p:\mathbb{C}:N^p} \tag{۵۵}$$

با ترکیب دو معادله (۵۴) و (۵۵):

$$d\boldsymbol{\sigma}=\left(\mathbb{C}-D\frac{\mathbb{C}:N^p\otimes\mathbb{C}:N^p}{N^p:\mathbb{C}:N^p}\right):d\boldsymbol{\varepsilon} \tag{۵۶}$$

بنابراین:

$$\mathbb{J}=\mathbb{C}-D\frac{\mathbb{C}:N^p\otimes\mathbb{C}:N^p}{N^p:\mathbb{C}:N^p} \tag{۵۷}$$

ج) مُد آسیب: حالت $\dot{\varepsilon}^p\neq۰$ و $\dot{D}\neq۰$

با بسط تیلور توابع تسلیم پلاستیک و آستانه آسیب حول نقطه صفر:

$$\begin{cases}dY^p\left(\boldsymbol{\sigma}^p,D_\pm\right)=0\rightarrow\dfrac{\partial Y^p}{\partial\boldsymbol{\sigma}^p}:\dfrac{\partial\boldsymbol{\sigma}^p}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}:\\ d\boldsymbol{\varepsilon}+\dfrac{\partial Y^p}{\partial\boldsymbol{\sigma}^p}:\dfrac{\partial\boldsymbol{\sigma}^p}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^p}:d\boldsymbol{\varepsilon}^p+\dfrac{\partial Y^p}{\partial\boldsymbol{\sigma}^p}:\\ \dfrac{\partial\boldsymbol{\sigma}^p}{\partial D_\pm}dD_\pm+\dfrac{\partial Y^p}{\partial D_\pm}dD_\pm=0\\ dY^D\left(\boldsymbol{\sigma}^D,D_\pm\right)=0\rightarrow\dfrac{\partial Y^D}{\partial\boldsymbol{\sigma}^D}:\dfrac{\partial\boldsymbol{\sigma}^D}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^p}:\\ d\boldsymbol{\varepsilon}^p+\dfrac{\partial Y^D}{\partial\boldsymbol{\sigma}^D}:\dfrac{\partial\boldsymbol{\sigma}^D}{\partial D_\pm}dD_\pm+\dfrac{\partial Y^D}{\partial D_\pm}dD_\pm=0\end{cases} \tag{۵۸}$$

با ساده‌سازی و اعمال قانون جریان:

$$\begin{cases}N^p:\mathbb{C}:d\boldsymbol{\varepsilon}-\dfrac{\Lambda^p}{D}N^p:\mathbb{C}:N^p+\dfrac{1}{D^2}N^p:\\ \mathbb{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^p dD_\pm+Y^{p'}dD_\pm=0\\ \dfrac{\left(1-D\right)\Lambda^p}{D}N^D:\mathbb{C}:N^p-\dfrac{1}{D^2}N^D:\mathbb{C}:\\ \boldsymbol{\varepsilon}^p dD_\pm+Y^{D'}dD_\pm=0\end{cases} \tag{۵۹}$$

با حل دستگاه معادلات (۵۹) داریم:

---

1 Continuous jacobian

$$A^p = D\frac{N^p : \mathbb{C} : d\varepsilon}{N^p : \mathbb{C} : N^p - (1-D)N^D : \mathbb{C} : N^p \dfrac{N^p : \mathbb{C} : \varepsilon^p + D^2 Y^{p'}}{N^D : \mathbb{C} : \varepsilon^p - D^2 Y^{D'}}} \quad (۶۰)$$

و با ترکیب معادله (۵۵) و معادله (۶۰):

$$d\sigma = \left(\mathbb{C} - D\frac{\mathbb{C} : N^p \otimes \mathbb{C} : N^p}{N^p : \mathbb{C} : N^p - (1-D)N^D : \mathbb{C} : N^p \dfrac{N^p : \mathbb{C} : \varepsilon^p + D^2 Y^{p'}}{N^D : \mathbb{C} : \varepsilon^p - D^2 Y^{D'}}}\right) : d\varepsilon \quad (۶۱)$$

بنابراین:

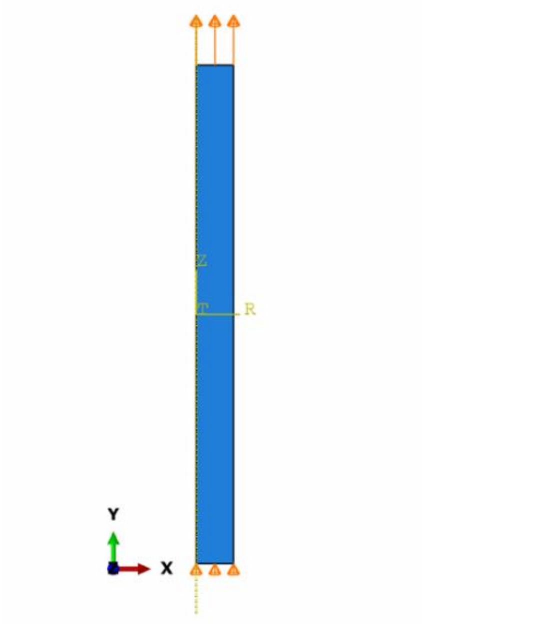
$$d\sigma = \left(\mathbb{C} - D\frac{\mathbb{C} : N^p \otimes \mathbb{C} : N^p}{N^p : \mathbb{C} : N^p - (1-D)N^D : \mathbb{C} : N^p \dfrac{N^p : \mathbb{C} : \varepsilon^p + D^2 Y^{p'}}{N^D : \mathbb{C} : \varepsilon^p - D^2 Y^{D'}}}\right) : d\varepsilon \quad (۶۲)$$

که Y^p تابع تسلیم پلاستیک، Y^D تابع استانه آسیب و N^D عمود برون‌سو معیار آسیب است.

با پیاده‌سازی الگوریتم عددی به‌روش صریح[1] مدل $RI \pm$ سه‌بعدی، می‌توان شبیه‌سازی عددی یک‌بعدی را در حالت سه‌بعدی تکرار کرد و با مقایسه نتایج هر دو شبیه‌سازی یک‌بعدی و سه‌بعدی، درستی فرمول‌بندی مدل سه‌بعدی بررسی خواهد شد. کُد الگوریتم عددی مدل سه‌بعدی $RI \pm$ در قالب زیرروال ویومت[2] مربوط به نرم‌افزار آباکوس پیاده‌سازی شده است. نمونه استخوان به‌صورت یک مدل متقارن محوری در نرم‌افزار اباکوس با استفاده از مدل ماده تعریف شده در قالب ویومت پیاده‌سازی می‌شود. شرایط مرزی و بارگذاری روی مدل در شکل ۱۰ نشان داده شده است. بارگذاری به‌صورت جابجایی کنترل است که به‌شکل یک سیکل کامل بین دو مقدار جابجایی مینیمم ۰/۱۴۶۶۰- میلی‌متر و جابجایی ماکزیمم ۰/۱۶۴۳۲ میلی‌متر است. این مقدار جابجایی‌ها برای نمونه حاضر به‌ترتیب معادل کرنش مینیمم ۰/۰۰۷۳۳- و کرنش ماکزیمم ۰/۰۰۸۲۲ می‌باشند.

مقدار نسبت پواسون استخوان کورتیکال ۰/۳۱۶۸ و مقدار چگالی ۲/۰۶ گرم بر سانتی‌مترمکعب درنظر گرفته می‌شود [۲۲]. همان‌طورکه در شکل ۱۱ نمایان است از ۶۰ المان برای گسسته‌سازی مدل متقارن محوری استفاده

1 Explicit
2 VUMAT



شکل ۱۰. شرایط مرزی و بارگذاری روی مدل متقارن محوری نمونه استخوان مورد آزمایش

Fig. 10. Boundary conditions and loading on the axial symmetric model of the bone sample being tested

شده است. همچنین کانتور[3]های تنش نرمال در راستای محوری برحسب مگاپاسکال و جابجایی در راستای محوری برحسب میلی‌متر برای نمونه استخوان شبیه‌سازی‌شده بعد از اعمال بیش‌ترین کشش، رسم شده است. به‌دلیل خطی بودن هندسه‌ی مدل در راستای بارگذاری، توزیع تنش نرمال در راستای محوری کاملاً یکنواخت است.

نتیجه شبیه‌سازی مدل سه‌بعدی $RI \pm$ به‌همراه نتیجه شبیه‌سازی مدل یک‌بعدی $RI \pm$ در شکل ۱۲ آمده است. با مقایسه دو نوع شبیه‌سازی، مشاهده می‌شود که فرمول‌بندی مدل سه‌بعدی صحیح است. اندک تفاوت بین دو منحنی می‌تواند مربوط به دو علت باشد، یک علت مربوط به اثر نسبت پواسون در سه‌بعدی سازی و تأثیرپذیری تنش نرمال در راستای محوری از کرنش‌های جانبی است و علت دیگر خطای محاسبات عددی در توابع تسلیم پلاستیک و آستانه آسیب است. این دو علت بیان‌شده، باعث می‌شود که مدل سه‌بعدی $RI \pm$ برخلاف مدل یک‌بعدی $RI \pm$ در مرحله آخر بارگذاری سیکلی از مبدأ مختصات عبور نکند و در کرنش برابر صفر، تنش برابر صفر نباشد. این قسمت از مدل سه‌بعدی $RI \pm$ با داده تجربی ارائه‌شده درشکل ۲ در تناقض است. از این نظر، مدل یک‌بعدی $RI \pm$ نسبت به مدل

3 Contour

(b) (a)

شکل ۱۱. کانتور تنش نرمال در راستای محوری (a) و کانتور جابجایی در راستای محوری (b) برای مدل سه‌بعدی $RI\pm$

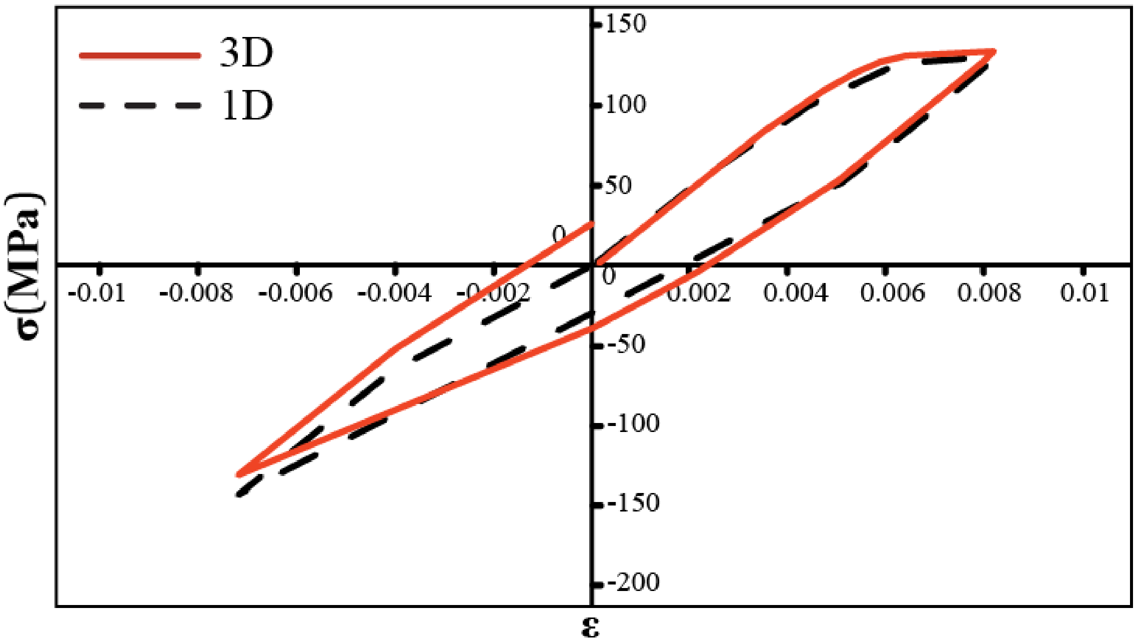
Fig. 11. Normal stress contour in the axial direction (a) and displacement contour in the axial direction (b) for the $RI\pm$ model

سه‌بعدی $RI\pm$، سازگاری بیشتری با داده‌های تجربی دارد. ضریب تعیین برای مدل سه‌بعدی نسبت به مدل یک‌بعدی مقدار ۰/۹۸۴۸۶۶ بدست آمده و علل اختلاف آن، اثر نسبت پوآسن، الاستیسیته همسانگرد در مدل سه‌بعدی و هم‌چنین متغیر آسیب اسکالری درنظر گرفته شده است.

بنابراین از نقاط قوت این پژوهش، در مقایسه با مدل‌های مشهور استفاده شده برای بافت استخوان همانند مدل جانسون-کوک [۲۳]، درنظر گرفتن بازیابی مدول یانگ بافت استخوان تحت بارگذاری معکوس، تفاوت رفتار ساختاری بین حالت کشش و فشار و از مبدأ عبور کردن نمودار تنش- کرنش به‌عنوان رفتاری منحصربفرد برای بافت استخوان است. برتری دیگر مدل سه‌بعدی ارائه شده در پژوهش حاضر نسبت به مدل ارائه شده توسط گارسیا [۵]، نوع سه‌بعدی‌سازی مدل ساختاری است. در مدل گارسیا از معیار ون‌میزز برای سه‌بعدی‌سازی مدل رئولوژیکی یک‌بعدی استفاده شده، که تفاوت رفتار آسیب بافت استخوان بین حالت کشش و فشار را درنظر نمی‌گیرد، بنابراین از مدل یک بعدی با یک متغیر آسیب به منظور رسیدن به یک مدل سه‌بعدی استفاده شده است، اما در پژوهش حاضر برای درنظر گرفتن تفاوت رفتار بافت استخوان بین حالت کشش و فشار از معیار برسلر- پیستر به‌منظور سه‌بعدی سازی استفاده شده است. این معیار با توجه به امکان در نظر گرفتن ناهمسانگردی در حالت کشش و فشار، امکان استفاده از مدل یک بعدی با دو متغیر آسیب کششی و فشاری را فراهم می‌آورد که باعث حصول مدل سه‌بعدی شده است، بنابراین در بارگذاری‌های سیکلی پتانسیل رسیدن به پیش‌بینی‌های دقیق‌تری را دارا می‌باشد.

۶- نتیجه‌گیری

هدف از این تحقیق توسعه قانون ساختاری جدید برای بافت استخوان کورتیکال در بارگذاری سیکلی و نرخ کرنش فیزیولوژیکی می‌باشد. ابتدا یک مدل یک‌بعدی مستقل از نرخ با ترکیب المان‌های رئولوژیک و با استفاده از روش مواد استاندارد عمومی و اصول انرژی بررسی شده است، این فرمول‌بندی برمبنای دو متغیر حالت درونی است: متغیر آسیب، چگالی میکروترک‌ها که عامل کاهش سختی بافت است را نشان می‌دهد و متغیر کرنش پلاستیک که نشان‌دهنده تغییرشکل میکروترک‌های مربوطه است. ضرایب مربوط به هر مدل توسط تطابق با داده‌های آزمایشگاهی محاسبه و سپس نتایج عددی هر مدل با داده‌های تجربی مقایسه شده است. در مدل‌های یک‌بعدی، ضریبی اصلاحی برای مدول درنظر گرفته شده است. این ضریب، پدیده بازیابی سختی ماده در انتقال از حالت کشش به فشار که حاصل بسته شدن میکروترک‌ها است را در منحنی تنش- کرنش ایجاد می‌کند. با استفاده از روش حداقل مربعات و داده‌های تجربی، کُدهای بهینه‌سازی ایجاد شده است که توسط آن‌ها ضرایب هر یک از مدل‌های یک‌بعدی به‌صورت بهینه به‌دست آمده است. با ترکیب معیار تسلیم برسلر- پیستر و مدل یک‌بعدی



شکل ۱۲. مقایسه نتایج شبیه‌سازی مدل سه‌بعدی $RI\pm$ با مدل یک‌بعدی $RI\pm$

Fig. 12. Comparison of simulation results of three-dimensional model Fig. 12. Comparison of simulation results of three-dimensional model $RI\pm$ with one-dimensional model $RI\pm$ with one-dimensional model

مستقل از نرخ همراه دو متغیر آسیب، مدل سه‌بعدی متناظر حاصل شد. این مدل سه‌بعدی در قالب روش اجزاء محدود صریح پیاده‌سازی شده و نتیجه آن با نتایج شبیه‌سازی مدل یک‌بعدی و داده‌های تجربی سازگاری قابل قبولی دارد. این مدل سه‌بعدی مناسب شبیه‌سازی هندسه‌های پیچیده خواهد بود.

تشکر و قدردانی

بدین‌وسیله نویسندگان مقاله مراتب تشکر خود را از دانشگاه اراک بابت گرنت به شماره ۹۶/۱۵۵۷۹ که برای انجام این پژوهش صرف شده است، اعلام می‌دارند.

منابع

[1] S.C. Cowin, Bone poroelasticity, Journal of biomechanics, 32(3) (1999) 217-238.

[2] T.A. Predey, L.E. Sewall, S.J. Smith, Percutaneous Vertebroplasty: New Treatment for Vertebral Compression Fractures, American Family Physician, 66(4) (2002) 611-616.

[3] T. Kraiem, A. Barkaoui, T. Merzouki, M. Chafra, Computational approach of the cortical bone mechanical behavior based on an elastic viscoplastic damageable constitutive model, International Journal of Applied Mechanics, 12(07) (2020) 2050081.

[4] D. Garcia, Elastic plastic damage laws for cortical bone, EPFL, 2006.

[5] D. Garcia, P.K. Zysset, M. Charlebois, A. Curnier, A three-dimensional elastic plastic damage constitutive law for bone tissue, Biomechanics and modeling in mechanobiology, 8(2) (2009) 149-165.

[6] D. Garcia, P.K. Zysset, M. Charlebois, A. Curnier, A 1D elastic plastic damage constitutive law for bone tissue, Archive of Applied Mechanics, 80(5) (2010) 543-555.

[7] M. Lovrenić-Jugović, Z. Tonković, I. Skozrit, Experimental and numerical investigation of cyclic creep and recovery behavior of bovine cortical bone,

viscoplastic damage model for bone tissue, Biomechanics and modeling in mechanobiology, 12(2) (2013) 201-213.

[16] D. Remache, M. Semaan, J.-M. Rossi, M. Pithioux, J.-L. Milan, Application of the Johnson-Cook plasticity model in the finite element simulations of the nanoindentation of the cortical bone, Journal of the mechanical behavior of biomedical materials, 101 (2020) 103426.

[17] V. Prasannavenkadesan, P. Pandithevan, JOHNSON–COOK MODEL COMBINED WITH COWPER–SYMONDS MODEL FOR BONE CUTTING SIMULATION WITH EXPERIMENTAL VALIDATION, Journal of Mechanics in Medicine and Biology, 21(02) (2021) 2150010.

[18] J. Lei, L. Li, Z. Wang, F. Zhu, Characterizing strain rate-dependent mechanical properties for bovine cortical bones, Journal of biomechanical engineering, 142(9) (2020).

[19] P.K. Zysset, U. Wolfram, A rate-independent continuum model for bone tissue with interaction of compressive and tensile micro-damage, Journal of the mechanical behavior of biomedical materials, 74 (2017) 448-462.

[20] B. Bresler, K.S. Pister, Strength of concrete under combined stresses, in: Journal Proceedings, 1958, pp. 321-345.

[21] D. Garcia, Elastic plastic damage constitutive laws for cortical bone, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), 2006.

[22] T.P. Ng, S.S.R. Koloor, J.R.P. Djuansjah, M.R.A. Kadir, Assessment of compressive failure process of cortical bone materials using damage-based model, Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials, 66 (2017) 1-11.

[23] K. Alam, M. Khan, V.V. Silberschmidt, 3D finite-element modelling of drilling cortical bone: Temperature analysis, J Med Biol Eng, 34(6) (2014) 618-623.

Mechanics of Materials, 146 (2020) 103407.

[8] Z. Li, J. Wang, G. Song, C. Ji, X. Han, Anisotropic and strain rate-dependent mechanical properties and constitutive modeling of the cancellous bone from piglet cervical vertebrae, Computer methods and programs in biomedicine, 188 (2020) 105279.

[9] C.-S. Lee, J.-M. Lee, B. Youn, H.-S. Kim, J.K. Shin, T.S. Goh, J.S. Lee, A new constitutive model for simulation of softening, plateau, and densification phenomena for trabecular bone under compression, Journal of the mechanical behavior of biomedical materials, 65 (2017) 213-223.

[10] M. Pawlikowski, K. Jankowski, K. Skalski, New microscale constitutive model of human trabecular bone based on depth sensing indentation technique, Journal of the mechanical behavior of biomedical materials, 85 (2018) 162-169.

[11] M.J. Mirzaali, A. Bürki, J. Schwiedrzik, P.K. Zysset, U. Wolfram, Continuum damage interactions between tension and compression in osteonal bone, Journal of the mechanical behavior of biomedical materials, 49 (2015) 355-369.

[12] T.P. Ng, S. Koloor, J. Djuansjah, M.A. Kadir, Assessment of compressive failure process of cortical bone materials using damage-based model, Journal of the mechanical behavior of biomedical materials, 66 (2017) 1-11.

[13] Q. Rong, Q. Luo, Inelastic Modelling of Bone Damage Under Compressive Loading, in: Intelligent Life System Modelling, Image Processing and Analysis, Springer, 2021, pp. 211-220.

[14] M. Pawlikowski, K. Barcz, Non-linear viscoelastic constitutive model for bovine cortical bone tissue, Biocybernetics and biomedical engineering, 36(3) (2016) 491-498.

[15] J.J. Schwiedrzik, P. Zysset, An anisotropic elastic-

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Nasiri, M. Zolfaghari, V. Tahmasbi, H. Heydari , Numerical Investigation of Elastoplastic and Damage Behavior of Cortical Bone by Applying a New Damage Model, Amirkabir J. Mech Eng., 54(6) (2022) 1423-1442.

DOI: 10.22060/mej.2022.20773.7310