Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 54(9) (2022) 433-436
DOI: 10.22060/mej.2022.21069.7377

Evaluating the fast method based on proper orthogonal decomposition for radiative heat transfer in a participating medium

M. Niknam Sharak[1], A. Safavenejad[1] , M. K. Moayyedi[2]

[1] Department of Mechanical Engineering, University of Birjand, Birjand, Iran
[2]Department of Mechanical Engineering, University of Qom, Qom, Iran

ABSTRACT: The radiative transfer equation models the thermal radiation in a participating medium. Except in specified cases, there is no analytical solution for this equation. Solving the radiative transfer equation with numerical methods is usually time-consuming. This work presents a fast method based on proper orthogonal decomposition to solve the radiative transfer equation. Some variables are selected as independent parameters. The radiative transfer equation for the specified value of these parameters is solved using the discrete ordinates method, and the system responses form the snapshot matrix. The matrix is decomposed singular value decomposition as a product of three matrices. Due to the magnitude of singular values, only a few first columns of these matrices are selected. As a result, the degrees of freedom of the original system are decreased, and a reduced-order model is created. Employing the radial basis functions, the system response, corresponding to any arbitrary input vector (independent parameters), can be approximated with high speed. The results show that the reduced-order method has high accuracy compared to the numerical solution. The complexities of the system do not affect the reduced-order method. Regardless of the characteristics of the medium (the value of independent parameters), the solution time is the order of 0.02 seconds.

Review History:

Received: Mar. 14,2022
Revised: May, 25, 2022
Accepted: Sep. 10, 2022
Available Online: Sep. 19, 2022

Keywords:

Radiative heat transfer
Participating medium
Reduced-order modeling
Proper orthogonal decomposition
Radial basis functions.

1- Introduction

In high-temperature systems, thermal radiative is the dominant mode of heat transfer. The Radiative Transfer Equation (RTE) is the relationship that can describe the physical behavior of radiative transfer in participating medium [1]. The numerical methods make the RTE a large-scale system. So, finding techniques that increase the computational speed with accuracy is in attendance. Reduced-Order Methods (ROM) project a large-scale system into a smaller one. The Proper Orthogonal Decomposition (POD) is a suitable technique for ROM in many engineering applications [2-4].

From the literature review, no comprehensive research has been done on the use of reduced-order modeling to solve the radiative transfer equation. In some surveys, the POD method had been used to reduce the order of radiative problems. But the RTE was not solved in its general form. Therefore, in this study, a fast method based on POD is introduced to solve the RTE.

2- Problem Formulation

The radiative transfer equation for an absorbing, emitting, and scattering gray medium is written as follows [1],

$$\xi_n \frac{\partial I^n}{\partial x} + \eta_n \frac{\partial I^n}{\partial y} + \beta I^n = \beta S^n ;\ n = 1, 2, \ldots, m \tag{1}$$

in which I is the radiation intensity, I_b is the black body intensity, κ and σ_s are the absorption and the scattering coefficients respectively, $\beta = \kappa + \sigma_s$ is the extinction coefficient and $\Phi(\mathbf{s}', \mathbf{s})$ is the scattering phase function.

3- Numerical Method

Among the different methods, the discrete ordinates method has many advantages, which has made it popular to solve the RTE [1].

3- 1- Discrete ordinates method

The discrete ordinates method replaces the integrals over solid angle by numerical quadratures. For 2D Cartesian coordinates, and for a direction $\mathbf{s}_n$ with direction cosines ξ_n and η_n Eq. (1) becomes

$$\mathbf{s} \cdot \nabla I(\mathbf{s}) = \kappa I_b - \beta I(\mathbf{s}) + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{4\pi} I(\mathbf{s}') \Phi(\mathbf{s}', \mathbf{s}) d\Omega' \tag{2}$$

where S^n is the radiative source function and becomes

$$S^n = (1-\omega) I_b + \frac{\omega}{4\pi} \sum_{k=1}^{N} w_k \Phi(\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_k) I^k \tag{3}$$

*Corresponding author's email: asafavi@birjand.ac.ir

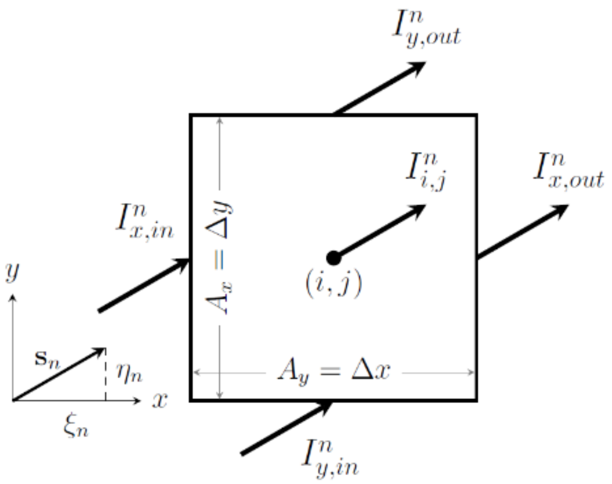


Fig. 1. Radiation intensity in a sample control volume, the discrete ordinates method

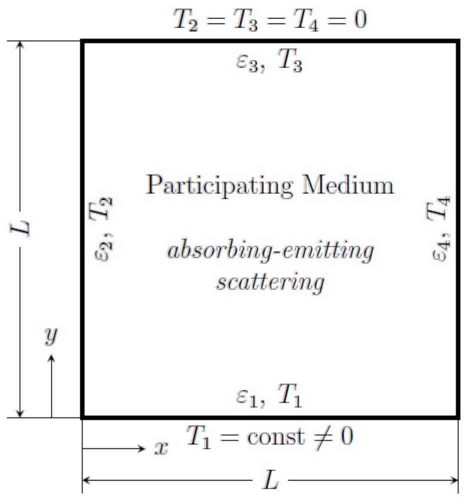


Fig. 2. Schematic of the radiative heat transfer problem

For any discrete ordinate, the volume-averaged intensity of the control volume (Fig. 1) is calculated as follows,

$$I^n_{i,j} = \frac{\beta V S^n_{i,j} + \xi_n A_x I^n_{x,in} / \gamma_x + \eta_n A_y I^n_{y,in} / \gamma_y}{\beta V + \xi_n A_x / \gamma_x + \eta_n A_y / \gamma_y} \tag{4}$$

in which $1/2 \le \gamma_x, \gamma_y \le 1$ are weighted differencing.

3- 2- Reduced-order modeling

Reducing the system's Degrees Of Freedom (DOF) is a way to reduce the computation time.

3- 3- Proper orthogonal decomposition

The proper orthogonal decomposition (POD) offers the appropriate bases for the modal analysis of a set of discrete and continuous functions. Assume $F \in \mathbb{R}^{p\times\ell}$ is a matrix and $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\ell}$ is a set of orthonormal bases, then F can be expressed as follows,

$$F = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \varphi_i = \phi A \tag{5}$$

The Singular Value Decomposition (SVD) calculates the bases satisfying the POD requirement in the sample space. Any matrix has the singular value decomposition.

$$F = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \varphi_i = \phi A \tag{6}$$

where $U \in \mathbb{R}^{p\times p}$ and $V \in \mathbb{R}^{\ell\times\ell}$ matrices are orthonormal, and the matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{p\times\ell}$ is a diagonal matrix that its entries are singular values of the F. It can be shown that the matrix U contains the optimal bases for Eq. (5) [5].

3- 4- Radial basis functions

Radial Basis Functions (RBF) are frequently used to approximate a multivariable function by curve fitting through the existing data. The approximation of any function is written as a linear combination of radial functions that can be non-linear.

3- 5- POD-RBF procedure

Using a certain number of input vectors, the snapshot matrix is formed. The proper bases are calculated using the POD. The matrix of amplitudes is as follows,

$$A = \phi^T F \tag{7}$$

The matrix of amplitudes can be written as a linear combination of radial basis functions as below,

$$A = \phi^T F \tag{8}$$

Equation (8) is solved to define matrix B, called radial coefficient matrix. Finally, the F for any desired vector is obtained from the following equation.

$$F(X) \simeq \phi B g(X) \tag{9}$$

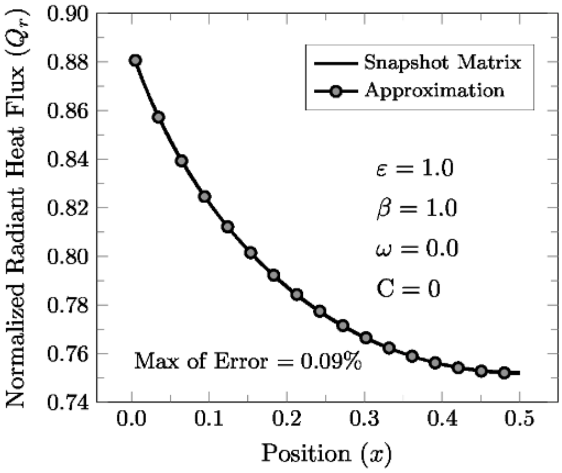


Fig. 3. Comparing the results of POD-RBF approximation with the numerical responses

4- Results and Discussion

A square enclosure, as shown in Fig. 2, is considered. It is assumed that the walls have a constant temperature and are gray and diffuse. The medium is divided into 101 × 101 uniform control volumes. The aim is to investigate the dimensionless radiant flux ($Q_r = q_r / \sigma T_{ref}^4$) on the bottom wall.

Surface emissivities ε, single scattering albedo $\omega = \sigma_s / \beta$, extinction coefficient β, and asymmetry factor C are considered independent parameters. The snapshot matrix is decomposed using the SVD method. So, the orthogonal bases and their corresponding singular values are calculated. The accuracy of the ROM is examined for specific inputs. Fig. 3 illustrates the comparison.

4- 1- The Efficiency of the ROM

The RTE equation is solved, and the efficiency of the combined POD-RBF method is evaluated. For each case, the problem is solved using the DOM and the POD-RBF, and the Central Processing Unit (CPU) time is compared. Table 1 presents the results.

Table 1. CPU time for the numerical solution (DOM) and the Reduced-order (POD-RBF) approximation

Parameters				CPU Time (s)	
ε	β	ω	C	DOM	POD-RBF
0.1	10	0	0	192.23	0.0211
1	1	1	1	2.01	0.0208

5- Conclusions

The POD-RBF model approximates the system response for any arbitrary input vectors. The results show the high accuracy of the presented approach. The CPU time (to evaluate the efficiency of the ROM model) was compared with the DOM results. The results show that the computation time has decreased. On the other hand, the radiation conditions of the medium do not affect the computational cost, and for all modes, it is of the order of 0.02 seconds.

References

[1] M.F. Modest, S. Mazumder, Radiative heat transfer, Academic press, 2021.

[2] Y. Liang, X.-W. Gao, B.-B. Xu, Q.-H. Zhu, Z.-Y. Wu, A new alternating iteration strategy based on the proper orthogonal decomposition for solving large-scaled transient nonlinear heat conduction problems, Journal of Computational Science, 45 (2020) 101206.

[3] Q.-H. Zhu, Y. Liang, X.-W. Gao, A proper orthogonal decomposition analysis method for transient nonlinear heat conduction problems. Part 2: Advanced algorithm, Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, 77(2) (2020) 116-137.

[4] H. Wang, W. Li, Z. Qian, G. Wang, Reconstruction of wind pressure fields on cooling towers by radial basis function and comparisons with other methods, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 208 (2021) 104450.

[5] K.-J. Bathe, Computational fluid and solid mechanics, Elsevier, 2001.

HOW TO CITE THIS ARTICLE
M. Niknam Sharak, A. Safavenejad, M. K. Moayyedi, Evaluating the fast method based on proper orthogonal decomposition for radiative heat transfer in a participating medium, Amirkabir J. Mech Eng., 54(9) (2022) 433-436.

DOI: 10.22060/mej.2022.21069.7377

این صفحه عمداً خالی است

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۴، شماره ۹، سال ۱۴۰۱، صفحات ۲۱۵۷ تا ۲۱۷۴
DOI: 10.22060/mej.2022.21069.7377

ارزیابی روشی سریع مبتنی بر تجزیه متعامد بهینه برای مطالعه انتقال حرارت تابشی در محیط فعال

محسن نیکنام شارک[۱]، علی صفوی‌نژاد[۱*]، محمدکاظم مؤیدی[۲]

۱- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران.
۲- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران.

خلاصه: برای مطالعه انتقال حرارت تابشی در محیط فعال، باید معادله انتقال تابش حل شود. جز در مواردی خاص، حل تحلیلی برای این معادله وجود ندارد. حل آن با روش‌های عددی نیز معمولاً زمان‌بر است. در مسائل انتقال حرارت ترکیبی تابش-هدایت یا تابش-جابه جایی، و مسائل معکوس انتقال حرارت، معادله انتقال تابش باید چندین بار حل شود. بنابراین، زمان حل این معادله مهم است. در این تحقیق، روشی سریع مبتنی بر تجزیه متعامد بهینه برای حل معادله انتقال تابش ارائه می‌گردد. تعدادی از خواص (مانند: گسیلندگی مرزها، ضریب جذب و انحراف محیط) به عنوان پارامترهای مستقل انتخاب می‌شوند. معادله انتقال تابش برای حالت‌های خاصی از این پارامترها، با استفاده از روش راستاهای مجزا حل شده، و پاسخ‌های سیستم، ماتریس نمایه را تشکیل می‌دهند. با استفاده از تجزیه مقادیر تکین، این ماتریس به صورت حاصل‌ضرب سه ماتریس تجزیه می‌گردد. با توجه به بزرگی مقادیر تکین، فقط ستون‌های خاصی از این ماتریس‌ها، انتخاب می‌شوند. در نتیجه، درجات آزادی سیستم اصلی کاهش یافته و یک مدل رتبه‌کاسته ایجاد می‌گردد. با استفاده از درونیابی توابع پایه شعاعی به ازای هر بردار ورودی دلخواه (شامل پارامترهای مستقل)، می‌توان پاسخ سیستم را با سرعت بالایی تقریب زد. نتایج نشان می‌دهد مدل رتبه‌کاسته در مقایسه با حل عددی دقت بالایی دارد. پیچیدگی‌های سیستم در مدل رتبه‌کاسته تأثیری نداشته، و فارغ از ویژگی‌های محیط (مقدار پارامترهای مستقل)، زمان حل از مرتبه ۰/۰۲ ثانیه است.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۲۳
بازنگری: ۱۴۰۱/۰۳/۰۴
پذیرش: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹
ارائه آنلاین: ۱۴۰۱/۰۶/۲۸

کلمات کلیدی:
معادله انتقال تابش
محیط فعال
مدل‌سازی رتبه‌کاسته
تجزیه متعامد بهینه
توابع پایه شعاعی

۱- مقدمه

در سیستم‌های دمابالا مانند: بویلرها، کوره‌ها، و موتورهای احتراق داخل، تابش شکل غالب انتقال حرارت به شمار می‌رود. در بسیاری از کاربردهای مهندسی، محیط بر روی پدیده انتقال حرارت تابشی تأثیرگذار است. در چنین شرایطی، محیط می‌تواند پرتوهای ورودی را جذب کرده و یا به راستاهای دیگری پراکنده کند. همچنین، محیط به دلیل داشتن دمای بالا از خود انرژی تابش می‌کند. چنین محیطی را محیط فعال[۱] می‌نامند. معادله انتقال تابش[۲] رابطه‌ای است که می‌تواند رفتار فیزیکی انتقال حرارت تابشی در یک محیط جذب‌کننده-صادرکننده و یا منحرف‌کننده را توصیف نماید [۱ و ۲].

معادله انتقال تابش یک معادله انتگرالی-دیفرانسیلی است. از طرف دیگر، شدت تابش علاوه بر دما، به راستا و طول موج تابش نیز وابسته است. بنابراین، حتی با روش‌های عددی نیز حل آن دشوار و زمان‌بر خواهد بود.

روش‌های عددی برای حل معادله انتقال تابش توسعه داده شده‌اند. برخی از این روش‌ها فقط در شرایط خاصی (محیط نازک یا ضخیم اپتیکی[۳]، فقط جذب‌کننده-صادرکننده، و ...) اعتبار دارند. روش‌هایی نیز وجود دارند که برای دامنه وسیعی از شرایط محیطی کاربرد دارند [۱ و ۲]. روش راستاهای مجزا[۴] یکی از روش‌هایی است که به خوبی برای حل معادله انتقال تابش در شرایط محیطی متفاوت توسعه داده شده است [۶-۳].

روش‌های عددی موجود، معادله انتقال تابش را به یک سیستم جبری بزرگ-مقیاس تبدیل می‌کنند. این امر، باعث می‌شود حل این معادله یک فرآیند زمان‌بر باشد. در شرایطی که گسیلندگی مرزها پایین باشد، محیط فقط جذب‌کننده-صادرکننده باشد، و یا محیط دارای عمق اپتیکی پایین یا بالا باشد (به دلیل نیاز به تکرارهای بیشتر برای رسیدن به همگرایی) زمان حل معادله انتقال تابش افزایش خواهد یافت. بنابراین، توسعه یک روش که بتواند ضمن حفظ دقت، زمان محاسبات را کاهش دهد، مورد علاقه پژوهشگران بوده است.

1 Participating medium
2 Radiative Transfer Equation (RTE)
3 Opticaly thin or thick
4 Discrete Ordinates Method (DOM)

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: asafavi@birjand.ac.ir

روش‌های رتبه‌کاسته[1]، یک سیستم بزرگ–مقیاس را به یک سیستم با درجات آزادی کوچک‌تر تبدیل می‌کنند؛ و به این ترتیب زمان محاسبات را کاهش می‌دهند [۱۲-۷]. شیوه‌های متفاوتی برای ایجاد یک مدل رتبه‌کاسته توسط محققان پیشنهاد شده است. تجزیه متعامد بهینه[2] یک شیوه مناسب برای کاهش مرتبه سیستم است که در بسیاری از کاربردهای مهندسی توسط پژوهشگران به کار گرفته شده است [۱۸-۱۳]. یکی از ویژگی‌های برتر روش تجزیه متعامد بهینه این است که یک روش مبتنی بر انرژی بوده و تنها با استفاده از چند مود، مؤلفه‌های غالب یک سیستم بزرگ–مقیاس را استخراج می‌کند [۱۳ و ۱۵ و ۱۷ و ۱۹].

روش تجزیه متعامد بهینه، مودهای پرانرژی سیستم را استخراج کرده و با استفاده از آن‌ها یک فضای جدید با درجات آزادی پایین‌تر تولید می‌کند. می‌توان پاسخ سیستم را به صورت ترکیب خطی پایه‌های فضای جدید (مودهای استخراج شده) بازسازی نمود. در این حالت، پایه‌ها مشخص هستند، اما ضرایب ترکیب خطی (ضرایب مودال) نامشخص هستند و باید محاسبه شوند. در مسائل گذرا، پژوهشگران به طور گسترده‌ای از روش تصویر گلرکین[3] برای محاسبه این ضرایب استفاده می‌کنند [۱۷-۱۵, ۲۳-۲۰]. برای محاسبه ضرایب مودال در مسائل مستقل از زمان، از درونیابی‌های مختلفی از جمله توابع پایه شعاعی[4] استفاده می‌شود [۲۶-۲۴].

استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه برای مدل‌سازی رتبه‌کاسته مسائل مکانیک سیالات به خوبی شناخته شده است. مندز و همکاران [۲۷] محدودیت‌های دو روش تجزیه متعامد بهینه و تجزیه مود دینامیکی[5] را مطالعه کردند. آن‌ها با توسعه روش تجزیه متعامد بهینه، یک روش جدید موسوم به تجزیه متعامد بهینه چند–مقیاسی را برای مدل‌سازی رتبه‌کاسته پیشنهاد کردند. مورالیهار و همکاران [۲۸] استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه را برای مدل‌سازی لایه دیواره در جریان آشفته داخل کانال توسعه دادند. ابرو و همکاران [۲۹] ساختارهای منسجم[6] در جریان آشفته درون لوله را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها داده‌های خود را با استفاده از تجزیه متعامد بهینه طیفی برای شناسایی ساختارهای منسجم پرانرژی تجزیه و تحلیل کردند. شن و همکاران [۳۰] از روش تجزیه متعامد بهینه برای مطالعه میدان‌های جریان درون سیلندر و اثرات آن روی دینامیک احتراق در موتورهای احتراق داخل پرداختند. نوو و روبینو [۳۱] روش‌های مختلف را برای ایجاد ماتریس نمایه[7] در نظر گرفتند. و سپس، استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه برای تحلیل جریان‌های تراکم‌ناپذیر را بررسی کردند.

استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه در مدل‌سازی رتبه‌کاسته انتقال حرارت هدایت و جابجایی نیز به خوبی شناخته شده است. لیانگ و همکاران [۱۶] کاربرد روش المان آزاد را برای مسائل انتقال حرارت غیرخطی گذرا گسترش دادند. آن‌ها از روش تجزیه متعامد بهینه برای ایجاد مدل رتبه‌کاسته با دقت بالا استفاده کردند و بازدهی این روش را بهبود بخشیدند. جیانگ و همکاران [۱۷] روش‌های المان مرزی انتگرال شعاعی[8] و تجزیه متعامد بهینه را با هم ترکیب کرده و یک روش با بازدهی بالا برای حل مسائل انتقال حرارت غیرخطی گذرا پیشنهاد دادند. ژو و همکاران [۱۸] به مطالعه الگوریتم عمیق و سیستماتیک[9] مبتنی بر روش تجزیه متعامد بهینه برای حل مسائل انتقال حرارت غیرخطی گذرا پرداختند. آنتورانز و همکاران [۳۲] نقش ساختارهای منسجم را در انتقال حرارت آشفته در جریان لوله تجزیه و تحلیل کردند. آن‌ها روش تجزیه متعامد بهینه را بر روی یک مجموعه داده حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم اعمال کردند.

استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه در مدل‌سازی رتبه‌کاسته انتقال حرارت تابشی درون محیط فعال، توسط برخی پژوهشگران مورد توجه بوده است. تنسر و همکاران [۳۳] از روش تجزیه متعامد بهینه برای کاهش مرتبه معادله انتقال بولتزمن[10] در یک محیط جذب‌کننده–صادرکننده خاکستری استفاده کرده‌اند. سوکاسی و همکاران [۳۴] روش تجزیه متعامد بهینه را برای مدل‌سازی رتبه‌کاسته معادله انتقال تابش در یک محیط گازی غیرخاکستری به کار بردند. در این پژوهش‌ها، روش تجزیه متعامد بهینه برای تقسیمات زاویه‌ای در روش عددی راستاهای مجزا به کار رفته است. تانو و همکاران [۳۵] تلاش کردند با ایجاد یک مدل رتبه‌کاسته مبتنی بر روش تجزیه متعامد بهینه، زمان محاسبات انتقال نوترون در اتمسفر را کاهش دهند.

با بررسی پژوهش‌های گذشته می‌توان دریافت که روش تجزیه متعامد بهینه در مسائل انتقال حرارت تابشی، یا برای کاهش تقسیمات زاویه‌ای استفاده شده است؛ و یا در محیط‌های واسط بدون انحراف به کار رفته است. به عبارت دیگر، ایجاد یک مدل رتبه‌کاسته برای حل معادله انتقال تابش در شکل کلی خود، مورد بررسی قرار نگرفته است. در تحقیق حاضر، انتقال

1 Reduced-order
2 Proper Orthogonal Decomposition (POD)
3 Galerkin projection
4 Radial Basis Functions (RBF)
5 Dynamic Mode Decomposition (DMD)
6 Coherent structures
7 Snapshot matrix
8 Radial integration boundary element method
9 Systematic and in-depth algorithm
10 Boltzmann transport equation

حرارت تابشی در یک محیط فعال جذب‌کننده-صادرکننده، منحرف‌کننده و خاکستری با عمق‌های اپتیکی مختلف (از نازک تا ضخیم) در نظر گرفته شده است. سپس، با استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه یک الگوی رتبه‌کاسته برای حل سریع معادله انتقال تابش ایجاد شده است.

۲- معادله حاکم بر مسئله

معادله انتقال تابش برای یک محیط جذب‌کننده-صادرکننده و منحرف‌کننده با فرض خاکستری بودن محیط، به صورت زیر نوشته می‌شود [۱ و ۲].

$$(\mathbf{s}\cdot\nabla)I(\mathbf{r},\mathbf{s}) = \kappa I_b(\mathbf{r},\mathbf{s}) - \beta I(\mathbf{r},\mathbf{s}) + \frac{\sigma_s}{4\pi}\int_{4\pi} I(\mathbf{r},\mathbf{s}')\Phi(\mathbf{s}',\mathbf{s})d\Omega' \quad (۱)$$

که در آن، I شدت تابش، I_b شدت تابش جسم سیاه، κ ضریب جذب محیط، σ_s ضریب انحراف محیط، $\beta = \kappa + \sigma_s$ ضریب استهلاک[۱] محیط، و $\Phi(\mathbf{s}',\mathbf{s})$ تابع فاز انحراف[۲] می‌باشد. تابع فاز برای انحراف خطی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Phi(\mathbf{s}',\mathbf{s}) = 1.0 + \mathrm{C}\langle \mathbf{s}',\mathbf{s}\rangle \quad (۲)$$

که در آن، عملگر $\langle * \,,\, * \rangle$ بیانگر ضرب داخلی دو بردار بوده و $-۱ \le C \le ۱$ ضریب عدم‌تقارن[۳] است و نحوه انحراف درون محیط را مشخص می‌کند. مقادیر ۱-، ۰ و ۱ برای این ضریب، به ترتیب انحراف پسرو، انحراف همسانگرد، و انحراف پیشرو را مدل می‌کند [۳۶]. شرط مرزی برای سطوح خاکستری و پخشی به صورت زیر است [۱ و ۲].

$$I(\mathbf{r}_w,\mathbf{s}) = \varepsilon_w I_b(\mathbf{r}_w) + \frac{(1-\varepsilon_w)}{\pi}\int_{\mathbf{n}_w\cdot\mathbf{s}'<0} I(\mathbf{r}_w,\mathbf{s}')\left|\mathbf{n}_w\cdot\mathbf{s}'\right|d\Omega' \quad (۳)$$

1 Extinction coefficient
2 Scattering phase function
3 Asymmetry factor

که در آن، ε_w گسیلندگی سطح، $I_b(\mathbf{r}_w)$ تابش جسم سیاه در دمای سطح، و $\mathbf{n}_w$ بردار یکه عمود بر سطح است.

۳- روش حل عددی

رفتار فیزیکی پدیده انتقال حرارت تابشی درون محیط فعال، به خوبی توسط معادله انتقال تابش مدل می‌شود. این معادله یک معادله انتگرالی-دیفرانسیلی بوده، و شدت تابش تابعی از موقعیت مکانی، جهت، طول موج، و درجه حرارت می‌باشد. بنابراین، حل عددی آن دشوار و زمان‌بر خواهد بود. روش‌های متعددی برای حل معادله انتقال تابش در شرایط محیطی متفاوت پیشنهاد شده‌اند. که از جمله مهم‌ترین این روش‌ها می‌توان به روش‌های: «هارمونیک‌های کروی (تقریب P_N)، راستاهای مجزا (تقریب $\mathrm{S_N}$)، ناحیه‌بندی، و مونت کارلو اشاره نمود. این روش‌ها به طور پیوسته بهبود پیدا کرده و برای حل معادله انتقال تابش در شرایط مختلف، توسعه داده شده‌اند. از میان این روش‌ها، روش راستاهای مجزا دارای مزایای زیادی است که از آن جمله می‌توان به موارد زیر اشاره نمود [۱ و ۲]:

- ✓ این روش، روشی کارآمد برای حل مسائل انتقال حرارت تابشی چندبعدی با هندسه‌های نامنظم است.
- ✓ به راحتی می‌توان این روش را با روش‌های دیگر انتقال حرارت نظیر رسانش و جابجایی (معادله انرژی) ترکیب نمود.
- ✓ از این روش به‌سادگی می‌توان برای حل معادله انتقال تابش در محیط‌های غیرخاکستری بهره گرفت.
- ✓ به دلیل فرمول‌بندی به‌نسبت ساده‌تر، کدنویسی آن راحت‌تر بوده و زمان حل آن در مقایسه با سایر روش‌ها کوتاه‌تر است.

با این وجود، ایجاد اثراتی همچون ایجاد تابش و انحراف کاذب، مهم‌ترین ایراد این روش به شمار می‌رود. به دلیل مزایای روش راستاهای مجزا، در تحقیق حاضر از این روش برای حل معادله انتقال تابش استفاده می‌شود.

۳- ۱- روش راستاهای مجزا

روش راستاهای مجزا در ابتدا فقط برای تابش اتمسفری و تابش ستارگان مورد استفاده قرار گرفت. و بعدها برای محاسبه انتقال حرارت تابشی در اجسام تعمیم داده شد. در این روش، کل فضا به $m = N(N+۲)/۲$ (N تقریب انتخاب شده $\mathrm{S_N}$ است.) راستای مشخص تقسیم می‌گردد. سپس، معادله انتقال تابش برای هر راستا به طور جداگانه نوشته شده و به هر راستا وزن داده می‌شود. در نتیجه، هیچ متغیری دیگر تابع جهت نیست. برای

محاسبه هر متغیر، مقدار آن در هر راستا، $f(\mathbf{s}_n)$، را در وزن مربوطه w_n ضرب کرده و با هم جمع می‌کنند. به عبارت دیگر،

$$\int_{4\pi} f(\mathbf{s})d\Omega \simeq \sum_{i=1}^{N} w_n f(\mathbf{s}_n) \tag{۴}$$

هر پرتوی که درون محیط و در راستای مشخص $\mathbf{s}_n$ حرکت می‌کند، در دو حالت با مرزهای محفظه برهم‌کنش خواهد کرد. اول، زمانی که از یک مرز ساطع می‌شود؛ و دوم زمانی که در همان راستا به مرزها برخورد می‌کند، که یا جذب شده و یا منعکس خواهد شد. بنابراین، با نوشتن موازنه انرژی روی مرز، خالص شار تابشی دیواره‌ها به صورت زیر به دست می‌آید.

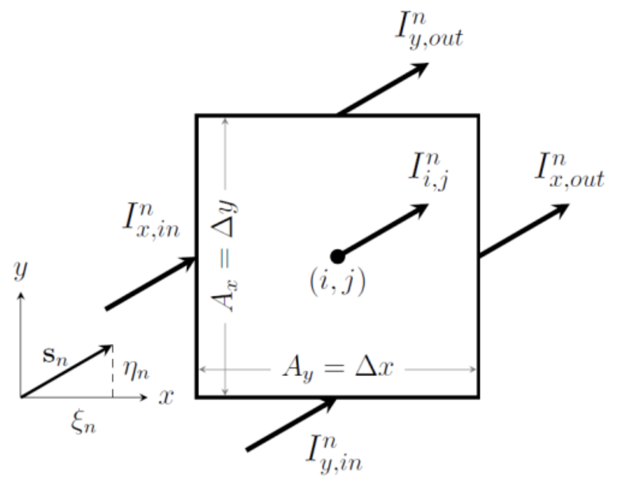
$$\begin{aligned} \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}_w &= \varepsilon_w\left[\pi I_b(\mathbf{r}_w) - H(\mathbf{r}_w)\right] \\ &\simeq \varepsilon_w\left[\pi I_b(\mathbf{r}_w) - \sum_{\mathbf{n}_w\cdot\mathbf{s}_n<0} w_n I_n(\mathbf{r}_w)\left|\mathbf{n}_w\cdot\mathbf{s}_n\right|\right] \end{aligned} \tag{۵}$$

که در آن، $H(\mathbf{r}_w)$ تابش فرودی[1] است. با استفاده از روش راستاهای مجزا، در حالت دوبعدی و در مختصات دکارتی، رابطه (۱) در جهت $\mathbf{s}_n$ با کسینوس‌های هادی ξ_n و η_n به صورت زیر نوشته می‌شود [۳۶].

$$\begin{aligned} &\xi_n\frac{\partial I^n}{\partial x} + \eta_n\frac{\partial I^n}{\partial y} + \beta I^n = \beta S^n; \\ &n = 1,2,\ldots,N \end{aligned} \tag{۶}$$

کمیت S^n را می‌توان به نوعی چشمه تابشی در نظر گرفت، و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} &S^n = (1-\omega)I_b + \frac{\omega}{4\pi}\sum_{m=1}^{N} w_m \Phi(\mathbf{s}_n,\mathbf{s}_m)I^m; \\ &n = 1,2,\ldots,N \end{aligned} \tag{۷}$$



شکل ۱. شدت تابش روی یک حجم کنترل نمونه، در روش راستاهای مجزا

Fig. 1. Radiation intensity in a sample control volume, the discrete ordinates method

متغیر $\omega = \sigma_s/\beta$ آلبدو انحراف[2] نامیده می‌شود. یک حجم کنترل نمونه در شکل ۱ نشان داده شده است. ابعاد این حجم کنترل و شدت‌های تابش ورودی، خروجی و ساطع شده از حجم کنترل در راستای مفروض $\mathbf{s}_n$ در شکل مشخص شده‌اند. اگر از رابطه (۶) روی این حجم کنترل انتگرال گرفته شود، شدت تابش در یک راستای مشخص به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} &\xi_n A_x\left(I^n_{x,out} - I^n_{x,in}\right) + \eta_n A_y\left(I^n_{y,out} - I^n_{y,in}\right) = \\ &-\beta V I^n_{i,j} + \beta V S^n_{i,j} \end{aligned} \tag{۸}$$

که در آن، $V = \Delta x\,\Delta y$ حجم، $I^n_{i,j}$ و $S^n_{i,j}$ به ترتیب متوسط حجمیِ شدت تابش و چشمه تابشی برای گره (i,j)اُم در راستای $\mathbf{s}_n$ هستند. شدت‌های تابش خروجی و شدت تابش حجمی در رابطه (۸) مجهول هستند (سه مجهول در هر حجم کنترل). به طور معمول، با نوشتن یک رابطه خطی بین شدت تابش سطوح و شدت تابش حجمی، فقط شدت تابش حجمی هر گره مجهول خواهد بود [۳۶].

$$\begin{aligned} &I^n_{i,j} = \gamma_x I^n_{x,out} + (1-\gamma_x)I^n_{x,in} = \\ &\gamma_y I^n_{y,out} + (1-\gamma_y)I^n_{y,in} \end{aligned} \tag{۹}$$

1 Irradiation

2 Single scattering albedo

در این رابطه، $\frac{1}{2} \leq \gamma_x , \gamma_y \leq 1$ مقادیر ثابتی بوده و ضرایب تفاضلی نامیده می‌شوند [۳۶]. طرح تفاضلی پله[1]، $\gamma_x = \gamma_y = 1$، و طرح تفاضلی الماس[2]، $\gamma_x = \gamma_y = 1/2$، بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرند. طرح پله، ساده و راحت بوده و تضمین می‌کند که تمامی شدت تابش‌ها مقادیر مثبتی خواهند داشت. با این وجود، این طرح به صورت فضایی مرتبه اول است. بنابراین، بیشترین خطای برش را در بین تمامی روش‌ها دارد. اما تنها روشی است که هرگز به نتایج غیرفیزیکی منجر نشده است [۱]. طرح الماس، محبوب‌ترین طرح در بین پژوهشگران است. با این وجود، کارلسون[3] و لاثروف[4] (۱۹۶۸) دریافتند که در این طرح ممکن است شدت تابش در سطوح حجم کنترل منفی شود. این امر منجر به ناپایداری حل و تولید نتایج غیرفیزیکی خواهد شد [۱]. اگر شدت تابش‌های خروجی $I^n_{x,out}$ و $I^n_{y,out}$ از رابطه (۹) بر حسب شدت تابش‌های ورودی و شدت تابش حجمی محاسبه شده و در رابطه (۸) قرار گیرد، برای هر راستای مجزای $\mathbf{s}_n$، شدت تابش حجمی از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$I^n_{i,j} = \frac{\beta V S^n_{i,j} + \xi_n A_x I^n_{x,in} / \gamma_x + \eta_n A_y I^n_{y,in} / \gamma_y}{\beta V + \xi_n A_x / \gamma_x + \eta_n A_y / \gamma_y} \tag{10}$$

۴- مدل‌سازی رتبه‌کاسته

یک راه مناسب برای کاهش زمان محاسبات، کاهش درجات آزاد سیستم است. این کاهش باید به گونه‌ای صورت پذیرد که دقت محاسبات و ابعاد مسئله اصلی تغییری نکند. یکی از روش‌های محبوب برای کاهش درجات آزادی یک سیستم بزرگ–مقیاس، روش تجزیه متعامد بهینه است. در این روش مودهای پرانرژی سیستم استخراج شده و با استفاده از آن‌ها یک فضای جدید با درجات آزادی کمتر ایجاد می‌شود. می‌توان پاسخ سیستم به ازای ورودی دلخواه را بر حسب ترکیب خطی از پایه‌های جدید نوشت. برای محاسبه ضرایب این ترکیب، در مسائل مستقل از زمان، می‌توان از درونیابی پایه‌های متعامد شعاعی استفاده نمود. در این بخش، نحوه ایجاد مدل رتبه‌کاسته تشریح می‌گردد.

1 Step differencing scheme
2 Diamond differencing scheme
3 Carlson
4 Lathrop

۴- ۱- تجزیه متعامد بهینه

روش تجزیه متعامد بهینه در ابتدا توسط پیرسون[5] (۱۹۰۱) برای تحلیل فایل‌های گرافیکی توسعه داده شد. کارهونن[6] (۱۹۴۶) و لووی[7] (۱۹۵۵) به طور جداگانه نظریه‌ای را ارائه دادند که می‌توان هر فرآیند تصادفی پیوسته–زمانی را بر حسب سری پایه‌های بهینه بسط داد. این نظریه بعدها به تجزیه کارهونن–لووی شهرت یافت. لوملی[8] (۱۹۷۰) ایده تجزیه متعامد بهینه را به دنبال مطالعات مستقل کارهونن و لووی، کوسامبی[9] (۱۹۴۳)، پوگاچف[10] (۱۹۵۳) و اوبوخوف[11] (۱۹۵۴) بررسی کرده و فرمول‌بندی مناسبی برای آن ارائه داد [۱۳ و ۱۹].

روش تجزیه متعامد بهینه پایه‌های مناسب برای تحلیل مودال توابع پیوسته و گسسته ارائه می‌کند. این توابع می‌توانند داده‌های به دست آمده از یک سری آزمایش و یا حل‌های عددی یک مسئله باشند. فرض کنید مسئله انتقال حرارت تابشی در یک محفظه، به ازای شرایط محیطی یا مرزی مختلف حل شود. داده‌های به دست آمده از هر بار حل عددی مسئله (به عنوان مثال میدان دما یا شار تابشی به ازای شرایط محیطی و مرزی مشخص) یک ستون از ماتریسی موسوم به ماتریس نمایه را تشکیل می‌دهند. پس از تجزیه این ماتریس، پایه‌های متعامد بهینه به دست می‌آید. با استفاده از این پایه‌ها، می‌توان یک فضای جدید ایجاد نمود. نگاشت یک سیستم بزرگ–مقیاس روی این فضای جدید، یک سیستم با درجات آزادی بسیار کمتر به وجود می‌آورد.

فرض کنید مسئله اصلی دارای ℓ درجه آزادی باشد. در این‌صورت، هدف اصلی در روش تجزیه متعامد بهینه این است که پایه‌های بهینه را به گونه‌ای تولید کند که به ازای هر بردار ورودی دلخواه، پاسخ سیستم تنها با استفاده از تعداد $L \ll \ell$ پایه اول مدل‌سازی شود. از آنجایی که پاسخ به دست آمده از مدل رتبه‌کاسته باید دارای دقت بالایی نسبت به پاسخ واقعی باشد، مسئله یافتن پایه‌ها، به یک مسئله بهینه‌سازی تبدیل می‌شود. فرض کنید که $F \in \mathbb{R}^p$ یک بردار دلخواه باشد. می‌توان این بردار را به صورت ترکیب خطی از پایه‌های متعامد $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\ell\} \in \mathbb{R}^p$ نوشت.

5 Pearson
6 Karhunen
7 Loeve
8 Lumley
9 Kosambi
10 Pougachev
11 Obukhov

$$F=\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i\varphi_i=\phi A \qquad (۱۱)$$

که در آن،

$$A=\left[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\ell\right]^T,\quad \phi=\left\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_\ell\right\}\in\mathbb{R}^p \qquad (۱۲)$$

و بالانویس T بیانگر ترانهاده ماتریس است. هدف اصلی، یافتن پایه‌های $\{\varphi_i\}$ است، به گونه‌ای که مسئله زیر ارضا گردد.

$$\begin{aligned}&\min\ \left\|F-\tilde{F}\right\|^2\\ &\text{s.t.}\ \ \left\langle\varphi_i,\varphi_j\right\rangle=\begin{cases}1\,; & i=j\\ 0\,; & i\neq j\end{cases}\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

که درآن، $\tilde{F}=\sum_{i=۱}^{L}\alpha_i\varphi_i$ است. سه روش برای محاسبه پایه‌های متعامد $\{\varphi_i\}$ وجود دارد: تجزیه کارهونن-لووی، تحلیل مؤلفه‌های اصلی[1] و تجزیه مقادیر تکین[2] [۱۳ و ۱۹ و ۳۷]. هر سه روش با هم معادل هستند [۱۳].

تجزیه مقادیر تکین را می‌توان بسطِ تجزیه مقادیر ویژه در مورد ماتریس‌های غیرمربعی دانست. در ارتباط با تجزیه متعامد بهینه، تجزیه مقادیر تکین را می‌توان به عنوان بسط ماتریس‌های غیرمتقارن در نظر گرفت. روش تجزیه مقادیر تکین بسیار کلی‌تر از تجزیه مقادیر ویژه بوده و ارتباط نزدیکی با رتبه ماتریس و تقریب حداقل مربعات رتبه‌کاسته دارد. بنابراین، یک ابزار کار مهم و اساسی در بسیاری از زمینه‌ها مانند نظریه ماتریس، سیستم‌های خطی، آمار و تجزیه و تحلیل سیگنال به حساب می‌آید. با استفاده از تجزیه مقادیر تکین می‌توان پایه‌های متعامد مورد نیاز در روش تجزیه متعامد بهینه را محاسبه نمود. این پایه‌ها می‌توانند فضای جدید را برای نگاشت سیستم بزرگ-مقیاس ایجاد کنند.

هر ماتریس $D\in\mathbb{R}^{p\times\ell}$ دارای تجزیه مقادیر تکین به صورت زیر است.

$$D=U\Sigma V^T \qquad (۱۴)$$

که در آن، ماتریس‌های $U\in\mathbb{R}^{p\times p}$ و $V\in\mathbb{R}^{\ell\times\ell}$ ماتریس‌های یکامتعامد[3] هستند و به ترتیب بردارهای تکین چپ و بردارهای تکین راست نامیده می‌شوند. ماتریس $\Sigma\in\mathbb{R}^{p\times\ell}$ یک ماتریس قطری است که مقادیر واقع بر قطر آن $\sigma_۱>\sigma_۲>\cdots>\sigma_r\neq ۰$ مقادیر تکین ماتریس D هستند. و $r\le\min\{p,\ell\}$ رتبه ماتریس D به شمار می‌رود. می‌توان نشان داد که بردارهای تکین چپ در واقع همان پایه‌های متعامد بهینه مورد نیاز هستند. یعنی، $U=\phi=\{\varphi_۱,\varphi_۲,\ldots,\varphi_\ell\}$[۱۳ و ۱۹ و ۳۷]. از آنجا که ماتریس Σ به صورت زیر است،

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0\\ 0 & \cdots & \sigma_r & \\ & 0 & & 0\end{bmatrix} \qquad (۱۵)$$

باید بخش صفر آن را حذف کرده و فقط یک ماتریس قطری مربعی با مقادیر قطری غیرصفر ایجاد نمود. از طرفی باید بردارهای تکین چپ و راست را نیز متناسب با آن برش زد. بنابراین، ماتریس D به صورت زیر تقریب زده می‌شود.

$$\tilde{D}_{p\times\ell}=\widehat{U}_{p\times r}\widehat{\Sigma}_{r\times r}\left(\widehat{V}_{\ell\times r}\right)^T \qquad (۱۶)$$

با توجه به اینکه در کاربردهای مهندسی به طور معمول $r\ll\min\{p,\ell\}$ است، درجات آزادی سیستم اصلی یک‌بار کاهش پیدا می‌کند.

روش تجزیه متعامد بهینه، یک روش بر پایه انرژی سیستم است. به بیان دیگر، پایه‌های متعامد تولید شده، انرژی سیستم را استخراج کرده و در خود نگاه می‌دارند. نکته مهم این است که سهم هر پایه از انرژی سیستم، متناسب با مقدار تکین متناظر با آن است. سهم هر پایه از انرژی سیستم اصلی را می‌توان از رابطه ۱۷ محاسبه کرد.

1 Principal Component Analysis (PCA)
2 Singular Value Decomposition (SVD)
3 Orthonormal

$$Co(\varphi_i)=\frac{\sigma_i^2}{\sum_{j=1}^{r}\sigma_j^2} \tag{۱۷}$$

برای بازسازی سیستم اصلی، همه پایه‌های متعامد نیاز نیستند؛ بلکه پایه‌های با سهم انرژی بیشتر کافی به نظر می‌رسند. می‌توان فقط تعداد $L<r$ پایه اول را که رابطه زیر را ارضا کنند، برای بازسازی سیستم اصلی انتخاب نمود.

$$1-\frac{\sum_{i=1}^{L}\sigma_i^2}{\sum_{j=1}^{r}\sigma_j^2}<E \tag{۱۸}$$

به طور معمول، $E=۰/۰۰۰۱$ در نظر گرفته می‌شود. بنابراین، پایه‌های انتخاب شده حاوی بیش از ۹۹/۹۹ درصد از کل انرژی سیستم اصلی هستند. به این ترتیب، یک‌بار دیگر درجات آزادی سیستم کاهش یافته است. در نتیجه، مدل رتبه‌کاسته ایجاد شده یک سیستم بزرگ-مقیاس از مرتبه ℓ را به یک سیستم از مرتبه $L\ll\ell$ تبدیل کرده است.

۴- ۲- توابع پایه شعاعی

توابع پایه شعاعی روشی است که به طور گسترده برای درونیابی توابع چند-متغیره استفاده می‌شود. در این روش، بر خلاف سایر روش‌های معمول (مانند: درونیابی لاگرانژ و نیوتن) برای درونیابی داده‌ها، از کل داده‌های موجود استفاده می‌شود. فرض کنید که مقدار تابع $F(X)$ ($X\in\mathbb{R}^k$ یک بردار ورودی دلخواه است.) به ازای مقادیر مشخص $X_i\,(i=۱,۲,\ldots,\ell)$ معلوم باشد. هدف این است که مقدار این تابع به ازای یک بردار ورودی دلخواه $X_۱<X_{j\neq i}<X_\ell$ تقریب زده شود.

روش توابع پایه شعاعی به دنبال یک تابع پیوسته است که در کل دامنه تعریف شده و به کل مجموعه داده و مقادیر آن‌ها بستگی دارد. بنابراین، تقریب تابع به صورت ترکیبی خطی از برخی از توابع نوشته می‌شود که در حالت کلی می‌توانند توابعی غیرخطی باشند. یعنی،

$$F(X_j)\simeq\sum_{i=1}^{\ell}a_i g_i(X_j) \tag{۱۹}$$

که در آن، a_iها ضرایب درونیابی، و g_i ها توابع پایه شعاعی هستند. در کار حاضر از توابع شعاعی مرتبه سوم به صورت زیر استفاده شده است.

$$g_i(X_j)=\left\|X_i-X_j\right\|^3 \tag{۲۰}$$

که عملگر $\|*\|$ بیانگر نرم دوم است.

$$\left\|X_i-X_j\right\|=\sqrt{\left(x_{1i}-x_{1j}\right)^2+\left(x_{2i}-x_{2j}\right)^2+\cdots+\left(x_{ki}-x_{kj}\right)^2} \tag{۲۱}$$

برای محاسبه ضرایب درونیابی از این اصل استفاده می‌شود که مقدار درونیابی در نقاط مشخص $X_i\,(i=۱,۲,\ldots,\ell)$ باید با مقدار دقیق تابع برابر باشد. یعنی،

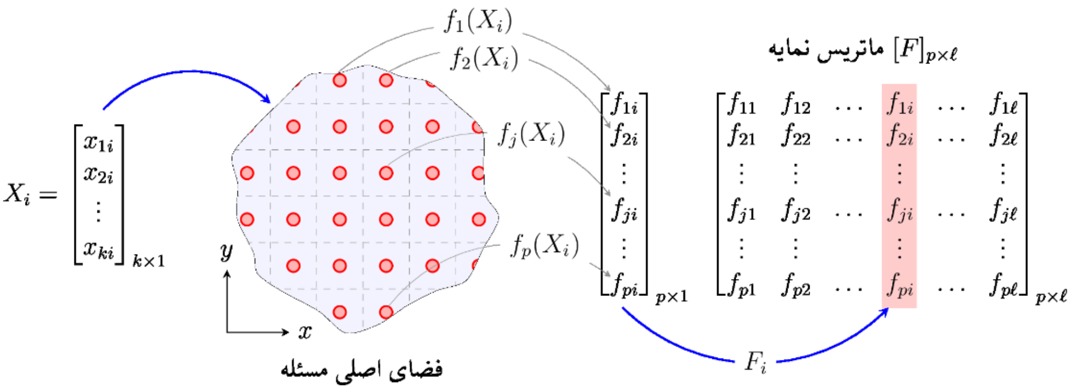
$$\begin{cases}F(X_1)=a_1g_1(X_1)+a_2g_2(X_1)+\cdots+a_\ell g_\ell(X_1)\\ F(X_2)=a_1g_1(X_2)+a_2g_2(X_2)+\cdots+a_\ell g_\ell(X_2)\\ \vdots\\ F(X_\ell)=a_1g_1(X_\ell)+a_2g_2(X_\ell)+\cdots+a_\ell g_\ell(X_\ell)\end{cases} \tag{۲۲}$$

با حل دستگاه معادلات (۲۲)، ضرایب درونیابی محاسبه می‌شود.

۴- ۳- روند اجرایی تجزیه متعامد بهینه-توابع پایه شعاعی

اگر روش تجزیه متعامد بهینه با درونیابی توابع پایه شعاعی ترکیب شود، می‌توان یک مدل مناسب برای تقریب پیوسته از سیستم در دامنه پارامترهای خاص به دست آورد. ابتدا، با استفاده از تجزیه متعامد بهینه پاسخ‌های موجود سیستم اصلی بر روی یک فضا با درجات آزادی پایین‌تر نگاشته می‌شود. سپس، با استفاده از این فضای رتبه‌کاسته ضرایب درونیابی محاسبه می‌شود. در نهایت، پاسخ سیستم به آزادی هر بردار ورودی دلخواه با استفاده از درونیابی، تقریب زده می‌شود.

برای استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه، ابتدا باید ماتریس نمایه تشکیل شود. ستون‌های این ماتریس، در واقع همان مقادیر مشخص تابع هستند که در گام بعد در درونیابی مورد استفاده قرار می‌گیرند. فرض کنید مقدار تابع $F\in\mathbb{R}^p$ به ازای ورودی‌های مشخصی، با استفاده از حل عددی برای یک دامنه، مشخص باشد. در این صورت، این داده‌ها ستون‌های ماتریس نمایه



شکل ۲. نحوه تشکیل ماتریس نمایه

Fig. 2. Forming the snapshot matrix

را به وجود می‌آورند. این فرآیند در شکل ۲ به روشنی نشان داده شده است.

با استفاده از روش تجزیه مقادیر تکین، رابطه (۱۴)، ماتریس نمایه تجزیه شده و پایه‌های متعامد بهینه به دست می‌آیند. سپس، با استفاده از رابطه (۱۸) تعداد L پایه اول انتخاب می‌گردد. در این مرحله، مسئله اصلی بر روی فضای جدید نگاشته شده و یک مدل رتبه‌کاسته ایجاد می‌شود. ضرایب این مدل، با توجه به رابطه (۱۱) محاسبه می‌شوند. از آنجا که پایه‌های به دست آمده از روش تجزیه متعامد بهینه، یکامتعامد هستند، $\phi\phi^T = \phi^T\phi = I$ خواهد بود. در نتیجه،

$$A = \phi^T F \tag{۲۳}$$

برای محاسبه ضرایب به ازای هر بردار ورودی دلخواه، باید از ضرایب مودال به دست آمده از رابطه (۲۳) درونیابی کرد. بنابراین، ماتریس ضرایب بر حسب ترکیب خطی ماتریس‌های پایه شعاعی، رابطه (۱۹)، نوشته می‌شود.

$$A = BG \tag{۲۴}$$

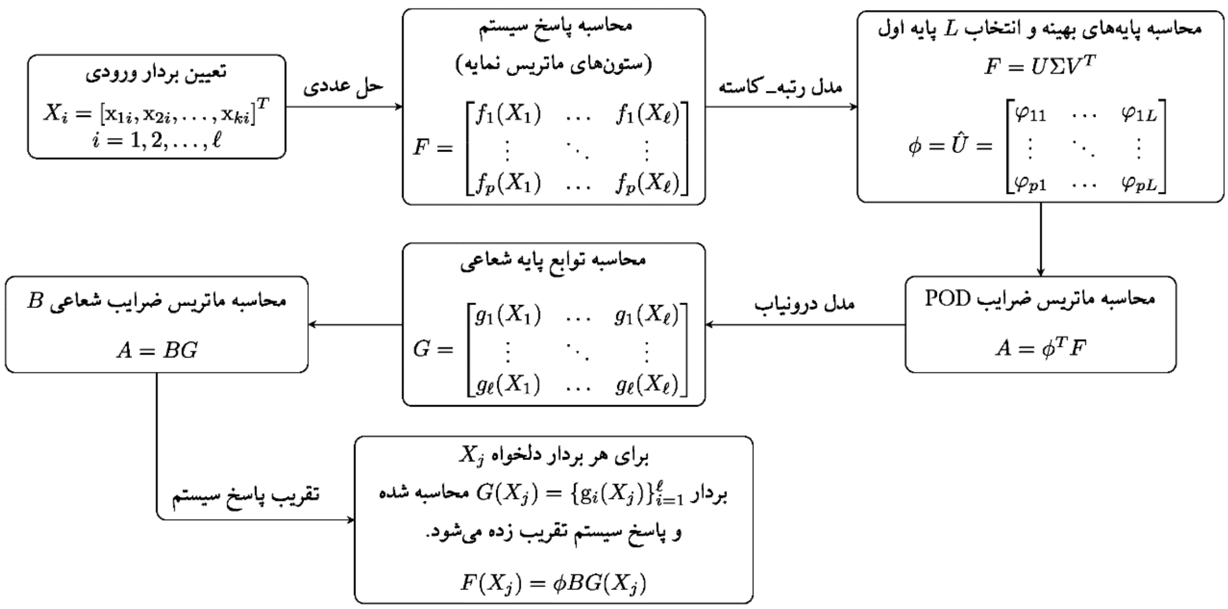
که در آن،

$$G = \begin{bmatrix} g_1(X_1) & g_1(X_2) & \cdots & g_1(X_\ell) \\ g_2(X_1) & g_2(X_2) & \cdots & g_2(X_\ell) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_\ell(X_1) & g_\ell(X_2) & \cdots & g_\ell(X_\ell) \end{bmatrix} \tag{۲۵}$$

و مقادیر $g_i(X_j)$ از رابطه (۲۰) به دست می‌آیند. با حل معادله ماتریسی (۲۴)، ماتریس ضرایب شعاعی B محاسبه می‌گردد. حال می‌توان پاسخ سیستم را به ازای هر بردار ورودی دلخواه با استفاده از رابطه (۲۶) تقریب زد.

$$F(X) \simeq \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{p1} & \cdots & \varphi_{pL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1\ell} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{L1} & \cdots & b_{L\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(X) \\ \vdots \\ g_\ell(X) \end{bmatrix} \tag{۲۶}$$

نکته قابل توجه این است که در رابطه (۲۶)، بردارهای پایه $\phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{L}$ و ماتریس ضرایب شعاعی B فقط یک‌بار محاسبه می‌شوند. بنابراین، برای محاسبه پاسخ سیستم به ازای هر بردار ورودی دلخواه X فقط کافی است توابع پایه شعاعی $g_i(X)$ محاسبه شود. در نتیجه، محاسبات پیچیده عددی به یک محاسبه ساده ماتریسی تبدیل شده است. و این امر باعث می‌گردد سرعت محاسبات به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش یابد. فرآیند اجرایی روش ترکیبی تجزیه متعامد بهینه-توابع پایه شعاعی در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۳. روند اجرایی روش ترکیبی تجزیه متعامد بهینه- توابع پایه شعاعی

Fig. 3. The implementation procedure of the combined method, proper orthogonal decomposition-radial basis functions (POD-RBF)

۵- نتایج

اولین گام در ایجاد مدل رتبه‌کاسته، تشکیل ماتریس نمایه است. در مسائل مستقل از زمان، باید ابتدا متغیرهای مستقل مسئله تعیین شوند. این متغیرها، عناصر بردار ورودی را تشکیل می‌دهند. در حالت عمومی، فرض کنید تعداد k متغیر مستقل برای تحلیل یک مسئله خاص انتخاب شده است. بنابراین، بردار ورودی به صورت زیر خواهد بود.

$$X = [x_1, x_2, \ldots, x_k]^T \tag{۲۷}$$

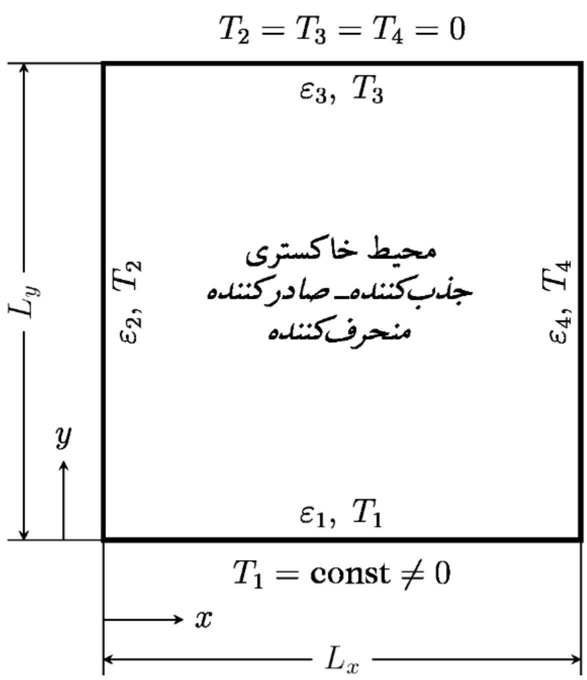
هر یک از این متغیرها در بازه تغییرات $x_i \in [a_i, b_i]$ قرار دارند. لازم به ذکر است که هر یک از این متغیرها بیانگر یک پارامتر فیزیکی مسئله هستند. به عنوان مثال، در مسئله انتقال حرارت تابشی، گسیلندگی دیواره، دمای محیط، شار تابشی و ضریب جذب محیط می‌توانند به عنوان متغیر مستقل در نظر گرفته شوند. باید توجه داشت که عناصر بردار ورودی دارای جنس و یکای متفاوت با یکدیگر هستند. بنابراین باید تمام آن‌ها بی‌بعد شوند.

$$\bar{x}_i = \frac{x_i - a_i}{b_i - a_i} \tag{۲۸}$$

به این ترتیب، تمام عناصر بردار ورودی بی‌بعد شده و در بازه $\bar{x}_i \in [۰,۱]$ قرار می‌گیرند. در مرحله بعدی باید گام تغییرات هر یک از متغیرها تعیین شود. به عبارت دیگر، باید مشخص شود هر متغیر $\bar{x}_i$ چه مقادیری را به خود می‌گیرد. لزومی ندارد که گام تغییرات همه متغیرها با هم برابر باشد. فرض کنید گسیلندگی مرزها یک متغیر مستقل بوده و دارای مقادیر $\varepsilon = \{\varepsilon_۱, \varepsilon_۲, \ldots, \varepsilon_{\ell_۱}\}$ است. یعنی، این متغیر مستقل دارای تعداد $\ell_۱$ مقدار متفاوت است. اگر متغیر مستقل دوم دارای $\ell_۲$ مقدار متفاوت و به همین ترتیب، متغیر kام دارای ℓ_k مقدار متفاوت باشد، تعداد بردارهای ورودی مشخص (تعداد دفعاتی که باید مسئله به صورت عددی حل شود) به صورت زیر خواهد بود.

$$\ell = \prod_{i=1}^{k} \ell_i \tag{۲۹}$$

این مقدار، در واقع تعداد ستون‌های ماتریس نمایه است.



شکل ۴. شکل شماتیک مسئله انتقال حرارت تابشی

Fig. 4. Schematic of the radiative heat transfer problem

۵- ۱- مطالعه موردی

در این بخش، با بررسی یک مسئله انتقال حرارت تابشی در شرایط تعادل تابشی، نحوه ایجاد مدل رتبه‌کاسته و عملکرد آن تشریح می‌گردد. در این مسئله، یک محفظه مربع‌شکل، مانند شکل ۴، در نظر گرفته می‌شود. فرض می‌شود که دیواره‌ها دارای دمای ثابت بوده و از نظر تابشی، خاکستری و پخشی هستند. محیط با استفاده از روش حجم محدود به ۱۰۱ × ۱۰۱ حجم کنترل یکنواخت تقسیم می‌شود. همچنین، برای حل عددی از روش راستاهای مجزا با تقریب $S_۴$ استفاده می‌گردد. برای محاسبه شدت تابش، رابطه (۱۰)، طرح تفاضلی پله $\gamma_x = \gamma_y = ۱$ مورد استفاده قرار می‌گیرد. هدف این مسئله، بررسی شار تابشی بی‌بعد بر روی دیواره پایینی است. شار تابشی بی‌بعد به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Q_r = \frac{q_r}{\sigma T_{ref}^4} \quad (۳۰)$$

که در آن، $q_r\ [\mathrm{W/m^۲}]$ شار تابشی، $\sigma = ۵/۶۷\times۱۰^{-۸}\ [\mathrm{W/m^۲K^۴}]$ ثابت استفان-بولتزمن، و T_{ref} یک دمای مرجع است. فرض می‌شود محیط فعال، در کلی‌ترین حالت خود دارای جذب، صدور، و انحراف است. انحراف می‌تواند غیرهمسانگرد باشد. همچنین، جذب و صدور محیط به صورت خاکستری و پخشی در نظر گرفته می‌شود. تمامی مرزها، بجز مرز پایینی، دارای دمای صفر هستند $T_۲ = T_۳ = T_۴ = ۰$.

مدل رتبه‌کاسته بر اساس نتایج حاصل از حل عددی ایجاد می‌گردد. بنابراین، در ابتدا باید حل عددی (روش راستاهای مجزا) اعتبارسنجی گردد. برای این منظور، تحلیل عددی روزه و همکاران [۳۸] در نظر گرفته می‌شود. آن‌ها یک محفظه مستطیل شکل را در نظر گرفته و فرض کردند که محیط جذب و صدور نداشته و فقط دارای انحراف همسانگرد است ($\kappa = ۰, C = ۰$). همچنین، فرض کردند که تمامی دیواره‌ها سیاه بوده $\varepsilon = ۱$ و عمق اپتیکی محیط فعال برابر $\tau = \int \beta ds = ۱$ است. آن‌ها در تحقیق خود مسئله انتقال حرارت تابشی را با استفاده از دو روش پادبادسو[1] و نمایی[2] حل کرده‌اند. در کار حاضر، معادله انتقال تابش با استفاده از روش راستاهای مجزا و سه تقریب $S_۴$، $S_۶$ و $S_۸$ حل شده و مقدار شار تابشی بی‌بعد روی دیواره پایینی با نتایج حاصل از مرجع [۳۸] مقایسه شده است. نتایج این مقایسه در جدول ۱ آمده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که حل عددی دارای دقت قابل قبولی است. بنابراین، می‌توان از آن برای ایجاد مدل رتبه‌کاسته استفاده کرد. همچنین، نتایج حاصل از تقریب‌های $S_۶$ و $S_۸$ تا چهار رقم با معنا کاملاً یکسان است. با توجه به اینکه سرعت محاسباتی در تقریب $S_۶$ نسبت به $S_۸$ بیشتر بوده، و از دقت قابل قبولی نیز برخوردار است، در پژوهش حاضر از روش راستاهای مجزا با تقریب $S_۶$ استفاده شده است.

برای ایجاد مدل رتبه‌کاسته، چهار کمیت گسیلندگی دیواره‌ها ε، ضریب استهلاک $\beta = \kappa + \sigma_s$، آلبدو انحراف $\omega = \sigma_s / \beta$، و ضریب عدم‌تقارن C به عنوان متغیرهای مستقل مسئله در نظر گرفته می‌شود. بازه تغییرات و گام هر یک از این متغیرها نیز به صورت زیر انتخاب می‌شود.

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \{0.1, 0.2, \dots, 1.0\} & \ell_1 = 10 \\ \beta = \{1.0, 2.0, \dots, 10.0\} & \ell_2 = 10 \\ \omega = \{0.0, 0.1, \dots, 1.0\} & \ell_3 = 11 \\ \mathrm{C} = \{-1, 0, 1\} & \ell_4 = 3 \end{array} \quad (۳۱)$$

1 Upwind
2 Exponential

جدول ۱. شار تابشی بی‌بعد روی دیواره پایینی، $\varepsilon = ۱,\ \kappa = ۰,\ \tau = ۱$

Table 1. Dimensionless radiative heat flux on the bottom wall, $\varepsilon = 1,\ \kappa = 0,\ \tau = 1$

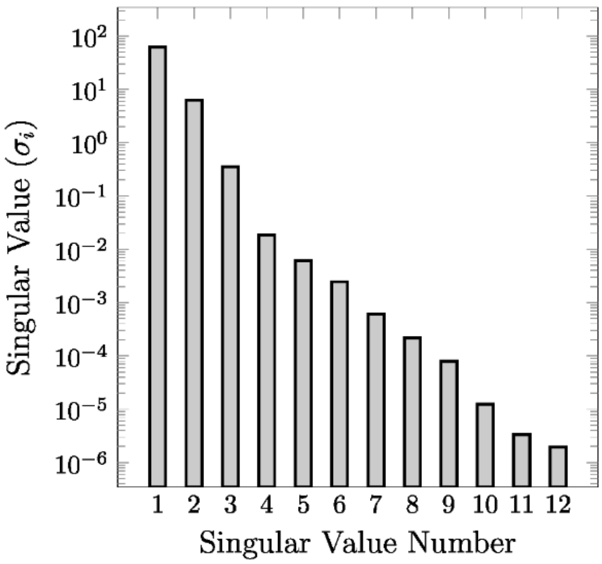
موقعیت	کار حاضر			طرح پادبادسو [۳۸]		طرح نمایی [۳۸]	
(x / L)	DOM ($S_۴$)	DOM ($S_۶$)	DOM ($S_۸$)	۴۱ × ۴۱	۸۱ × ۸۱	۴۱ × ۴۱	۸۱ × ۸۱
۰/۱	۰/۸۲۱۲	۰/۸۲۲۱	۰/۸۲۲۱	۰/۸۲۵۲	۰/۸۲۴۶	۰/۸۲۴۴	۰/۸۲۳۶
۰/۲	۰/۷۸۴۹	۰/۷۸۷۳	۰/۷۸۷۳	۰/۷۹۲۴	۰/۷۹۲۰	۰/۷۸۹۶	۰/۷۸۸۸
۰/۳	۰/۷۶۱۲	۰/۷۶۶۶	۰/۷۶۶۶	۰/۷۷۴۸	۰/۷۷۴۶	۰/۷۶۸۸	۰/۷۶۷۶
۰/۴	۰/۷۴۴۲	۰/۷۵۵۶	۰/۷۵۵۶	۰/۷۶۴۸	۰/۷۶۴۴	۰/۷۵۷۶	۰/۷۵۶۴
۰/۵	۰/۷۲۹۷	۰/۷۵۲۳	۰/۷۵۲۳	۰/۷۵۹۰	۰/۷۵۸۴	۰/۷۵۴۰	۰/۷۵۳۲

برای تشکیل ماتریس نمایه، با توجه به رابطه (۲۹) باید مسئله انتقال حرارت تابشی به تعداد $\ell = ۳۳۰۰$ بار با استفاده از روش راستاهای مجزا حل شود. از آنجا که برای حل عددی از یک شبکه ۱۰۱ × ۱۰۱ استفاده شده است، ماتریس نمایه دارای ابعاد ۳۳۰۰ × ۱۰۲۰۱ خواهد بود.

پس از تشکیل ماتریس نمایه، با استفاده از روش تجزیه مقادیر تکین، این ماتریس تجزیه می‌شود. به این ترتیب، پایه‌های متعامد و مقادیر تکین متناظر با آن‌ها محاسبه می‌گردد. شکل ۵ مقادیر تکین محاسبه شده را نشان می‌دهد. برای انتخاب پایه‌های مورد نیاز، باید با استفاده از رابطه‌های (۱۷) و (۱۸) سهم هر پایه از انرژی کل سیستم محاسبه شود. نتایج این محاسبات در جدول ۲ گزارش شده است. با توجه به نتایج جدول ۲، تعداد سه پایه اول برای ساخت مدل رتبه‌کاسته مناسب است. این سه پایه در شکل ۶ نشان داده شده‌اند. در نتیجه، تعداد درجات آزادی سیستم از ۳۳۰۰ به ۳ کاهش می‌یابد. در ادامه با استفاده از رابطه (۲۳)، ماتریس ضرایب محاسبه می‌شود. بعد از محاسبه ماتریس توابع پایه شعاعی G، رابطه (۲۵)، معادله ماتریسی (۲۴) با استفاده از حلگرهای نرم‌افزار متلب[1] حل شده و ماتریس ضرایب شعاعی B به دست می‌آید. با این کار، مدل رتبه‌کاسته و مدل درونیاب تشکیل می‌گردد. به این ترتیب، پاسخ سیستم به ازای هر بردار ورودی دلخواه $X = [\varepsilon, \beta, \omega, \mathrm{C}]^T$ به سادگی و با استفاده از رابطه (۲۶) تقریب زده می‌شود.

در این مرحله باید دقت روش ترکیبی تجزیه متعامد بهینه-توابع پایه شعاعی در بازسازی پاسخ سیستم بررسی شود. برای این منظور، دقت مدل رتبه‌کاسته به ازای بردارهای مشخص، که بر اساس آن‌ها مدل ایجاد شده است، مورد بررسی قرار می‌گیرد. به ازای چهار ستون از ماتریس نمایه، تقریب حاصل از مدل ایجاد شده، بررسی و نتایج در شکل ۷ نشان داده شده است.

نتایج حاصل، شکل ۷، نشان می‌دهد که مدل رتبه‌کاسته قادر به تقریب بسیار خوب ماتریس نمایه (پاسخ سیستم به ازای ورودی‌های مشخص) است. البته انتظار می‌رفت که سیستم درونیاب بتواند با خطایی معادل صفر، این پاسخ‌ها را تقریب بزند. اما، باید توجه داشت که قبل از ایجاد مدل درونیاب، با استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه، یک مدل رتبه‌کاسته از سیستم اصلی



شکل ۵. مقادیر تکین محاسبه شده با استفاده از روش تجزیه مقادیر تکین

Fig. 5. Singular values calculated using the SVD method

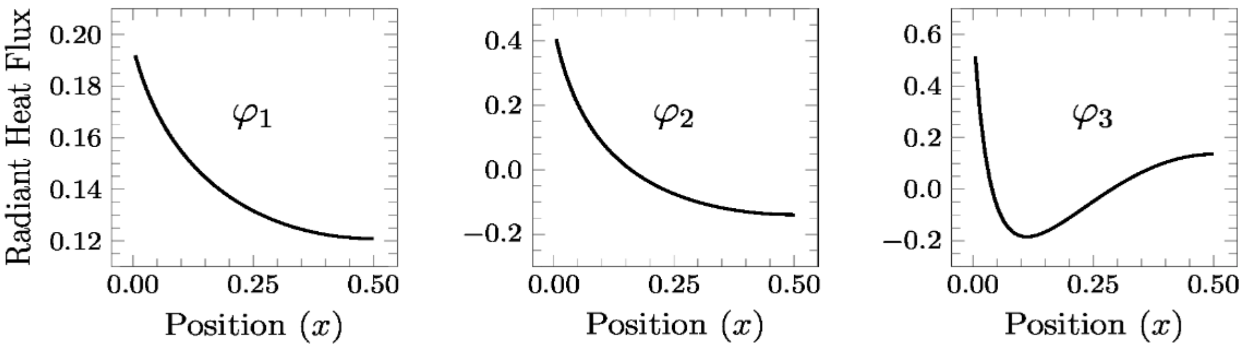
1 MATLAB

جدول ۲. سهم هر پایه از انرژی کل سیستم

Table 2. The contribution of each basis to the total energy of the system

تعداد L	مقدار تکین σ_i	$Co(i)=\sigma_i^{۲}/\sum_{j=۱}^{\ell}\sigma_j^{۲}$	$\sum_{i=۱}^{L}\sigma_i^{۲}/\sum_{j=۱}^{\ell}\sigma_j^{۲}$
۱	۶۱/۶	۰/۹۸۹۸۰	۹۸/۹۸۰ ٪
۲	۶/۲۵	۰/۰۱۰۱۶	۹۹/۹۹۷ ٪
۳	۰/۳۵۱	۰/۰۰۰۰۳	۹۹/۹۹۹ ٪
۴	۰/۰۱۸۳	۰/۰۰۰۰۰	۱۰۰/۰۰۰ ٪
۵	۰/۰۰۶۱۲	۰/۰۰۰۰۰	۱۰۰/۰۰۰ ٪
۶	۰/۰۰۲۴۶	۰/۰۰۰۰۰	۱۰۰/۰۰۰ ٪

در این مطالعه، تعداد ستون‌های ماتریس نمایه، با توجه به رابطه (۳۲) و با استفاده از رابطه (۳۰)، برابر $\ell=۳۳۰۰$ است.



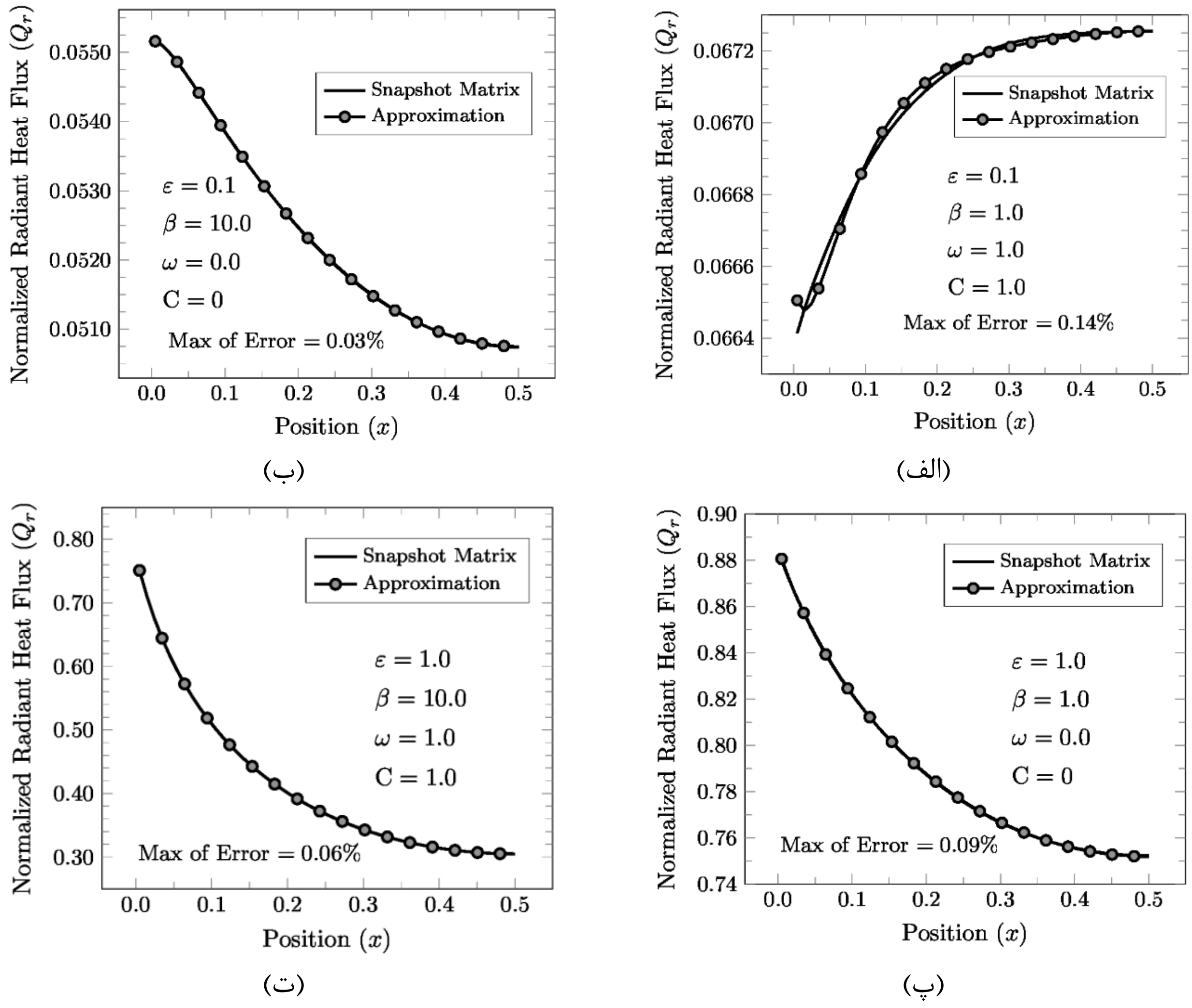
شکل ۶. سه پایه متعامد به دست آمده از روش تجزیه متعامد بهینه

Fig. 6. Three calculated orthogonal bases employing the POD method

ایجاد شده است. بنابراین، مقدار خطای موجود در تقریب ستون‌های ماتریس نمایه، ناشی از کاهش درجات آزادی سیستم است. به عبارت دیگر، مدل درونیاب، به جای استفاده از پاسخ‌های اصلی، با استفاده از مدل رتبه‌کاسته ایجاد شده است. با استفاده از مدل رتبه‌کاسته ایجاد شده، می‌توان علاوه بر شار گرمای روی دیواره، توزیع دمای درون محیط فعال را نیز با سرعت و دقت بالا به‌دست آورد. برای ارزیابی بهتر مدل رتبه‌کاسته ایجاد شده، توزیع دما درون محیط فعال به ازای هر چهار بردار ورودی رسم شده است. شکل ۸ میدان دما را نشان می‌دهد.

۵- ۲- کارایی مدل رتبه‌کاسته

دلیل اصلی از ایجاد مدل رتبه‌کاسته، کاهش زمان محاسبات است. زمان حل معادله انتقال تابش، متناسب با شرایط تابشی محیط فعال، از ۰/۱ تا ۲۰۰ ثانیه متغیر است. اگر در یک مسئله معکوس یا بهینه‌سازی، نیاز باشد تا معادله انتقال تابش چندین بار حل شود، زمان حل به طور چشم‌گیری افزایش خواهد یافت. بنابراین، وجود یک مدل رتبه‌کاسته که بتواند زمان حل را کاهش دهد، ضروری به نظر می‌رسد.

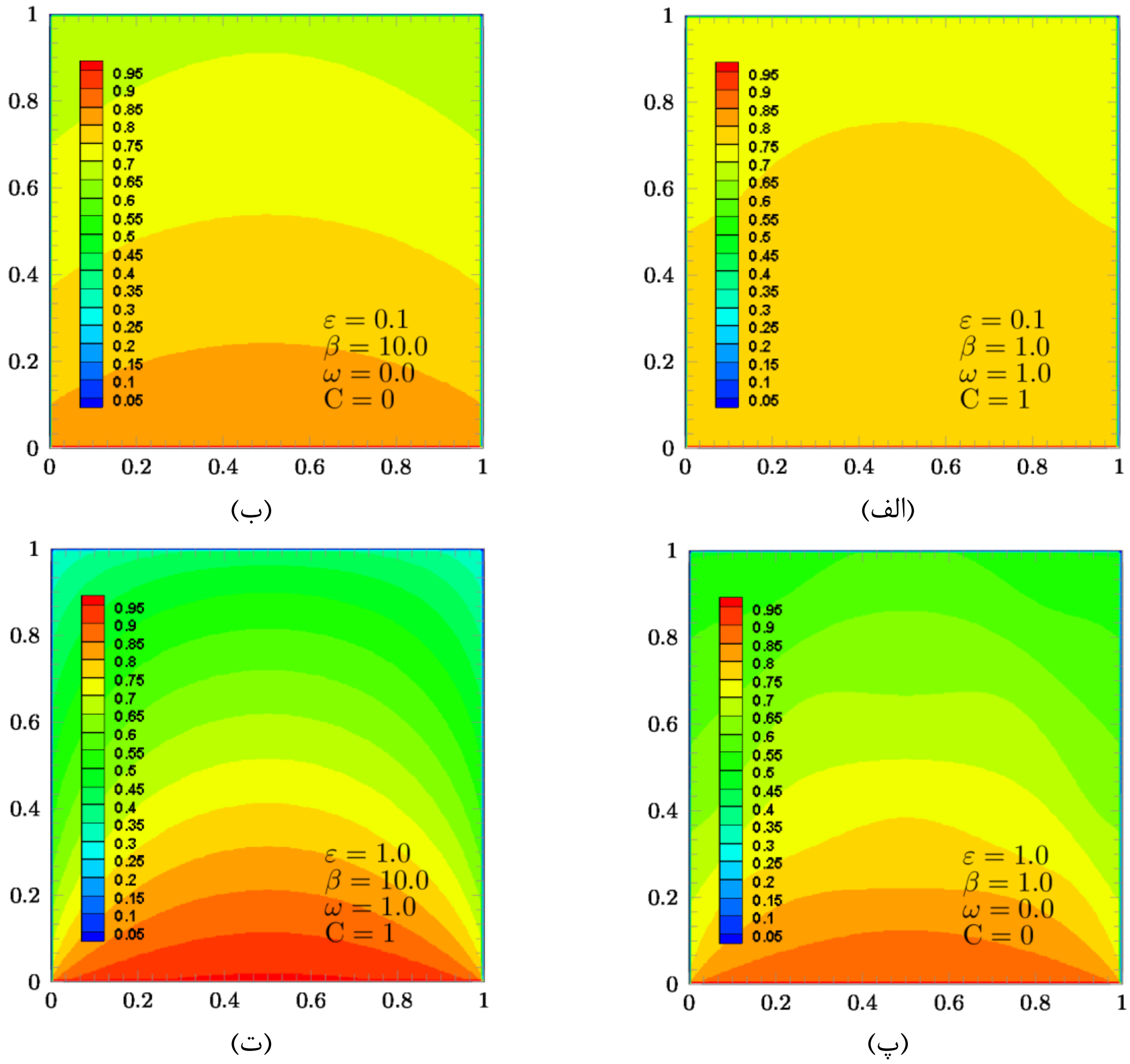


شکل ۷. مقایسه نتایج حاصل از تقریب تجزیه متعامد بهینه-توابع پایه شعاعی با پاسخ‌های عددی سیستم (ستون‌های ماتریس نمایه)

Fig. 7. Comparing the results of POD-RBF approximation with the numerical responses

برای ارزیابی کارایی روش ترکیبی تجزیه متعامد بهینه-توابع پایه شعاعی، برای چندین حالت مشخص، مسئله انتقال حرارت تابشی در یک محیط فعال حل شده است. هندسه و شرایط مرزی مسئله مانند بخش ۵-۱ (شکل ۴) می‌باشد. برای هر حالت، مسئله با استفاده از روش راستاهای مجزا و مدل رتبه‌کاسته حل شده و زمان محاسبات به دست آمده است. نتایج حاصل از این مقایسه در جدل ۳ گزارش شده است. در این مقایسه، از یک لپ تاپ دارای پردازنده (Intel(R) Core(TM 7i 2 GHz کارت تصویر NVIDIA GeForce GT M525 و حافظه GB ۶ استفاده شده است. همچنین، مدل‌سازی عددی به روش راستاهای مجزا با استفاده از زبان برنامه نویسی فرترن[1] کدنویسی شده است. نتایج به دست آمده، بیانگر کارایی بالای روش تجزیه متعامد بهینه-توابع پایه شعاعی است. نکته مهم این است که با ایجاد مدل رتبه‌کاسته، دیگر شرایط تابشی محیط فعال تأثیری در زمان حل مسئله ندارد.

1 FORTRAN



شکل ۸. توزیع دما درون محیط فعال حاصل از تقریب تجزیه متعامد بهینه–توابع پایه شعاعی

Fig. 8. Temperature field inside the participating medium by the POD-RBF approximation

جدول ۳. زمان محاسبات برای حل عددی راستاهای مجزا و مدل رتبه‌کاسته

Table 3. CPU time for the numerical solution (DOM) and the Reduced-order (POD-RBF) approximation

موقعیت	کار حاضر			طرح پادبادسو [۳۸]		طرح نمایی [۳۸]	
(x/L)	DOM (S_4)	DOM (S_6)	DOM (S_8)	۴۱ × ۴۱	۸۱ × ۸۱	۴۱ × ۴۱	۸۱ × ۸۱
۰/۱	۰/۸۲۱۲	۰/۸۲۲۱	۰/۸۲۲۱	۰/۸۲۵۲	۰/۸۲۴۶	۰/۸۲۴۴	۰/۸۲۳۶
۰/۲	۰/۷۸۴۹	۰/۷۸۷۳	۰/۷۸۷۳	۰/۷۹۲۴	۰/۷۹۲۰	۰/۷۸۹۶	۰/۷۸۸۸
۰/۳	۰/۷۶۱۲	۰/۷۶۶۶	۰/۷۶۶۶	۰/۷۷۴۸	۰/۷۷۴۶	۰/۷۶۸۸	۰/۷۶۷۶
۰/۴	۰/۷۴۴۲	۰/۷۵۵۶	۰/۷۵۵۶	۰/۷۶۴۸	۰/۷۶۴۴	۰/۷۵۷۶	۰/۷۵۶۴
۰/۵	۰/۷۲۹۷	۰/۷۵۲۳	۰/۷۵۲۳	۰/۷۵۹۰	۰/۷۵۸۴	۰/۷۵۴۰	۰/۷۵۳۲

۶- نتیجه‌گیری

پدیده انتقال حرارت تابشی در حضور یک محیط فعال، یک مسئله پیچیده فیزیکی است. معادله انتقال تابش می‌تواند پیچیدگی‌های این پدیده را مدل‌سازی کند. از آنجا که معادله انتقال تابش یک معادله انتگرالی-دیفرانسیلی است، حل آن مشکل و زمان‌بر خواهد بود. روش راستاهای مجزا یکی از روش‌هایی است که با استفاده از آن می‌توان این معادله را برای شرایط مختلف محیطی حل کرد. این روش، یک روش تکراری بوده و بسته به نوع شرایط تابشی محیط، برای رسیدن به همگرایی پاسخ ممکن است بیش از ۳۰۰۰ تکرار نیاز باشد. این امر می‌تواند زمان حل را تا حدود ۲۰۰ ثانیه افزایش دهد. یکی از راه‌های افزایش سرعت محاسبات، کاهش مرتبه (درجات آزادی) سیستم است. روش تجزیه متعامد بهینه یکی از محبوب‌ترین روش‌ها برای ایجاد یک مدل رتبه‌کاسته است.

در تحقیق حاضر، یک محفظه دوبعدی مربع‌شکل در نظر گرفته شده است. فرض شده است که دیواره‌ها دارای دمای ثابت هستند و یک محیط جذب‌کننده-صادرکننده و منحرف‌کننده فضای داخل محفظه را پر کرده است. چهار کمیت گسیلندگی مرزها، ضریب استهلاک، آلبدو انحراف و ضریب عدم‌تقارن به عنوان متغیرهای مستقل انتخاب شده‌اند. معادله انتقال تابش به ازای ورودی‌های متفاوت (مقادیر مختلف از متغرهای مستقل) با استفاده از روش راستاهای مجزا (تقریب S_4) حل شده و ماتریس نمایه تشکیل گردید. با استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه یک مدل رتبه‌کاسته از سیستم اصلی ایجاد شد. در نهایت، با ایجاد یک درونیاب از توابع پایه شعاعی روی مدل کاهش یافته، یک مدل ترکیبی ایجاد شد.

با استفاده از مدل ترکیبی تجزیه متعامد بهینه-توابع پایه شعاعی پاسخ سیستم به ازای چندین بردار ورودی مختلف تقریب زده شد. نتایج حاصل، بیانگر دقت بالای این روش است. برای ارزیابی کارایی مدل رتبه‌کاسته، زمان محاسبات این روش با روش راستاهای مجزا مقایسه گردید. نتایج نشان می‌دهد که سرعت محاسبات به طرز چشم‌گیری افزایش یافته است. از طرف دیگر، شرایط تابشی محیط تأثیری روی زمان حل مسئله نداشته و زمان حل برای تمامی حالت‌ها تقریباً ثابت و از مرتبه ۰/۰۲ ثانیه است.

۷- فهرست علائم

علائم انگلیسی

A	مساحت، m^2
A	ماتریس ضرایب مودال در روش تجزیه متعامد بهینه
a	ضرایب درونیابی شعاعی
B	ماتریس ضرایب شعاعی
C	ضریب عدم‌تقارن
G	ماتریس توابع پایه شعاعی
g	تابع پایه شعاعی
H	تابش فرودی، W/m^2
I	شدت تابش، W/m^2
k	تعداد متغیرهای مستقل مسئله
L	تعداد پایه‌های لازم برای ایجاد مدل رتبه‌کاسته
ℓ	تعداد درجات آزادی سیستم (تعداد ستون‌های ماتریس نمایه)
$\mathbf{n}$	بردار یکه عمود بر سطح
p	تعداد گره‌ها در شبکه (تعداد سطرهای ماتریس نمایه)
Q_r	شار تابشی بی‌بعد
q_r	شار تابشی، W/m^2
$\mathbf{r}$	بردار موقعیت، m
r	رتبه ماتریس
$\mathbf{s}$	راستای تابش
U	ماتریس تکین چپ در روش تجزیه مقادیر تکین
V	ماتریس تکین راست در روش تجزیه مقادیر تکین
V	حجم، m^3
w	وزن مربوط به هر راستا در روش راستاهای مجزا
X	بردار ورودی (شامل متغیرهای مستقل مسئله)

علائم یونانی

α	ضرایب مودال در روش تجزیه متعامد بهینه
β	ضریب استهلاک محیط، m^{-1}
ε	گسیلندگی دیواره
Φ	تابع فاز انحراف، Sr^{-1}
ϕ	ماتریس شامل پایه‌های متعامد بهینه
φ	پایه‌های متعامد بهینه
γ	ضریب تفاضلی در روش راستاهای مجزا
η	کسینوس هادی در جهت محور y
κ	ضریب جذب محیط، m^{-1}
Σ	ماتریس تکین در روش تجزیه مقادیر تکین
σ	مقادیر تکین ماتریس
σ	ثابت استفان بولتزمن، W/m^2K^4 $۵/۶۷ \times ۱۰^{-۸}$
σ_s	ضریب انحراف محیط، m^{-1}
τ	عمق اپتیکی محیط
Ω	زاویه فضایی، Sr
ω	آلبدو انحراف

منابع

[1] M.F. Modest, S. Mazumder, Radiative heat transfer, Academic press, 2021.

[2] J.R. Howell, M.P. Mengüç, K. Daun, R. Siegel, Thermal radiation heat transfer, CRC press, 2020.

[3] R.-R. Zhou, B.-W. Li, The modified discrete ordinates method for radiative heat transfer in two-dimensional cylindrical medium, International Journal of Heat and Mass Transfer, 139 (2019) 1018-1030.

[4] Q. Nguyen, M.H. Beni, A. Parsian, O. Malekahmadi, A. Karimipour, Discrete ordinates thermal radiation with mixed convection to involve nanoparticles absorption, scattering and dispersion along radiation beams through the nanofluid, Journal of Thermal Analysis and Calorimetry, 143(3) (2021) 2801-2824.

[5] F. Asllanaj, S. Contassot-Vivier, O. Botella, F.H. França, Numerical solutions of radiative heat transfer in combustion systems using a parallel modified discrete ordinates method and several recent formulations of WSGG model, Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 274 (2021) 107863.

[6] Z. Sun, C.D. Hauck, Low-memory, discrete ordinates, discontinuous Galerkin methods for radiative transport, SIAM Journal on Scientific Computing, 42(4) (2020) B869-B893.

[7] S. Gugercin, A.C. Antoulas, A survey of model reduction by balanced truncation and some new results, International Journal of Control, 77(8) (2004) 748-766.

[8] G. Scarciotti, A. Astolfi, Nonlinear model reduction by moment matching, Foundations and Trends® in Systems and Control, 4(3-4) (2017) 224-409.

[9] M. Billaud-Friess, A. Nouy, Dynamical model reduction method for solving parameter-dependent dynamical systems, SIAM Journal on Scientific Computing, 39(4) (2017) A1766-A1792.

[10] M.C. Varona, R. Gebhart, J. Suk, B. Lohmann, Practicable Simulation-Free Model Order Reduction by Nonlinear Moment Matching, arXiv preprint arXiv:1901.10750, (2019).

[11] N. Faedo, F.J.D. Piuma, G. Giorgi, J.V. Ringwood, Nonlinear model reduction for wave energy systems: a moment-matching-based approach, Nonlinear Dynamics, 102(3) (2020) 1215-1237.

[12] G. Scarciotti, A.R. Teel, On moment matching for stochastic systems, IEEE Transactions on Automatic Control, 67(2) (2021) 541-556.

[13] Y. Liang, H. Lee, S. Lim, W. Lin, K. Lee, C. Wu, Proper orthogonal decomposition and its applications—Part I: Theory, Journal of Sound and vibration, 252(3) (2002) 527-544.

[14] J. Zhou, X. Wu, L. Kang, M. Wang, J. Huang, An adaptive proper orthogonal decomposition method for evaluating variability bounds of antenna responses, IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 18(9) (2019) 1907-1911.

[15] K. Li, Z. Sha, W. Xue, X. Chen, H. Mao, G. Tan, A fast modeling and optimization scheme for greenhouse environmental system using proper orthogonal decomposition and multi-objective genetic algorithm, Computers and Electronics in Agriculture, 168 (2020) 105096.

[16] Y. Liang, X.-W. Gao, B.-B. Xu, Q.-H. Zhu, Z.-Y. Wu, A new alternating iteration strategy based on the proper orthogonal decomposition for solving large-scaled transient nonlinear heat conduction problems, Journal of Computational Science, 45 (2020) 101206.

[17] G. Jiang, H. Liu, K. Yang, X. Gao, A fast reduced-order model for radial integral boundary element method based on proper orthogonal decomposition in nonlinear transient heat conduction problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 368 (2020) 113190.

[18] Q.-H. Zhu, Y. Liang, X.-W. Gao, A proper orthogonal decomposition analysis method for transient nonlinear heat conduction problems. Part 2: Advanced algorithm, Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, 77(2)

(2020) 116-137.

[19] K.-J. Bathe, Computational fluid and solid mechanics, Elsevier, 2001.

[20] B. Xu, A. Yebi, M. Hoffman, S. Onori, A rigorous model order reduction framework for waste heat recovery systems based on proper orthogonal decomposition and galerkin projection, IEEE Transactions on Control Systems Technology, 28(2) (2018) 635-643.

[21] V. Shinde, E. Longatte, F. Baj, Y. Hoarau, M. Braza, Galerkin-free model reduction for fluid-structure interaction using proper orthogonal decomposition, Journal of Computational Physics, 396 (2019) 579-595.

[22] A. Towne, Space-time Galerkin projection via spectral proper orthogonal decomposition and resolvent modes, in: AIAA Scitech 2021 Forum, 2021, pp. 1676.

[23] B. Koo, H. Kim, T. Jo, S. Kim, J.Y. Yoon, Proper orthogonal decomposition–Galerkin projection method for quasi-two-dimensional laminar hydraulic transient flow, Journal of Hydraulic Research, 59(2) (2021) 224-234.

[24] M. Dehghan, M. Abbaszadeh, An upwind local radial basis functions-differential quadrature (RBF-DQ) method with proper orthogonal decomposition (POD) approach for solving compressible Euler equation, Engineering Analysis with Boundary Elements, 92 (2018) 244-256.

[25] S. Wang, S. Khatir, M.A. Wahab, Proper Orthogonal Decomposition for the prediction of fretting wear characteristics, Tribology International, 152 (2020) 106545.

[26] H. Wang, W. Li, Z. Qian, G. Wang, Reconstruction of wind pressure fields on cooling towers by radial basis function and comparisons with other methods, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 208 (2021) 104450.

[27] M. Mendez, M. Balabane, J.-M. Buchlin, Multi-scale proper orthogonal decomposition of complex fluid flows, Journal of Fluid Mechanics, 870 (2019) 988-1036.

[28] S.D. Muralidhar, B. Podvin, L. Mathelin, Y. Fraigneau, Spatio-temporal proper orthogonal decomposition of turbulent channel flow, Journal of Fluid Mechanics, 864 (2019) 614-639.

[29] L.I. Abreu, A.V. Cavalieri, P. Schlatter, R. Vinuesa, D.S. Henningson, Spectral proper orthogonal decomposition and resolvent analysis of near-wall coherent structures in turbulent pipe flows, Journal of Fluid Mechanics, 900 (2020).

[30] L. Shen, K.-Y. Teh, P. Ge, F. Zhao, D.L. Hung, Temporal evolution analysis of in-cylinder flow by means of proper orthogonal decomposition, International Journal of Engine Research, 22(5) (2021) 1714-1730.

[31] J. Novo, S. Rubino, Error analysis of proper orthogonal decomposition stabilized methods for incompressible flows, SIAM Journal on Numerical Analysis, 59(1) (2021) 334-369.

[32] A. Antoranz, A. Ianiro, O. Flores, M. García-Villalba, Extended proper orthogonal decomposition of non-homogeneous thermal fields in a turbulent pipe flow, International Journal of Heat and Mass Transfer, 118 (2018) 1264-1275.

[33] J. Tencer, K. Carlberg, M. Larsen, R. Hogan, Accelerated solution of discrete ordinates approximation to the boltzmann transport equation for a gray absorbing–emitting medium via model reduction, Journal of Heat Transfer, 139(12) (2017).

[34] L. Soucasse, A.G. Buchan, S. Dargaville, C.C. Pain, An angular reduced order model for radiative transfer in non grey media, Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 229 (2019) 23-32.

[35] M. Tano, J. Ragusa, D. Caron, P. Behne, Affine reduced-order model for radiation transport problems in cylindrical coordinates, Annals of Nuclear Energy, 158 (2021) 108214.

[36] H. Amiri, S. Mansouri, A. Safavinejad, Combined conductive and radiative heat transfer in an anisotropic scattering participating medium with irregular geometries, International Journal of Thermal Sciences, 49(3) (2010) 492-503.

[37] Z. Ostrowski, R. Białecki, A.J. Kassab, Solving inverse heat conduction problems using trained POD-RBF network inverse method, Inverse Problems in Science and Engineering, 16(1) (2008) 39-54.

[38] D.R. Rousse, G. Gautier, J.-F. Sacadura, Numerical predictions of two-dimensional conduction, convection, and radiation heat transfer. II. Validation, International journal of thermal sciences, 39(3) (2000) 332-353.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Niknam Sharak, A. Safavenejad, M. K. Moayyedi, Evaluating the fast method based on proper orthogonal decomposition for radiative heat transfer in a participating medium, Amirkabir J. Mech Eng., 54(9) (2022) 2157-2174.

DOI: 10.22060/mej.2022.21069.7377