Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 54(8) (2022) 357-360
DOI: 10.22060/mej.2022.20916.7336

Large-Amplitude Frequency Analysis of Bi-directional Functionally Graded with Non-Uniform Porous Beams using a Higher Order Shear Deformation Theory

M. Forghani [1], Y. Bazargan-lari [1*], P. Zahedinejhad [2] , M. Kazemzadeh Parsi [1]

[1] Department of Mechanical Engineering, Shiraz Branch, Islamic Azad University, Shiraz, Iran
[2] Department of Mechanical Engineering, University of North Texas, North Texas, USA

ABSTRACT: This Paper deals with the large amplitude frequency behavior of porous bi-directional functionally graded beams subjected to various boundary conditions which are simply supported, clamped-simply supported, clamped-clamped, and clamped-free utilizing Reddy third-order shear deformation theory and Green's tensor together with the Von Karman geometric nonlinearity. The material properties of the beam change according to power and exponential law in both directions. The equations of motion and associated boundary conditions are derived by means of Hamilton's principle. A generalized di-erential quadrature method in conjunction with a direct numerical iteration method is selected to solve the system of equations. Demonstrating the convergence of this method, the verification is performed by using extracted results from a previous study based on the Timoshenko beam theory. The results of extensive studies are provided to understand the influences of the different gradient indexes, vibration amplitude ratio, porosity coefficient, Tapered ratio, shear and elastic foundation parameters, and boundary conditions on the Large amplitude vibration frequencies of the bi-directional functionally graded beams. The results reveal that non-linear frequencies increase with the rise of elastic foundation and tapered coefficients and the soar of porosities and material gradients in two directions causes a sharp decrease in non-dimensional frequencies. The results of this study, while carefully examining the frequencies of variable cross-sectional functionally graded beams, are effective in the optimal design of bi-directional beams and are very effective in predicting and detecting failure modes of these beams.

Review History:

Received: Dec. 23, 2021
Revised: May, 11, 2022
Accepted: Jul. 03, 2022
Available Online: Jul. 15, 2022

Keywords:

Large-amplitude vibration
Bi-directional functionally graded beam
Porous
Variable cross section
Third order shear deformation theory

1- Introduction

Functionally graded (FG) materials are made of two parts, ceramic and metal. Due to the fact that ceramic structural materials have a low heat transfer coefficient and high-temperature resistance, they can withstand high heat. On the other hand, another material such as metal provides the required flexibility of the structure. It is worth noting that due to continuous changes in mechanical properties, discontinuity problems present in conventional composite structures do not arise in functionally graded materials. Therefore, these materials have been widely used as structural components in modern engineering, nuclear, and aerospace industries, and today there is a wide tendency to investigate these components in various operational and boundary conditions. Some of the research was in accordance with the Euler-Bernoulli theory or classic and were suitable for narrow functionally graded beams. For deeper beams, the classical theory of beams cannot be used due to the reduction of the transverse shear deformation effect and the overestimation of frequencies. In order to overcome the limitations of the classical theory, the beam theory of first-order shear deformation, known as Timoshenko's theory, has been introduced in relation to the transverse shear deformation of beams. This theory violates the condition of zero shear stress at the upper and lower levels of the beam, so the use of the shear correction factor to calculate the difference between the actual and theoretical stress states is inevitable [1]. In order to more accurately calculate the natural frequencies, displacement, and stress components of medium and thick beams, higher-order shear deformation theories have been presented, in which the use of the shear correction factor is avoided [1]. So far, based on higher-order shear deformation theories, research on the vibration behavior of graded beams has been presented. Aydegdo and Taskin [2] investigated the free vibration behavior of functionally graded beams. The vibration behavior of functionally graded beams in different boundary conditions, using higher-order shear theories, has been presented by Simsek [3]. Then the vibration analysis of graded beams using higher-order shear deformation theories was investigated by Hu Tai [4]. The free vibration behavior of Functionally graded beams under different boundary conditions and based on different shear beam deformation

*Corresponding author's email: bazarganlari@iaushiraz.ac.ir

Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.

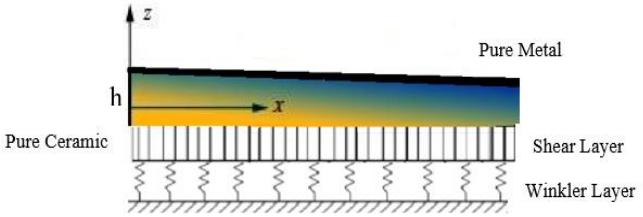


Fig. 1. Schematic of the variable cross-section of bi-directional FG beam resting on elastic foundation

theories have been presented by Chakraborty and Pradhan [5] using the Rayleigh-Ritz method. Most phenomena in the world around us, especially various engineering problems such as vibrations, are inherently nonlinear. Sometimes behaviors are observed in non-linear systems that do not occur in linear systems. Although nonlinear problems can usually be solved by assuming linear behavior around the operating conditions, this is not always justified. The non-linear frequency behavior of Timoshenko beams made of porous materials was presented by Ebrahimi and Zia [6], in which the effect of material distribution, porosity, aspect ratio, and mode number on the vibration behavior of graded beams was carried out. Malekzadeh and Shejaei [7] investigated the surface and non-local effects of non-linear vibrations of non-uniform FG beam by using the theory of Euler Bernoulli's theory and Timoshenko's in connection with Eringen's theory and Hamilton's principle and the method of combined differential quadratic solution and a numerical iterative method was investigated. Forghani et al. [8] investigated the non-linear frequency behavior of functionally graded porous beams with cracks on an elastic substrate using the third-order theory of Reddy.

2- Methodology

A bi-directional functionally graded beam with length L and rectangular cross-section $b \times h$ on elastic Winkler and shear layers of the bed, consider that b is the width and h is the height of the beam. According to Fig. 1, the Cartesian coordinate system x, y and z are considered in the direction of length, width, and height of the beam, respectively. The displacement field of the beam is according to the theory of third-order shear deformation and based on some assumptions.

One of the most important higher-order shear deformation theories is Reddy's third-order shear theory. In this theory, unlike classical and first-order shear theories, the cross-sectional area of the beam is no longer considered as a smooth surface. The shear component of the longitudinal displacement increases in such a way as to change the order of the three shear strains in the thickness of the beam so that the shear stress at the upper and lower levels of the beam becomes zero. The equations of motion and the corresponding boundary conditions are converted to algebraic equations by the Differential Quadrature (DQ) method. N is

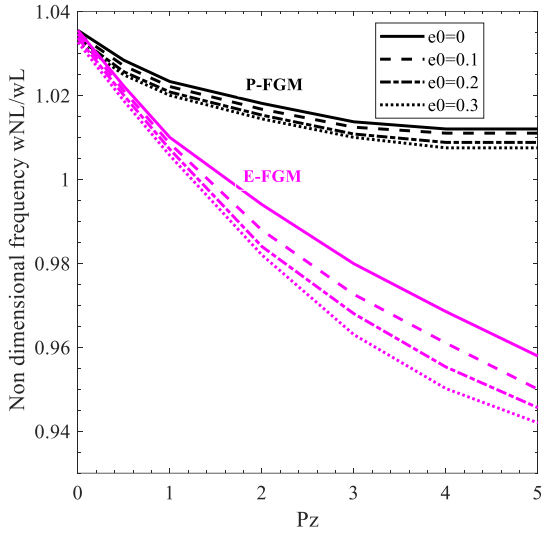


Fig. 2. Variation of nonlinear to linear frequency ratio of Clamped-Clamped (C-C) porous beams versus power law indexes pz , px for different porosity coefficients (l/h=5 , $\omega_{max} / r = 1$)

the number of discretization points and A_i, B_i, C_i, D_i are the weight constants of the first, second, third, and fourth degrees of differential quadrature respectively, obtained from the Lagrangian interpolation polynomial functions. For discretization, the Gauss-Lobatto-Chebyshev non-uniform distribution method is used.

3- Results and Discussion

In order to derive the natural frequencies of the power law and exponentially functionally graded beam on the elastic foundation, first, the convergence behavior of the method is examined and then the comparison with other articles is considered to determine the accuracy of the answers and the accuracy of the results. In Fig. 2 The effect of increasing the porosity coefficients on the non-linear to linear frequency ratio of the bi-directional functionally graded beam has been investigated for two power and exponential models and for different material indices. It is noteworthy that increasing the values of either leads to a gradual decrease in the nonlinear to linear frequency ratio. In this regard, the effect of increasing porosity coefficients in reducing frequency ratios is significant.

4- Conclusions

In this paper, the evaluation of the large amplitude frequency of the bi-directional functionally graded porous beams was carried out using the Reddy shear deformation beam theory and Green's tensor in connection with Van Karman's geometric nonlinearity. In this regard, the following results were obtained

1) The increase of nonlinear to linear frequency ratio

with respect to amplitude depends on the type of boundary conditions, but this trend is not true for Clamped-Free (C-F) boundary conditions.

2) The effect of increasing the porosity coefficients, power law, and material indices in reducing the non-linear to linear frequency ratio due to the reduction of the stiffness of the bi-directional functionally graded beams.

3) For both Functionally graded beam models, the frequency ratio affected by porosity is more affected by the material gradient index in the longitudinal x direction than by the material index in the z-direction.

4) The effect of increasing the section narrowing coefficient on the non-linear frequency behavior of the graded beam.

5) The effect of foundation stiffness coefficients on the nonlinear to linear frequency ratio of an isotropic beam.

References

[1] P. Zahedinejad, Free vibration analysis of functionally graded beams resting on elastic foundation in thermal environment, International Journal of Structural Stability and Dynamics, 16(07) (2016) 1550029.

[2] M. Aydogdu, V. Taskin, Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges, Materials & design, 28(5) (2007) 1651-1656.

[3] M. Şimşek, Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories, Nuclear Engineering and Design, 240(4) (2010) 697-705.

[4] H.-T. Thai, T.P. Vo, Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories, International Journal of Mechanical Sciences, 62(1) (2012) 57-66.

[5] S. Chakraverty, K. Pradhan, Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions, Aerospace Science and Technology, 36 (2014) 132-156.

[6] F. Ebrahimi, M. Zia, Large amplitude nonlinear vibration analysis of functionally graded Timoshenko beams with porosities, Acta Astronautica, 116 (2015) 117-125.

[7] P. Malekzadeh, M. Shojaee, Surface and nonlocal effects on the nonlinear free vibration of non-uniform nanobeams, Composites Part B: Engineering, 52 (2013) 84-92.

[8] M. Forghani, Y. Bazarganlari, P. Zahedinejad, M.J. Kazemzadeh-Parsi, Nonlinear frequency behavior of cracked functionally graded porous beams resting on elastic foundation using Reddy shear deformation theory, Journal of Vibration and Control, (2022) 10775463221080213.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

M. Forghani, Y. Bazargan-lari, P. Zahedinejhad, M. Kazemzadeh Parsi, Large-Amplitude Frequency Analysis of Bi-directional Functionally Graded with Non-Uniform Porous Beams using a Higher Order Shear Deformation Theory, Amirkabir J. Mech Eng., 54(8) (2022) 357-360.

DOI: 10.22060/mej.2022.20916.7336

This page intentionally left blank

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۴، شماره ۸، سال ۱۴۰۱، صفحات ۱۷۶۱ تا ۱۷۸۸
DOI: 10.22060/mej.2022.20916.7336

تحلیل ارتعاشات دامنه بزرگ تیرهای متخلخل مدرج هدفمند دوجهته با مقطع باریک شونده روی بستر الاستیک با استفاده از یک تئوری برشی مرتبه بالا

محمد امین فرقانی[۱]، یوسف بازرگان لاری*[۱]، پرهام زاهدی نژاد[۲]، محمد جوادکاظم زاده پارسی[۱]

۱- دانشکده مهندسی مکانیک، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران
۲- دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه تگزاس شمالی، تگزاس شمالی، آمریکا.

خلاصه: این مقاله تحلیل ارتعاشات دامنه بزرگ تیرهای متخلخل مدرج هدفمند دو جهته در شرایط مرزی مختلف را با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه سوم و تانسور گرین و غیر خطی بودن هندسی ون کارمن بررسی می‌کند. خواص مواد این تیرها با توجه به قانون توانی و نمایی در دو جهت تغییر می‌کند. معادلات حرکت و شرایط مرزی مرتبط با استفاده از اصل همیلتون به‌دست آمده است. برای حل سیستم معادلات، روش ترکیبی مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته همراه با یک روش تکرار عددی مستقیم ایجاد شده است. پس از اثبات همگرایی این روش، از نتایج استخراج شده از یک مطالعه قبلی بر اساس نظریه برشی تیموشنکو برای اعتبار سنجی نتایج استفاده می‌شود. سپس تأثیر شاخص‌های گرادیان مواد در دو جهت، نسبت دامنه فرکانس، ضریب تخلخل، اثر باریک شوندگی مقطع، پارامترهای بستر برشی و الاستیک و شرایط مرزی مختلف بر فرکانس‌های دامنه بزرگ تیرهای مدرج هدفمند مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج نشان می‌دهد که رفتار فرکانس‌های غیر خطی بی بعد با افزایش ضرایب بستر و ضریب باریک شوندگی افزایش یافته و افزایش در ضریب تخلخل و گرادیان ماده در دو جهت، سبب کاهش در فرکانس‌های غیر خطی می‌شود، این نتایج در طراحی بهینه تیرهای دو جهته تأثیر گذار بوده و در روش‌های پیش‌بینی و کشف مودهای شکست این تیرها بسیار مؤثر است.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۴۰۰/۱۰/۰۲
بازنگری: ۱۴۰۱/۰۲/۲۱
پذیرش: ۱۴۰۱/۰۴/۱۲
ارائه آنلاین: ۱۴۰۱/۰۴/۲۴

کلمات کلیدی:
ارتعاشات دامنه بزرگ
تیر مدرج هدفمند دوجهته
تخلخل
مقطع باریک شونده
تئوری برشی مرتبه سوم

۱- مقدمه

مواد مدرج هدفمند از دو قسمت سرامیک و فلز ساخته شده‌اند. با توجه به این که مواد سازه‌ای سرامیک دارای ضریب انتقال حرارت کم و مقاومت بالا در برابر دما هستند، می‌توانند حرارت بالا را تحمل کنند. از طرف دیگر، یک ماده دیگر مانند فلز، انعطاف پذیری مورد نیاز سازه را فراهم می‌کند. قابل ذکر است که به دلیل تغییرات پیوسته در خواص مکانیکی، مشکلات ناپیوستگی موجود در سازه‌های کامپوزیت معمولی در مواد درجه بندی شده عملکردی بوجود نمی‌آید. بهمین دلیل از مواد مدرج هدفمند به جای مواد همسانگرد برای ساخت سازه‌ها استفاده می‌شود. از زمان پیدایش مواد هدفمند مدرج بدلیل خواص ویژه این موارد در مقاومت حرارتی بالا، رفع تمرکز تنش و جلوگیری از پیدایش ترک به تدریج در بسیاری از کاربردهای مهندسی همچون هوافضا، صنایع دفائی، صنایع ریلی، حسگرهای الکترونیکی و بیو پزشکی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. از جمله موارد ویژه کاربرد تیر متخلخل هدفمند دوجهته با مقطع متغیر می‌توان به ریل‌های راه آهن، سپرهای حرارتی[۱] و پره توربین‌های گازی که تعبیه حفره‌ها جهت خنک‌کاری مقطع پره می‌باشد، نام برد. بنابراین، این مواد کاربردهای گسترده‌ای به عنوان اجزای ساختاری در صنایع مدرن مهندسی، هسته‌ای و هوافضا داشته‌اند و امروزه گرایش گسترده‌ای به بررسی این اجزا در شرایط مختلف عملیاتی و مرزی وجود دارد. ارتعاش آزاد و اجباری دو حوزه از مطالعاتی است که تا کنون با استفاده از نظریه‌های مختلف تیرها انجام شده است. برخی از آنها مطابق با نظریه اویلر برنولی یا کلاسیک بوده و مناسب برای تیرهای مدرج هدفمند باریک بودند. برای تیرهای عمیق‌تر تئوری کلاسیک تیرها به علت کاهش اثر تغییر شکل برشی عرضی و برآورد بیش از حد فرکانس‌ها قابل استفاده نیست. به منظور غلبه بر محدودیت‌های تئوری کلاسیک، نظریه تیر تغییر شکل برشی مرتبه اول معروف به نظریه تیموشنکو در رابطه با تغییر شکل برشی عرضی تیرها معرفی شده است. این نظریه شرایط تنش برشی صفر را در سطوح بالا و پایین تیر نقض می‌کند، بنابراین استفاده از ضریب تصحیح برشی برای محاسبه اختلاف نتایج بین حالتهای تنش واقعی

1 Thermal Barrier Coating (TBC)

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: bazarganlari@iaushiraz.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode دیدن فرمائید.

و تئوری اجتناب ناپذیر است [۱]. به منظور محاسبه دقیق‌تر فرکانس‌های طبیعی، جابجایی و اجزای تنش تیرهای متوسط و ضخیم، نظریه‌های تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر ارائه شده است که در آن استفاده از ضریب تصحیح برشی اجتناب می‌شود [۱].

تا کنون بر اساس نظریه‌های تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر، تحقیقات در مورد رفتار ارتعاشی تیرهای مدرج ارائه شده است. ون و زنگ [۲] تحلیل فرکانسی تیرها را بر اساس روش اجزای محدود مرتبه بالاتر مطالعه کردند. آیدگدو و تاسکین [۳] رفتار ارتعاشی آزاد تیرهای مدرج هدفمند را انجام بررسی کردند. رفتار ارتعاشی تیرهای مدرج هدفمند در شرایط مرزی متفاوت، با استفاده از نظریه‌های برشی مرتبه بالاتر توسط سیمسک [۴] ارائه شده است. سپس تجزیه و تحلیل ارتعاشی تیرهای مدرج با استفاده از نظریه‌های تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر توسط هو تای و وو [۵] مورد بررسی قرار گرفت. رفتار ارتعاشی آزاد تیرهای هدفمند تحت شرایط مرزی مختلف و بر اساس نظریه‌های مختلف تغییر شکل تیر برشی، توسط چاکرورتی و پرادهان [۶] با استفاده از روش ریلی–ریتز ارائه شده است. واتاناساکولپنگ و همکاران [۷] فرکانس‌های ارتعاشی تیرهای هدفمند تحت شرایط مرزی الاستیک را با استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی و روش چبیشف کولوکیشن مورد بررسی قرار دادند.

از آنجائی که اکثر تیرهای مکانیکی در کاربردهای مختلف مهندسی بر روی زمین هستند، مانند راه آهن، مناطق ژئوتکنیکی، پیاده روها، بزرگراه، سازه‌ها، سازه‌های دریایی، برج‌ها و خطوط لوله است. رفتار ارتعاشی و خمشی تیرها یا ستون‌ها بر روی پایه‌های الاستیک نقش مهمی در بسیاری از زمینه‌های مهندسی سازه و زیرسازی ایفا می‌کند. این مساله باعث ایجاد انگیزه بسیاری از محققان برای بررسی رفتار ساختاری تیرها بر روی لایه‌های مختلف الاستیک می‌شود. در بسیاری از مسائل مربوط به‌ساختار خاک، بستر الاستیک معمولاً با پایه وینکلر برای سادگی ریاضی مدل سازی می‌شود. با این حال، نشان داده شده است که رفتار مواد بستر در مهندسی را نمی‌توان با این مدل، که شامل فنرهای کششی خطی مستقل است، نشان داد. بدین منظور برای یافتن یک مدل فیزیکی اساسی نزدیک به ریاضیات ساده، پاسترناک مدل دو پارامتری را با برهم کنش برشی پیشنهاد کرد. مطالعات مختلفی در مورد تأثیر بسترهای الاستیک بر ارتعاش آزاد تیرها انجام شده است. ژو و آیزنبرگر [۸ و ۹] ارزیابی فرکانسی تیرهای ایزوتروپیک را بر روی بسترهای الاستیک متغیر وینکلر با استفاده از یک روش حل کلی انجام دادند. ارتعاشات حرارتی–مکانیکی تیرهای مدرج هدفمند روی بسترهای الاستیک دو پارامتری توسط پرادان و مورمو [۱۰] مورد مطالعه قرار گرفت. ارتعاشات آزاد و کمانش تیرها بر روی بستر الاستیک دو پارامتری توسط ملک زاده و کرمی [۱۱] با یک روش ترکیبی اجزای محدود و مربعات دیفرانسیلی مورد بررسی قرار گرفت. اکباس [۱۲] ارتعاشات آزاد و کمانش تیرهای مدرج تابعی روی بستر الاستیک را مورد مطالعه قرار داد. تجزیه و تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای مدرج هدفمند که بر روی پایه الاستیک دو پارامتری قرار دارند، توسط یاس و همکاران [۱۳] با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل عمومی و بر اساس نظریه اویلر برنولی انجام شد. توساپانون و واتاناساکولپنگ [۱۴] پایداری و ارتعاشات آزاد تیرهای مدرج هدفمند را بر روی پایه الاستیک دو پارامتری بر اساس نظریه برشی تیموشنکو و با استفاده از روش حل چبیشف کولوکیشن مورد بررسی قرار دادند.

در بسیاری از سازه‌های پیشرفته، به دلیل شرایط کاری، گرادیان دما و بار مکانیکی در بیش از یک جهت توزیع می‌شود. بهمین دلیل بررسی اجزای سازه‌ای با تغییر خواص مواد و تحمل بار در بیش از یک جهت مد نظر محققین می‌باشد. اکثر تحقیقات پیشین بر رفتار مکانیکی و ارتعاشی ساختارهای معمولی تیرهای مدرج هدفمند متمرکز شده‌اند که خواص مواد آنها فقط در یک جهت تغییر می‌کرد. بنابراین، ساختارهای معمولی این تیرها برای برآوردن الزامات توزیع تنش و دما در جهت‌های مختلف برای کاربردهای ویژه ریلی، صنعتی و هوافضا کارآمد نیستند. لی و همکاران [۱۵ و ۱۶] رفتار خمشی و پس کمانشی تیرهای متخلخل مدرج هدفمند دوجهته را بر اساس یک نظریه برشی مرتبه سوم بررسی کردند. رفتار فرکانسی آزاد تیرهای مدرج هدفمند با کارکرد دو طرفه[1] بر اساس نظریه تیر تیموشنکو توسط مسوت سیمسک [۱۷] مورد مطالعه قرار گرفت. وانگ و همکاران [۱۸] فرکانس‌های آزاد تیرهای مدرج هدفمند دو بعدی را بر اساس نظریه اویلر برنولی با استفاده از یک راه حل تحلیلی برای تکیه گاه‌های مختلف انتهایی مورد مطالعه قرار داد. قربانپور و نیک‌نژاد [۱۹] پایداری دینامیکی تیرهای مدرج هدفمند دو جهته با تئوری‌های برشی مراتب مختلف تحت تأثیر شرایط دمایی و تحریک هارمونیک بررسی کرد. ارتعاشات آزاد خمشی تیرهای مدرج هدفمند بر اساس تئوری تیموشنکو و با روش حل تجمیع چبیشف توسط واتاناساپولکنگ و چایکیتیراتانا [۲۰] بررسی گردید. کاظم زاده و همکاران [۲۱] به بررسی صفحات مدرج هدفمند چند جهته با استفاده از تکنیک روش الاستیسیته سه بعدی پرداخته‌اند.

در طول فرآیند ساخت، تفاوت زیاد در دمای انجماد بین اجزاء مواد

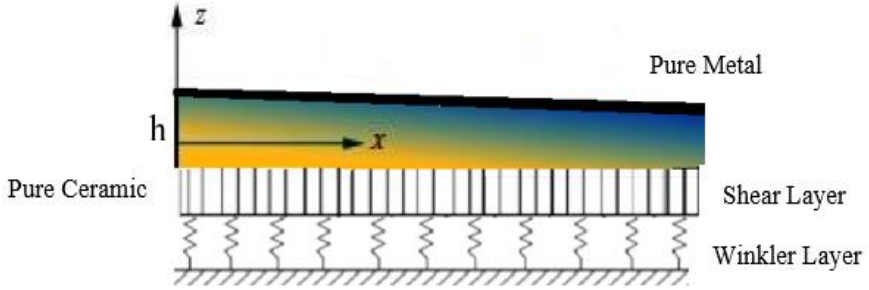
1 Bi-Directional Functionally Graded Materials (BDFGMs)

هدفمند، ممکن است حفره‌های میکروسکوپی، سوراخ‌های ریز یا تخلخل‌ها را در داخل مواد در حین فرآیند پخت ایجاد کند. ژو و همکاران [۲۲] نشان دادند که تخلخل ممکن است به دلیل انقباض بین ترکیبات فازهای فلزی و سرامیکی در ساخت مواد مدرج هدفمند ایجاد شود. همچنین، تولید عمدی این مواد به صورت متخلخل به دلیل قابلیت بالا در جذب انرژی نیز به عنوان یکی از جذاب‌ترین کاندیداها برای سازه‌های تحت بار ناپایدار در نظر گرفته می‌شود که منجر به توسعه سازه‌های جدید هدفمند متخلخل می‌شود. به همین علت اثر تخلخل در هنگام طراحی و آنالیز سازه‌های تابعی مدرج از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. سازه‌های تابعی مدرج متخلخل ترکیبی بسیار جالب از خواص مکانیکی مانند سختی بالا نسبت به وزن مخصوص خیلی پایین دارند. ارتعاشات آزاد و اجباری تیرهای متخلخل با قابلیت تغییر شکل برشی توسط چن و همکاران [۲۳] انجام شد و نتایج با استفاده از نظریه تیر تیموشنکو و بکار گیری معادلات لاگرانژ مورد بررسی قرار گرفت.

یوسف الرجوب و حمد [۲۴] ارتعاشات آزاد تیرهای مدرج هدفمند متخلخل اویلر برنولی و تیموشنکو را با استفاده از ماتریس‌های انتقال حل نمودند. ارزیابی ارتعاشی نانو/میکرو تیرهای متخلخل دو بعدی برای دو نوع مواد متخلخل بر اساس نظریه تیموشنکو توسط شفیعی و همکاران [۲۵] ارائه شد. ابراهیمی و جعفری [۲۶] ارزیابی فرکانسی تیرهای متخلخل وابسته به دما را بر اساس نظریه ترمومکانیکی مرتبه بالا با استفاده از روش حل ناویر به عنوان یک راه حل تحلیلی مورد مطالعه قرار دادند. بررسی ارتعاشات تیرهای متخلخل هدفمند در شرایط دمایی مختلف محیط توسط خاکپور و همکاران [۲۷] به روش عددی مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته انجام گردیده است.

بیشتر پدیده‌های جهان اطراف ما، به ویژه مسائل مختلف مهندسی مانند ارتعاشات، ذاتاً غیرخطی هستند. گاهی در سیستم‌های غیر خطی رفتارهایی مشاهده می‌شود که در سیستم‌های خطی رخ نمی‌دهد. اگرچه مسائل غیر خطی را معمولاً می‌توان با فرض رفتار خطی حول شرایط کاری حل کرد، اما این همیشه توجیه پذیر نیست. از سوی دیگر، امروزه با پیشرفت‌های انجام شده در زمینه مهندسی، دقت بالاتری از نتایج مورد نظر جامعه علمی قرار گرفته است. به همین دلایل، مطالعه مسائل غیر خطی به یکی از مهمترین چالش‌های مهندسی و فیزیک تبدیل شده است. منشاء غیر خطی بودن یک ساختار می‌تواند سه نوع باشد: غیر خطی فیزیکی، غیر خطی هندسی و شرایط مرزی غیر خطی. رفتار غیر خطی فرکانسی تیرهای تیموشنکو ساخته شده از مواد متخلخل توسط ابراهیمی و ضیا [۲۸] ارائه شده است که در آن تأثیر توزیع مواد، تخلخل، نسبت ابعاد و شماره مود بر رفتار ارتعاشی تیرهای مدرج انجام شده است. لی و همکاران [۲۹] خمش غیر خطی و جابجایی یک تیر مدرج هدفمند دو جهته را با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته بر اساس نظریه تیر اویلر–برنولی بررسی کردند. ملک زاده و شجایی [۳۰] اثرات سطحی و غیر محلی ارتعاشات غیر خطی تیر مدرج هدفمند غیر یکنواخت را با بکارگیری تئوری اویلر برنولی و تیموشنکو در ارتباط با تئوری ارینگن و اصل همیلتن و روش حل ترکیبی مربعات دیفرانسیلی و یک روش تکراری عددی بررسی کردند. تانسور گرنش گرین در ارتباط با معادله غیر خطی ون کارمن برای حل این مساله بکار گرفته شد. خمش دامنه بزرگ، کمانش و ارتعاشات نانوتیرهای مدرج هدفمند دو جهته توسط یانگ و همکاران [۳۱] مطابق با نظریه تیر اویلر–برنولی، نظریه غیر خطی هندسی فون کارمن و نظریه کشش غیر محلی انجام شد. قایش [۳۲] ارتعاشات غیر خطی محوری تیر مدرج هدفمند غیر یکنواخت را با استفاده از اصل همیلتن و نظریه برشی مرتبه سوم انجام داد؛ معادلات جزیی بدست آمده توسط روش ترکیبی گالرکین گسسته سازی و حل گردید. رفتار ارتعاشی آزاد تیرهای مدرج هدفمند تحت اثر شرایط مرزی مختلف، توسط کرمعلی [۳۳] با استفاده از روابط لاگرانژ برای بدست آوردن معادلات متشکله و روش حل چند جمله‌ای و توابع کمکی برای ارضا شرایط مرزی مورد مطالعه قرار گرفته است. رفتار دامنه بزرگ تیرهای مدرج با استفاده از نظریه‌های مختلف تغییر شکل برشی توسط ژیه و همکاران [۳۴] انجام شده است که در آن از روش ریتز و معادلات لاگرانژ برای بدست آوردن و گسسته کردن معادلات استفاده شده است. فرقانی و همکاران [۳۵] به بررسی رفتار فرکانسی غیر خطی تیرهای هدفمند متخلخل ترکدار روی بستر الاستیک با استفاده از تئوری مرتبه سوم ردی پرداخته‌اند.

با توجه به پیچیدگی ذاتی روابط مبتنی بر نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر، روش‌های عددی قدرتمندی برای حل معادلات متشکله برای شرایط مرزی مختلف مورد نیاز است. روش مربعات دیفرانسیلی که اولین بار توسط بلمان و همکاران [۳۸] معرفی شد به طور گسترده‌ای برای حل مشکلات متعدد در زمینه‌های مختلف علم و مهندسی استفاده شده است. برت و مالیک [۳۹] مروری بر توسعه کلی روش این ارائه دادند. همچنین ذکر شده است که روش مربعات دیفرانسیلی، به دلیل دارا بودن دامنه وسیع و سرعت همگرایی بالا، برای مسائل غیر خطی کارآمدتر از تکنیک‌های عددی سنتی مانند روشهای اجزای محدود و تفاوضل محدود است. مزیت اصلی این روش دستیابی به جواب از طریق تعداد کمی از نقاط دامنه، حتی در سیستم معادلات غیر خطی پیچیده است [۴۰].



شکل ۱. تیر دوجهته مدرج هدفمند دوجهته با مقطع غیر یکنواخت باریک شونده روی بستر الاستیک

Fig. 1. Schematic of variable cross section of bi-directional FG beam resting on elastic foundation

همانطور که در مروری بر ادبیات تحقیق نشان داده شد، مطالعات نادری در مورد بررسی فرکانس دامنه بزرگ تیرهای متخلخل مدرج هدفمند دو جهته با مقطع باریک شونده که بر روی بستر الاستیک قرار دارند و بر اساس تئوری مراتب بالاتر، وجود دارد. بنابراین در مطالعه حاضر، تحلیل رفتار فرکانسی دامنه بزرگ تیرهای متخلخل مدرج هدفمند دو جهته بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه سوم ردی[1] برای دو مدل تیر مدرج هدفمند انجام می‌شود. تغییر شکل برشی عرضی تیر مدرج بر اساس مجموع جابجایی‌های خمشی و برشی صفحه میانی تیر در نظر گرفته می‌شود که یک نماد فرمولی جدید برای تجزیه و تحلیل تیرهای دو جهته است. روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته به عنوان یک روش عددی کاربردی و قوی بهمراه یک روش تکراری مستقیم برای بدست آوردن فرکانس‌های غیر خطی تیرهای مدرج دو جهته تحت شرایط مختلف بکار گرفته می‌شود. خواص مواد بر اساس دو نوع قانون توانی و نمایی، در دو جهت ضخامت و محوری تیر تغییر می‌کند. پس از نشان دادن همگرایی روش حل، صحت نتایج با مقایسه با سایر راه حل‌های موجود برای تیرهای همسانگرد مدرج هدفمند مورد بررسی قرار می‌گیرد و در نهایت تأثیر شاخص‌های تخلخل، نسبت ابعادی تیر، شاخص‌های گرادیان مواد در دو جهت، ضریب باریک شوندگی مقطع و پارامترهای بستر الاستیک، بر رفتار فرکانس ارتعاشات دامنه بزرگ تیر برای شرایط مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲- تئوری و فرمول بندی

۲- ۱- سینماتیک و روابط حاکم

یک تیر دو جهته مدرج با طول L و سطح مقطع مستطیل $b\times h$ بر روی لایه‌های الاستیک وینکلر و برشی بستر، در نظر بگیرید که b عرض و h ارتفاع تیر است. مطابق شکل ۱، سیستم مختصات دکارتی x، y و z به ترتیب در جهت طول، عرض و ارتفاع تیر در نظر گرفته می‌شوند.

میدان جابجایی تیر مطابق نظریه تغییر شکل برشی مرتبه سوم و بر اساس برخی مفروضات است که می‌تواند به صورت کلی به صورت زیر نوشته شود [۱ و ۵].

$$U(x,z,t)=u(x,t)-z\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}-f(z)\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \qquad (۱)$$

$$W(x,z,t)=w_b(x,t)+w_s(x,t)$$

که در آن u نشان دهنده جابجایی محوری یک نقطه در سطح میانی تیر است و W_b و W_s به ترتیب جابجایی عرضی قسمت خمشی و برشی یک نقطه در سطح میانی تیر هستند. توزیع تنش برشی عرضی و به تبع آن کرنش در جهت ضخامت تیر هدفمند با تابع شکل $f(z)$[2] نشان داده شده است. تابع شکل $f(z)$ برای برآوردن شرایط مرزی بدون تنش در سطوح بالا و پایین تیر انتخاب شده است، بنابراین ضریب تصحیح برشی مورد نیاز نیست. با توجه به نظریه تغییر شکل برشی مرتبه سوم ردی، $f(z)$ را می‌توان به صورت رابطه (۲) نشان داد [۵]

$$f(z)=\frac{4z^3}{3h^2} \qquad (۲)$$

1 Reddy Shear Deformation Beam Thoery (RSDBT)

2 Shape function

از طرفی مطابق قانون کلی هوک رابطه تنش-کرنش به فرم رابطه (۳) نشان داده می‌شود [۳۱ و ۳۶ و ۳۷]

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \tag{۳}$$

که در آن σ_{ij} تانسور تنش و ε_{ij} تانسور کرنش هستند. λ و μ ثابت‌های لامه می‌باشد که تابع جنس ماده هستند.

در استخراج معادلات حاکم فرضیات زیر لحاظ شده است. الف) تغییر شکل‌ها بزرگ. ب) وجود بارگذاری حرارتی با دمای ثابت. بر اساس میدان جابجایی در نظر گرفته شده در این تئوری، رابطه (۱)، می‌توان کرنش‌ها و در نتیجه تنش‌ها را در تیر به‌صورت زیر استخراج کرد. روابط کرنش- جابجایی غیر خطی با استفاده از تانسور کرنش غیر خطی گرین به فرم کلی (۴) نوشته می‌شود [۳۶ و ۳۷]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}[(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) + (\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j})] \tag{۴}$$

رابطه مشهور ون کارمن که در واقع مؤلفه‌های غیر صفر تانسورکلی کرنش غیر خطی گرین است، به فرم (۵) استخراج می‌گردد [۳۱ و ۳۵]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x})^2 - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \gamma_{xz} &= (1 - \frac{\partial f(z)}{\partial z})\frac{\partial w_s}{\partial x} \end{aligned} \tag{۵}$$

بنابراین با توجه به میدان جابجایی تعریف شده در رابطه (۱) و رابطه غیر خطی ون کارمن و قانون هوک خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \mathrm{E}(x,z)(&-z\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} - f(z)\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} + \\ &\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + \\ &\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^2) \end{aligned} \tag{۶}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= k_s G(x,z) \times \\ &\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial f(z)}{\partial z}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right) = \\ &k_s G(x,z) g(z) \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \end{aligned} \tag{۷}$$

۲- ۲- خواص مواد متخلخل مدرج هدفمند دو جهته

تغییرات کسر حجمی مواد در طول تیر دو جهته مربوط به توزیع قانون توان[1] به گونه‌ای تعریف شده است که ترکیبی از سرامیک و فلز با کسر حجمی متفاوت در امتداد ضخامت و محور تیر بوجود آید (شکل ۱). با پیروی از این قانون توانی از نظر کسر حجمی مواد تشکیل دهنده خواهیم داشت [۲۵]

$$\begin{aligned} V_c + V_m &= 1 \\ V_c &= (\frac{1}{2} + \frac{z}{h})^{P_x}(\frac{x}{l})^{P_z} \end{aligned} \tag{۸}$$

که در آن $-h/۲ \prec z \prec h/۲$ و p_x و p_z شاخص‌های توانی ماده در راستای طول و ضخامت تیر هستند. زمانیکه p_x و p_z صفر می‌شود تیر کاملاً از جنس سرامیک می‌گردد و زمانیکه این شاخصهای توانی به سمت بینهایت میل شود، تیر از جنس فلز خواهد شد. پارامترهای V_c و V_m به ترتیب بیانگر کسر حجمی سرامیک و فلز هستند.

چنانچه $P(x,z)$ هر خصوصیتی از ماده در دو جهت تیر مدرج هدفمند مانند مدول یانگ، چگالی تیر و ضریب پواسون فرض شود و همچنین پیدایش تخلخل در فرایند تولید را با ضریب e. بعنوان ضریب تخلخل تیر در نظر گرفته شود، آنگاه روابط ذیل صادق خواهد بود [۲۵]

$$P(x,z) = P_m(V_m - \frac{e_0}{2}) + P_c(V_c - \frac{e_0}{2}) \tag{۹}$$

که در این رابطه زیر نویس m و c بیانگر اعضا تشکیل دهنده تیر مدرج، فلز و سرامیک هستند.

با جایگذاری رابطه (۹) در (۸) برای تشکیل مدول یانگ E و چگالی ρ

1 Power law Functionally Graded Mateiral (PFGM)

خواهیم داشت [۲۵]

$$\begin{aligned} P(x,z) &= P_m + (P_c - P_m)\times \left(\frac{1}{2}+\frac{z}{h}\right)^{P_z}\left(\frac{x}{l}\right)^{P_x} - \frac{e_0}{2}(P_c+P_m) \\ E(x,z) &= E_m + (E_c - E_m)\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{h}\right)^{P_z}\left(\frac{x}{l}\right)^{P_x} - \frac{e_0}{2}(E_c+E_m) \\ \rho(x,z) &= \rho_m + (\rho_c - \rho_m)\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{h}\right)^{P_z}\left(\frac{x}{l}\right)^{P_x} - \frac{e_0}{2}(\rho_c+\rho_m) \end{aligned} \tag{۱۰}$$

در این مقاله همچنین از مدل نمایی [1]تیر مدرج هدفمند دوجهته برای توصیف تغییرات خواص مواد در جهت طول و ضخامت تیر که به شرح زیر است استفاده می‌شود [۳۳]

$$\begin{aligned} P(x,z) &= P_m e^{p_x(\frac{x}{l}+\frac{1}{2})+p_z(\frac{z}{h}+\frac{1}{2})} \\ E(x,z) &= E_m e^{p_x(\frac{x}{l}+\frac{1}{2})+p_z(\frac{z}{h}+\frac{1}{2})} \\ \rho(x,z) &= \rho_m e^{p_x(\frac{x}{l}+\frac{1}{2})+p_z(\frac{z}{h}+\frac{1}{2})} \end{aligned} \tag{۱۱}$$

۲- ۳- روابط بنیادی

۲- ۳- ۱- معادلات حاکم

معادلات حاکم را می‌توان از اصل همیلتون استخراج کرد. این اصل را می‌توان به صورت (۱۲) بیان کرد [۱ و ۳ و ۴]

$$\int_{t1}^{t2}(\delta K - \delta U - \delta V_{ef})dt = 0 \tag{۱۲}$$

که در آن t پارامتر زمان است و t_1 و t_2 بترتیب زمان‌های اولیه و نهایی هستند؛ همچنین δK تغییرات انرژی جنبشی، δU تغییرات انرژی کرنشی و δV_{ef} معرف تغییرات انرژی پتانسیل بستر الاستیک است.

انرژی کرنشی ناشی از تنش‌های مکانیکی تیر را می‌توان به صورت رابطه (۱۳) داشت [۱ و ۳ و ۴]

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L\int_A(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}+\sigma_{xz}\varepsilon_{xz})\,dAdx \tag{۱۳}$$

سپس با جایگذاری روابط تنش و کرنش به صورت رابطه (۱۴) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} U = \int_0^L \Bigg[& A(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + \\ & \frac{1}{2}A(x)\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^3\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + \\ & \frac{3}{4}A(x)\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^2 + \\ & \frac{1}{2}A(x)\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^3 + \\ & \frac{1}{2}A(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^2 + \\ & \frac{1}{8}A(x)\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^4 + \frac{1}{8}A(x)\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^4 + \\ & \frac{1}{2}A(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^2 + \\ & \frac{1}{2}A_s(x)\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}A(x)\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2 + \\ & \frac{1}{2}D(x)\left(\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{1}{2}B_s(x)\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} - \\ & B(x)\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} - \\ & B_s(x)\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} - \\ & \frac{1}{2}B(x)\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^2 - B(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} - \\ & \frac{1}{2}B(x)\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^2 + D_s(x)\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} \\ & B_s(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} - \\ & \frac{1}{2}B_s(x)\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} + \end{aligned} \tag{۱۴}$$

1 Exponential Functionally Graded Material (EFGM)

$$\frac{1}{2}\mathrm{H}_s(x)\left(\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2}\right)^2\Bigg]dx$$

انرژی جنبشی تیر به فرم رابطه (۱۵)می‌باشد

$$K=\frac{1}{2}\int_0^L\int_A \rho(z)(\dot{U}^2+\dot{W}^2)dAdx \tag{۱۵}$$

که با جایگذاری روابط میدان جابجایی (۱) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}K=\int_0^L\Bigg[&J_2(x)\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x\,\partial t}\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x\,\partial t}-\\&\mathcal{I}_1(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x\,\partial t}+\frac{1}{2}\mathcal{I}_2(x)\left(\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x\,\partial t}\right)^2-\\&J_1(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x\,\partial t}+\frac{1}{2}K_2(x)\left(\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\\&\mathcal{I}_0(x)\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial t}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial t}+\frac{1}{2}\mathcal{I}_0(x)\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial t}\right)^2+\\&\frac{1}{2}\mathcal{I}_0(x)\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2}\mathcal{I}_0(x)\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2\Bigg]dx\end{aligned} \tag{۱۶}$$

و نهایتاً انرژی پتانسیل بستر الاستیک تیر به فرم رابطه (۱۷) می‌باشد

$$\begin{aligned}V_{ef}=\int_0^l\Big(&\frac{1}{2}\Big(k_w(w_b+w_s)^2+k_g\Big(\frac{\partial w_b}{\partial x}+\frac{\partial w_s}{\partial x}\Big)^2\\&+\frac{1}{4}k_N(w_b+w_s)^4\Big)dx\end{aligned} \tag{۱۷}$$

که با جایگذاری روابط میدان جابجایی تعریف شده خواهیم داشت

$$\begin{aligned}V_{ef}=\int_0^L\Bigg[&\mathrm{K}_g\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}+\\&\frac{1}{2}\mathrm{K}_g\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^2+K_N w_b(x,t)^3 w_s(x,t)+\end{aligned} \tag{۱۸}$$

$$\begin{aligned}&\frac{3}{2}K_N w_b(x,t)^2 w_s(x,t)^2+K_N w_b(x,t)w_s(x,t)^3+\\&\frac{1}{4}K_N w_b(x,t)^4+\mathrm{K}_w w_b(x,t)w_s(x,t)+\\&\frac{1}{2}\mathrm{K}_w w_b(x,t)^2+\frac{1}{2}\mathrm{K}_g\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^2+\\&\frac{1}{4}K_N w_s(x,t)^4+\frac{1}{2}\mathrm{K}_w w_s(x,t)^2\Bigg]dx\end{aligned}$$

که در آن K_w و K_g به ترتیب ثابتهای وینکلر و لایه برشی بستر الاستیک هستند که به مشخصات فیزیکی خاک و بستر مانند طول خاک، مدول الاستیک و ضریب پواسون خاک بستگی دارند. K_N ضریب غیر خطی بستر تیر می‌باشد.

با بکاربردن روابط (۱۳) تا (۱۸) در رابطه (۱۲) و انجام انتگرال گیری جز به جز روی پارامترهای مکان و زمان، معادلات حاکم تیر مدرج هدفمند دوجهته بر حسب منتجه های نیرو به شکل روابط پیوست (الف۱۹) – (الف۲۵) بدست می‌آید

که در آن‌ها ثابت‌های تعریف شده به فرم روابط (۲۶) و (۲۷) می‌باشد

$$\begin{aligned}&(\mathcal{I}_0(x),\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2,J_1,J_2,K_2)=\\&\iint\rho(x,z)(1,z,z^2,f(z),zf(z),f^2(z))dA\end{aligned} \tag{۲۶}$$

$$\begin{aligned}&(A(x),B,D,B_s,D_s,H_s)=\\&\iint\mathrm{E}(x,z)(1,z,z^2,f(z),zf(z),f(z)^2)dA\end{aligned} \tag{۲۷}$$

با جایگذاری روابط منتجه های تنشی پیوست (الف۲۲) – (الف۲۵) در معادلات (الف۱۹) – (الف۲۱)، معادلات حاکم تیر مدرج دوجهته بر حسب جابجایی به فرم روابط پیوست (الف۲۸) – (الف۳۰) بدست می‌آید

۲- ۳- ۲- شرایط مرزی

به همین ترتیب برای شرایط مرزی تیر دو جهته، می‌توان شرایط پایانی تیر را بصورت ساده شده پیوست (الف۳۱) – (الف۳۵) استخراج نمود.

۲- ۴- روش حل عددی

روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته[1] به عنوان یکی از روش‌های مرتبه بالا شناخته می‌شود. در روش‌های مرتبه پایین از قبیل تفاضل محدود و اجزای محدود برای به دست آوردن دقت کافی در محاسبات نیازمند تعداد گره‌های محاسباتی زیادی می‌باشد. این در حالی است که در روش‌های مرتبه بالا، حتی با استفاده از تعداد گره‌های محاسباتی کم نیز، نتایج عددی از دقت خوبی برخوردار است و همگرایی به جواب‌ها به سرعت انجام شده و هزینه محاسبات به طور چشمگیری کاهش می‌یابد. در این مسأله علاوه بر آنچه ذکر شد پیچیدگی مسأله به دلیل استفاده از تئوری‌های برشی مرتبه بالا می‌تواند این روش را در حل مسأله در اولویت قرار دهد. نکته مهم در موفقیت به کار بردن این روش چگونگی توزیع شبکه نقاط است. در واقع دقت این روش معمولاً نسبت به نحوه توزیع شبکه نقاط حساس است. توزیع بهینه شبکه نقاط به مرتبه مشتق در شرایط مرزی و تعداد نقاط استفاده شده بستگی دارد. توزیع شبکه نقاط نقش بسیار مهمی در تعیین سرعت همگرایی و پایداری این روش دارد. علی رغم این که این روش گسسته سازی، ساده است اما تحقیقات انجام شده، نشان داده است که توزیع غیر یکنواخت نقاط، منجر به نتایج بهتری خواهد شد. به عنوان یک نوع توزیع غیر یکنواخت می‌توان از توزیع چبیشف-گوس-لوباتو[2] استفاده کرد گسسته سازی معادلات بدست آمده فوق بر مبنای روش مربعات دیفرانسیلی و نقاط منتخب گوس- لوباتو انجام می‌گردد که به عنوان روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته معرفی شده است. مزیت این روش توزیع غیر یکنواخت بر سایر روش‌های دیگر [3]گسسته سازی، این است که تجمع نقاط در نواحی مرزی بیشتر از نواحی میانی خواهد بود که باعث بالا رفتن دقت نتایج خواهد شد تا بدینوسیله معادلات جزیی حاکم و شرایط مرزی آنها به معادلات جبری تبدیل می‌شوند[۳۰ و ۳۱].

$$x_i = \frac{1}{2}\left\{1-\cos\left(\frac{i-1}{N-1}\right)\pi\right\} \qquad i=1,2,\ldots,N-1 \qquad (۳۶)$$

مشتق مرتبه n ام تابع $f(x)$ با در نظر گرفتن نقاط نمونه گسسته شده x_i به شکل زیر نوشته می‌شود[۳۰ و ۳۱].

$$f_x^{(n)}(x_i) = \sum_{i=1}^{N} C_{ij}^{(n)} f(x_i) \qquad (۳۷)$$

که N تعداد نقاط دامنه روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته در جهت طولی است. $C_{ij}^{(n)}$ ثابت‌های تابع وزن در ارتباط با مشتق n ام تابع $f(x)$ است.که x_i جزو نقاط گسسته شده دامنه می‌باشد.

$$C_{ij}^{1} = \frac{M(x_i)}{(x_i - x_j)M(x_j)} \qquad (۳۸)$$

$$M(x_i) = \prod_{j=1,\, j\neq i}^{N} (x_i - x_j) \qquad (۳۹)$$

تابع وزن مشتقات مراتب بالاتر توسط روابط بازگشتی زیر بدست می‌آید.

$$C_{ij}^{(n)} = n\left(C_{ij}^{(n-1)}C_{ij}^{1} - \frac{C_{ij}^{(n-1)}}{(x_i - x_j)}\right) \qquad (۴۰)$$

$$i,j = 1,2,\ldots N$$

$$C_{ij}^{(n)} = n\left(C_{ij}^{(n-1)}C_{ij}^{1} - \frac{C_{ij}^{(n-1)}}{(x_i - x_j)}\right) \qquad (۴۱)$$

$$i,j = 1,2,\ldots N$$

بر اساس این روش مشتقات جزیی یک تابع توسط روابط ذیل بدست می‌آید [۳۰ و ۳۱].

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} f(x_j,t) \qquad i=1,2,\ldots,N\\
&\frac{\partial f^2(x,t)}{\partial x^2}\Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{N} B_{ij} f(x_j,t)\\
&\frac{\partial f^3(x,t)}{\partial x^3}\Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{N} C_{ij} f(x_j,t)\\
&\frac{\partial f^4(x,t)}{\partial x^4}\Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{N} D_{ij} f(x_j,t)
\end{aligned} \qquad (۴۲)$$

1 Generalized Differential Quadrature Method (GDQM)
2 Gauss-Lobatto-Chebyshev

که در آن ; C_{ij} ; D_{ij} ; B_{ij} ; A_{ij} ثابت‌های وزن مرتبه اول، دوم، سوم و چهارم روش مربعات دیفرانسیلی هستند.که به فرم رابطه (۴۳) نیز می‌توان آنها را بازنویسی کرد [۳۰ و ۳۱].

$$\begin{aligned}
&\left[B_{ij}\right]=\left[A_{ij}\right]\left[A_{ij}\right]=\left[A_{ij}\right]^2 \quad , \\
&\left[C_{ij}\right]=\left[A_{ij}\right]\left[B_{ij}\right]=\left[A_{ij}\right]^3 \quad , \\
&\left[D_{ij}\right]=\left[B_{ij}\right]\left[B_{ij}\right]=\left[A_{ij}\right]^4
\end{aligned} \tag{۴۳}$$

بدین ترتیب فرم گسسته معادلات حرکت غیر خطی توسط روش مربعات دیفرانسیلی به فرم ذیل بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}
&\delta u: \\
&\sum_{j=1}^{N}\{\left(A_i B_{ij}+\tilde{A}_i A_{ij}\right)u_j+[\frac{1}{2}A_i A_{ij}\left(\sum_{k=1}^{N}B_{ik}w_{bk}\right)+ \\
&\frac{1}{2}A_i A_{ij}\left(\sum_{k=1}^{N}B_{ik}w_{sk}\right)+\frac{1}{2}\left(A_i B_{ij}+\tilde{A}_i A_{ij}\right)\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{bk}+ \\
&\frac{1}{2}\left(A_i B_{ij}+\tilde{A}_i A_{ij}\right)\left(\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{sk}\right)-B_i C_{ij}-\tilde{B}_i B_{ij}\Bigg]w_{bj}+ \\
&\Bigg[\frac{1}{2}A_i A_{ij}\left(\sum_{k=1}^{N}B_{ik}w_{bk}\right)+\frac{1}{2}A_i A_{ij}\left(\sum_{k=1}^{N}B_{ik}w_{sk}\right)+ \\
&\frac{1}{2}\left(A_i B_{ij}+\tilde{A}_i A_{ij}\right)\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{bk}+\frac{1}{2}\left(A_i B_{ij}+\tilde{A}_i A_{ij}\right)\times \\
&\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{sk}-\tilde{B}_{si}B_{ij}-B_{si}C_{ij}]w_{sj}\}= \\
&={}_{0i}\frac{d^2u_i}{dt^2}-\mathcal{I}_{1i}\sum_{j=1}^{N}A_{ij}\frac{d^2w_{bj}}{dt^2}-J_{1i}\sum_{j=1}^{N}A_{ij}\frac{d^2w_{sj}}{dt^2}
\end{aligned} \tag{۴۴}$$

$$\begin{aligned}
&\delta w_b: \\
&\sum_{j=1}^{N}\{\left(B_i C_{ij}+\tilde{B}_i A_{ij}+2\tilde{B}_i B_{ij}\right)u_j+ \\
&[\frac{1}{2}B_i A_{ij}\left(\sum_{k=1}^{N}C_{ik}w_{bk}\right)+\frac{1}{2}B_i A_{ij}\left(\sum_{k=1}^{N}C_{ik}w_{sk}\right)+ \\
&\left(B_i B_{ij}+\tilde{B}_i A_{ij}\right)\sum_{k=1}^{N}B_{ik}w_{bk}+\left(B_i B_{ij}+A_{ij}\tilde{B}_i\right)\sum_{k=1}^{N}B_{ik}w_{sk}+ \\
&\frac{1}{2}\left(B_i C_{ij}+A_{ij}\tilde{B}_i+2B_{ij}\tilde{B}_i\right)\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{bk}+ \\
&\frac{1}{2}\left(B_i C_{ij}+\tilde{B}_i A_{ij}+2\tilde{B}_i B_{ij}\right)\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{sk}+ \\
&B_{ij}N_{xxi}+A_{ij}\tilde{N}_{xxi}-D_i D_{ij}-2\tilde{D}_i C_{ij}-\tilde{D}_i B_{ij}+ \\
&\mathrm{K}_g B_{ij}-\mathrm{K}_w\delta_{ij}-K_N\delta_{ij}\left(w_{bi}\right)^2- \\
&2K_N\delta_{ij}w_{bi}w_{si}-K_N\delta_{ij}\left(w_{si}\right)^2]w_{bj} \\
&[\frac{1}{2}B_i A_{ij}\left(\sum_{k=1}^{N}C_{ik}w_{bk}\right)+\frac{1}{2}B_i A_{ij}\left(\sum_{k=1}^{N}C_{ik}w_{sk}\right)+ \\
&\left(B_i B_{ij}+\tilde{B}_i A_{ij}\right)\sum_{k=1}^{N}B_{ik}w_{bk}+\left(B_i B_{ij}+\tilde{B}_i A_{ij}\right)\sum_{k=1}^{N}B_{ik}w_{sk}+ \\
&\frac{1}{2}\left(B_i C_{ij}+\tilde{B}_i A_{ij}+2\tilde{B}_i B_{ij}\right)\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{bk}+ \\
&\frac{1}{2}\left(B_i C_{ij}+\tilde{B}_i A_{ij}+2\tilde{B}_i B_{ij}\right)\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{sk}+ \\
&A_{ij}\tilde{N}_{xxi}+B_{ij}N_{xxi}-D_{si}D_{ij}-2\tilde{D}_{si}C_{ij}- \\
&\tilde{D}_{si}B_{ij}+B_{ij}\mathrm{K}_g-\delta_{ij}\mathrm{K}_w-K_N\delta_{ij}\left(w_{bi}\right)^2- \\
&2K_N\delta_{ij}w_{bi}w_{si}-K_N\delta_{ij}\left(w_{si}\right)^2\Bigg]w_{sj}\Bigg\}= \\
&\mathcal{I}_{1i}\sum_{j=1}^{N}A_{ij}\frac{d^2u_j}{dt^2}+\tilde{\mathcal{I}}_{1i}\frac{d^2u_i}{dt^2}+\mathcal{I}_{0i}\frac{d^2w_{bi}}{dt^2}- \\
&\mathcal{I}_{2i}\sum_{j=1}^{N}B_{ij}\frac{d^2w_{bj}}{dt^2}-\tilde{\mathcal{I}}_{2i}\sum_{j=1}^{N}A_{ij}\frac{d^2w_{bj}}{dt^2} \\
&+\mathcal{I}_{0i}\frac{d^2w_{si}}{dt^2}-J_{2i}\sum_{j=1}^{N}B_{ij}\frac{d^2w_{sj}}{dt^2}-\tilde{J}_{2i}\sum_{j=1}^{N}A_{ij}\frac{d^2w_{sj}}{dt^2}
\end{aligned} \tag{۴۵}$$

$$\begin{aligned}
&\delta w_s: \\
&\sum_{j=1}^{N}\{\left(B_{si}C_{ij}+\tilde{B}_{si}A_{ij}+2\tilde{B}_{si}B_{ij}\right)u_j+ \\
&[\frac{1}{2}B_{si}A_{ij}\left(\sum_{k=1}^{N}C_{ik}w_{bk}\right)+\frac{1}{2}B_{si}A_{ij}\left(\sum_{k=1}^{N}C_{ik}w_{sk}\right)+ \\
&\left(B_{si}B_{ij}+\tilde{B}_{si}A_{ij}\right)\sum_{k=1}^{N}B_{ik}w_{bk}+\left(B_{si}B_{ij}+\tilde{B}_{si}A_{ij}\right)\times \\
&\sum_{k=1}^{N}B_{ik}w_{sk}+\frac{1}{2}\left(B_{si}C_{ij}+\tilde{B}_{si}A_{ij}+2\tilde{B}_{si}B_{ij}\right)\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{bk}+ \\
&\frac{1}{2}\left(B_{si}C_{ij}+\tilde{B}_{si}A_{ij}+2\tilde{B}_{si}B_{ij}\right)\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{sk}+ \\
&B_{ij}N_{xxi}+A_{ij}\tilde{N}_{xxi}-D_{si}D_{ij}-2\tilde{D}_{si}C_{ij}-\tilde{D}_{si}B_{ij}+ \\
&\mathrm{K}_g B_{ij}-\mathrm{K}_w\delta_{ij}-K_N\delta_{ij}\left(w_{bi}\right)^2-2K_N\delta_{ij}w_{bi}w_{si}- \\
&K_N\delta_{ij}\left(w_{si}\right)^2]w_{bj}+[\frac{1}{2}B_{si}A_{ij}\left(\sum_{k=1}^{N}C_{ik}w_{bk}\right)+
\end{aligned} \tag{۴۶}$$

$$\frac{1}{2}B_{si}A_{ij}\left(\sum_{k=1}^{N}C_{ik}w_{sk}\right)+\left(B_{si}B_{ij}+\tilde{B}_{si}A_{ij}\right)\sum_{k=1}^{N}B_{ik}w_{bk}+$$
$$\left(B_{si}B_{ij}+\tilde{B}_{si}A_{ij}\right)\sum_{k=1}^{N}B_{ik}w_{sk}+$$
$$\frac{1}{2}\left(B_{si}C_{ij}+\tilde{B}_{si}A_{ij}+2\tilde{B}_{si}B_{ij}\right)\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{bk}+$$
$$\frac{1}{2}\left(B_{si}C_{ij}+\tilde{B}_{si}A_{ij}+2\tilde{B}_{si}B_{ij}\right)\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{sk}+$$
$$A_{ij}\tilde{N}_{xxi}+B_{ij}N_{xxi}-H_{si}D_{ij}-2\tilde{H}_{si}C_{ij}-\tilde{H}_{si}B_{ij}+$$
$$A_{si}B_{ij}+\tilde{A}_{si}A_{ij}+B_{ij}K_g-\delta_{ij}K_w-K_N\delta_{ij}\left(w_{bi}\right)^2-$$
$$2K_N\delta_{ij}w_{bi}w_{si}-K_N\delta_{ij}\left(w_{si}\right)^2\Big]w_{sj}\Big\}=$$
$$J_{1i}\sum_{j=1}^{N}A_{ij}\frac{d^2u_j}{dt^2}+\tilde{J}_{1i}\frac{d^2u_i}{dt^2}+\mathcal{I}_{0i}\frac{d^2w_{bi}}{dt^2}-$$
$$\tilde{J}_{2i}\sum_{j=1}^{N}A_{ij}\frac{d^2w_{bj}}{dt^2}-J_{2i}\sum_{j=1}^{N}B_{ij}\frac{d^2w_{bj}}{dt^2}+$$
$$\mathcal{I}_{0i}\frac{d^2w_{si}}{dt^2}-K_{2i}\sum_{j=1}^{N}B_{ij}\frac{d^2w_{sj}}{dt^2}-\tilde{K}_{2i}\sum_{j=1}^{N}A_{ij}\frac{d^2w_{sj}}{dt^2} \tag{۴۶}$$

که در آن

$$\tilde{\alpha}=\frac{d\alpha}{dx}\quad for$$
$$\left(\alpha=A,A_s,B,B_s,D,D_s,H_s,\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2,J_1,J_2,K_2,N_{xx}\right) \tag{۴۷}$$

$$N_{xxi}=\sum_{j=1}^{N}\{A_iA_{ij}u_j+(\frac{1}{2}A_iA_{ij}\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{sk}+$$
$$\frac{1}{2}A_iA_{ij}\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{bk}-B_iB_{ij})w_{bj}+$$
$$(\frac{1}{2}A_iA_{ij}\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{bk}+\frac{1}{2}A_iA_{ij}\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{sk}-B_{si}B_{ij})w_{sj}\} \tag{۴۸}$$

فرم گسسته شرایط مرزی به شکل روابط ذیل می‌باشد.

$$u=0\quad or\quad \sum_{j=1}^{N}\{A_iA_{ij}u_j+$$
$$(\frac{1}{2}A_iA_{ij}\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{bk}+\frac{1}{2}A_iA_{ij}\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{sk}-$$
$$B_iB_{ij})w_{bj}+(\frac{1}{2}A_iA_{ij}\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{bk}+$$
$$\frac{1}{2}A_iA_{ij}\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{sk}-B_{ij}B_{si})w_{sj}\}=0 \tag{۴۹}$$

$$w_b=0\quad or$$
$$\sum_{j=1}^{N}\{u_j\left(B_iB_{ij}+A_{ij}\tilde{B}_i\right)+(\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}B_{ik}w_{bk}\right)A_{ij}B_i+$$
$$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}B_{ik}w_{sk}\right)A_{ij}B_i+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{bk}\right)B_iB_{ij}+$$
$$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{sk}\right)B_iB_{ij}-C_{ij}D_i+A_{ij}N_{xxi}+$$
$$A_{ij}K_g+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{bk}\right)A_{ij}\tilde{B}_i+$$
$$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{sk}\right)A_{ij}\tilde{B}_i-B_{ij}\tilde{D}_i)w_{bj}+$$
$$\left(\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}B_{ik}w_{bk}\right)A_{ij}B_i+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}B_{ik}w_{sk}\right)A_{ij}B_i+\right.$$
$$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{bk}\right)B_iB_{ij}+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{sk}\right)B_iB_{ij}-$$
$$C_{ij}D_{si}+A_{ij}N_{xxi}+A_{ij}K_g+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{bk}\right)A_{ij}\tilde{B}_i+$$
$$\left.\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{sk}\right)A_{ij}\tilde{B}_i-B_{ij}\tilde{D}_{si}\right)w_{sj}\Big\}=$$
$$\mathcal{I}_{1i}\sum_{j=1}^{N}A_{ij}\frac{d^2u_j}{dt^2}-\mathcal{I}_{2i}\sum_{j=1}^{N}B_{ij}\frac{d^2w_{bj}}{dt^2}-J_{2i}\sum_{j=1}^{N}B_{ij}\frac{d^2w_{sj}}{dt^2} \tag{۵۰}$$

$$
\begin{aligned}
& w_s = 0 \quad \text{or} \\
& \sum_{j=1}^{N}\Big\{u_j\left(B_{ij}B_{si}+A_{ij}\tilde{B}_{si}\right)+\left(\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}B_{ik}w_{bk}\right)A_{ij}B_{si}+\right. \\
& \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}B_{ik}w_{sk}\right)A_{ij}B_{si}+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{bk}\right)B_{ij}B_{si}+ \\
& \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{sk}\right)B_{ij}B_{si}-C_{ij}D_{si}+A_{ij}N_{xxi}+A_{ij}K_g+ \\
& \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{bk}\right)A_{ij}\tilde{B}_{si}+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{sk}\right)A_{ij}\tilde{B}_{si}-B_{ij}\tilde{D}_{si}\Big)w_{bj}+ \\
& \left(A_{si}A_{ij}+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}B_{ik}w_{bk}\right)A_{ij}B_{si}+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}B_{ik}w_{sk}\right)A_{ij}B_{si}+\right. \\
& \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{bk}\right)B_{ij}B_{si}+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{sk}\right)B_{ij}B_{si}+ \\
& A_{ij}N_{xxi}+A_{ij}K_g+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{bk}\right)A_{ij}\tilde{B}_{si}+ \\
& \left.\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{sk}\right)A_{ij}\tilde{B}_{si}-B_{ij}\tilde{H}_{si}-C_{ij}H_{si}\right)w_{sj}\Big\}= \\
& J_{1i}\sum_{j=1}^{N}A_{ij}\frac{d^2u_j}{dt^2}-J_{2i}\sum_{j=1}^{N}B_{ij}\frac{d^2w_{bj}}{dt^2}-K_{2i}\sum_{j=1}^{N}B_{ij}\frac{d^2w_{sj}}{dt^2}
\end{aligned}
\tag{۵۱}
$$

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial w_b}{\partial x}=0 \quad or \quad \sum_{j=1}^{N}\{A_{ij}B_iu_j+ \\
& \left(\frac{1}{2}B_iA_{ij}\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{bk}+\frac{1}{2}A_{ij}B_i\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{sk}-B_{ij}D_i\right)w_{bj} \\
& +\left(\frac{1}{2}A_{ij}B_i\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{bk}+\frac{1}{2}A_{ij}B_i\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{sk}-B_{ij}D_{si}\right)w_{sj}\Big\}=0 \\
& \frac{\partial w_s}{\partial x}=0 \quad or \quad \sum_{j=1}^{N}\{A_{ij}B_{si}u_j+(\frac{1}{2}A_{ij}B_{si}\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{bk}+ \\
& \frac{1}{2}A_{ij}B_{si}\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{sk}-B_{ij}D_{si})w_{bj}+ \\
& w_{sj}(\frac{1}{2}A_{ij}B_{si}\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{bk}+\frac{1}{2}A_{ij}B_{si}\sum_{k=1}^{N}A_{ik}w_{sk}-B_{ij}H_{si})\}=0
\end{aligned}
\tag{۵۲}
$$

به منظور ساده سازی روابط (۴۴)، (۴۵) و (۴۶) و شرایط مرزی مربوطه، آن‌ها به فرم معادله خلاصه شده ماتریسی ذیل نوشته می‌شوند.

$$(K_L+K_{NL})d+M\ddot{d}=0 \tag{۵۳}$$

که در آن M ماتریس جرم بوده و K_L و K_{NL} به ترتیب ماتریس‌های خطی و غیر خطی سفتی تیر می‌باشند.

یکی از نکات مهم در اعمال روش مربعات دیفرانسیلی، اعمال شرط مرزی بر روی مرزهای ناحیه حل مسأله می‌باشد. روش‌های زیادی برای این امر وجود دارد که جزییات آنها را می‌توان درمرجع [۳۸] یافت. جامع‌ترین روش که در تمامی مسائل کارآیی دارد تقسیم ناحیه حل به دو بخش نقاط درونی و نقاط مرزی می‌باشد. در این تحقیق از این روش برای اعمال شرایط مرزی استفاده می‌گردد. در حالت کلی معادله حاکم مانند رابطه (۵۳) می‌باشد که در آن

$$\boldsymbol{b,d} \quad b=\left\{\left\{\bar{u}\right\},\left\{\bar{w}_b\right\},\left\{\bar{w}_s\right\}\right\}^T \text{ و } d=\left\{\left\{\bar{u}\right\},\left\{\bar{w}_b\right\},\left\{\bar{w}_s\right\}\right\}^T$$

به عنوان بردار شناخته می‌شوند که b مشخصه کننده نقاط روی مرز و d مشخص کننده نقاط دامنه است.

برای آنالیز ارتعاشات آزاد و هارمونیک مساله روش ذیل در نظر گرفته می‌شود.

$$
\begin{aligned}
& d=d_0e^{i\omega t}\ ,\ u=\bar{u}\,e^{i\omega t}\ , \\
& w_b=\bar{w}_b\,e^{i\omega t}\ ,\ w_s=\bar{w}_s\,e^{i\omega t}
\end{aligned}
\tag{۵۴}
$$

که در آن ω فرکانس بی بعد بوده و d. ثابت است نامعلوم که جهت معرفی مؤلفه‌های جابجایی است.

با جایگذاری معادله (۵۴) در معادله (۵۳) خواهیم داشت.

$$(K_L+K_{NL}-\omega^2M)d_0=0 \tag{۵۵}$$

$$\begin{bmatrix} M_{bb} & 0 \\ 0 & M_{dd}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{d}_b \\ \ddot{d}_d\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} K_{bb}^L+K_{bb}^{NL} & K_{bd} \\ K_{db} & K_{dd}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}d_b \\ d_d\end{Bmatrix}=\{0\} \tag{۵۶}$$

با استفاده از کاربرد روش هارمونیک بالانس، همانطور که ملک زاده [۳۰] نشان داد، خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} K_{bb}^L+\frac{3}{4}K_{bb}^{NL} & K_{bd} \\ K_{db} & K_{dd}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}d_b \\ d_d\end{Bmatrix}- \\
& \omega^2\begin{bmatrix} M_{bb} & 0 \\ 0 & M_{dd}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}d_b \\ d_d\end{Bmatrix}=\{0\}
\end{aligned}
\tag{۵۷}
$$

کاملاً مشخص است که معادله (۵۷) یک مساله غیر خطی مقدار ویژه

جدول ۱. خصوصیات ماده تیر

Table 1. Material properties of Beam

	υ	ρ(kg/m^3)	E (GPa)
تنگستن	۰/۳	۱۹۲۵۰	۴۱۱
مس	۰/۳	۸۹۶۰	۱۲۰

می‌باشد که مستقیماً با روش‌های حل معمول، قابل حل نیست. در این مقاله از یک روش تکراری مستقیم در کنار روش مقدار ویژه جهت حل معادلات مساله استفاده می‌شود که این روش حل شامل گام‌های ذیل است.

مرحله اول: K_{NL} را نادیده گرفته شود. ω_L فرکانس بی بعد خطی و بردار ویژه مربوط به آن ازمعادله (۵۷) بدست می‌آید.

مرحله دوم : از بردار ویژه بدست آمده برای محاسبه K_{NL} استفاده می‌شود. یک مقدار ویژه و بردار ویژه متعلق به آن بدست می‌آید. در این مرحله بردارهای ویژه متعلق به معادله (۵۷) نسبت به خیز مقطع مناسب تیر مدرج هدفمند (x_m) نرمالایز می‌شوند. سپس این بردارهای ویژه در مقدار (w_m/r) ضرب می‌شوند. که در آن w_m مقدار جابجایی عرضی دلخواه تیر در مقطع $x = x_m$ می‌باشد و $r = \sqrt{bh^3/12A}$ شعاع ژیراسیون مقطع تیر است.

مرحله سوم : روش تکراری برای یک مقدار (w_m/r) تکرار می‌گردد تا مقادیر غیر خطی فرکانس از دو مرحله پیاپی روش تکراری ۰/۰۰۰۱ شود. سپس فرکانس غیر خطی ω_{NL} بدست می‌آید.

۳- نتایج عددی و بحث

برای تأیید صحت نتایج، مقایسه با سایر راه حل‌های موجود انجام می‌شود. برای بررسی ارتعاشی دامنه بزرگ، تیر دو جهته مدرج ساخته شده از تنگستن[1] در لایه بالایی و مس[2] در لایه زیرین فرض می‌شود. سپس روند همگرایی و دقت نتایج برای این تیرها در شرایط مرزی مختلف برای فرمول‌های ارائه شده مورد بررسی قرار می‌گیرد.

خواص این مواد در جدول ۱ لیست شده است [۳۴].

پارامتر فرکانس بدون بعد به صورت زیر تعریف می‌شود [۱].

$$\lambda_n = \frac{\omega_n L^2}{h}\sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \qquad (۵۸)$$

که در آن ρ_m و E_m به ترتیب چگالی و مدول یانگ قسمت فلزی می‌باشند.

همچنین ، ثابت‌های بدون بعد بستر الاستیک مورد استفاده در استخراج نتایج عددی به‌صورت رابطه (۵۹) بیان شده است [۱].

$$K_w = \frac{k_w L^4}{E_m I} \quad , \quad K_g = \frac{k_g L^2}{\pi^2 E_m I} \qquad (۵۹)$$

که در آن I، ارتفاع و عرض تیر سطح مقطع متغیر، عبارت است از

$$I = \frac{bh^3}{12} \ , \quad h(x) = h_0(1-\beta\frac{x}{l}), \quad b(x) = b_0(1-\beta\frac{x}{l}) \qquad (۶۰)$$

در همه موارد تحت بررسی، در ابتدا، روند همگرایی پارامتر فرکانس بدون بعد دامنه بزرگ تیر دو جهته از طریق تعداد نقاط شبکه در طول تیر دو جهته مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در جداول ۲ و ۳ روند همگرایی پارامتر فرکانس بدون بعد دامنه بزرگ تیر دو جهته برای سه مود ارتعاشی و برای شرایط مرزی ساده و دو سر گیردار ارائه شده است . مشاهده که نتایج همگرایی با N_x = ۱۳ بدست می‌آید.

در جدول ۴ نسبت فرکانس غیر خطی به خطی تیرها $\lambda = \omega_{NL}/\omega_L$ در

1 Tungsten (W)
2 Cupper (Cu)

جدول ۲. رفتار همگرایی پارامتر نسبت فرکانسی $\lambda_i = \omega_{NL}/\omega_L$ برای تیر دوجهته و با شرایط مرزی دو سر ساده و $\omega_{max}/r =$ ۰/۵

Table 2. Convergence trend of the frequency parameters $\lambda_i = \omega_{NL}/\omega_L$ (RBT) for simply supported Bi-di FG beam ($K_w = K_g = 0$, $e_0 = 0$, $p_z = 2$, $\omega_{max}/r = 0.5$)

L/h	N_x تعداد نقاط گسسته سازی						
	شماره مود	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷
۵	۱	۱/۱۰۱	۱/۱۱۱۸	۰/۹۷۲۵	۰/۹۷۲۵	۰/۹۷۲۵	۰/۹۷۲۴
	۲	۱/۰۶۰۲	۱/۰۵۰۲	۱/۰۵۱۷	۱/۰۵۱۷	۱/۰۵۱۷	۱/۰۵۱۷
	۳	۱/۰۰۲۱	۰/۸۴۵۴	۰/۸۴۵۰	۰/۸۲۲۹	۰/۸۲۲۹	۰/۸۲۲۸
۱۰	۱	۰/۹۵۸۸	۰/۹۷۰۰	۰/۹۶۹۹	۰/۹۶۹۱	۰/۹۶۹۱	۰/۹۶۹۰
	۲	۱/۰۶۲۶	۱/۰۴۲۴	۱/۰۴۵۹	۱/۰۴۶۰	۱/۰۴۶۱	۱/۰۴۶۱
	۳	۱/۰۴۱۱	۱/۰۵۲۶	۱/۰۸۰۱	۱/۰۷۳۶	۱/۰۷۳۶	۱/۰۷۴۶۴

جدول ۳. رفتار همگرایی پارامتر نسبت فرکانسی $\lambda_i = \omega_{NL}/\omega_L$ برای تیر دوجهته و با شرایط مرزی دو سر گیردار و $\omega_{max}/r =$ ۰/۴

Table 1. Convergence trend of the frequency parameters (RBT) for clamped-clamped Bi-di FG beam ($K_w = K_g = 0$, $e_0 = 0$, $p_x = 2$, $\omega_{max}/r = 0.4$)

L/h	N_x تعداد نقاط گسسته سازی شده						
	شماره مود	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷
۵	۱	۰/۹۸۹۹	۱/۰۰۳۶۲	۱/۰۱۳۳	۱/۰۱۳۳	۱/۰۱۳۴	۱/۰۱۴۴
	۲	۱/۰۱۱۶	۱/۰۱۰۹	۱/۰۱۸۷	۱/۰۱۸۸	۱/۰۱۸۷	۱/۰۱۸۹
	۳	۱/۰۰۷۰۱	۱/۰۷۹۲	۱/۰۷۹۳	۱/۰۷۹۳	۱/۰۷۹۲	۱/۰۷۹۱
۱۰	۱	۱/۰۰۵۳۶	۱/۰۰۹۹	۱/۰۰۹۷	۱/۰۰۵۵	۱/۰۰۵۴	۱/۰۰۵۵
	۲	۱/۰۰۱۲۹	۱/۰۰۱۳۷	۱/۰۰۱۳۹	۱/۰۰۲۳۲	۱/۰۰۲۳۲	۱/۰۰۲۳۱
	۳	۱/۰۰۲۲۹	۱/۰۰۳۰۱	۱/۰۰۳۶۹	۱/۰۰۳۱۵	۱/۰۰۳۱۵	۱/۰۰۳۱۳

جدول ۴. بررسی صحت نتایج نسبت فرکانس غیر خطی $\lambda_i = \omega_{NL}/\omega_L$ تئوری تیموشنکو و اویلر برنولی [۳۰]و کار حاضر (تئوری ردی)

Table 4. Comparison of frequency parameter $\lambda_i = \omega_{NL}/\omega_L$ between EBT, TBT and present work (RBT) for FG beam

شرایط مرزی	Wm/r=۱			Wm/r=۲			Wm/r=۳		
	RBT (کار حاضر)	TBT	EBT	RBT (کار حاضر)	TBT	EBT	RBT (کار حاضر)	TBT	EBT
C-C (λ_1)	۱/۰۳۵۷	۱/۰۲۴۰	۱/۰۲۲۲	۱/۱۳۵۲	۱/۰۹۳۹	۱/۰۸۵۸	۱/۲۸۱۸	۱/۲۰۴۸	۱/۱۸۳۳
C-C (λ_2)	۱/۰۸۵۴	۱/۰۶۳۰	۱/۰۴۸۵	۱/۲۹۸۶	۱/۲۵۰۵	۱/۱۷۹۳	۱/۵۷۱۵	۱/۵۹۸۷	۱/۳۶۳۶
S-C (λ_1)	۱/۰۸۰۹	۱/۰۶۵۳	۱/۰۶۴۱	۱/۲۸۲۰	۱/۲۳۷۶	۱/۲۳۱۹	۱/۵۳۷۱	۱/۴۷۶۷	۱/۷۶۰۵

شرایط مرزی دو سر گیردار[1] و گیردار– ساده[2] برای مود اول و دوم محاسبه شده است و با نتایج بدست آمده توسط ملک زاده و شجاعی [۳۰]. بر اساس تئوری اویلر برنولی[3]و تیموشنکو[4] مقایسه می‌شود. همانطور که ملاحظه می‌شود، نزدیکی خوبی بین نتایج کار حاضر بر اساس تئوری برشی مرتبه سوم ردی[5] و سایر روش‌ها مشاهده می‌شود. اختلاف مشاهده شده در نتایج جدول ۴ بدلیل تفاوت درجه تئوری‌هاست که قابل قبول می‌باشد.

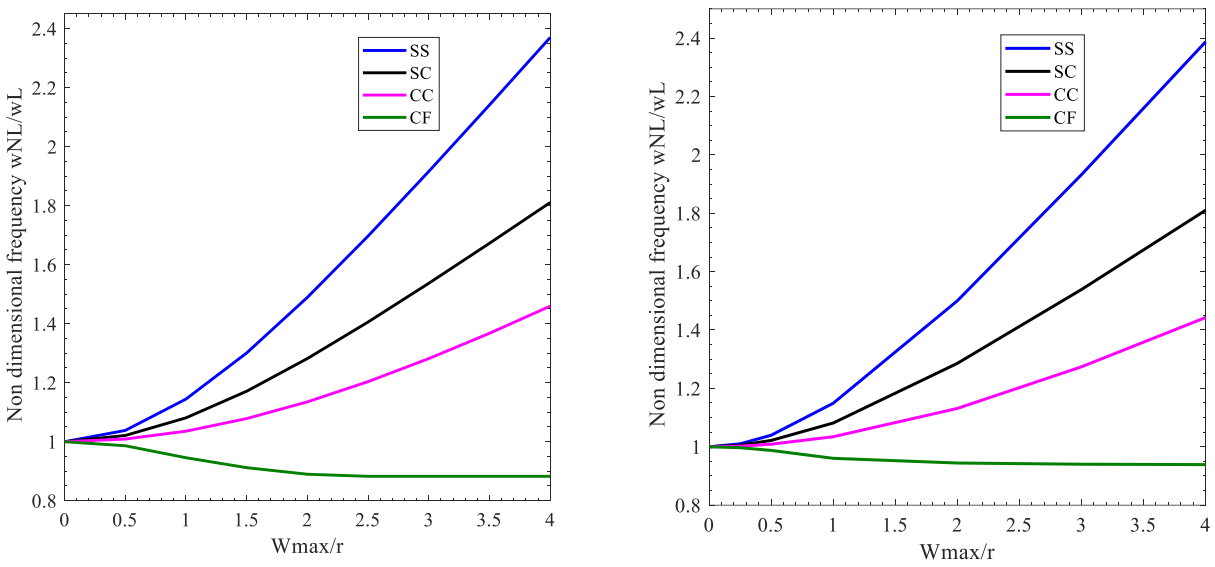
شکل ۲ نسبت فرکانس غیرخطی به خطی $\lambda = \omega_{NL}/\omega_L$ تیرهای همسانگرد با شرایط مرزی متفاوت بر حسب مقادیر متفاوت نسبت دامنه را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود حداقل روند به شرایط مرزی گیردار–آزاد و حداکثر تغییرات به شرایط مرزی ساده، با توجه به این واقعیت که هندسه و تقارن شرایط مرزی تأثیر بسزایی بر نسبت فرکانس دارد، اختصاص می‌یابد. علاوه بر این واضح است که افزایش مقادیر نسبت دامنه تأثیر قابل توجهی در افزایش نسبت فرکانس غیر خطی به خطی $\lambda = \omega_{NL}/\omega_L$ دارد. یکی از ویژگی‌های مهم این تحلیل بررسی مساله فرکانس‌های ارتعاشات تغییر شکل‌های بزرگ می‌باشد که بخوبی در این نمودار وابستگی با نسبتهای دامنه نشان داده شده است. بطوریکه در نسبت‌های دامنه کمتر از ۰/۵ شیب نمودار تغییرات فرکانس غیر خطی بسیار کم بوده و در بازه ۰/۵ تا ۲ روند تغییرات با شیب تند رو به افزایش است و این روند در نهایت با شیب ثابت ادامه می‌یابد. در حالت تیر یکسر گیردار[6] با افزایش نسبت دامنه فرکانس غیر خطی کاهش دارد.

شکل ۳ اثر ضریب باریک شوندگی سطح مقطع بر نسبت فرکانس غیرخطی به خطی $\lambda = \omega_{NL}/\omega_L$ برای شرایط مرزی دو سر گیردار و شرایط مرزی ساده بر حسب مقادیر متفاوت نسبت دامنه را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش ضریب باریک شوندگی مقطع تیر، نسبت فرکانسی غیر خطی افزایش می‌یابد که دلیل آن افزایش سفتی کلی تیر در حالت غیر خطی نسبت به خطی است. علاوه بر این واضح است که افزایش مقادیر نسبت دامنه تأثیر قابل توجهی در افزایش نسبت فرکانس غیر خطی به خطی $\lambda = \omega_{NL}/\omega_L$ دارد.

اثر تغییرات سفتی پارامترهای بستر الاستیک بر نسبت فرکانس غیر خطی به خطی $\lambda = \omega_{NL}/\omega_L$ یک تیر همسانگرد در شکل ۴ برای شرایط مرزی ساده نشان داده شده است، از این نمودار می‌توان که با افزایش ضریب سفتی پایه وینکلر K_w و ضریب برشی K_g، نسبت فرکانس غیر خطی به خطی به تدریج کاهش یافته و سپس ثابت می‌ماند. با این حال، تأثیر افزایش سفتی برشی بستر بر کاهش نسبت فرکانس غیر خطی به خطی بیشتر از تأثیر سفتی پایه وینکلر می‌باشد.

در شکل ۵ اثر افزایش ضرایب تخلخل بر نسبت فرکانس غیر خطی به خطی تیر مدرج هدفمند دو بعدی برای دو مدل توانی و نمایی و برای شاخص مواد P_Z و P_X مختلف بررسی شده است. قابل توجه است که افزایش مقادیر P_Z یا P_X منجر به کاهش تدریجی نسبت فرکانس غیر

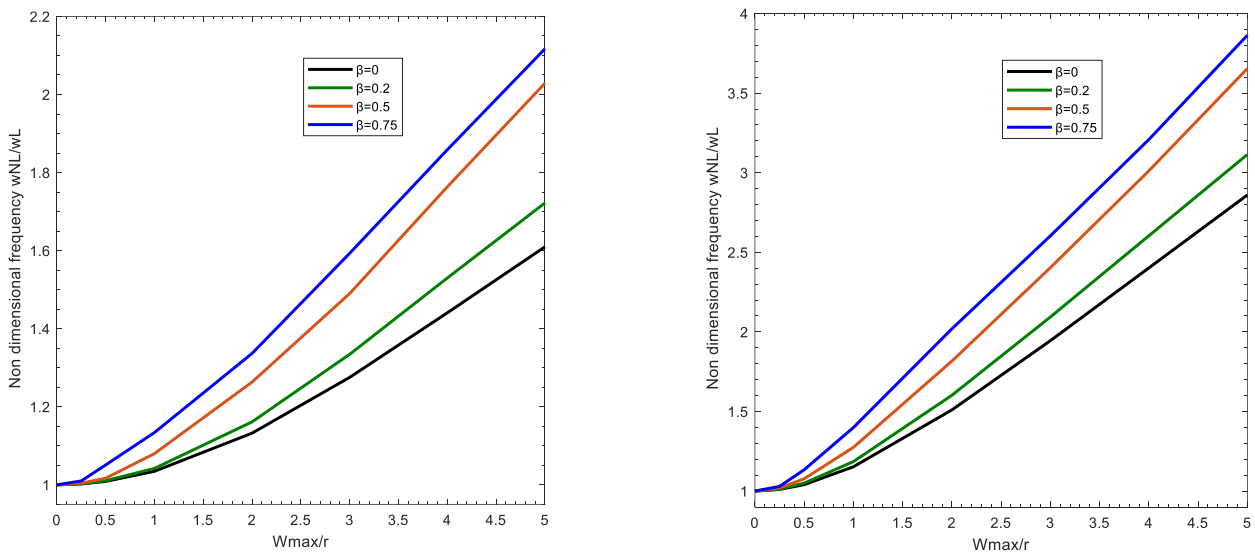
1 Clamped-Clamped (CC)
2 Simply-Clamped (SC)
3 Euler-bernuli Beam Theory (EBT)
4 Timoshenko Beam Theory (TBT)
5 Reddy Beam Theory (RBT)
6 Clamped-Free (CF)



(a) L/h=100 (b) L/h=8

شکل ۱. بررسی شرایط مرزی بر روی رفتار غیر خطی برای یک تیر با L/h=۸ و L/h =۱۰۰ و نسبت دامنه ω_{NL}/ω_L متغیر

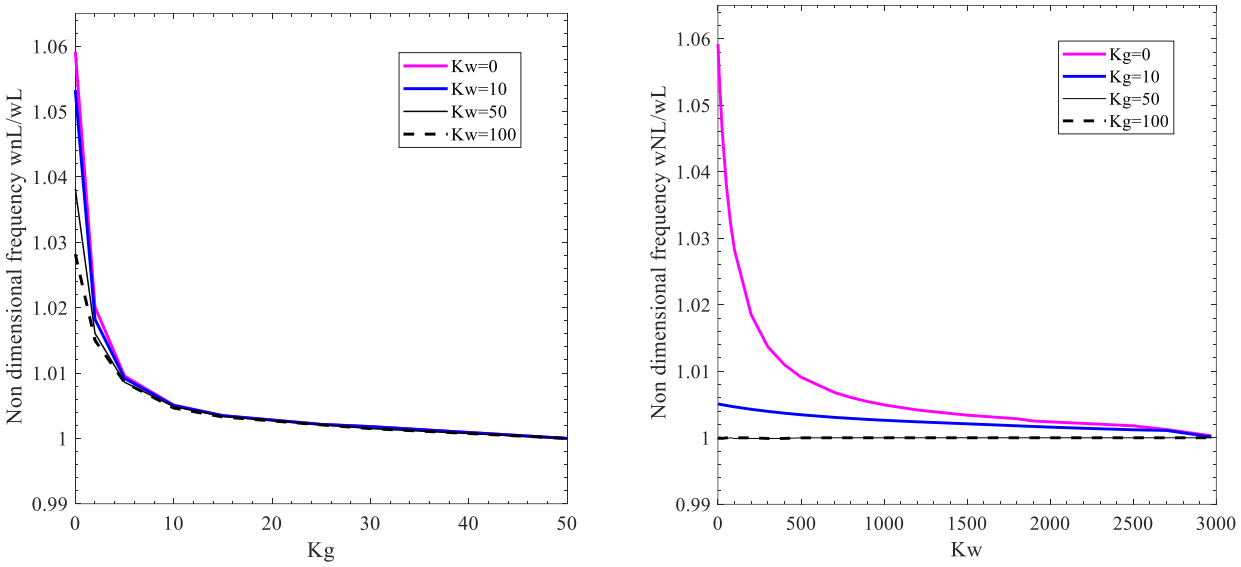
Fig. 1. Effect of different boundary conditions on Nonlinear-to-linear frequency ratios for the isotropic beam for L/h=100, L/h=8 versus different amplitude ratio values $\omega_{\max}/r$



(a) Clamped-Clapmped (b) Simply-Support

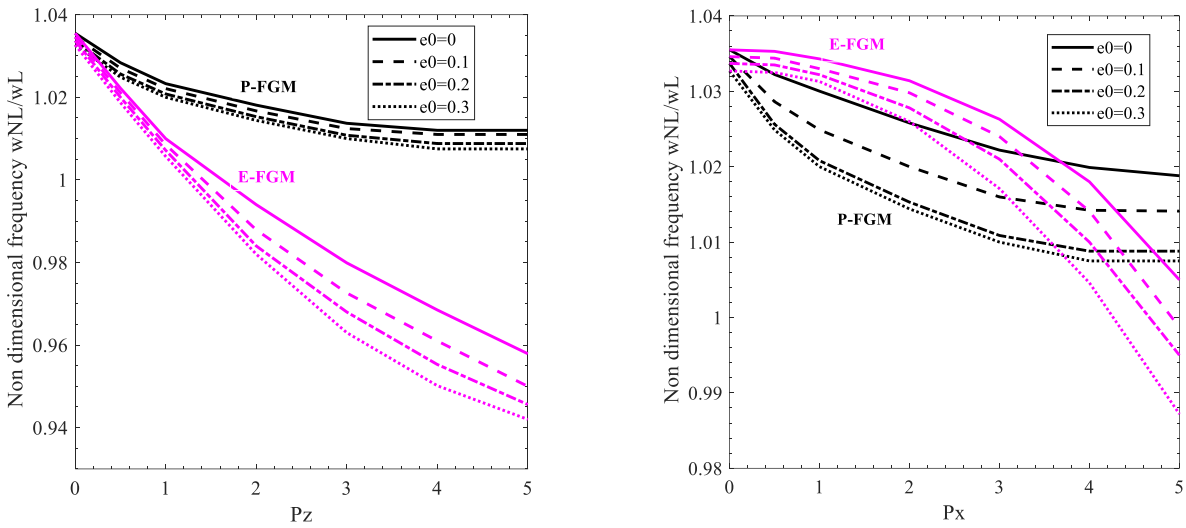
شکل ۳. تأثیر ضریب باریک شوندگی تیر برنسبت فرکانس غیر خطی ω_{NL}/ω_L با l/h =۶ در شرایط مرزی دو سر گیردار و ساده بر حسب نسبت دامنه $\omega_{\max}/r$

Fig. 3. Effect of Taperded ratio β on Nonlinear-to-linear frequency variations ω_{NL}/ω_L for L/h=6 versus amplitude ratios ($\omega_{\max}/r$) for Clamped-Clamped and Simply-Support boundary conditions.



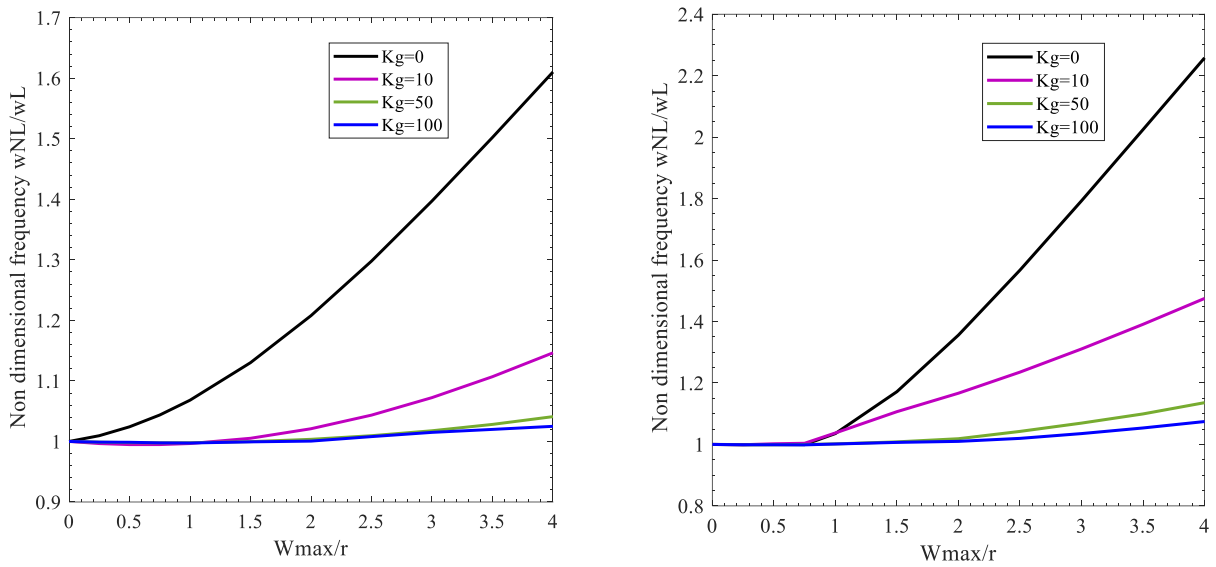
شکل ۴. اثرات ضرایب سفتی بستر K_w و K_g بر رفتار غیر خطی تیر همسانگرد برای نسبت دامنه $\omega_{\max}/r = ۰/۶$ در شرایط مرزی ساده

Fig. 4. Effect of the foundation stiffness K_w and K_g on nonlinear to linear frequency ratio of SS isotropic FG beam (l/h=5 , $\omega_{\max}/r = 0.6$)



شکل ۵. تغییرات نسبت فرکانس غیر خطی تیرمدرج هدفمند دوجهته متخلخل دو سر گیردار بر حسب گرادیان ماده p_Z ، p_X

Fig. 5. Variation of nonlinear to linear frequency ratio of C-C porous beams versus power law indexes p_Z , p_X for different porosity coefficients (l/h=5 , $\omega_{\max}/r = 1$)



(a) Clamp-Clamp CC

(b) Simply Support SS

شکل ۶. تأثیر ضریب برشی K_g بر رفتار غیر خطی تیر مدرج هدفمند با P_Z =۲ در شرایط مرزی دو سر گیردار و ساده بر حسب نسبتهای دامنه

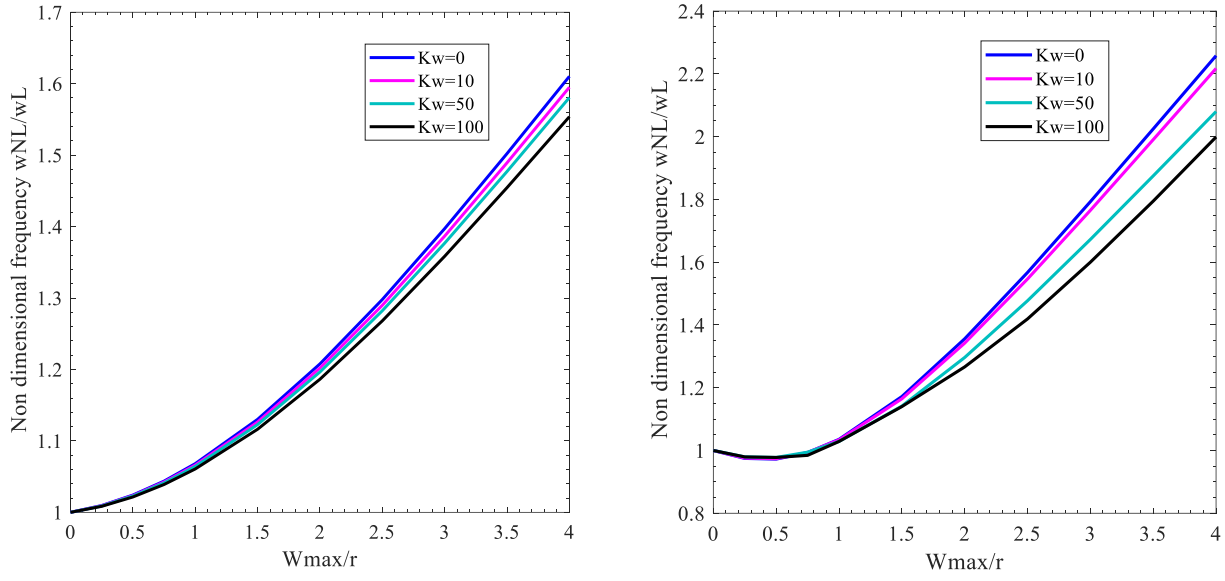
Fig. 6. Effect of the shear stiffness of the foundation K_g on nonlinear to linear frequency ratio of CC and SS FG beams versus different amplitude ratio values ω_{max}/r (l/h=5 , $p_Z = 2$)

خطی به خطی می‌شود. در این راستا، تأثیر افزایش ضرایب تخلخل در کاهش نسبتهای فرکانسی قابل ملاحظه است. تفاوت افت فرکانس‌های مدل نمایی و توانی نیز از مقایسه شکل‌ها قابل روئیت است. این تفاوت بدلیل اختلاف تغییرات خواص مواد با افزایش گرادیان خواص مواد در دو مدل است؛ بطوری‌که با افزایش گرادیان مواد در دو جهت، سرعت تغییرات خواص مواد در مدل نمایی بیشتر بوده و کاهش سفتی تیر شدیدتر اتفاق افتاده و نتیجتاً کاهش فرکانس غیر خطی بی بعد در مدل نمایی شدیدتر است.

شکل ۶ نسبت فرکانس غیر خطی به خطی را برای شرایط مرزی دو سر گیردار و ساده برحسب نسبت دامنه‌های مختلف و برای مقادیر مختلف سختی پایه برشی هنگامی که $\frac{l}{h} =$ ۵ و $P_Z =$ ۲ است نشان می‌دهد. مطابق نمودار واضح است که نسبت فرکانس با افزایش نسبت دامنه برای تیرهای مدرج هدفمند در شرایط مرزی ساده و دو سر گیردار افزایش می‌یابد. با این حال، این افزایش برای تیرهایی که در شرایط مرزی ساده هستند، شدیدتر از تیرهای دو سر گیردار است. علاوه بر این، می‌توان توجه داشت که افزایش تدریجی سفتی برشی بستر K_g منجر به افت قابل توجه نسبت‌های فرکانس غیر خطی به خطی می‌شود که به این دلیل است که سختی کلی این تیرها با افزایش سفتی برشی، کاهش می‌یابد.

شکل ۷ تأثیر سفتی پایه وینکلر را بر نسبت فرکانس غیر خطی به خطی تیرهای مدرج هدفمند در شرایط مرزی دوسرگیردار و ساده و برای مقادیر مختلف نسبت دامنه ω_{max}/r نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود نسبت فرکانس به تدریج با افزایش سختی وینکلر به دلیل کاهش سفتی کلی تیر کاهش می‌یابد که در آن اثر سفتی کلی تیر هدفمند بیشتر بر فرکانس خطی تأثیر می‌گذارد تا غیر خطی. علاوه بر این، نسبت فرکانسی تیر با افزایش سختی ضریب ویکنلر بستر، کاهش می‌یابد و این روندها برای نسبت‌های دامنه بزرگتر بیشتر می‌شود.

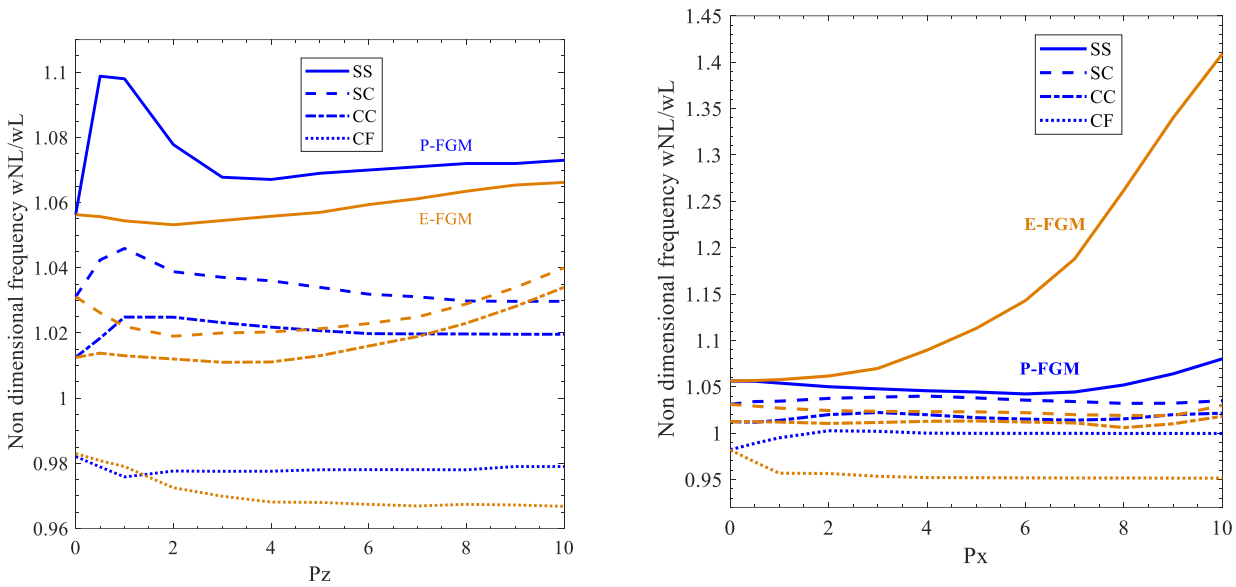
در شکل ۸ روند تغییر نسبت فرکانس غیرخطی به خطی بر حسب گرادیان‌های شاخص مواد در جهت z و x و برای مدل توانی و نمایی تیرهای هدفمند دو جهته ارائه شده است. بدیهی است که برای افزایش تدریجی شاخص توانی مواد در هر جهت، بعلت کاهش سفتی تیر، نسبت فرکانس غیر خطی عمدتاً کاهش می‌یابد، اما این روند برای مدل نمایی بخصوص در شرایط مرزی ساده صادق نیست.



(a) Clamp-Clamp CC (b) Simply Support SS

شکل ۷. تأثیر ضریب الاستیک بستر بر رفتار غیر خطی تیر مدرج هدفمند با ۲ = p_Z در شرایط مرزی دو سر گیردار و ساده بر حسب نسبتهای متغیر دامنه $\omega_{\max}/r$

Fig. 7. Effect of the winkler foundation stiffness K_W on nonlinear to linear frequency ratio of CC and SS FG beams versus different amplitude ratio values $\omega_{\max}/r$ (l/h=5 , $p_Z = 2$)



شکل ۸. تأثیر شرایط مرزی مختلف بر رفتار غیر خطی ω_{NL}/ω_L تیر مدرج هدفمند دوجهته بر حسب گرادیان مختلف مواد p_Z ، p_X

Fig. 8. The effects of different boundary conditions on Nonlinear-to-linear frequency ratios ω_{NL}/ω_L of the Bidirectional FG beam versus power law indexes p_Z , p_X (l/h=8 , $\omega_{\max}/r = 0.6$)

۴- نتیجه گیری

در این مقاله، ارزیابی فرکانس دامنه بزرگ تیرهای متخلخل مدرج هدفمند دو جهته با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی ردی تیر و تانسور گرین در ارتباط با غیر خطی هندسی ون کارمن انجام شد. در این راستا، اصل همیلتون برای استخراج معادلات تشکیل دهنده با شرایط مرزی مرتبط اتخاذ شده است. روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته[1] به‌عنوان یک روش عددی مناسب همراه با یک روش تکراری مستقیم برای حل سیستم معادلات غیر خطی گسسته به کار گرفته شده است. پس از تأیید نتایج ارائه شده، تأثیر پارامترهای مختلف مانند نوع مدل تیر مدرج، نسبت دامنه، شاخص‌های مواد، پارامترهای الاستیک، ضریب تخلخل، ضریب باریک شوندگی و شرایط مرزی مختلف بر نسبت فرکانس غیر خطی به خطی مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج یافته‌های زیر را نشان می‌دهد.

۱- افزایش نسبت فرکانس غیر خطی به خطی نسبت به دامنه بستگی به نوع شرایط مرزی دارد، اما این روند برای شرایط مرزی C-F صادق نیست.

۲- تغییرات نسبت فرکانسی خطی به غیر خطی دو مدل تیر مدرج هدفمند در مقابل شاخص گرادیان‌های مواد در دو جهت z و x.

۳- تأثیر افزایش ضرایب تخلخل، قانون توان و شاخص‌های مواد در کاهش نسبت فرکانس غیر خطی به خطی به دلیل کاهش سختی تیرهای مدرج هدفمند دو جهته.

۴- برای هر دو مدل مدرج هدفمند تیر، نسبت فرکانس تحت تأثیر تخلخل بیشتر از شاخص گرادیان مواد در جهت طولی x تأثیر می‌گیرد تا از شاخص مواد در جهت z .

۵- تأثیر ضرایب سختی بستر بر نسبت فرکانس غیر خطی به خطی یک تیر همسانگرد.

۶- تأثیر ضریب باریک شوندگی مقطع بر رفتار فرکانس غیر خطی تیر هدفمند مدرج.

۷- تغییر نسبت فرکانس غیر خطی به خطی تیر نسبت به دامنه بر اساس افزایش سفتی پایه برشی و وینکلر تیر مدرج هدفمند دو جهته و مقایسه روند هر یک.

۵- فهرست علائم

مواد مدرج تابعی	FGM
مواد مدرج تابعی توانی	PFGM
مواد مدرج تابعی نمایی	EFGM
روش مربعات دیفرانسیلی	DQM
روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته	GDQM
نظریه تغییر فرم برشی ردی (مرتبه سه)	RSDBT
تئوری اویلر برنولی تیرها	EBT
نظریه تیموشنکو تیرها	TBT
نظریه تغییر فرم برشی مراتب بالاتر	HBT
تخلخل و حفره در ساختار تیرها	Porosity
ثابت الاستیک بستر	Elastic Foundation
ثابت وینکلر	Winkler Foundation
ارتفاع یا عمق تیر	h
عرض تیر	b
طول تیر	L
مساحت تیر	A
ضریب تخلخل تیر	e_0
ضریب باریک شوندگی مقطع تیر	B
چگالی تیر	ρ

1 GDQM

منابع

[1] P. Zahedinejad, Free vibration analysis of functionally graded beams resting on elastic foundation in thermal environment, International Journal of Structural Stability and Dynamics, 16(07) (2016) 1550029.

[2] Y. Wen, Q. Zeng, A HIGH-ORDER FINITE ELEMENT FORMULATION FOR VIBRATION ANALYSIS OF BEAM-TYPE STRUCTURES, International Journal of Structural Stability and Dynamics, 9(04) (2009) 649-660.

[3] M. Aydogdu, V. Taskin, Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges, Materials & design, 28(5) (2007) 1651-1656.

[4] M. Şimşek, Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories, Nuclear Engineering and Design, 240(4) (2010) 697-705.

[5] H.-T. Thai, T.P. Vo, Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories, International Journal of Mechanical Sciences, 62(1) (2012) 57-66.

[6] S. Chakraverty, K. Pradhan, Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions, Aerospace Science and Technology, 36 (2014) 132-156.

[7] N. Wattanasakulpong, A. Chaikittiratana, S. Pornpeerakeat, Chebyshev collocation approach for vibration analysis of functionally graded porous beams based on third-order shear deformation theory, Acta Mechanica Sinica, 34(6) (2018) 1124-1135.

[8] D. Zhou, A general solution to vibrations of beams on variable Winkler elastic foundation, Computers & structures, 47(1) (1993) 83-90.

[9] M. Eisenberger, Vibration frequencies for beams on variable one-and two-parameter elastic foundations, Journal of Sound and Vibration, 176(5) (1994) 577-584.

[10] S. Pradhan, T. Murmu, Thermo-mechanical vibration of FGM sandwich beam under variable elastic foundations using differential quadrature method, Journal of Sound and Vibration, 321(1-2) (2009) 342-362.

[11] P. Malekzadeh, G. Karami, A mixed differential quadrature and finite element free vibration and buckling analysis of thick beams on two-parameter elastic foundations, Applied Mathematical Modelling, 32(7) (2008) 1381-1394.

[12] Ş.D. Akbaş, Free vibration and bending of functionally graded beams resting on elastic foundation, Research on Engineering Structures and Materials, 1(1) (2015) 25-37.

[13] M. Yas, S. Kamarian, A. Pourasghar, Free vibration analysis of functionally graded beams resting on variable elastic foundations using a generalized power-law distribution and GDQ method, Annals of Solid and Structural Mechanics, 9(1) (2017) 1-11.

[14] P. Tossapanon, N. Wattanasakulpong, Stability and free vibration of functionally graded sandwich beams resting on two-parameter elastic foundation, Composite Structures, 142 (2016) 215-225.

[15] L. Li, X. Li, Y. Hu, Nonlinear bending of a two-dimensionally functionally graded beam, Composite Structures, 184 (2018) 1049-1061.

[16] J. Lei, Y. He, Z. Li, S. Guo, D. Liu, Postbuckling analysis of bi-directional functionally graded imperfect beams based on a novel third-order shear deformation theory, Composite Structures, 209 (2019) 811-829.

[17] M. Şimşek, Bi-directional functionally graded materials (BDFGMs) for free and forced vibration of Timoshenko beams with various boundary conditions, Composite Structures, 133 (2015) 968-978.

[18] Z.-h. Wang, X.-h. Wang, G.-d. Xu, S. Cheng, T. Zeng, Free vibration of two-directional functionally graded beams, Composite structures, 135 (2016) 191-198.

[19] A. Ghorbanpour Arani, S. Niknejad, Dynamic stability analysis of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams composed of bi-directional functionally graded materials, AUT Journal of Mechanical Engineering, 4(2) (2020) 201-214.

[20] N. Wattanasakulpong, A. Chaikittiratana, Flexural vibration of imperfect functionally graded beams based on Timoshenko beam theory: Chebyshev collocation method, Meccanica, 50(5) (2015) 1331-1342.

[21] M.-J. Kazemzadeh-Parsi, F. Chinesta, A. Ammar,

Proper Generalized Decomposition for Parametric Study and Material Distribution Design of Multi-Directional Functionally Graded Plates Based on 3D Elasticity Solution, Materials, 14(21) (2021) 6660.

[22] J. Zhu, Z. Lai, Z. Yin, J. Jeon, S. Lee, Fabrication of ZrO2–NiCr functionally graded material by powder metallurgy, Materials chemistry and physics, 68(1-3) (2001) 130-135.

[23] D. Chen, J. Yang, S. Kitipornchai, Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams, International journal of mechanical sciences, 108 (2016) 14-22.

[24] Y.S. Al Rjoub, A.G. Hamad, Free vibration of functionally Euler-Bernoulli and Timoshenko graded porous beams using the transfer matrix method, KSCE Journal of Civil Engineering, 21(3) (2017) 792-806.

[25] N. Shafiei, S.S. Mirjavadi, B. MohaselAfshari, S. Rabby, M. Kazemi, Vibration of two-dimensional imperfect functionally graded (2D-FG) porous nano-/micro-beams, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 322 (2017) 615-632.

[26] F. Ebrahimi, A. Jafari, Thermo-mechanical vibration analysis of temperature-dependent porous FG beams based on Timoshenko beam theory, Structural Engineering Mechanics, 59(2) (2016) 343-371.

[27] M. Khakpour, Y. Bazargan-Lari, P. Zahedinejad, M-J. Kazemzadeh-parsi, Vibrations evaluation of functionally graded porous beams in thermal surroundings by generalized differential quadrature method, Shock and Vibration, 4 (2022) 1-15.

[28] F. Ebrahimi, M. Zia, Large amplitude nonlinear vibration analysis of functionally graded Timoshenko beams with porosities, Acta Astronautica, 116 (2015) 117-125.

[29] S. Kitipornchai, L.-L. Ke, J. Yang, Y. Xiang, Nonlinear vibration of edge cracked functionally graded Timoshenko beams, Journal of sound and vibration, 324(3-5) (2009) 962-982.

[30] P. Malekzadeh, M. Shojaee, Surface and nonlocal effects on the nonlinear free vibration of non-uniform nanobeams, Composites Part B: Engineering, 52 (2013) 84-92.

[31] T. Yang, Y. Tang, Q. Li, X.-D. Yang, Nonlinear bending, buckling and vibration of bi-directional functionally graded nanobeams, Composite Structures, 204 (2018) 313-319.

[32] M.H. Ghayesh, Nonlinear vibration analysis of axially functionally graded shear-deformable tapered beams, Applied Mathematical Modelling, 59 (2018) 583-596.

[33] A. Karamanlı, Free vibration analysis of two directional functionally graded beams using a third order shear deformation theory, Composite Structures, 189 (2018) 127-136.

[34] K. Xie, Y. Wang, X. Fan, T. Fu, Nonlinear free vibration analysis of functionally graded beams by using different shear deformation theories, Applied Mathematical Modelling, 77 (2020) 1860-1880.

[35] M. Forghani, Y. Bazarganlari, P. Zahedinejad, M.J. Kazemzadeh-Parsi, Nonlinear frequency behavior of cracked functionally graded porous beams resting on elastic foundation using Reddy shear deformation theory, Journal of Vibration and Control, (2022) 10775463221080213.

[36] M. Şimşek, Nonlinear static and free vibration analysis of microbeams based on the nonlinear elastic foundation using modified couple stress theory and He's variational method, Composite Structures, 112 (2014) 264-272.

[37] S. Sahmani, M. Bahrami, R. Ansari, Nonlinear free vibration analysis of functionally graded third-order shear deformable microbeams based on the modified strain gradient elasticity theory, Composite Structures, 110 (2014) 219-230.

[38] R. Bellman, B. Kashef, J. Casti, Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations, Journal of computational physics, 10(1) (1972) 40-52.

[39] C.W. Bert, M. Malik, Differential quadrature method in computational mechanics: a review, (1996).

[40] W. Chen, T. Zhong, The study on the nonlinear computations of the DQ and DC methods, Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal, 13(1) (1997) 57-75.

پیوست الف

$$\delta u: \quad \frac{\partial N_{xx}(x,t)}{\partial x} = \mathcal{I}_0(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \mathcal{I}_1(x)\frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x\,\partial t^2} - J_1(x)\frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x\,\partial t^2} \tag{الف۱۹}$$

$$\begin{aligned}
&\delta w_b: \\
&\frac{\partial^2 M_b(x,t)}{\partial x^2} + N_{xx}(x,t)\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + N_{xx}(x,t)\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial N_{xx}(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\frac{\partial N_{xx}(x,t)}{\partial x} \\
&-\mathrm{K}_w w_b(x,t) - \mathrm{K}_w w_s(x,t) + \mathrm{K}_g\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + \mathrm{K}_g\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} - K_N w_s(x,t)^3 - K_N w_b(x,t)^3 \\
&-3K_N w_b(x,t)^2 w_s(x,t) - 3K_N w_b(x,t) w_s(x,t)^2 = \mathcal{I}_1(x)\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x\,\partial t^2} + \frac{\partial \mathcal{I}_1(x)}{\partial x}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \mathcal{I}_0(x)\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial t^2} \\
&-\mathcal{I}_2(x)\frac{\partial^4 w_b(x,t)}{\partial x^2\,\partial t^2} - \frac{\partial \mathcal{I}_2(x)}{\partial x}\frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x\,\partial t^2} + \mathcal{I}_0(x)\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial t^2} - J_2(x)\frac{\partial^4 w_s(x,t)}{\partial x^2\,\partial t^2} - \frac{\partial J_2(x)}{\partial x}\frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x\,\partial t^2}
\end{aligned} \tag{الف۲۰}$$

$$\begin{aligned}
&\delta w_s: \\
&\frac{\partial Q_{xz}(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 M_S(x,t)}{\partial x^2} + N_{xx}(x,t)\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + N_{xx}(x,t)\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\frac{\partial N_{xx}(x,t)}{\partial x} \\
&+\frac{\partial N_{xx}(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} - \mathrm{K}_w w_s(x,t) - \mathrm{K}_w w_b(x,t) + \mathrm{K}_g\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + \mathrm{K}_g\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} \\
&-K_N w_s(x,t)^3 - K_N w_b(x,t)^3 - 3K_N w_b(x,t)^2 w_s(x,t) - 3K_N w_b(x,t) w_s(x,t)^2 \\
&= J_1(x)\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x\,\partial t^2} + \frac{\partial J_1(x)}{\partial x}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \mathcal{I}_0(x)\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial J_2(x)}{\partial x}\frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x\,\partial t^2} \\
&-J_2(x)\frac{\partial^4 w_b(x,t)}{\partial x^2\,\partial t^2} + \mathcal{I}_0(x)\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial t^2} - K_2(x)\frac{\partial^4 w_s(x,t)}{\partial x^2\,\partial t^2} - \frac{\partial K_2(x)}{\partial x}\frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x\,\partial t^2}
\end{aligned} \tag{الف۲۱}$$

که منتجه های نیروی محوری ، ممان و نیروی برشی عرضی N_{xx} ، M_b ، M_s و Q_{xz} به صورت زیر تعریف می‌شود

$$N_{xx} = A(x)\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2}A(x)\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}A(x)\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^2 + A(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - B(x)\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} - B_s(x)\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} \tag{الف۲۲}$$

$$M_b = B(x)\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2}B(x)\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^2 - D(x)\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{2}B(x)\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^2 + B(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - D_s(x)\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{(الف۲۳)}$$

$$M_S = \frac{1}{2}B_s(x)\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^2 + B_s(x)\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} - D_s(x)\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + B_s(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2}B_s(x)\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^2 - \mathrm{H}_s(x)\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{(الف۲۴)}$$

$$Q_{xz} = g(z)^2\, G(x,z)\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \quad \text{(الف۲۵)}$$

با جایگذاری روابط منتجه های تنشی (الف۲۲) - (الف۲۵) در معادلات (الف۱۹) - (الف۲۱)، معادلات حاکم تیر مدرج دوجهته بر حسب جابجایی به فرم روابط (الف۲۸) - (الف۳۰) بدست می‌آید

δu:

$$\begin{aligned}
&A(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial A(x)}{\partial x}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}\left(A(x)\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} + A(x)\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial B(x)}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial A(x)}{\partial x}\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^2 \\
&-B(x)\frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2}\left(A(x)\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} + A(x)\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial B_s(x)}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial A(x)}{\partial x}\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^2 \\
&-B_s(x)\frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x^3} + \frac{\partial A(x)}{\partial x}\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} = \mathcal{I}_0(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \mathcal{I}_1(x)\frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x\,\partial t^2} - J_1(x)\frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x\,\partial t^2}
\end{aligned} \quad \text{(الف۲۸)}$$

δw_b :

$$
\begin{aligned}
&B(x)\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}+\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\left(2\frac{\partial B(x)}{\partial x}+A(x)\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}+A(x)\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)+\\
&\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 B(x)}{\partial x^2}+\frac{\partial A(x)}{\partial x}\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}+A(x)\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial A(x)}{\partial x}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}+A(x)\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2}\right)\\
&+\frac{1}{2}\frac{\partial A(x)}{\partial x}\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^3+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 B(x)}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^2+\frac{3}{2}\frac{\partial A(x)}{\partial x}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^2\\
&+\frac{3}{2}\frac{\partial A(x)}{\partial x}\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^2\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial^2 B(x)}{\partial x^2}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}-2\frac{\partial D(x)}{\partial x}\frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x^3}-D(x)\frac{\partial^4 w_b(x,t)}{\partial x^4}\\
&+\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}\left(\frac{3}{2}A(x)\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial B(x)}{\partial x}\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}+3A(x)\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right.\\
&\left.+\frac{3}{2}A(x)\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^2-\frac{\partial^2 D(x)}{\partial x^2}+\frac{\partial B(x)}{\partial x}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}+\mathrm{K}_g+\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2}\left(B(x)-B_s(x)\right)\right)\\
&+\frac{1}{2}\frac{\partial A(x)}{\partial x}\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^3+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 B(x)}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2}\left(\frac{3}{2}A(x)\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^2\right.\\
&+2\frac{\partial B(x)}{\partial x}\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial B_s(x)}{\partial x}\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}+3A(x)\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\\
&\left.+\frac{3}{2}A(x)\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial B(x)}{\partial x}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial B_s(x)}{\partial x}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial^2 D_s(x)}{\partial x^2}+\mathrm{K}_g\right)+\\
&\left(\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2}\right)^2\left(B(x)-B_s(x)\right)+\frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x^3}\left(B(x)\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}-B_s(x)\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right.\\
&\left.+B(x)\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}-2\frac{\partial D_s(x)}{\partial x}-\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}B_s(x)\right)-K_N w_b(x,t)^3-K_N w_s(x,t)^3-\\
&3K_N w_b(x,t)^2 w_s(x,t)-\mathrm{K}_w w_s(x,t)+w_b(x,t)\left(-3K_N w_s(x,t)^2-\mathrm{K}_w\right)-\frac{\partial^4 w_s(x,t)}{\partial x^4}D_s(x)\\
&=\mathcal{I}_1(x)\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x\,\partial t^2}+\frac{\partial \mathcal{I}_1(x)}{\partial x}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+\mathcal{I}_0(x)\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial t^2}-\mathcal{I}_2(x)\frac{\partial^4 w_b(x,t)}{\partial x^2\,\partial t^2}\\
&-\frac{\partial \mathcal{I}_2(x)}{\partial x}\frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x\,\partial t^2}+\mathcal{I}_0(x)\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial t^2}-J_2(x)\frac{\partial^4 w_s(x,t)}{\partial x^2\,\partial t^2}-\frac{\partial J_2(x)}{\partial x}\frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x\,\partial t^2}
\end{aligned}
\tag{الف۲۹}
$$

δw_s :

$$
\begin{aligned}
&B_s(x)\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}+A(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}+A(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2}+2\frac{\partial B_s(x)}{\partial x}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B_s(x)}{\partial x^2}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\\
&+A(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial A(x)}{\partial x}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}+A(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial A(x)}{\partial x}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}+\\
&\frac{1}{2}\frac{\partial A(x)}{\partial x}\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^3+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 B_s(x)}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^2+\frac{3}{2}A(x)\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^2\\
&+\frac{3}{2}\frac{\partial A(x)}{\partial x}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^2+\frac{3}{2}A(x)\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^2+\frac{3}{2}\frac{\partial A(x)}{\partial x}\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^2\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}-\\
&\frac{\partial B(x)}{\partial x}\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}+2\frac{\partial B_s(x)}{\partial x}\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}-B(x)\frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x^3}\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}+\\
&3A(x)\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial B_s(x)}{\partial x}\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}+3A(x)\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\\
&-D_s(x)\frac{\partial^4 w_b(x,t)}{\partial x^4}+\frac{3}{2}A(x)\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^2-\frac{\partial B(x)}{\partial x}\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}-2\frac{\partial D_s(x)}{\partial x}\frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x^3}\\
&-\frac{\partial^2 D_s(x)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}-B_s(x)\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2}-B(x)\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2}-B(x)\frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x^3}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\\
&-B(x)\left(\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 B_s(x)}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial A(x)}{\partial x}\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^3+\frac{\partial A_s(x)}{\partial x}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}+\\
&\frac{3}{2}A(x)\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial B_s(x)}{\partial x}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2}-2\frac{\partial \mathrm{H}_s(x)}{\partial x}\frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 \mathrm{H}_s(x)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2}+\\
&\frac{\partial K_2(x)}{\partial x}\frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x\partial t^2}+A_s(x)\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2}-B_s(x)\left(\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2}\right)^2+B_s(x)\left(\left(\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}\right)^2+\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x^3}\right)\\
&-B_s(x)\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x^3}+\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 B_s(x)}{\partial x^2}\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}+2\frac{\partial B_s(x)}{\partial x}\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}+B_s(x)\frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x^3}\right)\\
&+2\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2}\left(\frac{\partial B_s(x)}{\partial x}\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}+B_s(x)\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}\right)+B_s(x)\left(\left(\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2}\right)^2+\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x^3}\right)\\
&-\mathrm{K}_w w_b(x,t)-3K_N w_b(x,t)^2 w_s(x,t)-\mathrm{K}_w w_s(x,t)-K_N w_b(x,t)^3-K_N w_s(x,t)^3-3K_N w_b(x,t) w_s(x,t)^2\\
&+\mathrm{K}_g\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2}+\mathrm{K}_g\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}=J_1(x)\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x\partial t^2}+\frac{\partial J_1(x)}{\partial x}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+\mathcal{I}_0(x)\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial J_2(x)}{\partial x}\frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x\partial t^2}\\
&-J_2(x)\frac{\partial^4 w_b(x,t)}{\partial x^2\partial t^2}+\mathcal{I}_0(x)\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial t^2}-K_2(x)\frac{\partial^4 w_s(x,t)}{\partial x^2\partial t^2}+\mathrm{H}_s(x)\frac{\partial^4 w_s(x,t)}{\partial x^4}
\end{aligned}
\tag{الف ۳۰}
$$

بدین ترتیب برای شرایط مرزی تیر دو جهته، می‌توان شرایط پایانی زیر را بصورت ساده شده (الف۳۱) – (الف۳۵) استخراج نمود.

$$u=0 \quad or \quad -A(x)\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}-\frac{1}{2}A(x)\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{2}A(x)\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^2-A(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$
$$+B(x)\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}+B_s(x)\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2}=0 \qquad \text{(الف۳۱)}$$

$$\frac{\partial w_s}{\partial x}=0 \quad or \quad \frac{1}{2}B_s(x)\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^2+B_s(x)\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}-D_s(x)\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}+B_s(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$
$$+\frac{1}{2}B_s(x)\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^2-\mathrm{H}_s(x)\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2}=0 \qquad \text{(الف۳۲)}$$

$$\frac{\partial w_b}{\partial x}=0 \quad or \quad B(x)\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{2}B(x)\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^2-D(x)\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}+\frac{1}{2}B(x)\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^2$$
$$+B(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-D_s(x)\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2}=0 \qquad \text{(الف۳۳)}$$

$$w_s=0 \quad or \quad J_2(x)\frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x\,\partial t^2}+K_2(x)\frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x\,\partial t^2}+\frac{3}{2}A(x)\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^2\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}$$
$$+\frac{3}{2}A(x)\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^2+A(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{2}A(x)\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^3+$$
$$A(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{2}A(x)\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^3+A_s(x)\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}+B_s(x)\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}$$
$$-B(x)\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}+B_s(x)\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial B_s(x)}{\partial x}\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^2+ \qquad \text{(الف۳۴)}$$
$$\frac{\partial B_s(x)}{\partial x}\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}-B(x)\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}+\mathrm{K}_g\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}-D_s(x)\frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x^3}-$$
$$\frac{\partial D_s(x)}{\partial x}\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2}+B_s(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial B_s(x)}{\partial x}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial B_s(x)}{\partial x}\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^2$$
$$+\mathrm{K}_g\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}-J_1(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-\mathrm{H}_s(x)\frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x^3}-\frac{\partial \mathrm{H}_s(x)}{\partial x}\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2}=0$$

$$
\begin{aligned}
& w_b = 0 \quad or \quad \mathcal{I}_2(x)\frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x\,\partial t^2} + J_2(x)\frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x\,\partial t^2} + \frac{3}{2}A(x)\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^2\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + \\
& \frac{3}{2}A(x)\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^2 + A(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2}A(x)\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^3 + \\
& A(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2}A(x)\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^3 + B(x)\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} - \\
& B_s(x)\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial B(x)}{\partial x}\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial B(x)}{\partial x}\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^2 + \\
& \mathrm{K}_g\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} - D(x)\frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x^3} - \frac{\partial D(x)}{\partial x}\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + B(x)\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} - \\
& B_s(x)\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial B(x)}{\partial x}\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^2 + B(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \\
& \frac{\partial B(x)}{\partial x}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \mathrm{K}_g\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} - D_s(x)\frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x^3} - \frac{\partial D_s(x)}{\partial x}\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} - \mathcal{I}_1(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0
\end{aligned}
\tag{الف۳۵}
$$

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Forghani, Y. Bazargan-lari, P. Zahedinejhad, M. Kazemzadeh Parsi, Large-Amplitude Frequency Analysis of Bi-directional Functionally Graded with Non-Uniform Porous Beams using a Higher Order Shear Deformation Theory, Amirkabir J. Mech Eng., 54(8) (2022) 1761-1788.

DOI: 10.22060/mej.2022.20916.7336

این صفحه عمداً خالی است