



## تحلیل ارتعاشات دامنه بزرگ تیرهای متخلخل مدرج هدفمند دوجہته با مقطع باریک شونده روی بستر الاستیک با استفاده از یک تئوری برشی مرتبه بالا

محمد امین فرقانی<sup>۱</sup>، یوسف بازرگان لاری<sup>۲\*</sup>، پرهام زاهدی نژاد<sup>۱</sup>، محمد جواد کاظم زاده پارسی<sup>۱</sup>

۱- دانشکده مهندسی مکانیک، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران  
۲- دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه تگزاس شمالی، تگزاس شمالی، آمریکا.

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۰/۱۰/۰۲  
بازنگری: ۱۴۰۱/۰۲/۲۱  
پذیرش: ۱۴۰۱/۰۴/۱۲  
ارائه آنلاین: ۱۴۰۱/۰۴/۲۴

### کلمات کلیدی:

ارتعاشات دامنه بزرگ  
تیر مدرج هدفمند دوجہته  
متخلخل  
مقطع باریک شونده  
تئوری برشی مرتبه سوم

**خلاصه:** این مقاله تحلیل ارتعاشات دامنه بزرگ تیرهای متخلخل مدرج هدفمند دوجہته در شرایط مرزی مختلف را با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه سوم و تانسور گرین و غیر خطی بودن هندسی ون کارمن بررسی می‌کند. خواص مواد این تیرها با توجه به قانون توانی و نمایی در دو جهت تغییر می‌کند. معادلات حرکت و شرایط مرزی مرتبط با استفاده از اصل همیلتون به دست آمده است. برای حل سیستم معادلات، روش ترکیبی مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته همراه با یک روش تکرار عددی مستقیم ایجاد شده است. پس از اثبات همگرایی این روش، از نتایج استخراج شده از یک مطالعه قبلی بر اساس نظریه برشی تیموشنکو برای اعتبار سنجی نتایج استفاده می‌شود. سپس تأثیر شاخص‌های گرادیان مواد در دو جهت، نسبت دامنه فرکانس، ضریب تخلخل، اثر باریک شوندگی مقطع، پارامترهای بستر برشی و الاستیک و شرایط مرزی مختلف بر فرکانس‌های دامنه بزرگ تیرهای مدرج هدفمند مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج نشان می‌دهد که رفتار فرکانس‌های غیر خطی بی بعد با افزایش ضرایب بستر و ضریب باریک شوندگی افزایش یافته و افزایش در ضریب تخلخل و گرادیان ماده در دو جهت، سبب کاهش در فرکانس‌های غیر خطی می‌شود، این نتایج در طراحی بهینه تیرهای دوجہته تأثیر گذار بوده و در روش‌های پیش‌بینی و کشف مودهای شکست این تیرها بسیار مؤثر است.

### ۱- مقدمه

مواد مدرج هدفمند از دو قسمت سرامیک و فلز ساخته شده‌اند. با توجه به این که مواد سازه‌ای سرامیک دارای ضریب انتقال حرارت کم و مقاومت بالا در برابر دما هستند، می‌توانند حرارت بالا را تحمل کنند. از طرف دیگر، یک ماده دیگر مانند فلز، انعطاف پذیری مورد نیاز سازه را فراهم می‌کند. قابل ذکر است که به دلیل تغییرات پیوسته در خواص مکانیکی، مشکلات ناپیوستگی موجود در سازه‌های کامپوزیت معمولی در مواد درجه بندی شده عملکردی بوجود نمی‌آید. بهمین دلیل از مواد مدرج هدفمند به جای مواد همسانگرد برای ساخت سازه‌ها استفاده می‌شود. از زمان پیدایش مواد هدفمند مدرج بدلیل خواص ویژه این موارد در مقاومت حرارتی بالا، رفع تمرکز تنش و جلوگیری از پیدایش ترک به تدریج در بسیاری از کاربردهای مهندسی همچون هوافضا، صنایع دفاعی، صنایع ریلی، حسگرهای الکترونیکی و بیو پزشکی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. از جمله موارد ویژه کاربرد تیر متخلخل هدفمند دوجہته با مقطع متغیر می‌توان به ریل‌های راه آهن، سپرهای

حرارتی<sup>۱</sup> و پره توربین‌های گازی که تعبیه حفره‌ها جهت خنک‌کاری مقطع پره می‌باشد، نام برد. بنابراین، این مواد کاربردهای گسترده‌ای به عنوان اجزای ساختاری در صنایع مدرن مهندسی، هسته‌ای و هوافضا داشته‌اند و امروزه گرایش گسترده‌ای به بررسی این اجزا در شرایط مختلف عملیاتی و مرزی وجود دارد. ارتعاش آزاد و اجباری دو حوزه از مطالعاتی است که تا کنون با استفاده از نظریه‌های مختلف تیرها انجام شده است. برخی از آنها مطابق با نظریه اویلر برنولی یا کلاسیک بوده و مناسب برای تیرهای مدرج هدفمند باریک بودند. برای تیرهای عمیق‌تر تئوری کلاسیک تیرها به علت کاهش اثر تغییر شکل برشی عرضی و برآورد بیش از حد فرکانس‌ها قابل استفاده نیست. به منظور غلبه بر محدودیت‌های تئوری کلاسیک، نظریه تیر تغییر شکل برشی مرتبه اول معروف به نظریه تیموشنکو در رابطه با تغییر شکل برشی عرضی تیرها معرفی شده است. این نظریه شرایط تنش برشی صفر را در سطوح بالا و پایین تیر نقض می‌کند، بنابراین استفاده از ضریب تصحیح برشی برای محاسبه اختلاف نتایج بین حالت‌های تنش واقعی



و تئوری اجتناب ناپذیر است [۱]. به منظور محاسبه دقیق‌تر فرکانس‌های طبیعی، جابجایی و اجزای تنش تیرهای متوسط و ضخیم، نظریه‌های تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر ارائه شده است که در آن استفاده از ضریب تصحیح برشی اجتناب می‌شود [۱].

تا کنون بر اساس نظریه‌های تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر، تحقیقات در مورد رفتار ارتعاشی تیرهای مدرج ارائه شده است. ون و زنگ [۲] تحلیل فرکانسی تیرها را بر اساس روش اجزای محدود مرتبه بالاتر مطالعه کردند. آیدگدو و تاسکین [۳] رفتار ارتعاشی آزاد تیرهای مدرج هدفمند را انجام بررسی کردند. رفتار ارتعاشی تیرهای مدرج هدفمند در شرایط مرزی متفاوت، با استفاده از نظریه‌های برشی مرتبه بالاتر توسط سیمسک [۴] ارائه شده است. سپس تجزیه و تحلیل ارتعاشی تیرهای مدرج با استفاده از نظریه‌های تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر توسط هو تای و وو [۵] مورد بررسی قرار گرفت. رفتار ارتعاشی آزاد تیرهای هدفمند تحت شرایط مرزی مختلف و بر اساس نظریه‌های مختلف تغییر شکل تیر برشی، توسط چاکرورتی و پرادهان [۶] با استفاده از روش ریلی-ریتز ارائه شده است. واتاناساکولپنگ و همکاران [۷] فرکانس‌های ارتعاشی تیرهای هدفمند تحت شرایط مرزی الاستیک را با استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی و روش چیبیشف کولوکیشن مورد بررسی قرار دادند.

از آنجائی که اکثر تیرهای مکانیکی در کاربردهای مختلف مهندسی بر روی زمین هستند، مانند راه آهن، مناطق ژئوتکنیکی، پیاده روها، بزرگراه، سازه‌ها، سازه‌های دریایی، برج‌ها و خطوط لوله است. رفتار ارتعاشی و خمشی تیرها یا ستون‌ها بر روی پایه‌های الاستیک نقش مهمی در بسیاری از زمینه‌های مهندسی سازه و زیرسازی ایفا می‌کند. این مساله باعث ایجاد انگیزه بسیاری از محققان برای بررسی رفتار ساختاری تیرها بر روی پایه‌های مختلف الاستیک می‌شود. در بسیاری از مسائل مربوط به ساختار خاک، بستر الاستیک معمولاً با پایه وینکلر برای سادگی ریاضی مدل سازی می‌شود. با این حال، نشان داده شده است که رفتار مواد بستر در مهندسی را نمی‌توان با این مدل، که شامل فنرهای کششی خطی مستقل است، نشان داد. بدین منظور برای یافتن یک مدل فیزیکی اساسی نزدیک به ریاضیات ساده، پاسترناک مدل دو پارامتری را با برهم کنش برشی پیشنهاد کرد. مطالعات مختلفی در مورد تأثیر بسترهای الاستیک بر ارتعاش آزاد تیرها انجام شده است. ژو و آیزنبرگر [۸ و ۹] ارزیابی فرکانسی تیرهای ایزوتروپیک را بر روی بسترهای الاستیک متغیر وینکلر با استفاده از یک روش حل کلی انجام دادند. ارتعاشات حرارتی-مکانیکی تیرهای مدرج هدفمند روی

بسترهای الاستیک دو پارامتری توسط پرادان و مورمو [۱۰] مورد مطالعه قرار گرفت. ارتعاشات آزاد و کماتش تیرها بر روی بستر الاستیک دو پارامتری توسط ملک زاده و کرمی [۱۱] با یک روش ترکیبی اجزای محدود و مربعات دیفرانسیلی مورد بررسی قرار گرفت. اکباس [۱۲] ارتعاشات آزاد و کماتش تیرهای مدرج تابعی روی بستر الاستیک را مورد مطالعه قرار داد. تجزیه و تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای مدرج هدفمند که بر روی پایه الاستیک دو پارامتری قرار دارند، توسط یاس و همکاران [۱۳] با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل عمومی و بر اساس نظریه اویلر برنولی انجام شد. توساپانون و واتاناساکولپنگ [۱۴] پایداری و ارتعاشات آزاد تیرهای مدرج هدفمند را بر روی پایه الاستیک دو پارامتری بر اساس نظریه برشی تیموشنکو و با استفاده از روش حل چیبیشف کولوکیشن مورد بررسی قرار دادند.

در بسیاری از سازه‌های پیشرفته، به دلیل شرایط کاری، گرادبان دما و بار مکانیکی در بیش از یک جهت توزیع می‌شود. به همین دلیل بررسی اجزای سازه‌ای با تغییر خواص مواد و تحمل بار در بیش از یک جهت مد نظر محققین می‌باشد. اکثر تحقیقات پیشین بر رفتار مکانیکی و ارتعاشی ساختارهای معمولی تیرهای مدرج هدفمند متمرکز شده‌اند که خواص مواد آنها فقط در یک جهت تغییر می‌کند. بنابراین، ساختارهای معمولی این تیرها برای برآوردن الزامات توزیع تنش و دما در جهت‌های مختلف برای کاربردهای ویژه ریلی، صنعتی و هوافضا کارآمد نیستند. لی و همکاران [۱۵] و [۱۶] رفتار خمشی و پس کماتشی تیرهای متخلخل مدرج هدفمند دوجهته را بر اساس یک نظریه برشی مرتبه سوم بررسی کردند. رفتار فرکانسی آزاد تیرهای مدرج هدفمند با کارکرد دو طرفه<sup>۱</sup> بر اساس نظریه تیر تیموشنکو توسط مسوت سیمسک [۱۷] مورد مطالعه قرار گرفت. وانگ و همکاران [۱۸] فرکانس‌های آزاد تیرهای مدرج هدفمند دو بعدی را بر اساس نظریه اویلر برنولی با استفاده از یک راه حل تحلیلی برای تکیه گاه‌های مختلف انتهایی مورد مطالعه قرار داد. قربانپور و نیک‌نژاد [۱۹] پایداری دینامیکی تیرهای مدرج هدفمند دو جهته با تئوری‌های برشی مراتب مختلف تحت تأثیر شرایط دمایی و تحریک هارمونیک بررسی کرد. ارتعاشات آزاد خمشی تیرهای مدرج هدفمند بر اساس تئوری تیموشنکو و با روش حل تجمیع چیبیشف توسط واتاناساکولپنگ و چایکیتیراتانا [۲۰] بررسی گردید. کاظم زاده و همکاران [۲۱] به بررسی صفحات مدرج هدفمند چند جهته با استفاده از تکنیک روش الاستیسیته سه بعدی پرداخته‌اند.

در طول فرآیند ساخت، تفاوت زیاد در دمای انجماد بین اجزاء مواد

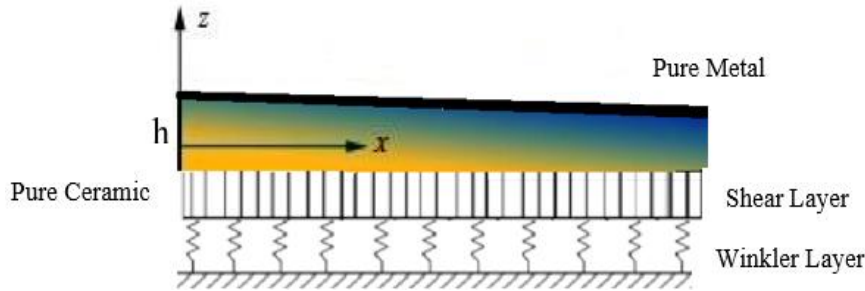
مدرج انجام شده است. لی و همکاران [۲۹] خمش غیر خطی و جابجایی یک تیر مدرج هدفمند دو جهته را با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته بر اساس نظریه تیر اویلر-برنولی بررسی کردند. ملک زاده و شجایی [۳۰] اثرات سطحی و غیر محلی ارتعاشات غیر خطی تیر مدرج هدفمند غیر یکنواخت را با بکارگیری تئوری اویلر-برنولی و تیموشنکو در ارتباط با تئوری ارینگن و اصل همپلتن و روش حل ترکیبی مربعات دیفرانسیلی و یک روش تکراری عددی بررسی کردند. تانسور گرنش گرین در ارتباط با معادله غیر خطی ون کارمن برای حل این مساله بکار گرفته شد. خمش دامنه بزرگ، کماتش و ارتعاشات نانوتیرهای مدرج هدفمند دو جهته توسط پانگ و همکاران [۳۱] مطابق با نظریه تیر اویلر-برنولی، نظریه غیر خطی هندسی فون کارمن و نظریه کشش غیر محلی انجام شد. قایش [۳۲] ارتعاشات غیر خطی محوری تیر مدرج هدفمند غیر یکنواخت را با استفاده از اصل همپلتن و نظریه برشی مرتبه سوم انجام داد؛ معادلات جزئی بدست آمده توسط روش ترکیبی گالرکین گسسته سازی و حل گردید. رفتار ارتعاشی آزاد تیرهای مدرج هدفمند تحت اثر شرایط مرزی مختلف، توسط کرمعلی [۳۳] با استفاده از روابط لاگرانژ برای بدست آوردن معادلات متشکله و روش حل چند جمله‌ای و توابع کمکی برای ارضا شرایط مرزی مورد مطالعه قرار گرفته است. رفتار دامنه بزرگ تیرهای مدرج با استفاده از نظریه‌های مختلف تغییر شکل برشی توسط ژیه و همکاران [۳۴] انجام شده است که در آن از روش ریتز و معادلات لاگرانژ برای بدست آوردن و گسسته کردن معادلات استفاده شده است. فرقانی و همکاران [۳۵] به بررسی رفتار فرکانسی غیر خطی تیرهای هدفمند متخلخل ترک‌دار روی بستر الاستیک با استفاده از تئوری مرتبه سوم ردی پرداخته‌اند.

با توجه به پیچیدگی ذاتی روابط مبتنی بر نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر، روش‌های عددی قدرتمندی برای حل معادلات متشکله برای شرایط مرزی مختلف مورد نیاز است. روش مربعات دیفرانسیلی که اولین بار توسط بلمان و همکاران [۳۸] معرفی شد به طور گسترده‌ای برای حل مشکلات متعدد در زمینه‌های مختلف علم و مهندسی استفاده شده است. برت و مالیک [۳۹] مروری بر توسعه کلی روش این ارائه دادند. همچنین ذکر شده است که روش مربعات دیفرانسیلی، به دلیل دارا بودن دامنه وسیع و سرعت همگرایی بالا، برای مسائل غیر خطی کارآمدتر از تکنیک‌های عددی سنتی مانند روش‌های اجزای محدود و تفاضل محدود است. مزیت اصلی این روش دستیابی به جواب از طریق تعداد کمی از نقاط دامنه، حتی در سیستم معادلات غیر خطی پیچیده است [۴۰].

هدفمند، ممکن است حفره‌های میکروسکوپی، سوراخ‌های ریز یا تخلخل‌ها را در داخل مواد در حین فرآیند پخت ایجاد کند. ژو و همکاران [۲۲] نشان دادند که تخلخل ممکن است به دلیل انقباض بین ترکیبات فازهای فلزی و سرامیکی در ساخت مواد مدرج هدفمند ایجاد شود. همچنین، تولید عمدی این مواد به صورت متخلخل به دلیل قابلیت بالا در جذب انرژی نیز به عنوان یکی از جذاب‌ترین کاندیداها برای سازه‌های تحت بار ناپایدار در نظر گرفته می‌شود که منجر به توسعه سازه‌های جدید هدفمند متخلخل می‌شود. به همین علت اثر تخلخل در هنگام طراحی و آنالیز سازه‌های تابعی مدرج از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. سازه‌های تابعی مدرج متخلخل ترکیبی بسیار جالب از خواص مکانیکی مانند سختی بالا نسبت به وزن مخصوص خیلی پایین دارند. ارتعاشات آزاد و اجباری تیرهای متخلخل با قابلیت تغییر شکل برشی توسط چن و همکاران [۲۳] انجام شد و نتایج با استفاده از نظریه تیر تیموشنکو و بکارگیری معادلات لاگرانژ مورد بررسی قرار گرفت.

یوسف الرجوب و حمد [۲۴] ارتعاشات آزاد تیرهای مدرج هدفمند متخلخل اویلر-برنولی و تیموشنکو را با استفاده از ماتریس‌های انتقال حل نمودند. ارزیابی ارتعاشی نانو/میکرو تیرهای متخلخل دو بعدی برای دو نوع مواد متخلخل بر اساس نظریه تیموشنکو توسط شفیی و همکاران [۲۵] ارائه شد. ابراهیمی و جعفری [۲۶] ارزیابی فرکانسی تیرهای متخلخل وابسته به دما را بر اساس نظریه ترمومکانیکی مرتبه بالا با استفاده از روش حل ناویر به عنوان یک راه حل تحلیلی مورد مطالعه قرار دادند. بررسی ارتعاشات تیرهای متخلخل هدفمند در شرایط دمایی مختلف محیط توسط خاکپور و همکاران [۲۷] به روش عددی مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته انجام گردیده است.

بیشتر پدیده‌های جهان اطراف ما، به ویژه مسائل مختلف مهندسی مانند ارتعاشات، ذاتاً غیرخطی هستند. گاهی در سیستم‌های غیر خطی رفتارهایی مشاهده می‌شود که در سیستم‌های خطی رخ نمی‌دهد. اگرچه مسائل غیر خطی را معمولاً می‌توان با فرض رفتار خطی حول شرایط کاری حل کرد، اما این همیشه توجیه پذیر نیست. از سوی دیگر، امروزه با پیشرفت‌های انجام شده در زمینه مهندسی، دقت بالاتری از نتایج مورد نظر جامعه علمی قرار گرفته است. به همین دلایل، مطالعه مسائل غیر خطی به یکی از مهمترین چالش‌های مهندسی و فیزیک تبدیل شده است. منشاء غیر خطی بودن یک ساختار می‌تواند سه نوع باشد: غیر خطی فیزیکی، غیر خطی هندسی و شرایط مرزی غیر خطی. رفتار غیر خطی فرکانسی تیرهای تیموشنکو ساخته شده از مواد متخلخل توسط ابراهیمی و ضیا [۲۸] ارائه شده است که در آن تأثیر توزیع مواد، تخلخل، نسبت ابعاد و شماره مود بر رفتار ارتعاشی تیرهای



شکل ۱. تیر دوجزته مدرج هدفمند دوجزته با مقطع غیر یکنواخت باریک شونده روی بستر الاستیک

Fig. 1. Schematic of variable cross section of bi-directional FG beam resting on elastic foundation

روی لایه‌های الاستیک وینکلر و برشی بستر، در نظر بگیرید که  $b$  عرض و  $h$  ارتفاع تیر است. مطابق شکل ۱، سیستم مختصات دکارتی  $x$ ،  $y$  و  $z$  به ترتیب در جهت طول، عرض و ارتفاع تیر در نظر گرفته می‌شوند. میدان جابجایی تیر مطابق نظریه تغییر شکل برشی مرتبه سوم و بر اساس برخی مفروضات است که می‌تواند به صورت کلی به صورت زیر نوشته شود [۱ و ۵].

$$U(x, z, t) = u(x, t) - z \frac{\partial w_b(x, t)}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s(x, t)}{\partial x} \quad (1)$$

$$W(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t)$$

که در آن  $u$  نشان دهنده جابجایی محوری یک نقطه در سطح میانی تیر است و  $w_b$  و  $w_s$  به ترتیب جابجایی عرضی قسمت خمشی و برشی یک نقطه در سطح میانی تیر هستند. توزیع تنش برشی عرضی و به تبع آن کرنش در جهت ضخامت تیر هدفمند با تابع شکل  $f(z)$  نشان داده شده است. تابع شکل  $f(z)$  برای برآوردن شرایط مرزی بدون تنش در سطوح بالا و پایین تیر انتخاب شده است، بنابراین ضریب تصحیح برشی مورد نیاز نیست. با توجه به نظریه تغییر شکل برشی مرتبه سوم ردی،  $f(z)$  را می‌توان به صورت رابطه (۲) نشان داد [۵]

$$f(z) = \frac{4z^3}{3h^2} \quad (2)$$

همانطور که در مروری بر ادبیات تحقیق نشان داده شد، مطالعات نادری در مورد بررسی فرکانس دامنه بزرگ تیرهای متخلخل مدرج هدفمند دو جهته با مقطع باریک شونده که بر روی بستر الاستیک قرار دارند و بر اساس تئوری مراتب بالاتر، وجود دارد. بنابراین در مطالعه حاضر، تحلیل رفتار فرکانسی دامنه بزرگ تیرهای متخلخل مدرج هدفمند دو جهته بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه سوم ردی<sup>۱</sup> برای دو مدل تیر مدرج هدفمند انجام می‌شود. تغییر شکل برشی عرضی تیر مدرج بر اساس مجموع جابجایی‌های خمشی و برشی صفحه میانی تیر در نظر گرفته می‌شود که یک نماد فرمولی جدید برای تجزیه و تحلیل تیرهای دو جهته است. روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته به عنوان یک روش عددی کاربردی و قوی به همراه یک روش تکراری مستقیم برای بدست آوردن فرکانس‌های غیر خطی تیرهای مدرج دو جهته تحت شرایط مختلف بکار گرفته می‌شود. خواص مواد بر اساس دو نوع قانون توانی و نمایی، در دو جهت ضخامت و محوری تیر تغییر می‌کند. پس از نشان دادن همگرایی روش حل، صحت نتایج با مقایسه با سایر راه حل‌های موجود برای تیرهای همسانگرد مدرج هدفمند مورد بررسی قرار می‌گیرد و در نهایت تأثیر شاخص‌های تخلخل، نسبت ابعادی تیر، شاخص‌های گرادیان مواد در دو جهته، ضریب باریک شوندگی مقطع و پارامترهای بستر الاستیک، بر رفتار فرکانس ارتعاشات دامنه بزرگ تیر برای شرایط مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد.

## ۲- تئوری و فرمول بندی

### ۲-۱- سینماتیک و روابط حاکم

یک تیر دو جهته مدرج با طول  $L$  و سطح مقطع مستطیل  $b \times h$  بر

2 Shape function

1 Reddy Shear Deformation Beam Thoery (RSDBT)

$$\sigma_{xz} = k_s G(x, z) \times \left( \frac{\partial w_s(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial f(z)}{\partial z} \frac{\partial w_s(x, t)}{\partial x} \right) = k_s G(x, z) g(z) \frac{\partial w_s(x, t)}{\partial x} \quad (7)$$

## ۲-۲- خواص مواد متخلخل مدرج هدفمند دو جهته

تغییرات کسر حجمی مواد در طول تیر دو جهته مربوط به توزیع قانون توان<sup>۱</sup> به گونه‌ای تعریف شده است که ترکیبی از سرامیک و فلز با کسر حجمی متفاوت در امتداد ضخامت و محور تیر بوجود آید (شکل ۱). با پیروی از این قانون توانی از نظر کسر حجمی مواد تشکیل دهنده خواهیم داشت [۲۵]

$$V_c + V_m = 1 \quad (8)$$

$$V_c = \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^{P_x} \left( \frac{x}{l} \right)^{P_z}$$

که در آن  $-h/2 < z < h/2$  و  $p_x$  و  $p_z$  شاخص‌های توانی ماده در راستای طول و ضخامت تیر هستند. زمانیکه  $p_x$  و  $p_z$  صفر می‌شود تیر کاملاً از جنس سرامیک می‌گردد و زمانیکه این شاخص‌های توانی به سمت بینهایت میل شود، تیر از جنس فلز خواهد شد. پارامترهای  $V_m$  و  $V_c$  به ترتیب بیانگر کسر حجمی سرامیک و فلز هستند.

چنانچه  $P(x, z)$  هر خصوصیتی از ماده در دو جهت تیر مدرج هدفمند مانند مدول یانگ، چگالی تیر و ضریب پواسون فرض شود و همچنین پیدایش تخلخل در فرایند تولید را با ضریب  $e$  بعنوان ضریب تخلخل تیر در نظر گرفته شود، آنگاه روابط ذیل صادق خواهد بود [۲۵]

$$P(x, z) = P_m \left( V_m - \frac{e_0}{2} \right) + P_c \left( V_c - \frac{e_0}{2} \right) \quad (9)$$

که در این رابطه زیر نویس  $m$  و  $c$  بیانگر اعضا تشکیل دهنده تیر مدرج، فلز و سرامیک هستند.

با جایگذاری رابطه (۹) در (۸) برای تشکیل مدول یانگ  $E$  و چگالی  $\rho$

از طرفی مطابق قانون کلی هوک رابطه تنش- کرنش به فرم رابطه (۳) نشان داده می‌شود [۳۱ و ۳۶ و ۳۷]

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3)$$

که در آن  $\sigma_{ij}$  تانسور تنش و  $\varepsilon_{ij}$  تانسور کرنش هستند.  $\lambda$  و  $\mu$  ثابت‌های لامه می‌باشد که تابع جنس ماده هستند.

در استخراج معادلات حاکم فرضیات زیر لحاظ شده است. الف) تغییر شکل‌ها بزرگ. ب) وجود بارگذاری حرارتی با دمای ثابت. بر اساس میدان جابجایی در نظر گرفته شده در این تئوری، رابطه (۱)، می‌توان کرنش‌ها و در نتیجه تنش‌ها را در تیر به صورت زیر استخراج کرد. روابط کرنش- جابجایی غیر خطی با استفاده از تانسور کرنش غیر خطی گرین به فرم کلی (۴) نوشته می‌شود [۳۶ و ۳۷]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right] \quad (4)$$

رابطه مشهور ون کارمن که در واقع مؤلفه‌های غیر صفر تانسور کلی کرنش غیر خطی گرین است، به فرم (۵) استخراج می‌گردد [۳۱ و ۳۵]

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (5)$$

$$\gamma_{xz} = \left( 1 - \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) \frac{\partial w_s}{\partial x}$$

بنابراین با توجه به میدان جابجایی تعریف شده در رابطه (۱) و رابطه غیر خطی ون کارمن و قانون هوک خواهیم داشت

$$\sigma_{xx} = E(x, z) \left( -z \frac{\partial^2 w_b(x, t)}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial w_b(x, t)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_b(x, t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_s(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (6)$$

و  $\delta V_{ef}$  معرف تغییرات انرژی پتانسیل بستر الاستیک است.

انرژی کرنشی ناشی از تنش‌های مکانیکی تیر را می‌توان به صورت رابطه (۱۳) داشت [۱ و ۳ و ۴]

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{xz} \varepsilon_{xz}) dA dx \quad (13)$$

سپس با جایگذاری روابط تنش و کرنش به صورت رابطه (۱۴) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} U = & \int_0^L \left[ A(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + \right. \\ & \frac{1}{2} A(x) \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^3 \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + \\ & \frac{3}{4} A(x) \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^2 + \\ & \frac{1}{2} A(x) \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^3 + \\ & \frac{1}{2} A(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^2 + \\ & \frac{1}{8} A(x) \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^4 + \frac{1}{8} A(x) \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^4 + \\ & \frac{1}{2} A(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^2 + \\ & \frac{1}{2} A_s(x) \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} A(x) \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 + \\ & \left. \frac{1}{2} D(x) \left( \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{1}{2} B_s(x) \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} - \right. \\ & B(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} - \\ & B_s(x) \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} - \\ & \frac{1}{2} B(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^2 - B(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} - \\ & \frac{1}{2} B(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^2 + D_s(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} \\ & \left. B_s(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} - \right. \\ & \left. \frac{1}{2} B_s(x) \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} + \right. \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} P(x, z) = & P_m + (P_c - P_m) \times \\ & \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^{P_z} \left( \frac{x}{l} \right)^{P_x} - \frac{e_0}{2} (P_c + P_m) \\ E(x, z) = & E_m + \\ & (E_c - E_m) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^{P_z} \left( \frac{x}{l} \right)^{P_x} - \\ & \frac{e_0}{2} (E_c + E_m) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \rho(x, z) = & \rho_m + \\ & (\rho_c - \rho_m) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^{P_z} \left( \frac{x}{l} \right)^{P_x} - \\ & \frac{e_0}{2} (\rho_c + \rho_m) \end{aligned}$$

در این مقاله همچنین از مدل نمایی<sup>۱</sup> تیر مدرج هدفمند دوجهته برای توصیف تغییرات خواص مواد در جهت طول و ضخامت تیر که به شرح زیر است استفاده می‌شود [۳۳]

$$\begin{aligned} P(x, z) = & P_m e^{p_x \left( \frac{x}{l} + \frac{1}{2} \right) + p_z \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)} \\ E(x, z) = & E_m e^{p_x \left( \frac{x}{l} + \frac{1}{2} \right) + p_z \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)} \\ \rho(x, z) = & \rho_m e^{p_x \left( \frac{x}{l} + \frac{1}{2} \right) + p_z \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)} \end{aligned} \quad (11)$$

۲-۳ روابط بنیادی  
۲-۳-۱ معادلات حاکم

معادلات حاکم را می‌توان از اصل همیتون استخراج کرد. این اصل را می‌توان به صورت (۱۲) بیان کرد [۱ و ۳ و ۴]

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta U - \delta V_{ef}) dt = 0 \quad (12)$$

که در آن  $t$  پارامتر زمان است و  $t_1$  و  $t_2$  بترتیب زمان‌های اولیه و نهایی هستند؛ همچنین  $\delta K$  تغییرات انرژی جنبشی،  $\delta U$  تغییرات انرژی کرنشی



$$\begin{aligned} & \frac{3}{2}K_N w_b(x,t)^2 w_s(x,t)^2 + K_N w_b(x,t) w_s(x,t)^3 + \\ & \frac{1}{4}K_N w_b(x,t)^4 + K_w w_b(x,t) w_s(x,t) + \\ & \frac{1}{2}K_w w_b(x,t)^2 + \frac{1}{2}K_g \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^2 + \\ & \frac{1}{4}K_N w_s(x,t)^4 + \frac{1}{2}K_w w_s(x,t)^2 \Big] dx \end{aligned}$$

که در آن  $K_w$  و  $K_g$  به ترتیب ثابتهای وینکلر و لایه برشی بستر الاستیک هستند که به مشخصات فیزیکی خاک و بستر مانند طول خاک، مدول الاستیک و ضریب پواسون خاک بستگی دارند.  $K_N$  ضریب غیر خطی بستر تیر می‌باشد.

با بکاربردن روابط (۱۳) تا (۱۸) در رابطه (۱۲) و انجام انتگرال گیری جز به جز روی پارامترهای مکان و زمان، معادلات حاکم تیر مدرج هدفمند دوجهرته بر حسب منته‌های نیرو به شکل روابط پیوست (الف) ۱۹ - (الف) ۲۵ بدست می‌آید

که در آن‌ها ثابت‌های تعریف شده به فرم روابط (۲۶) و (۲۷) می‌باشد

$$\begin{aligned} & (Z_0(x), Z_1, Z_2, J_1, J_2, K_2) = \\ & \iint \rho(x, z) (1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dA \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & (A(x), B, D, B_s, D_s, H_s) = \\ & \iint E(x, z) (1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dA \end{aligned} \quad (27)$$

با جایگذاری روابط منته‌های تنش پیوست (الف) ۲۲ - (الف) ۲۵ در معادلات (الف) ۱۹ - (الف) ۲۱، معادلات حاکم تیر مدرج دوجهرته بر حسب جایابی به فرم روابط پیوست (الف) ۲۸ - (الف) ۳۰ بدست می‌آید

### ۲-۳-۲- شرایط مرزی

به همین ترتیب برای شرایط مرزی تیر دو جهته، می‌توان شرایط پایانی تیر را بصورت ساده شده پیوست (الف) ۳۱ - (الف) ۳۵ استخراج نمود.

$$\frac{1}{2}H_s(x) \left( \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

انرژی جنبشی تیر به فرم رابطه (۱۵) می‌باشد

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho(z) (U^2 + \dot{W}^2) dA dx \quad (15)$$

که با جایگذاری روابط میدان جایابی (۱) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} K = & \int_0^L \left[ J_2(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x \partial t} - \right. \\ & Z_1(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2} Z_2(x) \left( \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x \partial t} \right)^2 - \\ & J_1(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2} K_2(x) \left( \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x \partial t} \right)^2 + \\ & Z_0(x) \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial t} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2} Z_0(x) \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial t} \right)^2 + \\ & \left. \frac{1}{2} Z_0(x) \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} Z_0(x) \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 \right] dx \end{aligned} \quad (16)$$

و نهایتاً انرژی پتانسیل بستر الاستیک تیر به فرم رابطه (۱۷) می‌باشد

$$\begin{aligned} V_{ef} = & \int_0^L \left( \frac{1}{2} (k_w (w_b + w_s))^2 + k_g \left( \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} k_N (w_b + w_s)^4 \right) dx \end{aligned} \quad (17)$$

که با جایگذاری روابط میدان جایابی تعریف شده خواهیم داشت

$$\begin{aligned} V_{ef} = & \int_0^L \left[ K_g \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} K_g \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^2 + K_N w_b(x,t)^3 w_s(x,t) + \right. \end{aligned} \quad (18)$$

۲-۴ روش حل عددی

که  $N$  تعداد نقاط دامنه روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته در جهت طولی است.  $C_{ij}^{(n)}$  ثابت‌های تابع وزن در ارتباط با مشتق  $n$  ام تابع  $f(x)$  است. که  $x_i$  جزو نقاط گسسته شده دامنه می‌باشد.

$$C_{ij}^1 = \frac{M(x_i)}{(x_i - x_j)M(x_j)} \quad (38)$$

$$M(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^N (x_i - x_j) \quad (39)$$

تابع وزن مشتقات مراتب بالاتر توسط روابط بازگشتی زیر بدست می‌آید.

$$C_{ij}^{(n)} = n \left( C_{ij}^{(n-1)} C_{ij}^1 - \frac{C_{ij}^{(n-1)}}{(x_i - x_j)} \right) \quad (40)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N$$

$$C_{ij}^{(n)} = n \left( C_{ij}^{(n-1)} C_{ij}^1 - \frac{C_{ij}^{(n-1)}}{(x_i - x_j)} \right) \quad (41)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N$$

بر اساس این روش مشتقات جزئی یک تابع توسط روابط ذیل بدست می‌آید [۳۰ و ۳۱].

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_i} &= \sum_{j=1}^N A_{ij} f(x_j, t) & i = 1, 2, \dots, N \\ \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} &= \sum_{j=1}^N B_{ij} f(x_j, t) \\ \frac{\partial^3 f(x, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=x_i} &= \sum_{j=1}^N C_{ij} f(x_j, t) \\ \frac{\partial^4 f(x, t)}{\partial x^4} \Big|_{x=x_i} &= \sum_{j=1}^N D_{ij} f(x_j, t) \end{aligned} \quad (42)$$

روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته<sup>۱</sup> به عنوان یکی از روش‌های مرتبه بالا شناخته می‌شود. در روش‌های مرتبه پایین از قبیل تفاضل محدود و اجزای محدود برای به دست آوردن دقت کافی در محاسبات نیازمند تعداد گره‌های محاسباتی زیادی می‌باشد. این در حالی است که در روش‌های مرتبه بالا، حتی با استفاده از تعداد گره‌های محاسباتی کم نیز، نتایج عددی از دقت خوبی برخوردار است و همگرایی به جواب‌ها به سرعت انجام شده و هزینه محاسبات به طور چشمگیری کاهش می‌یابد. در این مسأله علاوه بر آنچه ذکر شد پیچیدگی مسأله به دلیل استفاده از تئوری‌های برشی مرتبه بالا می‌تواند این روش را در حل مسأله در اولویت قرار دهد. نکته مهم در موفقیت به کار بردن این روش چگونگی توزیع شبکه نقاط است. در واقع دقت این روش معمولاً نسبت به نحوه توزیع شبکه نقاط حساس است. توزیع بهینه شبکه نقاط به مرتبه مشتق در شرایط مرزی و تعداد نقاط استفاده شده بستگی دارد. توزیع شبکه نقاط نقش بسیار مهمی در تعیین سرعت همگرایی و پایداری این روش دارد. علی‌رغم این که این روش گسسته سازی، ساده است اما تحقیقات انجام شده، نشان داده است که توزیع غیر یکنواخت نقاط، منجر به نتایج بهتری خواهد شد. به عنوان یک نوع توزیع غیر یکنواخت می‌توان از توزیع چیبیشف-گوس-لوباتو<sup>۲</sup> استفاده کرد گسسته سازی معادلات بدست آمده فوق بر مبنای روش مربعات دیفرانسیلی و نقاط منتخب گوس-لوباتو انجام می‌گردد که به عنوان روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته معرفی شده است. مزیت این روش توزیع غیر یکنواخت بر سایر روش‌های دیگر<sup>۳</sup> گسسته سازی، این است که تجمع نقاط در نواحی مرزی بیشتر از نواحی میانی خواهد بود که باعث بالا رفتن دقت نتایج خواهد شد تا بدینوسیله معادلات جزئی حاکم و شرایط مرزی آنها به معادلات جبری تبدیل می‌شوند [۳۰ و ۳۱].

$$x_i = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left( \frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right\} \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (36)$$

مشتق مرتبه  $n$  ام تابع  $f(x)$  با در نظر گرفتن نقاط نمونه گسسته شده  $x_i$  به شکل زیر نوشته می‌شود [۳۰ و ۳۱].

$$f_x^{(n)}(x_i) = \sum_{i=1}^N C_{ij}^{(n)} f(x_i) \quad (37)$$

- 1 Generalized Differential Quadrature Method (GDQM)
- 2 Gauss-Lobatto-Chebyshev



$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} (B_i C_{ij} + \tilde{B}_i A_{ij} + 2\tilde{B}_i B_{ij}) \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{sk} + \\
 & B_{ij} N_{xxi} + A_{ij} \tilde{N}_{xxi} - D_i D_{ij} - 2\tilde{D}_i C_{ij} - \tilde{D}_i B_{ij} + \\
 & K_g B_{ij} - K_w \delta_{ij} - K_N \delta_{ij} (w_{bi})^2 - \\
 & 2K_N \delta_{ij} w_{bi} w_{si} - K_N \delta_{ij} (w_{si})^2 w_{bj} \\
 & \left[ \frac{1}{2} B_i A_{ij} \left( \sum_{k=1}^N C_{ik} w_{bk} \right) + \frac{1}{2} B_i A_{ij} \left( \sum_{k=1}^N C_{ik} w_{sk} \right) + \right. \\
 & \left. (B_i B_{ij} + \tilde{B}_i A_{ij}) \sum_{k=1}^N B_{ik} w_{bk} + (B_i B_{ij} + \tilde{B}_i A_{ij}) \sum_{k=1}^N B_{ik} w_{sk} + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2} (B_i C_{ij} + \tilde{B}_i A_{ij} + 2\tilde{B}_i B_{ij}) \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{bk} + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2} (B_i C_{ij} + \tilde{B}_i A_{ij} + 2\tilde{B}_i B_{ij}) \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{sk} + \right. \\
 & \left. A_{ij} \tilde{N}_{xxi} + B_{ij} N_{xxi} - D_{si} D_{ij} - 2\tilde{D}_{si} C_{ij} - \right. \\
 & \left. \tilde{D}_{si} B_{ij} + B_{ij} K_g - \delta_{ij} K_w - K_N \delta_{ij} (w_{bi})^2 - \right. \\
 & \left. 2K_N \delta_{ij} w_{bi} w_{si} - K_N \delta_{ij} (w_{si})^2 \right] w_{sj} = \\
 & \mathcal{I}_{1i} \sum_{j=1}^N A_{ij} \frac{d^2 u_j}{dt^2} + \tilde{\mathcal{I}}_{1i} \frac{d^2 u_i}{dt^2} + \mathcal{Z}_{0i} \frac{d^2 w_{bi}}{dt^2} - \\
 & \mathcal{I}_{2i} \sum_{j=1}^N B_{ij} \frac{d^2 w_{bj}}{dt^2} - \tilde{\mathcal{I}}_{2i} \sum_{j=1}^N A_{ij} \frac{d^2 w_{bj}}{dt^2} \\
 & + \mathcal{Z}_{0i} \frac{d^2 w_{si}}{dt^2} - \mathcal{J}_{2i} \sum_{j=1}^N B_{ij} \frac{d^2 w_{sj}}{dt^2} - \tilde{\mathcal{J}}_{2i} \sum_{j=1}^N A_{ij} \frac{d^2 w_{sj}}{dt^2}
 \end{aligned} \tag{۴۵}$$

$$\begin{aligned}
 \delta w_s : \\
 & \sum_{j=1}^N \left\{ (B_{si} C_{ij} + \tilde{B}_{si} A_{ij} + 2\tilde{B}_{si} B_{ij}) u_j + \right. \\
 & \left. \left[ \frac{1}{2} B_{si} A_{ij} \left( \sum_{k=1}^N C_{ik} w_{bk} \right) + \frac{1}{2} B_{si} A_{ij} \left( \sum_{k=1}^N C_{ik} w_{sk} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. (B_{si} B_{ij} + \tilde{B}_{si} A_{ij}) \sum_{k=1}^N B_{ik} w_{bk} + (B_{si} B_{ij} + \tilde{B}_{si} A_{ij}) \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \sum_{k=1}^N B_{ik} w_{sk} + \frac{1}{2} (B_{si} C_{ij} + \tilde{B}_{si} A_{ij} + 2\tilde{B}_{si} B_{ij}) \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{bk} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{1}{2} (B_{si} C_{ij} + \tilde{B}_{si} A_{ij} + 2\tilde{B}_{si} B_{ij}) \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{sk} + \right. \right. \\
 & \left. \left. B_{ij} N_{xxi} + A_{ij} \tilde{N}_{xxi} - D_{si} D_{ij} - 2\tilde{D}_{si} C_{ij} - \tilde{D}_{si} B_{ij} + \right. \right. \\
 & \left. \left. K_g B_{ij} - K_w \delta_{ij} - K_N \delta_{ij} (w_{bi})^2 - 2K_N \delta_{ij} w_{bi} w_{si} - \right. \right. \\
 & \left. \left. K_N \delta_{ij} (w_{si})^2 \right] w_{bj} + \left[ \frac{1}{2} B_{si} A_{ij} \left( \sum_{k=1}^N C_{ik} w_{bk} \right) + \right. \right.
 \end{aligned} \tag{۴۶}$$

که در آن  $A_{ij}$  ;  $B_{ij}$  ;  $C_{ij}$  ;  $D_{ij}$  ثابت‌های وزن مرتبه اول، دوم، سوم و چهارم روش مربعات دیفرانسیلی هستند. که به فرم رابطه (۴۳) نیز می‌توان آنها را بازنویسی کرد [۳۰ و ۳۱].

$$\begin{aligned}
 [B_{ij}] &= [A_{ij}][A_{ij}] = [A_{ij}]^2, \\
 [C_{ij}] &= [A_{ij}][B_{ij}] = [A_{ij}]^3, \\
 [D_{ij}] &= [B_{ij}][B_{ij}] = [A_{ij}]^4
 \end{aligned} \tag{۴۳}$$

بدین ترتیب فرم گسسته معادلات حرکت غیر خطی توسط روش مربعات دیفرانسیلی به فرم ذیل بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}
 \delta u : \\
 & \sum_{j=1}^N \left\{ (A_i B_{ij} + \tilde{A}_i A_{ij}) u_j + \left[ \frac{1}{2} A_i A_{ij} \left( \sum_{k=1}^N B_{ik} w_{bk} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{1}{2} A_i A_{ij} \left( \sum_{k=1}^N B_{ik} w_{sk} \right) + \frac{1}{2} (A_i B_{ij} + \tilde{A}_i A_{ij}) \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{bk} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{1}{2} (A_i B_{ij} + \tilde{A}_i A_{ij}) \left( \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{sk} \right) - B_i C_{ij} - \tilde{B}_i B_{ij} \right] w_{bj} + \right. \\
 & \left. \left[ \frac{1}{2} A_i A_{ij} \left( \sum_{k=1}^N B_{ik} w_{bk} \right) + \frac{1}{2} A_i A_{ij} \left( \sum_{k=1}^N B_{ik} w_{sk} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{1}{2} (A_i B_{ij} + \tilde{A}_i A_{ij}) \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{bk} + \frac{1}{2} (A_i B_{ij} + \tilde{A}_i A_{ij}) \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{sk} - \tilde{B}_{si} B_{ij} - B_{si} C_{ij} \right] w_{sj} \right\} = \\
 & = 0_i \frac{d^2 u_i}{dt^2} - \mathcal{I}_{1i} \sum_{j=1}^N A_{ij} \frac{d^2 w_{bj}}{dt^2} - \mathcal{J}_{1i} \sum_{j=1}^N A_{ij} \frac{d^2 w_{sj}}{dt^2}
 \end{aligned} \tag{۴۴}$$

$$\begin{aligned}
 \delta w_b : \\
 & \sum_{j=1}^N \left\{ (B_i C_{ij} + \tilde{B}_i A_{ij} + 2\tilde{B}_i B_{ij}) u_j + \right. \\
 & \left. \left[ \frac{1}{2} B_i A_{ij} \left( \sum_{k=1}^N C_{ik} w_{bk} \right) + \frac{1}{2} B_i A_{ij} \left( \sum_{k=1}^N C_{ik} w_{sk} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. (B_i B_{ij} + \tilde{B}_i A_{ij}) \sum_{k=1}^N B_{ik} w_{bk} + (B_i B_{ij} + A_{ij} \tilde{B}_i) \sum_{k=1}^N B_{ik} w_{sk} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{1}{2} (B_i C_{ij} + A_{ij} \tilde{B}_i + 2B_{ij} \tilde{B}_i) \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{bk} + \right. \right.
 \end{aligned} \tag{۴۵}$$

$$\begin{aligned}
 u = 0 \quad \text{or} \quad & \sum_{j=1}^N \{A_i A_{ij} u_j + \\
 & \left( \frac{1}{2} A_i A_{ij} \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{bk} + \frac{1}{2} A_i A_{ij} \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{sk} - \right. \\
 & B_i B_{ij} w_{bj} + \left. \left( \frac{1}{2} A_i A_{ij} \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{bk} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{1}{2} A_i A_{ij} \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{sk} - B_{ij} B_{si} \right) w_{sj} \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{۴۹}$$

$$\begin{aligned}
 w_b = 0 \quad \text{or} \quad & \sum_{j=1}^N \{u_j (B_i B_{ij} + A_{ij} \tilde{B}_i) + \left( \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N B_{ik} w_{bk} \right) A_{ij} B_i + \\
 & \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N B_{ik} w_{sk} \right) A_{ij} B_i + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{bk} \right) B_i B_{ij} + \\
 & \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{sk} \right) B_i B_{ij} - C_{ij} D_i + A_{ij} N_{xxi} + \\
 & A_{ij} K_g + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{bk} \right) A_{ij} \tilde{B}_i + \\
 & \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{sk} \right) A_{ij} \tilde{B}_i - B_{ij} \tilde{D}_i \} w_{bj} + \\
 & \left( \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N B_{ik} w_{bk} \right) A_{ij} B_i + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N B_{ik} w_{sk} \right) A_{ij} B_i + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{bk} \right) B_i B_{ij} + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{sk} \right) B_i B_{ij} - \right. \\
 & \left. C_{ij} D_{si} + A_{ij} N_{xxi} + A_{ij} K_g + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{bk} \right) A_{ij} \tilde{B}_i + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{sk} \right) A_{ij} \tilde{B}_i - B_{ij} \tilde{D}_{si} \right) w_{sj} \left\} = \right. \\
 & \left. \mathcal{I}_{1i} \sum_{j=1}^N A_{ij} \frac{d^2 u_j}{dt^2} - \mathcal{I}_{2i} \sum_{j=1}^N B_{ij} \frac{d^2 w_{bj}}{dt^2} - J_{2i} \sum_{j=1}^N B_{ij} \frac{d^2 w_{sj}}{dt^2} \right.
 \end{aligned} \tag{۵۰}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} B_{si} A_{ij} \left( \sum_{k=1}^N C_{ik} w_{sk} \right) + (B_{si} B_{ij} + \tilde{B}_{si} A_{ij}) \sum_{k=1}^N B_{ik} w_{bk} + \\
 & (B_{si} B_{ij} + \tilde{B}_{si} A_{ij}) \sum_{k=1}^N B_{ik} w_{sk} + \\
 & \frac{1}{2} (B_{si} C_{ij} + \tilde{B}_{si} A_{ij} + 2\tilde{B}_{si} B_{ij}) \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{bk} + \\
 & \frac{1}{2} (B_{si} C_{ij} + \tilde{B}_{si} A_{ij} + 2\tilde{B}_{si} B_{ij}) \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{sk} + \\
 & A_{ij} \tilde{N}_{xxi} + B_{ij} N_{xxi} - H_{si} D_{ij} - 2\tilde{H}_{si} C_{ij} - \tilde{H}_{si} B_{ij} + \\
 & A_{si} B_{ij} + \tilde{A}_{si} A_{ij} + B_{ij} K_g - \delta_{ij} K_w - K_N \delta_{ij} (w_{bi})^2 - \\
 & 2K_N \delta_{ij} w_{bi} w_{si} - K_N \delta_{ij} (w_{si})^2 \left. \right\} = \\
 & J_{1i} \sum_{j=1}^N A_{ij} \frac{d^2 u_j}{dt^2} + \tilde{J}_{1i} \frac{d^2 u_i}{dt^2} + \mathcal{I}_{0i} \frac{d^2 w_{bi}}{dt^2} - \\
 & \tilde{J}_{2i} \sum_{j=1}^N A_{ij} \frac{d^2 w_{bj}}{dt^2} - J_{2i} \sum_{j=1}^N B_{ij} \frac{d^2 w_{bj}}{dt^2} + \\
 & \mathcal{I}_{0i} \frac{d^2 w_{si}}{dt^2} - K_{2i} \sum_{j=1}^N B_{ij} \frac{d^2 w_{sj}}{dt^2} - \tilde{K}_{2i} \sum_{j=1}^N A_{ij} \frac{d^2 w_{sj}}{dt^2}
 \end{aligned} \tag{۴۶}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
 \tilde{\alpha} &= \frac{d\alpha}{dx} \quad \text{for} \\
 (\alpha &= A, A_s, B, B_s, D, D_s, H_s, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, J_1, J_2, K_2, N_{xx})
 \end{aligned} \tag{۴۷}$$

$$\begin{aligned}
 N_{xxi} &= \sum_{j=1}^N \{A_i A_{ij} u_j + \frac{1}{2} A_i A_{ij} \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{sk} + \\
 & \frac{1}{2} A_i A_{ij} \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{bk} - B_i B_{ij} w_{bj} + \\
 & \left( \frac{1}{2} A_i A_{ij} \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{bk} + \frac{1}{2} A_i A_{ij} \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{sk} - B_{si} B_{ij} w_{sj} \right\}
 \end{aligned} \tag{۴۸}$$

فرم گسسته شرایط مرزی به شکل روابط ذیل می‌باشد.

که در آن ماتریس جرم بوده و  $K_L$  و  $K_{NL}$  به ترتیب ماتریس‌های خطی و غیر خطی سفتی تیر می‌باشند.

یکی از نکات مهم در اعمال روش مربعات دیفرانسیلی، اعمال شرط مرزی بر روی مرزهای ناحیه حل مسئله می‌باشد. روش‌های زیادی برای این امر وجود دارد که جزییات آنها را می‌توان در مرجع [۳۸] یافت. جامع‌ترین روش که در تمامی مسائل کارآیی دارد تقسیم ناحیه حل به دو بخش نقاط درونی و نقاط مرزی می‌باشد. در این تحقیق از این روش برای اعمال شرایط مرزی استفاده می‌گردد. در حالت کلی معادله حاکم مانند رابطه (۵۳) می‌باشد

که در آن

$$b, d \quad b = \left\{ \left\{ \bar{u} \right\}, \left\{ \bar{w}_b \right\}, \left\{ \bar{w}_s \right\} \right\}^T \quad \text{و} \quad d = \left\{ \left\{ \bar{u} \right\}, \left\{ \bar{w}_b \right\}, \left\{ \bar{w}_s \right\} \right\}^T$$

به عنوان بردار شناخته می‌شوند که  $b$  مشخصه کننده نقاط روی مرز و  $d$  مشخص کننده نقاط دامنه است.

برای آنالیز ارتعاشات آزاد و هارمونیک مساله روش ذیل در نظر گرفته می‌شود.

$$d = d_0 e^{i\omega t}, \quad u = \bar{u} e^{i\omega t}, \quad (54)$$

$$w_b = \bar{w}_b e^{i\omega t}, \quad w_s = \bar{w}_s e^{i\omega t}$$

که در آن  $\omega$  فرکانس بی بعد بوده و  $d$  ثابت است نامعلوم که جهت معرفی مؤلفه‌های جایجایی است.

با جایگذاری معادله (۵۴) در معادله (۵۳) خواهیم داشت.

$$(K_L + K_{NL} - \omega^2 M)d_0 = 0 \quad (55)$$

$$\begin{bmatrix} M_{bb} & 0 \\ 0 & M_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{d}_b \\ \bar{d}_d \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{bb}^L + K_{bb}^{NL} & K_{bd} \\ K_{db} & K_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{d}_b \\ \bar{d}_d \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (56)$$

با استفاده از کاربرد روش هارمونیک بالانس، همانطور که ملک زاده [۳۰] نشان داد، خواهیم داشت

$$\begin{bmatrix} K_{bb}^L + \frac{3}{4} K_{bb}^{NL} & K_{bd} \\ K_{db} & K_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{d}_b \\ \bar{d}_d \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{bb} & 0 \\ 0 & M_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{d}_b \\ \bar{d}_d \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (57)$$

کاملاً مشخص است که معادله (۵۷) یک مساله غیر خطی مقدار ویژه

$$w_s = 0 \quad \text{or}$$

$$\sum_{j=1}^N \{u_j (B_{ij} B_{si} + A_{ij} \bar{B}_{si}) + \left( \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N B_{ik} w_{bk} \right) A_{ij} B_{si} + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N B_{ik} w_{sk} \right) A_{ij} B_{si} + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{bk} \right) B_{ij} B_{si} + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{sk} \right) B_{ij} B_{si} - C_{ij} D_{si} + A_{ij} N_{xxi} + A_{ij} K_g + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{bk} \right) A_{ij} \bar{B}_{si} + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{sk} \right) A_{ij} \bar{B}_{si} - B_{ij} \bar{D}_{si} \} w_{bj} + \left( A_{si} A_{ij} + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N B_{ik} w_{bk} \right) A_{ij} B_{si} + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N B_{ik} w_{sk} \right) A_{ij} B_{si} + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{bk} \right) B_{ij} B_{si} + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{sk} \right) B_{ij} B_{si} + A_{ij} N_{xxi} + A_{ij} K_g + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{bk} \right) A_{ij} \bar{B}_{si} + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{sk} \right) A_{ij} \bar{B}_{si} - B_{ij} \bar{H}_{si} - C_{ij} H_{si} \} w_{sj} = J_{1i} \sum_{j=1}^N A_{ij} \frac{d^2 u_j}{dt^2} - J_{2i} \sum_{j=1}^N B_{ij} \frac{d^2 w_{bj}}{dt^2} - K_{2i} \sum_{j=1}^N B_{ij} \frac{d^2 w_{sj}}{dt^2} \quad (51)$$

$$\frac{\partial w_b}{\partial x} = 0 \quad \text{or} \quad \sum_{j=1}^N \{A_{ij} B_{si} u_j + \left( \frac{1}{2} B_{ij} A_{ij} \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{bk} + \frac{1}{2} A_{ij} B_{ij} \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{sk} - B_{ij} D_{si} \right) w_{bj} + \left( \frac{1}{2} A_{ij} B_{ij} \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{bk} + \frac{1}{2} A_{ij} B_{ij} \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{sk} - B_{ij} D_{si} \right) w_{sj} \} = 0 \quad (52)$$

$$\frac{\partial w_s}{\partial x} = 0 \quad \text{or} \quad \sum_{j=1}^N \{A_{ij} B_{si} u_j + \left( \frac{1}{2} A_{ij} B_{si} \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{bk} + \frac{1}{2} A_{ij} B_{si} \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{sk} - B_{ij} H_{si} \right) w_{bj} + \left( \frac{1}{2} A_{ij} B_{si} \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{bk} + \frac{1}{2} A_{ij} B_{si} \sum_{k=1}^N A_{ik} w_{sk} - B_{ij} H_{si} \right) w_{sj} \} = 0$$

به منظور ساده سازی روابط (۴۴)، (۴۵) و (۴۶) و شرایط مرزی

مربوطه، آن‌ها به فرم معادله خلاصه شده ماتریسی ذیل نوشته می‌شوند.

$$(K_L + K_{NL})d + M \ddot{d} = 0 \quad (53)$$

جدول ۱. خصوصیات ماده تیر

Table 1. Material properties of Beam

$E$ (GPa)	$\rho$ (kg/m <sup>۳</sup> )	$\nu$	
۴۱۱	۱۹۲۵۰	۰/۳	تنگستن
۱۲۰	۸۹۶۰	۰/۳	مس

$$\lambda_n = \frac{\omega_n L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad (58)$$

که در آن  $E_m$  و  $\rho_m$  به ترتیب چگالی و مدول یانگ قسمت فلزی می‌باشند.

همچنین، ثابت‌های بدون بعد بستر الاستیک مورد استفاده در استخراج نتایج عددی به صورت رابطه (۵۹) بیان شده است [۱].

$$K_w = \frac{k_w L^4}{E_m I} \quad , \quad K_g = \frac{k_g L^2}{\pi^2 E_m I} \quad (59)$$

که در آن  $l$ ، ارتفاع و عرض تیر سطح مقطع متغیر، عبارت است از

$$\begin{aligned} I &= \frac{bh^3}{12} \quad , \\ h(x) &= h_0 \left(1 - \beta \frac{x}{l}\right), \\ b(x) &= b_0 \left(1 - \beta \frac{x}{l}\right) \end{aligned} \quad (60)$$

در همه موارد تحت بررسی، در ابتدا، روند همگرایی پارامتر فرکانس بدون بعد دامنه بزرگ تیر دو جهته از طریق تعداد نقاط شبکه در طول تیر دو جهته مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در جداول ۲ و ۳ روند همگرایی پارامتر فرکانس بدون بعد دامنه بزرگ تیر دو جهته برای سه مدل ارتعاشی و برای شرایط مرزی ساده و دو سر گیردار ارائه شده است. مشاهده که نتایج همگرایی با  $N_x = ۱۳$  بدست می‌آید.

در جدول ۴ نسبت فرکانس غیر خطی به خطی تیرها  $\lambda = \omega_{NL} / \omega_L$

می‌باشد که مستقیماً با روش‌های حل معمول، قابل حل نیست. در این مقاله از یک روش تکراری مستقیم در کنار روش مقدار ویژه جهت حل معادلات مساله استفاده می‌شود که این روش حل شامل گام‌های ذیل است.

مرحله اول:  $K_{NL}$  را نادیده گرفته شود.  $\omega_L$  فرکانس بی بعد خطی و بردار ویژه مربوط به آن از معادله (۵۷) بدست می‌آید.

مرحله دوم: از بردار ویژه بدست آمده برای محاسبه  $K_{NL}$  استفاده می‌شود. یک مقدار ویژه و بردار ویژه متعلق به آن بدست می‌آید. در این مرحله بردارهای ویژه متعلق به معادله (۵۷) نسبت به خیز مقطع مناسب تیر مدرج هدفمند ( $x_m$ ) نرمالایز می‌شوند. سپس این بردارهای ویژه در مقدار  $(w_m / r)$  ضرب می‌شوند. که در آن  $w_m$  مقدار جابجایی عرضی دلخواه تیر در مقطع  $x = x_m$  می‌باشد و  $r = \sqrt{bh^3 / 12A}$  شعاع ژیراسیون مقطع تیر است.

مرحله سوم: روش تکراری برای یک مقدار  $(w_m / r)$  تکرار می‌گردد تا مقادیر غیر خطی فرکانس از دو مرحله پیاپی روش تکراری  $0.0001$  شود. سپس فرکانس غیر خطی  $\omega_{NL}$  بدست می‌آید.

### ۳- نتایج عددی و بحث

برای تأیید صحت نتایج، مقایسه با سایر راه حل‌های موجود انجام می‌شود. برای بررسی ارتعاشی دامنه بزرگ، تیر دو جهته مدرج ساخته شده از تنگستن<sup>۱</sup> در لایه بالایی و مس<sup>۲</sup> در لایه زیرین فرض می‌شود. سپس روند همگرایی و دقت نتایج برای این تیرها در شرایط مرزی مختلف برای فرمول‌های ارائه شده مورد بررسی قرار می‌گیرد.

خواص این مواد در جدول ۱ لیست شده است [۳۴].

پارامتر فرکانس بدون بعد به صورت زیر تعریف می‌شود [۱].

- |   |              |
|---|--------------|
| 1 | Tungsten (W) |
| 2 | Copper (Cu)  |

جدول ۲. رفتار همگرایی پارامتر نسبت فرکانسی  $\lambda_i = \omega_{NL}/\omega_L$  برای تیر دوجبهته و با شرایط مرزی دو سر ساده و  $\omega_{max}/r = 0.5$

**Table 2. Convergence trend of the frequency parameters  $\lambda_i = \omega_{NL}/\omega_L$  (RBT) for simply supported Bi-di FG beam ( $K_w = K_g = 0$ ,  $e_0 = 0$ ,  $p_z = 2$ ,  $\omega_{max}/r = 0.5$ )**

تعداد نقاط گسسته سازی $N_x$							$L/h$
۱۷	۱۵	۱۳	۱۱	۹	۷	شماره مود	
۰/۹۷۲۴	۰/۹۷۲۵	۰/۹۷۲۵	۰/۹۷۲۵	۱/۱۱۱۸	۱/۱۰۱	۱	۵
۱/۰۵۱۷	۱/۰۵۱۷	۱/۰۵۱۷	۱/۰۵۱۷	۱/۰۵۰۲	۱/۰۶۰۲	۲	
۰/۸۲۲۸	۰/۸۲۲۹	۰/۸۲۲۹	۰/۸۴۵۰	۰/۸۴۵۴	۱/۰۰۲۱	۳	
۰/۹۶۹۰	۰/۹۶۹۱	۰/۹۶۹۱	۰/۹۶۹۹	۰/۹۷۰۰	۰/۹۵۸۸	۱	۱۰
۱/۰۴۶۱	۱/۰۴۶۱	۱/۰۴۶۰	۱/۰۴۵۹	۱/۰۴۲۴	۱/۰۶۲۶	۲	
۱/۰۷۴۶۴	۱/۰۷۳۶	۱/۰۷۳۶	۱/۰۸۰۱	۱/۰۵۲۶	۱/۰۴۱۱	۳	

جدول ۳. رفتار همگرایی پارامتر نسبت فرکانسی  $\lambda_i = \omega_{NL}/\omega_L$  برای تیر دوجبهته و با شرایط مرزی دو سر گیردار و  $\omega_{max}/r = 0.4$

**Table 1. Convergence trend of the frequency parameters (RBT) for clamped-clamped Bi-di FG beam ( $K_w = K_g = 0$ ,  $e_0 = 0$ ,  $p_x = 2$ ,  $\omega_{max}/r = 0.4$ )**

تعداد نقاط گسسته سازی شده $N_x$							$L/h$
۱۷	۱۵	۱۳	۱۱	۹	۷	شماره مود	
۱/۰۱۴۴	۱/۰۱۳۴	۱/۰۱۳۳	۱/۰۱۳۳	۱/۰۰۳۶۲	۰/۹۸۹۹	۱	۵
۱/۰۱۸۹	۱/۰۱۸۷	۱/۰۱۸۸	۱/۰۱۸۷	۱/۰۱۰۹	۱/۰۱۱۶	۲	
۱/۰۷۹۱	۱/۰۷۹۲	۱/۰۷۹۳	۱/۰۷۹۳	۱/۰۷۹۲	۱/۰۰۷۰۱	۳	
۱/۰۰۵۵	۱/۰۰۵۴	۱/۰۰۵۵	۱/۰۰۹۷	۱/۰۰۹۹	۱/۰۰۵۳۶	۱	۱۰
۱/۰۰۲۳۱	۱/۰۰۲۳۲	۱/۰۰۲۳۲	۱/۰۰۱۳۹	۱/۰۰۱۳۷	۱/۰۰۱۲۹	۲	
۱/۰۰۳۱۳	۱/۰۰۳۱۵	۱/۰۰۳۱۵	۱/۰۰۳۶۹	۱/۰۰۳۰۱	۱/۰۰۲۲۹	۳	

جدول ۴. بررسی صحت نتایج نسبت فرکانس غیر خطی  $\lambda_i = \omega_{NL}/\omega_L$  تئوری تیموشنکو و اویلر برنولی [۳۰] و کار حاضر (تئوری ردی)

Table 4. Comparison of frequency parameter  $\lambda_i = \omega_{NL}/\omega_L$  between EBT, TBT and present work (RBT) for FG beam

$Wm/r=3$			$Wm/r=2$			$Wm/r=1$			شرایط مرزی
EBT	TBT	RBT (کار حاضر)	EBT	TBT	RBT (کار حاضر)	EBT	TBT	RBT (کار حاضر)	
۱/۱۸۳۳	۱/۲۰۴۸	۱/۲۸۱۸	۱/۰۸۵۸	۱/۰۹۳۹	۱/۱۳۵۲	۱/۰۲۲۲	۱/۰۲۴۰	۱/۰۳۵۷	C-C ( $\lambda_1$ )
۱/۳۶۳۶	۱/۵۹۸۷	۱/۵۷۱۵	۱/۱۷۹۳	۱/۲۵۰۵	۱/۲۹۸۶	۱/۰۴۸۵	۱/۰۶۳۰	۱/۰۸۵۴	C-C ( $\lambda_2$ )
۱/۷۶۰۵	۱/۴۷۶۷	۱/۵۳۷۱	۱/۲۳۱۹	۱/۲۳۷۶	۱/۲۸۲۰	۱/۰۶۴۱	۱/۰۶۵۳	۱/۰۸۰۹	S-C ( $\lambda_1$ )

ادامه می‌یابد. در حالت تیر یکسر گیردار<sup>۶</sup> با افزایش نسبت دامنه فرکانس غیر خطی کاهش دارد.

شکل ۳ اثر ضریب باریک شونده سطح مقطع بر نسبت فرکانس غیرخطی به خطی  $\lambda = \omega_{NL}/\omega_L$  برای شرایط مرزی دو سر گیردار و شرایط مرزی ساده بر حسب مقادیر متفاوت نسبت دامنه را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش ضریب باریک شونده سطح مقطع تیر، نسبت فرکانسی غیر خطی افزایش می‌یابد که دلیل آن افزایش سفتی کلی تیر در حالت غیر خطی نسبت به خطی است. علاوه بر این واضح است که افزایش مقادیر نسبت دامنه تأثیر قابل توجهی در افزایش نسبت فرکانس غیر خطی به خطی  $\lambda = \omega_{NL}/\omega_L$  دارد.

اثر تغییرات سفتی پارامترهای بستر الاستیک بر نسبت فرکانس غیر خطی به خطی  $\lambda = \omega_{NL}/\omega_L$  یک تیر همسانگرد در شکل ۴ برای شرایط مرزی ساده نشان داده شده است، از این نمودار می‌توان که با افزایش ضریب سفتی پایه وینکلر  $K_w$  و ضریب برشی  $K_g$ ، نسبت فرکانس غیر خطی به خطی به تدریج کاهش یافته و سپس ثابت می‌ماند. با این حال، تأثیر افزایش سفتی برشی بستر بر کاهش نسبت فرکانس غیر خطی به خطی بیشتر از تأثیر سفتی پایه وینکلر می‌باشد.

در شکل ۵ اثر افزایش ضرایب تخلخل بر نسبت فرکانس غیر خطی به خطی تیر مدرج هدفمند دو بعدی برای دو مدل توانی و نمایی و برای شاخص مواد  $P_X$  و  $P_Z$  مختلف بررسی شده است. قابل توجه است که افزایش مقادیر  $P_X$  یا  $P_Z$  منجر به کاهش تدریجی نسبت فرکانس غیر

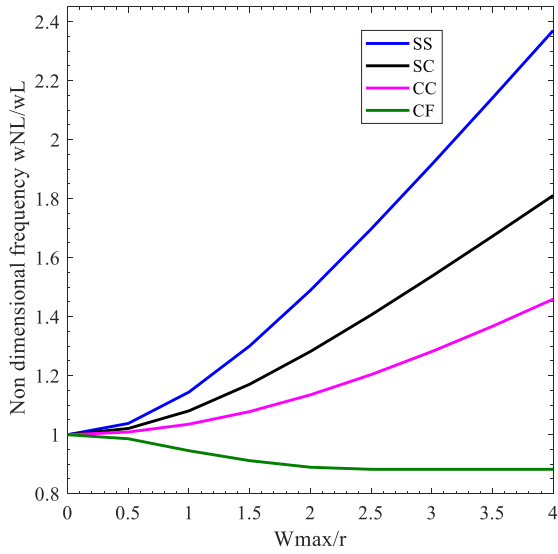
شرایط مرزی دو سر گیردار<sup>۱</sup> و گیردار- ساده<sup>۲</sup> برای مود اول و دوم محاسبه شده است و با نتایج بدست آمده توسط ملک زاده و شجاعی [۳۰]. بر اساس تئوری اویلر برنولی<sup>۳</sup> و تیموشنکو<sup>۴</sup> مقایسه می‌شود. همانطور که ملاحظه می‌شود، نزدیکی خوبی بین نتایج کار حاضر بر اساس تئوری برشی مرتبه سوم ردی<sup>۵</sup> و سایر روش‌ها مشاهده می‌شود. اختلاف مشاهده شده در نتایج جدول ۴ بدلیل تفاوت درجه تئوری‌هاست که قابل قبول می‌باشد.

شکل ۲ نسبت فرکانس غیرخطی به خطی  $\lambda = \omega_{NL}/\omega_L$  تیرهای همسانگرد با شرایط مرزی متفاوت بر حسب مقادیر متفاوت نسبت دامنه را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود حداقل روند به شرایط مرزی گیردار-آزاد و حداکثر تغییرات به شرایط مرزی ساده، با توجه به این واقعیت که هندسه و تقارن شرایط مرزی تأثیر بسزایی بر نسبت فرکانس دارد، اختصاص می‌یابد. علاوه بر این واضح است که افزایش مقادیر نسبت دامنه تأثیر قابل توجهی در افزایش نسبت فرکانس غیر خطی به خطی  $\lambda = \omega_{NL}/\omega_L$  دارد. یکی از ویژگی‌های مهم این تحلیل بررسی مساله فرکانس‌های ارتعاشات تغییر شکل‌های بزرگ می‌باشد که بخوبی در این نمودار وابستگی با نسبت‌های دامنه نشان داده شده است. بطوریکه در نسبت‌های دامنه کمتر از ۰/۵ شیب نمودار تغییرات فرکانس غیر خطی بسیار کم بوده و در بازه ۰/۵ تا ۲ روند تغییرات با شیب تند رو به افزایش است و این روند در نهایت با شیب ثابت

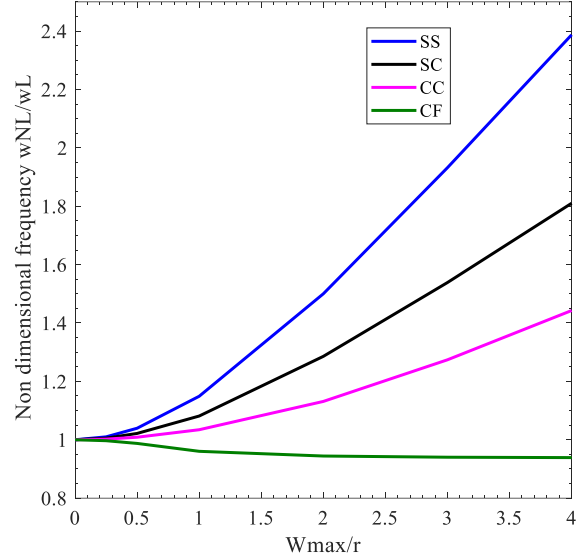
- 1 Clamped-Clamped (CC)
- 2 Simply-Clamped (SC)
- 3 Euler-bernuli Beam Theory (EBT)
- 4 Timoshenko Beam Theory (TBT)
- 5 Reddy Beam Theory (RBT)

6 Clamped-Free (CF)





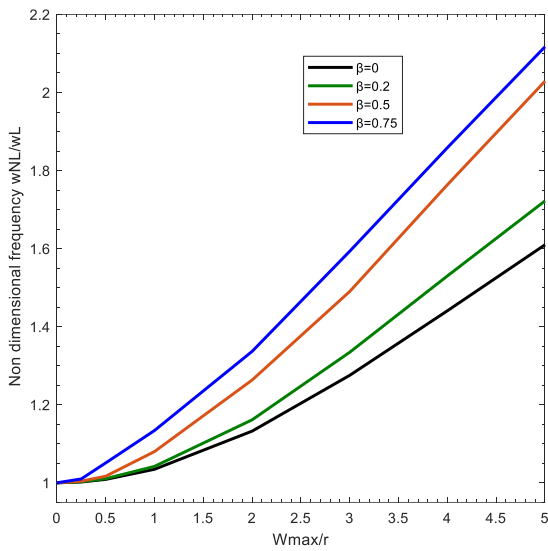
(a)  $L/h=100$



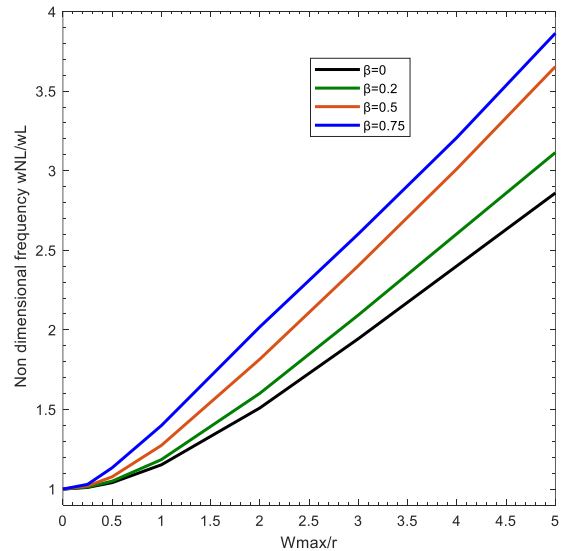
(b)  $L/h=8$

شکل ۱. بررسی شرایط مرزی بر روی رفتار غیر خطی برای یک تیر با  $L/h=8$  و  $L/h=100$  و نسبت دامنه  $\omega_{NL}/\omega_L$  متغیر

**Fig. 1. Effect of different boundary conditions on Nonlinear-to-linear frequency ratios for the isotropic beam for  $L/h=100$ ,  $L/h=8$  versus different amplitude ratio values  $\omega_{max}/r$**



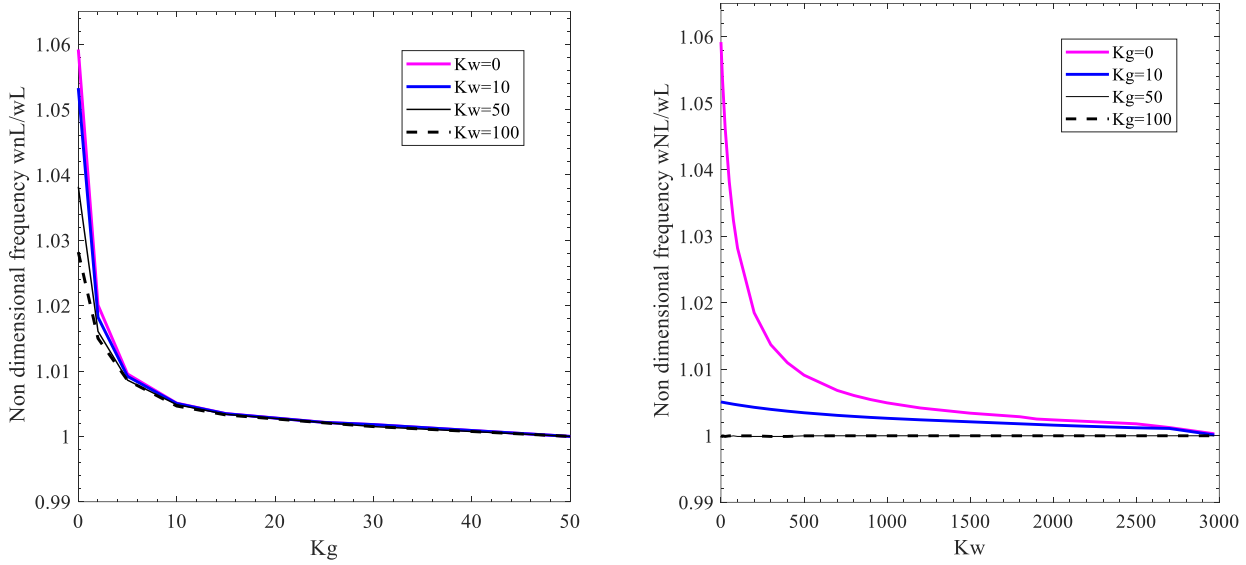
(a) Clamped-Clamped



(b) Simply-Support

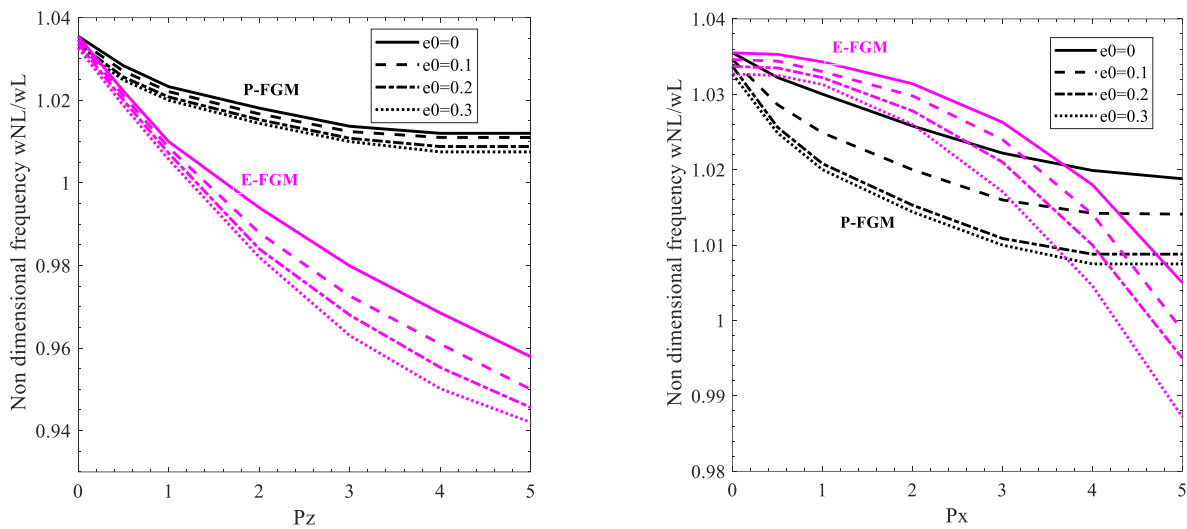
شکل ۳. تأثیر ضریب باریک شونده تیر بر نسبت فرکانس غیر خطی  $\omega_{NL}/\omega_L$  با  $L/h=6$  در شرایط مرزی دو سر گیردار و ساده بر حسب نسبت دامنه  $\omega_{max}/r$

**Fig. 3. Effect of Tapered ratio  $\beta$  on Nonlinear-to-linear frequency variations  $\omega_{NL}/\omega_L$  for  $L/h=6$  versus amplitude ratios ( $\omega_{max}/r$ ) for Clamped-Clamped and Simply-Support boundary conditions.**



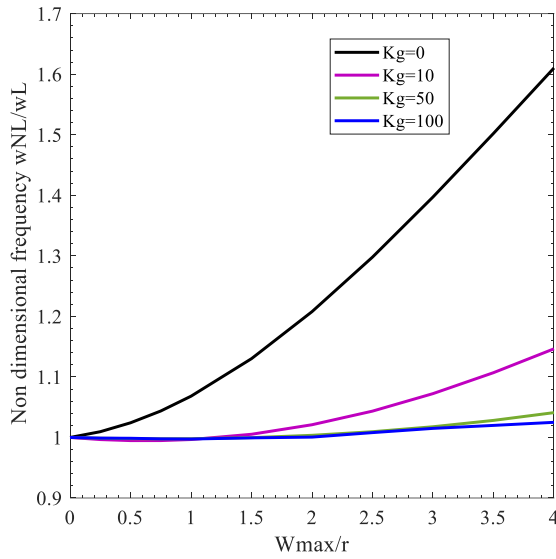
شکل ۴. اثرات ضرایب سفتی بستر  $K_w$  و  $K_g$  بر رفتار غیر خطی تیر همسانگرد برای نسبت دامنه  $\omega_{max}/r = 0.6$  در شرایط مرزی ساده

**Fig. 4.** Effect of the foundation stiffness  $K_w$  and  $K_g$  on nonlinear to linear frequency ratio of SS isotropic FG beam ( $l/h=5$ ,  $\omega_{max}/r = 0.6$ )

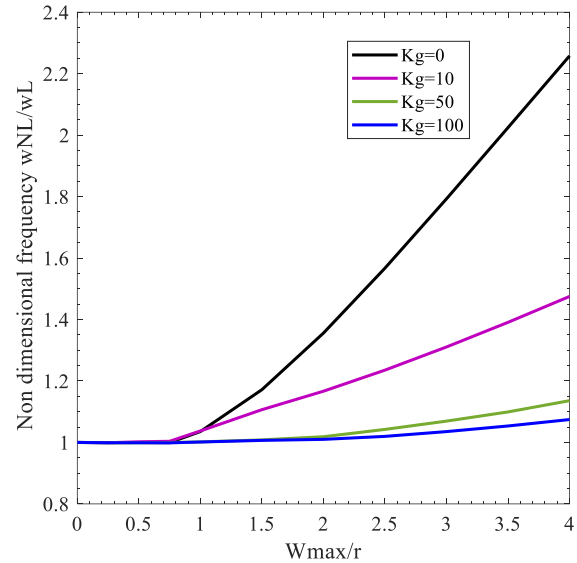


شکل ۵. تغییرات نسبت فرکانس غیر خطی تیرمدرج هدفمند دوجهته متخلخل دو سر گیردار بر حسب گرادیان ماده  $P_z$ ,  $P_x$

**Fig. 5.** Variation of nonlinear to linear frequency ratio of C-C porous beams versus power law indexes  $P_z$ ,  $P_x$  for different porosity coefficients ( $l/h=5$ ,  $\omega_{max}/r = 1$ )



(a) Clamp-Clamp CC



(b) Simply Support SS

شکل ۶. تأثیر ضریب برشی  $K_g$  بر رفتار غیر خطی تیر مدرج هدفمند با  $P_z = 2$  در شرایط مرزی دو سر گیردار و ساده بر حسب نسبت‌های دامنه

**Fig. 6. Effect of the shear stiffness of the foundation  $K_g$  on nonlinear to linear frequency ratio of CC and SS FG beams versus different amplitude ratio values  $\omega_{max}/r$  ( $l/h=5$ ,  $p_z = 2$ )**

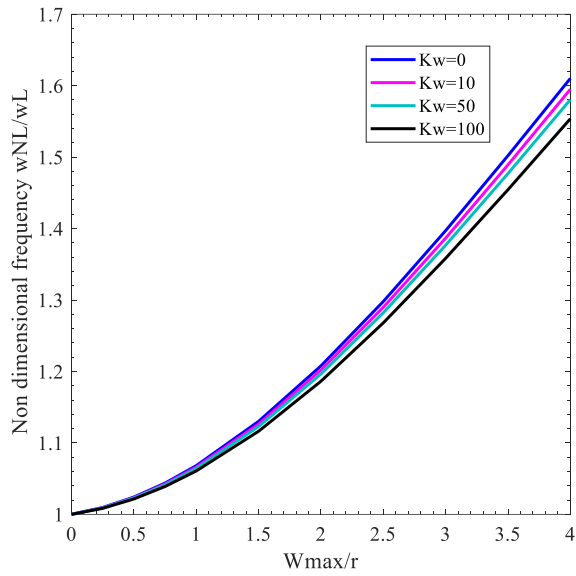
این تیرها با افزایش سفتی برشی، کاهش می‌یابد.

شکل ۷ تأثیر سفتی پایه وینکلر را بر نسبت فرکانس غیر خطی به خطی تیرهای مدرج هدفمند در شرایط مرزی دوسرگیردار و ساده و برای مقادیر مختلف نسبت دامنه  $\omega_{max}/r$  نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود نسبت فرکانس به تدریج با افزایش سختی وینکلر به دلیل کاهش سفتی کلی تیر کاهش می‌یابد که در آن اثر سفتی کلی تیر هدفمند بیشتر بر فرکانس خطی تأثیر می‌گذارد تا غیر خطی. علاوه بر این، نسبت فرکانسی تیر با افزایش سختی ضریب وینکلر بستر، کاهش می‌یابد و این روندها برای نسبت‌های دامنه بزرگتر بیشتر می‌شود.

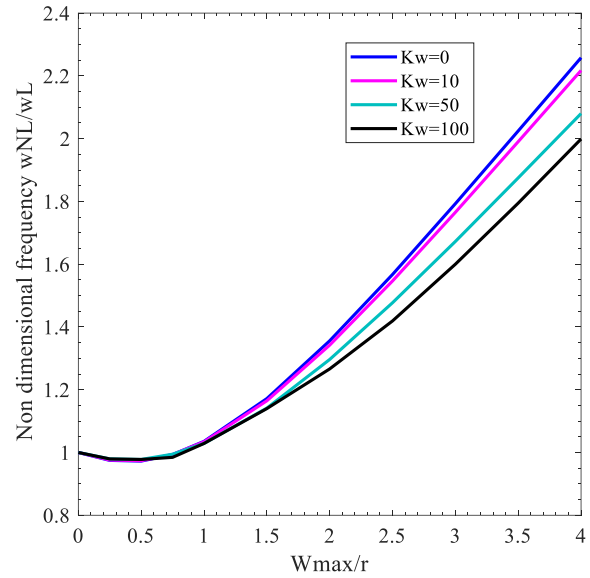
در شکل ۸ روند تغییر نسبت فرکانس غیرخطی به خطی بر حسب گرادیان‌های شاخص مواد در جهت  $Z$  و  $X$  و برای مدل توانی و نمایی تیرهای هدفمند دو جهته ارائه شده است. بدیهی است که برای افزایش تدریجی شاخص توانی مواد در هر جهت، بعلاوه کاهش سفتی تیر، نسبت فرکانس غیر خطی عمدتاً کاهش می‌یابد، اما این روند برای مدل نمایی بخصوص در شرایط مرزی ساده صادق نیست.

خطی به خطی می‌شود. در این راستا، تأثیر افزایش ضرایب تخلخل در کاهش نسبت‌های فرکانسی قابل ملاحظه است. تفاوت افت فرکانس‌های مدل نمایی و توانی نیز از مقایسه شکل‌ها قابل رویت است. این تفاوت بدلیل اختلاف تغییرات خواص مواد با افزایش گرادیان خواص مواد در دو مدل است؛ بطوری که با افزایش گرادیان مواد در دو جهت، سرعت تغییرات خواص مواد در مدل نمایی بیشتر بوده و کاهش سفتی تیر شدیدتر اتفاق افتاده و نتیجتاً کاهش فرکانس غیر خطی بی بعد در مدل نمایی شدیدتر است.

شکل ۶ نسبت فرکانس غیر خطی به خطی را برای شرایط مرزی دو سر گیردار و ساده بر حسب نسبت دامنه‌های مختلف و برای مقادیر مختلف سختی پایه برشی هنگامی که  $\frac{l}{h} = 5$  و  $P_z = 2$  است نشان می‌دهد. مطابق نمودار واضح است که نسبت فرکانس با افزایش نسبت دامنه برای تیرهای مدرج هدفمند در شرایط مرزی ساده و دو سر گیردار افزایش می‌یابد. با این حال، این افزایش برای تیرهایی که در شرایط مرزی ساده هستند، شدیدتر از تیرهای دو سر گیردار است. علاوه بر این، می‌توان توجه داشت که افزایش تدریجی سفتی برشی بستر  $K_g$  منجر به افت قابل توجه نسبت‌های فرکانس غیر خطی به خطی می‌شود که به این دلیل است که سختی کلی



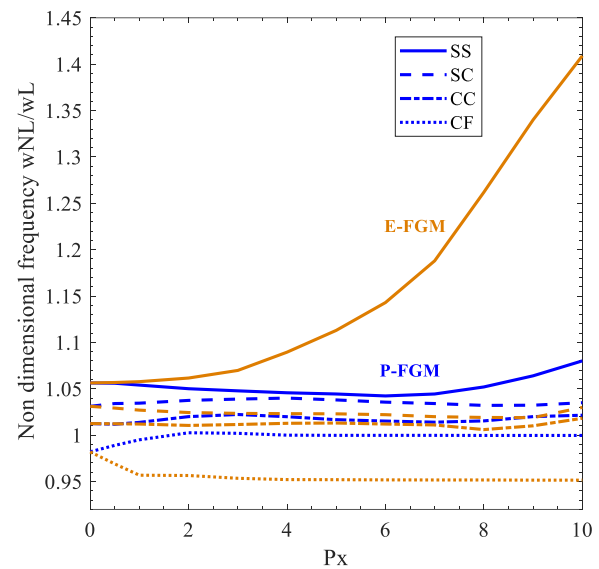
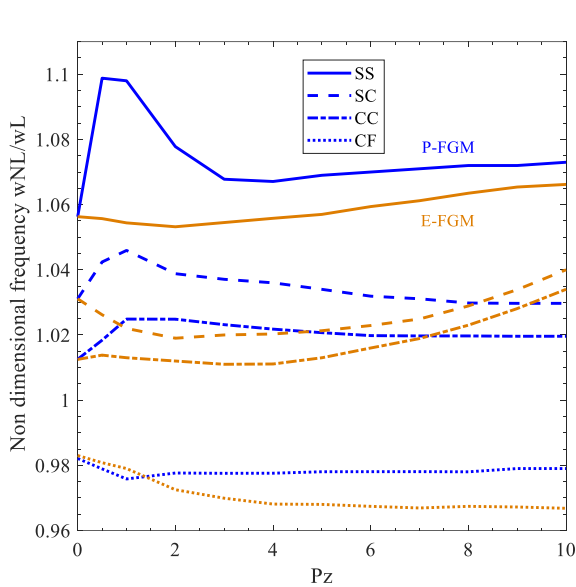
(a) Clamp-Clamp CC



(b) Simply Support SS

شکل ۷. تأثیر ضریب الاستیک بستر بر رفتار غیر خطی تیر مدرج هدفمند با  $p_z = 2$  در شرایط مرزی دو سر گیردار و ساده بر حسب نسبت‌های متغیر دامنه  $\omega_{max}/r$

**Fig. 7. Effect of the winker foundation stiffness  $K_w$  on nonlinear to linear frequency ratio of CC and SS FG beams versus different amplitude ratio values  $\omega_{max}/r$  ( $l/h=5$ ,  $p_z = 2$ )**



شکل ۸. تأثیر شرایط مرزی مختلف بر رفتار غیر خطی  $\omega_{NL}/\omega_L$  تیر مدرج هدفمند دوجبهته بر حسب گرادیان مختلف مواد  $p_z$ ,  $p_x$

**Fig. 8. The effects of different boundary conditions on Nonlinear-to-linear frequency ratios  $\omega_{NL}/\omega_L$  of the Bidirectional FG beam versus power law indexes  $p_z$ ,  $p_x$  ( $l/h=8$ ,  $\omega_{max}/r = 0.6$ )**

#### ۴- نتیجه گیری

در این مقاله، ارزیابی فرکانس دامنه بزرگ تیرهای متخلخل مدرج هدفمند دو جهته با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی ردی تیر و تانسور گرین در ارتباط با غیر خطی هندسی ون کارمن انجام شد. در این راستا، اصل همپلتون برای استخراج معادلات تشکیل دهنده با شرایط مرزی مرتبط اتخاذ شده است. روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته<sup>۱</sup> به عنوان یک روش عددی مناسب همراه با یک روش تکراری مستقیم برای حل سیستم معادلات غیر خطی گسسته به کار گرفته شده است. پس از تأیید نتایج ارائه شده، تأثیر پارامترهای مختلف مانند نوع مدل تیر مدرج، نسبت دامنه، شاخص‌های مواد، پارامترهای الاستیک، ضریب تخلخل، ضریب باریک شونده‌گی و شرایط مرزی مختلف بر نسبت فرکانس غیر خطی به خطی مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج یافته‌های زیر را نشان می‌دهد.

۱- افزایش نسبت فرکانس غیر خطی به خطی نسبت به دامنه بستگی به نوع شرایط مرزی دارد، اما این روند برای شرایط مرزی C-F صادق نیست.  
۲- تغییرات نسبت فرکانسی خطی به غیر خطی دو مدل تیر مدرج هدفمند در مقابل شاخص گرادیان‌های مواد در دو جهت  $Z$  و  $X$ .

۳- تأثیر افزایش ضرایب تخلخل، قانون توان و شاخص‌های مواد در کاهش نسبت فرکانس غیر خطی به خطی به دلیل کاهش سختی تیرهای مدرج هدفمند دو جهته.

۴- برای هر دو مدل مدرج هدفمند تیر، نسبت فرکانس تحت تأثیر تخلخل بیشتر از شاخص گرادیان مواد در جهت طولی  $X$  تأثیر می‌گیرد تا از شاخص مواد در جهت  $Z$ .

۵- تأثیر ضرایب سختی بستر بر نسبت فرکانس غیر خطی به خطی یک تیر همسانگرد.

۶- تأثیر ضریب باریک شونده‌گی مقطع بر رفتار فرکانس غیر خطی تیر هدفمند مدرج.

۷- تغییر نسبت فرکانس غیر خطی به خطی تیر نسبت به دامنه بر اساس افزایش سفتی پایه برشی و وینکلر تیر مدرج هدفمند دو جهته و مقایسه روند هر یک.

#### ۵- فهرست علائم

FGM	مواد مدرج تابعی
PFGM	مواد مدرج تابعی توانی
EFGM	مواد مدرج تابعی نمایی
DQM	روش مربعات دیفرانسیلی
GDQM	روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته
RSDBT	نظریه تغییر فرم برشی ردی (مرتب‌ه سه)
EBT	تئوری اویلر برنولی تیرها
TBT	نظریه تیموشنکو تیرها
HBT	نظریه تغییر فرم برشی مراتب بالاتر
Porosity	تخلخل و حفره در ساختار تیرها
Elastic Foundation	ثابت الاستیک بستر
Winkler Foundation	ثابت وینکلر
$h$	ارتفاع یا عمق تیر
$b$	عرض تیر
$L$	طول تیر
$A$	مساحت تیر
$e$	ضریب تخلخل تیر
$B$	ضریب باریک شونده‌گی مقطع تیر
$\rho$	چگالی تیر

- quadrature and finite element free vibration and buckling analysis of thick beams on two-parameter elastic foundations, *Applied Mathematical Modelling*, 32(7) (2008) 1381-1394.
- [12] Ş.D. Akbaş, Free vibration and bending of functionally graded beams resting on elastic foundation, *Research on Engineering Structures and Materials*, 1(1) (2015) 25-37.
- [13] M. Yas, S. Kamarian, A. Poursaghar, Free vibration analysis of functionally graded beams resting on variable elastic foundations using a generalized power-law distribution and GDQ method, *Annals of Solid and Structural Mechanics*, 9(1) (2017) 1-11.
- [14] P. Tossapanon, N. Wattanasakulpong, Stability and free vibration of functionally graded sandwich beams resting on two-parameter elastic foundation, *Composite Structures*, 142 (2016) 215-225.
- [15] L. Li, X. Li, Y. Hu, Nonlinear bending of a two-dimensionally functionally graded beam, *Composite Structures*, 184 (2018) 1049-1061.
- [16] J. Lei, Y. He, Z. Li, S. Guo, D. Liu, Postbuckling analysis of bi-directional functionally graded imperfect beams based on a novel third-order shear deformation theory, *Composite Structures*, 209 (2019) 811-829.
- [17] M. Şimşek, Bi-directional functionally graded materials (BDFGMs) for free and forced vibration of Timoshenko beams with various boundary conditions, *Composite Structures*, 133 (2015) 968-978.
- [18] Z.-h. Wang, X.-h. Wang, G.-d. Xu, S. Cheng, T. Zeng, Free vibration of two-directional functionally graded beams, *Composite structures*, 135 (2016) 191-198.
- [19] A. Ghorbanpour Arani, S. Niknejad, Dynamic stability analysis of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams composed of bi-directional functionally graded materials, *AUT Journal of Mechanical Engineering*, 4(2) (2020) 201-214.
- [20] N. Wattanasakulpong, A. Chaikittiratana, Flexural vibration of imperfect functionally graded beams based on Timoshenko beam theory: Chebyshev collocation method, *Meccanica*, 50(5) (2015) 1331-1342.
- [21] M.-J. Kazemzadeh-Parsi, F. Chinesta, A. Ammar, [1] P. Zahedinejad, Free vibration analysis of functionally graded beams resting on elastic foundation in thermal environment, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 16(07) (2016) 1550029.
- [2] Y. Wen, Q. Zeng, A HIGH-ORDER FINITE ELEMENT FORMULATION FOR VIBRATION ANALYSIS OF BEAM-TYPE STRUCTURES, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 9(04) (2009) 649-660.
- [3] M. Aydogdu, V. Taskin, Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges, *Materials & design*, 28(5) (2007) 1651-1656.
- [4] M. Şimşek, Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories, *Nuclear Engineering and Design*, 240(4) (2010) 697-705.
- [5] H.-T. Thai, T.P. Vo, Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories, *International Journal of Mechanical Sciences*, 62(1) (2012) 57-66.
- [6] S. Chakraverty, K. Pradhan, Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions, *Aerospace Science and Technology*, 36 (2014) 132-156.
- [7] N. Wattanasakulpong, A. Chaikittiratana, S. Pornpeerakeat, Chebyshev collocation approach for vibration analysis of functionally graded porous beams based on third-order shear deformation theory, *Acta Mechanica Sinica*, 34(6) (2018) 1124-1135.
- [8] D. Zhou, A general solution to vibrations of beams on variable Winkler elastic foundation, *Computers & structures*, 47(1) (1993) 83-90.
- [9] M. Eisenberger, Vibration frequencies for beams on variable one-and two-parameter elastic foundations, *Journal of Sound and Vibration*, 176(5) (1994) 577-584.
- [10] S. Pradhan, T. Murmu, Thermo-mechanical vibration of FGM sandwich beam under variable elastic foundations using differential quadrature method, *Journal of Sound and Vibration*, 321(1-2) (2009) 342-362.
- [11] P. Malekzadeh, G. Karami, A mixed differential



- 84-92.
- [31] T. Yang, Y. Tang, Q. Li, X.-D. Yang, Nonlinear bending, buckling and vibration of bi-directional functionally graded nanobeams, *Composite Structures*, 204 (2018) 313-319.
- [32] M.H. Ghayesh, Nonlinear vibration analysis of axially functionally graded shear-deformable tapered beams, *Applied Mathematical Modelling*, 59 (2018) 583-596.
- [33] A. Karamanlı, Free vibration analysis of two directional functionally graded beams using a third order shear deformation theory, *Composite Structures*, 189 (2018) 127-136.
- [34] K. Xie, Y. Wang, X. Fan, T. Fu, Nonlinear free vibration analysis of functionally graded beams by using different shear deformation theories, *Applied Mathematical Modelling*, 77 (2020) 1860-1880.
- [35] M. Forghani, Y. Bazarganlari, P. Zahedinejad, M.J. Kazemzadeh-Parsi, Nonlinear frequency behavior of cracked functionally graded porous beams resting on elastic foundation using Reddy shear deformation theory, *Journal of Vibration and Control*, (2022) 10775463221080213.
- [36] M. Şimşek, Nonlinear static and free vibration analysis of microbeams based on the nonlinear elastic foundation using modified couple stress theory and He's variational method, *Composite Structures*, 112 (2014) 264-272.
- [37] S. Sahmani, M. Bahrami, R. Ansari, Nonlinear free vibration analysis of functionally graded third-order shear deformable microbeams based on the modified strain gradient elasticity theory, *Composite Structures*, 110 (2014) 219-230.
- [38] R. Bellman, B. Kashef, J. Casti, Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations, *Journal of computational physics*, 10(1) (1972) 40-52.
- [39] C.W. Bert, M. Malik, Differential quadrature method in computational mechanics: a review, (1996).
- [40] W. Chen, T. Zhong, The study on the nonlinear computations of the DQ and DC methods, *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*, 13(1) (1997) 57-75.
- Proper Generalized Decomposition for Parametric Study and Material Distribution Design of Multi-Directional Functionally Graded Plates Based on 3D Elasticity Solution, *Materials*, 14(21) (2021) 6660.
- [22] J. Zhu, Z. Lai, Z. Yin, J. Jeon, S. Lee, Fabrication of ZrO<sub>2</sub>-NiCr functionally graded material by powder metallurgy, *Materials chemistry and physics*, 68(1-3) (2001) 130-135.
- [23] D. Chen, J. Yang, S. Kitipornchai, Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams, *International journal of mechanical sciences*, 108 (2016) 14-22.
- [24] Y.S. Al Rjoub, A.G. Hamad, Free vibration of functionally Euler-Bernoulli and Timoshenko graded porous beams using the transfer matrix method, *KSCE Journal of Civil Engineering*, 21(3) (2017) 792-806.
- [25] N. Shafiei, S.S. Mirjavadi, B. MohaselAfshari, S. Rabby, M. Kazemi, Vibration of two-dimensional imperfect functionally graded (2D-FG) porous nano-/micro-beams, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 322 (2017) 615-632.
- [26] F. Ebrahimi, A. Jafari, Thermo-mechanical vibration analysis of temperature-dependent porous FG beams based on Timoshenko beam theory, *Structural Engineering Mechanics*, 59(2) (2016) 343-371.
- [27] M. Khakpour, Y. Bazargan-Lari, P. Zahedinejad, M-J. Kazemzadeh-parsi, Vibrations evaluation of functionally graded porous beams in thermal surroundings by generalized differential quadrature method, *Shock and Vibration*, 4 (2022) 1-15.
- [28] F. Ebrahimi, M. Zia, Large amplitude nonlinear vibration analysis of functionally graded Timoshenko beams with porosities, *Acta Astronautica*, 116 (2015) 117-125.
- [29] S. Kitipornchai, L.-L. Ke, J. Yang, Y. Xiang, Nonlinear vibration of edge cracked functionally graded Timoshenko beams, *Journal of sound and vibration*, 324(3-5) (2009) 962-982.
- [30] P. Malekzadeh, M. Shojaee, Surface and nonlocal effects on the nonlinear free vibration of non-uniform nanobeams, *Composites Part B: Engineering*, 52 (2013)

پیوست الف

$$\delta u: \quad \frac{\partial N_{xx}(x,t)}{\partial x} = \mathcal{I}_0(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \mathcal{I}_1(x) \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x \partial t^2} - J_1(x) \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x \partial t^2} \quad (\text{الف } ۱۹)$$

$\delta w_b:$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_b(x,t)}{\partial x^2} + N_{xx}(x,t) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + N_{xx}(x,t) \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial N_{xx}(x,t)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \frac{\partial N_{xx}(x,t)}{\partial x} \\ & - K_w w_b(x,t) - K_w w_s(x,t) + K_g \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + K_g \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} - K_N w_s(x,t)^3 - K_N w_b(x,t)^3 \\ & - 3K_N w_b(x,t)^2 w_s(x,t) - 3K_N w_b(x,t) w_s(x,t)^2 = \mathcal{I}_1(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial \mathcal{I}_1(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \mathcal{I}_0(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial t^2} \\ & - \mathcal{I}_2(x) \frac{\partial^4 w_b(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\partial \mathcal{I}_2(x)}{\partial x} \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x \partial t^2} + \mathcal{I}_0(x) \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial t^2} - J_2(x) \frac{\partial^4 w_s(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\partial J_2(x)}{\partial x} \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x \partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{الف } ۲۰)$$

$\delta w_s:$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q_{xz}(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 M_s(x,t)}{\partial x^2} + N_{xx}(x,t) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + N_{xx}(x,t) \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \frac{\partial N_{xx}(x,t)}{\partial x} \\ & + \frac{\partial N_{xx}(x,t)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} - K_w w_s(x,t) - K_w w_b(x,t) + K_g \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + K_g \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} \\ & - K_N w_s(x,t)^3 - K_N w_b(x,t)^3 - 3K_N w_b(x,t)^2 w_s(x,t) - 3K_N w_b(x,t) w_s(x,t)^2 \\ & = J_1(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial J_1(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \mathcal{I}_0(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial J_2(x)}{\partial x} \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x \partial t^2} \\ & - J_2(x) \frac{\partial^4 w_b(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \mathcal{I}_0(x) \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial t^2} - K_2(x) \frac{\partial^4 w_s(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\partial K_2(x)}{\partial x} \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x \partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{الف } ۲۱)$$

که نتیجه های نیروی محوری، ممان و نیروی برشی عرضی  $N_{xx}$ ،  $M_b$ ،  $M_s$  و  $Q_{xz}$  به صورت زیر تعریف می شود

$$N_{xx} = A(x) \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} A(x) \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} A(x) \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^2 + A(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - B(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} - B_s(x) \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} \quad (\text{الف } ۲۲)$$

$$M_b = B(x) \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} B(x) \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^2 - D(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} B(x) \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^2 + B(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - D_s(x) \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} \quad (\text{الف } ۲۳)$$

$$M_s = \frac{1}{2} B_s(x) \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^2 + B_s(x) \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} - D_s(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + B_s(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} B_s(x) \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^2 - H_s(x) \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} \quad (\text{الف } ۲۴)$$

$$Q_{xz} = g(z)^2 G(x,z) \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \quad (\text{الف } ۲۵)$$

با جایگذاری روابط منتهی های تنش (الف ۲۲) - (الف ۲۵) در معادلات (الف ۱۹) - (الف ۲۱)، معادلات حاکم تیر مدرج دوجهته بر حسب جابجایی به فرم روابط (الف ۲۸) - (الف ۳۰) بدست می آید

$\delta u$ :

$$\begin{aligned} & A(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial A(x)}{\partial x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} \left( A(x) \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} + A(x) \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial B(x)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial A(x)}{\partial x} \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^2 \\ & - B(x) \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} \left( A(x) \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} + A(x) \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial B_s(x)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial A(x)}{\partial x} \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^2 \\ & - B_s(x) \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x^3} + \frac{\partial A(x)}{\partial x} \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} = Z_0(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - Z_1(x) \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x \partial t^2} - J_1(x) \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x \partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{الف } ۲۸)$$

$\delta w_b$  :

$$\begin{aligned}
 & B(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \left( 2 \frac{\partial B(x)}{\partial x} + A(x) \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} + A(x) \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right) + \\
 & \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 B(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial A(x)}{\partial x} \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} + A(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial A(x)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + A(x) \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} \right) \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial A(x)}{\partial x} \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B(x)}{\partial x^2} \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{3}{2} \frac{\partial A(x)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^2 \\
 & + \frac{3}{2} \frac{\partial A(x)}{\partial x} \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 B(x)}{\partial x^2} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} - 2 \frac{\partial D(x)}{\partial x} \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x^3} - D(x) \frac{\partial^4 w_b(x,t)}{\partial x^4} \\
 & + \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} \left( \frac{3}{2} A(x) \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial B(x)}{\partial x} \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} + 3A(x) \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right. \\
 & \left. + \frac{3}{2} A(x) \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^2 D(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial B(x)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + K_g + \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} (B(x) - B_s(x)) \right) \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial A(x)}{\partial x} \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B(x)}{\partial x^2} \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} \left( \frac{3}{2} A(x) \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right. \\
 & \left. + 2 \frac{\partial B(x)}{\partial x} \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial B_s(x)}{\partial x} \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} + 3A(x) \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right) \\
 & + \frac{3}{2} A(x) \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial B(x)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial B_s(x)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 D_s(x)}{\partial x^2} + K_g \left. \right) + \\
 & \left( \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 (B(x) - B_s(x)) + \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x^3} \left( B(x) \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} - B_s(x) \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right. \\
 & \left. + B(x) \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} - 2 \frac{\partial D_s(x)}{\partial x} - \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} B_s(x) \right) - K_N w_b(x,t)^3 - K_N w_s(x,t)^3 - \\
 & 3K_N w_b(x,t)^2 w_s(x,t) - K_w w_s(x,t) + w_b(x,t) \left( -3K_N w_s(x,t)^2 - K_w \right) - \frac{\partial^4 w_s(x,t)}{\partial x^4} D_s(x) \\
 & = \mathcal{I}_1(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial \mathcal{I}_1(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \mathcal{I}_0(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial t^2} - \mathcal{I}_2(x) \frac{\partial^4 w_b(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} \\
 & - \frac{\partial \mathcal{I}_2(x)}{\partial x} \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x \partial t^2} + \mathcal{I}_0(x) \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial t^2} - J_2(x) \frac{\partial^4 w_s(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\partial J_2(x)}{\partial x} \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x \partial t^2}
 \end{aligned}$$

(الف ۲۹)

$\delta w_s$  :

$$\begin{aligned}
 & B_s(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} + A(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + A(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial B_s(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_s(x)}{\partial x^2} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \\
 & + A(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial A(x)}{\partial x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + A(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial A(x)}{\partial x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} + \\
 & \frac{1}{2} \frac{\partial A(x)}{\partial x} \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_s(x)}{\partial x^2} \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{3}{2} A(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^2 \\
 & + \frac{3}{2} \frac{\partial A(x)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{3}{2} A(x) \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{3}{2} \frac{\partial A(x)}{\partial x} \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} - \\
 & \frac{\partial B(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} + 2 \frac{\partial B_s(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} - B(x) \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x^3} \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} + \\
 & 3A(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial B_s(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} + 3A(x) \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \\
 & - D_s(x) \frac{\partial^4 w_b(x,t)}{\partial x^4} + \frac{3}{2} A(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial B(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} - 2 \frac{\partial D_s(x)}{\partial x} \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x^3} \\
 & - \frac{\partial^2 D_s(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} - B_s(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} - B(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} - B(x) \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x^3} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \\
 & - B(x) \left( \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_s(x)}{\partial x^2} \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial A(x)}{\partial x} \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^3 + \frac{\partial A_s(x)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + \\
 & \frac{3}{2} A(x) \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial B_s(x)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial H_s(x)}{\partial x} \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 H_s(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} + \\
 & \frac{\partial K_2(x)}{\partial x} \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x \partial t^2} + A_s(x) \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} - B_s(x) \left( \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 + B_s(x) \left( \left( \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x^3} \right) \\
 & - B_s(x) \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x^3} + \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 B_s(x)}{\partial x^2} \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} + 2 \frac{\partial B_s(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + B_s(x) \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x^3} \right) \\
 & + 2 \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} \left( \frac{\partial B_s(x)}{\partial x} \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} + B_s(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} \right) + B_s(x) \left( \left( \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x^3} \right) \\
 & - K_w w_b(x,t) - 3K_N w_b(x,t)^2 w_s(x,t) - K_w w_s(x,t) - K_N w_b(x,t)^3 - K_N w_s(x,t)^3 - 3K_N w_b(x,t) w_s(x,t)^2 \\
 & + K_g \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} + K_g \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} = J_1(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial J_1(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \mathcal{I}_0(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial J_2(x)}{\partial x} \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x \partial t^2} \\
 & - J_2(x) \frac{\partial^4 w_b(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \mathcal{I}_0(x) \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial t^2} - K_2(x) \frac{\partial^4 w_s(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + H_s(x) \frac{\partial^4 w_s(x,t)}{\partial x^4}
 \end{aligned}$$

(الف ۳۰)

بدین ترتیب برای شرایط مرزی تیر دو جهته، می‌توان شرایط پایانی زیر را بصورت ساده شده (الف ۳۱) - (الف ۳۵) استخراج نمود.

$$u=0 \quad \text{or} \quad -A(x) \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} - \frac{1}{2} A(x) \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} A(x) \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^2 - A(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \quad (\text{الف ۳۱})$$

$$+ B(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + B_s(x) \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial w_s}{\partial x} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{1}{2} B_s(x) \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^2 + B_s(x) \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} - D_s(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + B_s(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \quad (\text{الف ۳۲})$$

$$+ \frac{1}{2} B_s(x) \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^2 - H_s(x) \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial w_b}{\partial x} = 0 \quad \text{or} \quad B(x) \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} B(x) \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^2 - D(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} B(x) \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{الف ۳۳})$$

$$+ B(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - D_s(x) \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

$$w_s = 0 \quad \text{or} \quad J_2(x) \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x \partial t^2} + K_2(x) \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x \partial t^2} + \frac{3}{2} A(x) \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \quad (\text{الف ۳۴})$$

$$+ \frac{3}{2} A(x) \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^2 + A(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} A(x) \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^3 +$$

$$A(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} A(x) \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^3 + A_s(x) \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + B_s(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}$$

$$- B(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + B_s(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial B_s(x)}{\partial x} \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^2 +$$

$$\frac{\partial B_s(x)}{\partial x} \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} - B(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} + K_g \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} - D_s(x) \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x^3} -$$

$$\frac{\partial D_s(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + B_s(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial B_s(x)}{\partial x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial B_s(x)}{\partial x} \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^2$$

$$+ K_g \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} - J_1(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - H_s(x) \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x^3} - \frac{\partial H_s(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} = 0$$



$$\begin{aligned}
 w_b = 0 \quad \text{or} \quad & \mathcal{I}_2(x) \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x \partial t^2} + J_2(x) \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x \partial t^2} + \frac{3}{2} A(x) \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + \\
 & \frac{3}{2} A(x) \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^2 + A(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} A(x) \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^3 + \\
 & A(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} A(x) \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^3 + B(x) \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} - \\
 & B_s(x) \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial B(x)}{\partial x} \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial B(x)}{\partial x} \left( \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^2 + \\
 & K_g \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} - D(x) \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x^3} - \frac{\partial D(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + B(x) \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} - \\
 & B_s(x) \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial B(x)}{\partial x} \left( \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^2 + B(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \\
 & \frac{\partial B(x)}{\partial x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + K_g \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} - D_s(x) \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x^3} - \frac{\partial D_s(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} - \mathcal{I}_1(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0
 \end{aligned}
 \tag{الف ۳۵}$$

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Forghani, Y. Bazargan-Iari, P. Zahedinejad, M. Kazemzadeh Parsi, Large-Amplitude Frequency Analysis of Bi-directionally Functionally Graded with Non-Uniform Porous Beams using a Higher Order Shear Deformation Theory, *Amirkabir J. Mech Eng.*, 54(8) (2022) 1761-1788.

DOI: 10.22060/mej.2022.20916.7336



