



بررسی اثر تخلخل بر خمش ترمو-الاستوپلاستیک ورق‌های مدرج تابعی توسط روش بدون المان باز تولید نقطه با هسته پایه شعاعی سه‌بعدی

رضا واقفی*

دانشکده مهندسی، دانشگاه فسا، فسا، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۱۳

بازنگری: ۱۴۰۱/۰۵/۲۳

پذیرش: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹

ارائه آنلاین: ۱۴۰۱/۰۸/۱۶

کلمات کلیدی:

تحلیل ترموالاستوپلاستیک

ورق مدرج تابعی

تخلخل

روش باز تولید نقطه با هسته

توابع پایه شعاعی

خلاصه: در این مقاله اثر تخلخل بر پاسخ خمش ترمو-الاستوپلاستیک ورق‌های مدرج تابعی با خواص وابسته به دما که در معرض ترکیبی از بارهای حرارتی و مکانیکی واقع شده‌اند، توسط یک مدل بدون المان سه‌بعدی مبتنی بر روش باز تولید نقطه با هسته پایه شعاعی مورد مطالعه قرار گرفته است. برای توصیف رفتار پلاستیک ورق، معیار تسلیم فون میز، کرنش سختی همسانگرد و قانون جریان پرناندتل-رویس بکار گرفته شده است. خواص ماده مدرج تابعی که همگی وابسته به دما فرض شده‌اند، به طور پیوسته در جهت ضخامت ورق، بر اساس کسر حجمی اجزای تشکیل دهنده آن و بر طبق یک تابع توانی تغییر می‌کنند. از قانون آمیختگی اصلاح شده برای ارزیابی موضعی پارامترهای ترمومکانیکی مؤثر در ماده مدرج تابعی استفاده شده است. یک مدل بدون المان سه‌بعدی مبتنی بر روش باز تولید نقطه با هسته پایه شعاعی توسعه یافته و در همه تجزیه و تحلیل‌ها بکار گرفته شده است. برای نشان دادن دقت و کارایی روش حاضر، نتایج بدست آمده با نتایج تحلیلی و عددی موجود در مراجع معتبر مقایسه شده و توافق بسیار خوبی میان نتایج مشاهده شده است. به علاوه تأثیر پارامترهای مهمی مانند ضریب تخلخل، شاخص تغییرات ماده، نسبت ضخامت و شرایط مرزی بر پاسخ خمش ورق مدرج تابعی مطالعه شده است.

۱- مقدمه

مواد مدرج تابعی^۱ کامپوزیت‌های پیشرفته‌ای هستند که به طور هدفمند از طریق توزیع ناهمگن اجزای مختلف ساخته می‌شوند. از ویژگی‌های منحصر به فرد این مواد، امکان کنترل تدریجی کسر حجمی اجزای تشکیل دهنده‌ی آنها توسط هر تابع دلخواه است. تغییرات پیوسته خواص در مواد مدرج تابعی موجب بروز رفتار ترمومکانیکی متفاوت در آنها شده و این امر می‌تواند به بهبود مشخصه‌های ترمومکانیکی از جمله تمرکز تنش، تنش‌های حرارتی و تنش‌های پسماند کمک کند. قابلیت‌های عملی بالای مواد مدرج تابعی شامل استحکام بالا و مقاومت در برابر دما و ضربه این امکان را برای طراحان فراهم آورده است تا از آنها در زمینه‌های مختلف مکانیک، هوافضا، الکترونیک، هسته‌ای، زیست پزشکی و غیره بطور گسترده‌ای استفاده کنند. استفاده وسیع از ورق‌ها در اکثر سازه‌های مدرن و کاربردی مهندسی و نیز خواص منحصر به فرد مواد مدرج تابعی، خصوصاً در محیط‌های دما بالا،

مطالعه رفتار ترمومکانیکی ورق‌های مدرج تابعی را به یک حوزه تحقیقاتی جذاب تبدیل کرده است.

روش‌های مختلف تولید مواد مدرج تابعی از قبیل متالورژی پودر، رسوب بخار، ریخته‌گری گریز از مرکز و جداسازی مغناطیسی اغلب دارای معایبی مانند هزینه بالا و پیچیدگی فرآیند هستند. به عنوان مثال در فرآیند تف‌جوشی^۲ که به عنوان یکی از روش‌های مناسب جهت تولید مواد مدرج تابعی شناخته می‌شود، به دلیل تفاوت زیاد در دمای انجماد اجزای تشکیل دهنده، بروز تخلخل^۳ یا حفره‌های میکروسکوپی درون ماده اجتناب ناپذیر است [۱]. به همین علت بررسی اثر تخلخل در تحلیل سازه‌های مدرج تابعی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. یکی از مزیت‌های بسیار مهم مواد مدرج تابعی متخلخل توانایی فوق العاده آن‌ها در جذب انرژی است. همچنین این نوع مواد به دلیل امکان کنترل خواص آنها بر حسب نوع کاربرد، به شدت مورد توجه قرار دارند [۲].

- 2 Sintering
- 3 Porosity

- 1 Functionally graded

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: vaghefireza@fasau.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس <https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode> دیدن فرمائید.



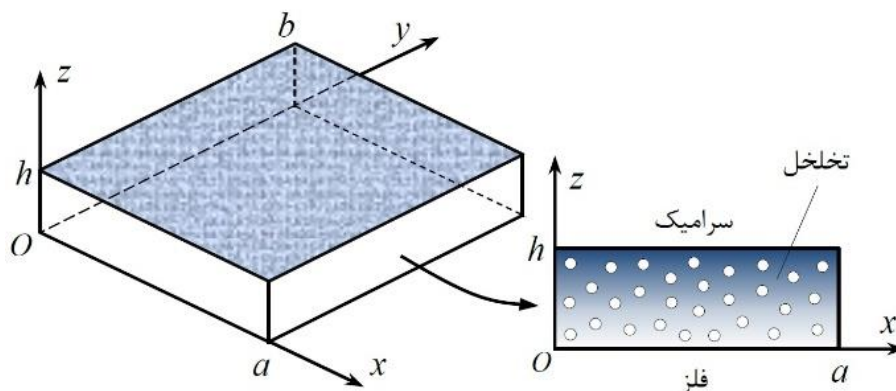
غیریکنواخت در مواد، اثر نسبت هسته به ضخامت، کسر حجمی تخلخل، شاخص تغییرات ماده^{۱۱} و تحریک خارجی بر نتایج بررسی شد. در سال ۲۰۲۲، ساح و قوش^{۱۲} [۱۲] اثر توزیع تخلخل بر تحلیل ارتعاشات آزاد و کماتش ورق‌های ساندویچی مدرج تابعی چند جهته را بر اساس تئوری تغییر شکل برشی سینوسی مطالعه کردند. آن‌ها علاوه بر توزیع تخلخل یکنواخت، سه نوع توزیع تخلخل غیریکنواخت در ماده شامل توزیع خطی، نمایی و سینوسی را در نظر گرفتند.

همانگونه که ذکر شد تئوری‌های دوبعدی مختلفی در تحلیل ورق‌ها همواره مورد توجه محققین بوده است. با این حال فرضیات در نظر گرفته شده در این تئوری‌ها ممکن است خطاهایی را در حل مساله وارد کند که با افزایش ضخامت ورق، افزایش خواهند یافت. این حقیقت که نتایج حاصل از تحلیل سه‌بعدی، به دلیل عدم وجود فرضیات ساده کننده، بینش فیزیکی عمیق‌تر و واقعی‌تری را، خصوصاً در برخورد با ورق‌های ضخیم، ارائه می‌دهد غیر قابل انکار است. ول و باترا^{۱۳} [۱۳] با استفاده از تئوری ترموالاستیسیته غیرکوپل، حل تحلیلی سه‌بعدی را برای مطالعه خمش ترمومکانیکی ورق‌های مدرج تابعی با تکیه‌گاه‌های ساده ارائه کردند. در سال ۲۰۱۰، حل دقیق سه‌بعدی ورق مدرج تابعی با لایه‌های پیزوالکتریک بر روی بستر الاستیک توسط علی‌بیگلو [۱۴] انجام شد. مزدهای و همکاران [۱۵] با استفاده از روش بدون المان پتروف-گالرکین محلی^{۱۴} حل سه‌بعدی استاتیکی و دینامیکی ورق‌های مدرج تابعی را بدست آوردند. پاسخ ترموالاستیک سه‌بعدی ورق‌های مدرج تابعی بر بستر الاستیک با استفاده از روش تربیع دیفرانسیل^{۱۵} توسط آدینه و کدخدایان [۱۶] ارائه شد. این مطالعه بر روی ورق‌های مورب^{۱۶} که برخی از خواص آن تابع دما است انجام شد. نیکبخت و همکاران [۱۷] پاسخ خمش سه بعدی ورق‌های مدرج تابعی را تا رسیدن به ناحیه تسلیم با استفاده از روش المان محدود لایه‌ای^{۱۶} ارائه کردند. یک رویکرد واقعاً بدون المان مبتنی بر روش درون‌یابی متحرک کریجینگ^{۱۷} برای تحلیل سه‌بعدی خمش ترمو-الاستوپلاستیک ورق‌های مدرج تابعی مورب تحت بارگذاری ترکیبی توسط واقفی [۱۸] ارائه شد. در این مقاله اثر پارامترهای مهمی از قبیل زاویه تورب^{۱۸} و شاخص تغییرات ماده بر روی نتایج مورد مطالعه قرار گرفتند. بررسی

در سال ۲۰۰۳ تحلیل ترموالاستیک ورق مدرج تابعی متخلخل دوبعدی به روش المان محدود^۱ توسط نعمت اله^۲ [۳] انجام شد. پس از آن در سال ۲۰۰۹، نعمت اله و همکاران [۴] رفتار الاستوپلاستیک مواد مدرج تابعی متخلخل را تحت بارگذاری حرارتی شدید بررسی کردند. در این مطالعه، ترکیبی از زیرکونیا (ZrO_2) و آلیاژ تیتانیوم ۴۷-۶Al-TI در بازه دمایی ۳۰۰ تا ۲۰۹۰ کلون استفاده شد. گائو و همکاران [۵] تحلیل ارتعاشات آزاد خطی و غیرخطی میکرو ورق‌های کامپوزیتی متخلخل تقویت شده با نانو تراشه‌های گرافنی بر روی بستر الاستیک را ارائه کردند. آن‌ها اثر کسر وزنی نانو تراشه‌های گرافنی، نسبت منظر و ضریب تخلخل را بر روی فرکانس طبیعی ورق مورد بررسی قرار دادند. زنکور^۲ [۶] تحلیل خمش ورق‌های متخلخل را به کمک نظریه تغییر شکل برشی شبه سه‌بعدی ارائه داد. در این مطالعه ورق‌های تک لایه و ساندویچی مدرج تابعی مورد بررسی قرار گرفتند. تحلیل ترموالاستیک دوبعدی ورق‌های متخلخل مدرج تابعی با خواص وابسته به دما به کمک روش حجم محدود توسط گونگ^۴ و همکاران [۷] انجام شد. سپس در سال ۲۰۲۰، یک نظریه تغییر شکل برشی مثلثاتی شبه سه‌بعدی برای تجزیه و تحلیل انتشار موج ورق‌های ساندویچی مدرج تابعی متخلخل بر بستر ویسکوالاستیک توسط لیانگ^۵ و ونگ [۸] پیشنهاد گردید. برای محاسبه برش عرضی و تغییر شکل‌های طولی در این روش، جابجایی عرضی به اجزای خمشی، برشی و کششی تقسیم شده است. ماشات^۶ و همکاران [۹] خمش ورق‌های مدرج تابعی متخلخل بر روی بستر الاستیک تحت بارهای رطوبتی-ترمومکانیکی را توسط تئوری ورق مرتبه بالا^۷ بررسی کردند. در این مطالعه اثرات کرنش‌های نرمال و برشی عرضی در نظر گرفته شده است. در سال ۲۰۲۱، تحلیل ارتعاشات ورق مدرج تابعی متخلخل با ضخامت متغیر بر روی بستر وینکلر-پسترنگ^۸ به کمک نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول توسط کومار^۹ و همکاران [۱۰] انجام شد. ارتعاشات اجباری غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی ساخته شده از مواد مدرج تابعی متخلخل بر روی یک بستر الاستیک توسط لیو^{۱۰} و همکاران [۱۱] مورد بررسی قرار گرفت. در این مطالعه ضمن در نظر گرفتن یک توزیع تخلخل

- 1 Finite element method
- 2 Nemat-Alla
- 3 Zenkour
- 4 Gong
- 5 Liang and Wang
- 6 Mashat
- 7 Higher-order plate theory
- 8 Winkler-Pasternak
- 9 Kumar
- 10 Liu

- 11 Material gradient index
- 12 Sah and Ghosh
- 13 Vel and Batra
- 14 Meshless local Petrov-Galerkin method
- 15 Differential quadrature method
- 16 Layer-wise
- 17 Moving Kriging interpolation method
- 18 Skew angle



شکل ۱. ورق مدرج تابعی متخلخل در دستگاه مختصات سه‌بعدی

Fig. 1. Porous FG plate in the 3D coordinate system

افزایش همگرایی و دقت نتایج در نتیجه‌ی کاهش وابستگی تابع تقریب به تابع هسته است [۲۰]. تا کنون از روش بازتولید نقطه با هسته پایه شعاعی برای حل چندین مساله از جمله مسائل الاستیک [۲۱]، الاستوپلاستیک [۲۰]، الاستودینامیک [۱۹] و غیره استفاده شده است. با این حال، تقریباً تمامی این مطالعات به تحلیل‌های دوبعدی محدود هستند. با توجه به دانش نویسنده، این اولین باری است که روش بازتولید نقطه با هسته پایه شعاعی برای تحلیل سه‌بعدی یک مساله ترمو-الاستوپلاستیک فرمول‌بندی شده و به کار گرفته می‌شود.

در مطالعه حاضر، یک مدل سه‌بعدی بدون المان مبتنی بر روش بازتولید نقطه با هسته پایه شعاعی به منظور تحلیل خمش ترمو-الاستوپلاستیک ورق‌های مدرج تابعی متخلخل با خواص وابسته به دما در معرض ترکیبی از بارهای مکانیکی و حرارتی ارائه شده است.

۲- توصیف مساله و خواص مواد

مطابق شکل ۱، یک ورق مدرج تابعی متخلخل مستطیلی به ابعاد $a \times b \times h$ در سیستم مختصات دکارتی x, y, z در نظر بگیرد. محور z در راستای ضخامت و صفحه x, y بر سطح پایینی ورق منطبق است. فرض بر این است که خواص ورق از فلز در سطح پایینی تا سرامیک در سطح بالایی تغییر می‌کند. کسر حجمی فلز توسط یک تابع توانی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V^m(z) = 1 - V_{max}^c \left(\frac{z}{h} \right)^n \quad (1)$$

مقالات این حوزه نشان می‌دهد که تاکنون تحلیل سه‌بعدی از تأثیر تخلخل بر خمش ترمو-الاستوپلاستیک ورق‌های مدرج تابعی با خواص وابسته به دما ارائه نشده است.

در سال‌های اخیر روش‌های بدون المان به عنوان یکی از قوی‌ترین روش‌های محاسباتی بخوبی توسعه یافته و در حل بسیاری از مسائل با موفقیت بکار رفته‌اند. از آنجاکه توابع تقریب در این روش‌ها تنها با استفاده از اطلاعات یک سری گره توزیع شده در دامنه مساله ایجاد می‌شوند، اثرات نامطلوب مش‌بندی در شبیه‌سازی‌های عددی کاهش یافته و یا حذف می‌گردند. از این‌رو روش‌های بدون المان نسبت به دیگر روش‌های عددی متداول مزایای قابل توجهی دارند که از جمله آنها می‌توان به فرآیند پیاده‌سازی عددی ساده، دقت محاسباتی بالا و پایداری خوب نتایج اشاره کرد. یکی از متداول‌ترین و پرکاربردترین این روش‌ها روش بازتولید نقطه با هسته^۱ است که مبتنی بر روش هیدرودینامیک ذرات هموار^۲ بسط یافته است. اگرچه توابع شکل ایجاد شده توسط این روش به اندازه کافی هموار هستند اما تأثیر توابع مختلف هسته بر دقت و پایداری نتایج از کاستی‌های آن محسوب می‌شود [۱۹]. به منظور کاستن از اثرات منفی توابع هسته^۳ و همچنین بهبود دقت و پایداری محاسبات، توابع پایه شعاعی^۴ با روش بازتولید نقطه با هسته ترکیب شده و روش جدیدی به نام روش بازتولید نقطه با هسته پایه شعاعی^۵ معرفی شده است. از مهمترین مزایای این روش

- 1 Reproducing Kernel Particle Method (RKPM)
- 2 Smooth particle hydrodynamics method
- 3 Kernel functions
- 4 Radial basis functions
- 5 Radial Basis Reproducing Kernel Particle Method (RRKPM)

جدول ۱. خواص وابسته به دمای اجزای ماده مدرج تابعی [۴]

Table 1. Temperature-dependent properties of FG material components [4]

| واحد | پارامتر جزء | جزء |
|-------------------|---|---------------------|
| GPa | $E^c(T) = -۸/۱ \times ۱۰^{-۶} T^2 - ۰/۰۵ T + ۱۳۲/۲$ | سرامیک: |
| - | $\nu^c = ۰/۳۳۳$ | (ZrO _۲) |
| ۱/ K | $\alpha^c(T) = ۱۲/۷ \times ۱۰^{-۱۲} T^2 - ۱۸/۹ \times ۱۰^{-۹} T + ۱۳/۳۱ \times ۱۰^{-۶}$ | |
| kg/m ^۳ | $\rho^c(T) = ۳۶۵۷ / \{1 + \alpha(T - ۳۰۰)\}^3$ | |
| W/mK | $\kappa^c(T) = ۰/۱۱۶ \times ۱۰^{-۶} T^2 + ۰/۲۱ \times ۱۰^{-۳} T + ۱/۷۱$ | |
| J/kgK | $c^c(T) = +۱/۷۱ \times ۱۰^{-۷} T^2 - ۶/۱۹ \times ۱۰^{-۴} T^2 + ۰/۷۹۵ T + ۲۷۴$ | |
| GPa | $E^m(T) = -۰/۰۵۶۵ T + ۱۲۲/۷$ | فلز: |
| - | $\nu^m(T) = ۳۲ \times ۱۰^{-۶} T + ۰/۲۸۹$ | (Ti-۶Al-۴V) |
| MPa | $\sigma_y^m(T) = ۲/۴۳۴ \times ۱۰^{-۸} T^2 + ۱/۶۰۷ \times ۱۰^{-۴} T^2 - ۱/۱۱ T + ۱۵۴۰/۹$ | |
| MPa | $H^m(T) = -۱/۱۵۲۹ T + ۲۳۰۶/۱۴$ | |
| ۱/ K | $\alpha^m(T) = -۲/۶۹ \times ۱۰^{-۱۲} T^2 + ۵/۵۶ \times ۱۰^{-۹} T + ۷/۴۳ \times ۱۰^{-۶}$ | |
| kg/m ^۳ | $\rho^m(T) = ۴۴۲۰ / \{1 + \alpha(T - ۳۰۰)\}^3$ | |
| W/mK | $\kappa^m(T) = ۰/۰۱۷ T + ۱/۱$ | |
| J/kgK | $c^m(T) = ۴/۴۳ \times ۱۰^{-۷} T^2 - ۹/۷۴ \times ۱۰^{-۴} T^2 + ۰/۸۷۸ T + ۳۵۰$ | |

که در آن حداکثر کسر حجمی سرامیک مربوط به سطح بالایی ($0 \leq V_{max}^c \leq 1$) و n شاخص تغییرات مواد در راستای ضخامت است ($n \geq 0$). در این مطالعه صفحه مدرج تابعی مخلوطی از زیرکونیا (ZrO_۲) و آلیاژ تیتانیوم Ti-۶Al-۴V در نظر گرفته شده و خواص وابسته به دمای آنها در جدول ۱ ارائه شده است.

با توجه به اینکه جزء سرامیکی همواره تغییر شکل الاستیک خود را حفظ می‌کند و در واقع تسلیم در جزء فلزی مواد مدرج تابعی رخ می‌دهد، روش‌های همگن‌سازی متنوعی برای توصیف رفتار غیرخطی و نیز تخمین خواص مؤثر مواد مدرج تابعی بکار می‌رود. یکی از ساده‌ترین و پرکاربردترین این روش‌ها، قانون آمیختگی اصلاح‌شده [۲۲] است که خواص مواد مؤثر یک ماده مرکب فلز-سرامیک را توسط کسر حجمی اجزای آن پیش‌بینی می‌کند. بر اساس این قانون مدول یانگ E_y^{eff} ، ضریب پواسون ν_y^{eff} ، تنش تسلیم σ_y^{eff} و مدول مماسی H_y^{eff} یک ماده مدرج تابعی غیرمتخلخل بصورت زیر بیان می‌شود:

$$E_0^{eff}(T, z) = \frac{A_E(T)E^m(T)V^m(z) + E^c(T)V^c(z)}{A_E(T)V^m(z) + V^c(z)} \quad (۲)$$

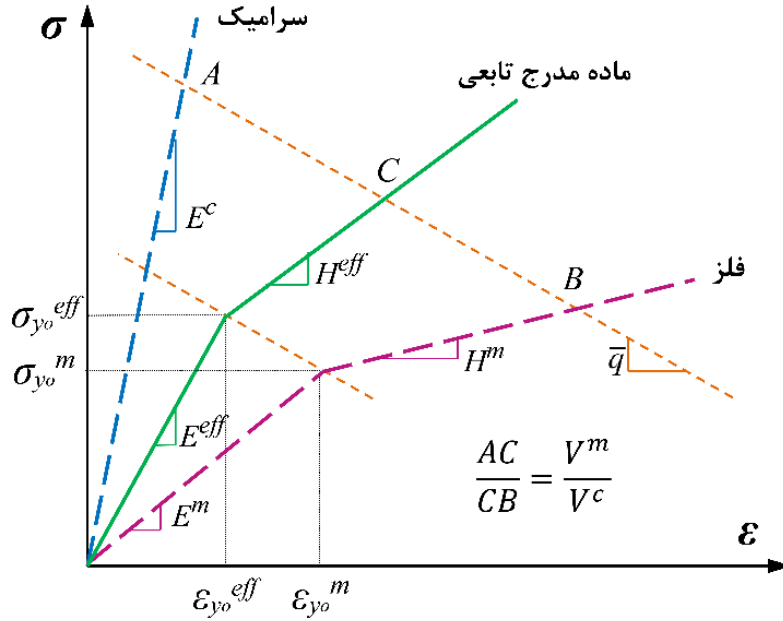
$$\nu_0^{eff}(T, z) = \nu^c(T)V^c(z) + \nu^m(T)V^m(z) \quad (۳)$$

$$\sigma_{y0}^{eff}(T, z) = \sigma_y^m(T) \left(\frac{E^c(T)}{A_E(T)E^m(T)} V^c(z) + V^m(z) \right) \quad (۴)$$

$$H_0^{eff}(T, z) = \frac{A_H(T)H^m(T)V^m(z) + E^c(T)V^c(z)}{A_H(T)V^m(z) + V^c(z)} \quad (۵)$$

$$A_E(T) = \frac{q + E^c(T)}{q + E^m(T)}, \quad A_H(T) = \frac{q + E^c(T)}{q + H^m(T)} \quad (۶)$$

- 1 Modified rule of mixtures
- 2 Tangent modulus



شکل ۲. نمایش شوماتیک قانون آمیختگی اصلاح شده برای تخمین منحنی تنش-کرنش مواد مدرج تابعی

Fig. 2. Schematic representation of the modified rule of mixtures for estimating the stress-strain curve of FG materials

$$\alpha_0^{eff}(T, z) = \alpha^m(T) + \frac{[1/K_0^{eff}(T, z) - 1/K^m(T)][\alpha^c(T) - \alpha^m(T)]}{1/K^c(T) - 1/K^m(T)} \quad (10)$$

که در آن K_0^{eff} مدول بالک مؤثر بوده و داریم

$$K_0^{eff}(T, z) = \frac{E_0^{eff}(T, z)}{\nu(1 - 2\nu_0^{eff}(T, z))}$$

خواص مؤثر ماده مدرج تابعی متخلخل بر اساس مدل دانه‌های کروی

معلق بصورت زیر محاسبه شده است [۲۳]:

$$E^{eff} = \frac{8E_0^{eff}(1-p)(1-\nu_0^{eff})(23+8\nu_0^{eff})}{8(1+\nu_0^{eff})(23+8\nu_0^{eff}) + p(5+\nu_0^{eff})(37-8\nu_0^{eff})} \quad (11)$$

$$E^{eff} = \frac{8E_0^{eff}(1-p)(1-\nu_0^{eff})(23+8\nu_0^{eff})}{8(1+\nu_0^{eff})(23+8\nu_0^{eff}) + p(5+\nu_0^{eff})(37-8\nu_0^{eff})} \quad (12)$$

$$\rho^{eff} = \rho_0^{eff}(1-p) + \rho_a p \quad (13)$$

بالانویس‌های m و c به ترتیب بیانگر جزء فلزی و سرامیکی و q

نسبت انتقال تنش به کرنش است ($0 \leq q \leq \infty$). به ازای $q = 0$ ، ماده مدرج

تابعی زمانی بصورت پلاستیک جریان می‌یابد که جزء فلزی آن تسلیم شود

[۲۳]. در اینجا q برابر ۵ GPa در نظر گرفته شده است. شکل ۲ بطور

شوماتیک منحنی تنش-کرنش مواد مدرج تابعی را بر اساس قانون آمیختگی

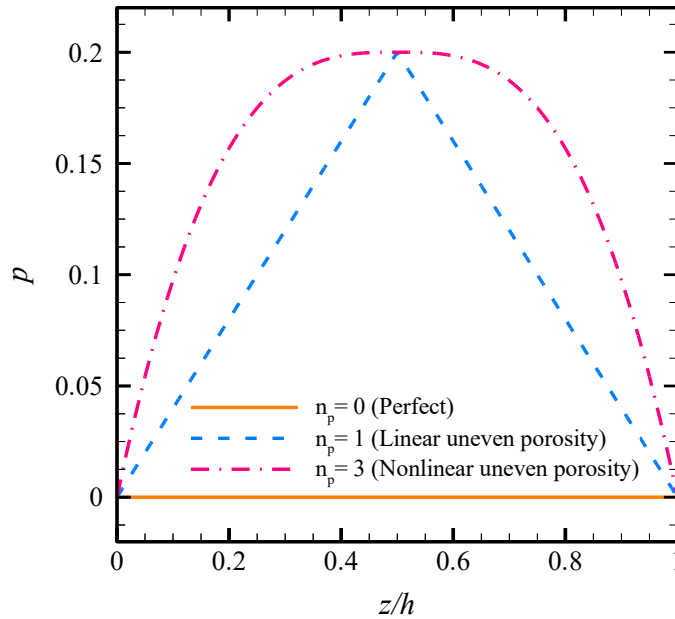
اصلاح شده نشان می‌دهد. هدایت حرارتی K_0^{eff} ، چگالی ρ_0^{eff} ، گرمای ویژه

c^{eff} و ضریب انبساط حرارتی α^{eff} به صورت بیان می‌شوند [۲۴]:

$$\kappa_0^{eff}(T, z) = \kappa^m(T) + \frac{(\kappa^c(T) - \kappa^m(T))V^c(z)}{1 + [(\kappa^c(T) - \kappa^m(T))/3\kappa^m(T)]V^m(z)} \quad (7)$$

$$\rho_0^{eff}(T, z) = \rho^m(T)V^m(z) + \rho^c(T)V^c(z) \quad (8)$$

$$c_0^{eff}(T, z) = \frac{1}{\rho_0^{eff}(T, z)} (c^c(T)\rho^c(T)V^c(z) + c^m(T)\rho^m(T)V^m(z)) \quad (9)$$



شکل ۳. تغییرات ضریب تخلخل در راستای ضخامت ورق به ازای مقادیر مختلف شاخص تغییرات تخلخل n_p ، ($p_0 = 0.2$)

Fig. 3. Variation of the porosity coefficient through the thickness of the plate for different values of the porosity gradient index n_p , ($p_0 = 0.2$)

نشان دهنده ماده غیرمتخلخل و $n_p = 1$ و $n_p > 1$ بترتیب بیانگر توزیع تخلخل ناهمگن خطی^۲ و غیرخطی^۳ در ماده می‌باشند.

در این مطالعه فرض شده است که ورق در ابتدا در دمای یکنواخت ۳۰۰ کلوین بوده و کاملاً بدون تنش است. سپس سطح بالایی ورق در معرض ترکیبی از بارهای حرارتی و مکانیکی قرار می‌گیرد. بار حرارتی به صورت شار سینوسی Q با شدت q بصورت زیر بیان می‌شود:

$$p = p_0 \left[1 - \left| \frac{z - 0.5h}{0.5h} \right|^{n_p} \right] \quad (17)$$

بار مکانیکی گسترده یکنواخت نیز بشرح زیر اعمال می‌شود:

$$Q(x, y, h, t) = q \sin(\pi x / a) \sin(\pi y / b) \quad (18)$$

$$c^{eff} = c_0^{eff} (1 - p) + c_a p \quad (14)$$

$$c^{eff} = c_0^{eff} (1 - p) + c_a p \quad (15)$$

که در آن p ضریب تخلخل و ρ_a ، κ_a و c_a بترتیب هدایت حرارتی، چگالی و گرمای ویژه هوا هستند. برای حالت توزیع تخلخل ناهمگن^۱، p از رابطه زیر بدست آمده است [۲۵]:

$$v^{eff} = v_0^{eff}, \quad \alpha^{eff} = \alpha_0^{eff}, \quad \sigma_y^{eff} = \sigma_{y0}^{eff} \quad (16)$$

که در آن p ضریب ثابت و n_p شاخص تغییرات تخلخل است ($n_p \geq 0$). در شکل ۳ توزیع تخلخل در راستای ضخامت ورق به ازای $p_0 = 0.2$ و مقادیر مختلف n_p نشان داده شده است. مطابق شکل،

-
- 2 Linear uneven porosity distribution
 - 3 Nonlinear uneven porosity distribution

-
- 1 Uneven porosity distribution

$$d\sigma_{ij,j} + db_i = 0 \quad (26)$$

همچنین شرایط مرزی گیردار (C)، ساده (S) و آزاد (F) در لبه‌های جانبی ورق بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$dt_i = d\sigma_{ij} n_j = d\bar{t}_i \quad \text{روی مرز } \Gamma_t \quad (27)$$

$$Q(x, y, h, t) = q \sin(\pi x / a) \sin(\pi y / b) \quad (19)$$

$$du_i = d\bar{u}_i \quad \text{روی مرز } \Gamma_u \quad (28)$$

$$C: u = v = w = 0 \text{ on } x = 0, a \text{ and } y = 0, b \quad (20)$$

۳-۲- معادلات حاکمه مکانیکی

فرم عمومی معادلات حاکمه تعادل مکانیکی و شرایط مرزی آن برای دامنه Ω با مرز Γ بصورت زیر بیان می‌شود:

$$S: \begin{cases} \sigma_{xx} = 0, v = w = 0 \text{ on } x = 0, a \\ \sigma_{yy} = 0, u = w = 0 \text{ on } y = 0, b \end{cases} \quad (21)$$

که در آن du_i ، $d\sigma_{ij}$ ، dt_i و db_i به ترتیب بیانگر مؤلفه‌های بردار نمو جابجایی، تنش، ترکشن سطح و نیروی حجمی هستند. همچنین $d\bar{t}_i$ و $d\bar{u}_i$ به ترتیب نمو جابجایی و تنش سطحی معین بر روی مرزهای Γ_t و Γ_u را نشان می‌دهند. بنابر تئوری پلاستیسیته نمودی^۱، بردار نمو کرنش کل $\{d\epsilon\}$ ، که مؤلفه‌های آن بصورت $d\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(du_{i,j} + du_{j,i})$ ، حرارتی $\{d\epsilon^{e,th}\}$ ، پلاستیک $\{d\epsilon^p\}$ و بخش ناشی از خواص وابسته به دما $\{d\epsilon^{a,th}\}$ تفکیک گردد [۲۶]:

۳-۱- معادلات حاکمه حرارتی

معادله هدایت حرارت زمانمند در دامنه Ω که با مرز Γ احاطه شده است، زمانی که خواص ماده به مختصات نقطه $\mathbf{x} = (x, y, z)$ و دما وابسته است، در غیاب منبع گرما، بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\{d\epsilon\} = \{d\epsilon^e\} + \{d\epsilon^{e,th}\} + \{d\epsilon^p\} + \{d\epsilon^{a,th}\} \quad (29)$$

$$c(\mathbf{x}, T) \nabla T(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, T) c(\mathbf{x}, T) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (22)$$

شرایط اولیه و مرزی مساله به شرح زیر می‌باشد:

$$\{d\epsilon^{e,th}\} = \{\alpha\} dT, \{d\epsilon^{a,th}\} = \left(\frac{\partial [D^e]^{-1}}{\partial T} \right) \{\sigma\} dT, \{d\epsilon^p\} = d\lambda \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} = d\lambda \{\sigma'\} \quad (30)$$

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}) \quad \text{روی دامنه } \Omega \quad (23)$$

که در آن $\{\alpha\}$ ، $[D^e]$ ، $d\lambda$ و $\{\sigma'\}$ بترتیب بردار ضریب انبساط حرارتی، ماتریس سختی الاستیک، ضریب پلاستیک و تانسور تنش انحرافی هستند. برای تعیین نمو کرنش پلاستیک از مدل پراوندتل-رویس^۲ که بر مبنای قانون جریان همراه^۳ شکل گرفته است در ترکیب با تابع تسلیم فون میز^۴ ($F = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} - \frac{1}{2} \sigma_y^2$) استفاده شده است. برای حالت کرنش سختی همسانگرد وابسته به دما^۵، تابع تسلیم بصورت $\sigma_y = \sigma_{y_0}(T) + H(T) \bar{\epsilon}^p$

$$T(\mathbf{x}, t) = \bar{T}(\mathbf{x}, t) \quad \text{روی مرز } \Gamma_T \quad (24)$$

$$q(\mathbf{x}, t) = -\kappa(\mathbf{x}, T) \frac{\partial T}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = \bar{q}(\mathbf{x}, t) \quad \text{روی مرز } \Gamma_q \quad (25)$$

که T بیانگر دمای اولیه و \bar{T} و \bar{q} به ترتیب دما و شار حرارتی معین بر روی مرزهای Γ_T و Γ_q را نشان می‌دهند. همچنین n بردار بیکه عمود بر Γ_q به سمت خارج است.

- 1 Incremental plasticity
- 2 Prandtl-Reuss model
- 3 Associated flow rule
- 4 von-Mises yield function
- 5 Temperature-dependent isotropic strain hardening

$$f^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^N R_k(\mathbf{x}) a_k(t) + \sum_{l=1}^m g_l(\mathbf{x}) b_l(t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_x \quad (36)$$

که در آن $R_k(\mathbf{x})$ تابع بازتولید هسته‌ای، $g_l(\mathbf{x})$ تابع پایه شعاعی و a_k و b_l ضرایب مجهول هستند. همچنین N تعداد گره‌های توزیع شده در زیردامنه Ω_x و m تعداد توابع پایه شعاعی است. تابع $R_k(\mathbf{x})$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_k(\mathbf{x}) = \mathbf{s}_k^T(\mathbf{x}) \mathbf{p}_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) w_k(\mathbf{x}) R_k(\mathbf{x}_k) \Delta V_k \quad (37)$$

که در آن $w_k(\mathbf{x})$ تابع هسته، ΔV_k حجم دامنه پشتیبان گره k و $\mathbf{s}_k^T(\mathbf{x})$ بردار ضرایب است که توسط شرایط بازتولید تقریب هسته تعیین می‌شود. بردار پایه چندجمله‌ای $\mathbf{p}_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$ را می‌توان برای حالت سه‌بعدی بصورت زیر بیان کرد:

$$\mathbf{p}_k^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) = \{1, x - x_k, y - y_k, z - z_k, (x - x_k)^2, (y - y_k)^2, (z - z_k)^2, (x - x_k)(y - y_k), (y - y_k)(z - z_k), (z - z_k)(x - x_k)\} \quad (38)$$

تابع هسته به صورت زیر در نظر گرفته شده است [۱۹]:

$$w_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} 2/3 - 4\bar{r}_k^2 + 4\bar{r}_k^3 & \bar{r}_k \leq 1/2 \\ 4/3 - 4\bar{r}_k + 4\bar{r}_k^2 - \frac{4}{3}\bar{r}_k^3 & 1/2 < \bar{r}_k \leq 1 \\ 0 & \bar{r}_k > 1 \end{cases} \quad (39)$$

که در آن $\bar{r}_k = d_k / r_k$ و $d_k = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|$ می‌باشد. در این مطالعه از زیردامنه پشتیبان کروی به شعاع r_k اطراف هر گره استفاده شده است و داریم: $r_k = \alpha_i \bar{d}_k$; α_i ضریب مقیاس و \bar{d}_k میانگین d_k را نشان می‌دهد. در رابطه (۳۶)، $g_l(\mathbf{x})$ بصورت زیر در نظر گرفته شد ه است [۲۰ و ۲۱]:

$$g_l(\mathbf{x}) = \left(6 + 36 \frac{d_l}{\delta} + 82 \left(\frac{d_l}{\delta} \right)^2 + 72 \left(\frac{d_l}{\delta} \right)^3 + 30 \left(\frac{d_l}{\delta} \right)^4 + 5 \left(\frac{d_l}{\delta} \right)^5 \right) \left(1 - \frac{d_l}{\delta} \right)^6 \quad (40)$$

بیان می‌شود، که در آن σ_y ، H و $\bar{\varepsilon}^p$ به ترتیب تنش تسلیم اولیه، پارامتر ضریب کرنش سختی و کرنش پلاستیک معادل هستند. ضریب پلاستیک را می‌توان با اعمال شرط تطابق $(dF(T, \{\boldsymbol{\sigma}\}, K) = 0)$ بدست آورد:

$$\{d\boldsymbol{\varepsilon}^{th}\} = \{\mathbf{a}\} dT, \{d\boldsymbol{\varepsilon}^{ep}\} = \left(\frac{\partial [\mathbf{D}^e]^{-1}}{\partial T} \right) \{\boldsymbol{\sigma}\} dT, \{d\boldsymbol{\varepsilon}^p\} = d\lambda \left\{ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} = d\lambda \{\boldsymbol{\sigma}'\} \quad (31)$$

$$A = \{\boldsymbol{\sigma}'\}^T [\mathbf{D}^e] \{\boldsymbol{\sigma}'\} - \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{\partial K} \left\{ \frac{\partial K}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \right\}^T \{\boldsymbol{\sigma}'\} \quad (32)$$

که در آن $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ تنش معادل و K ضریب کارسختی^۲ می‌باشد که نمو آن بصورت $dK = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$ در نظر گرفته شده است. اکنون معادلات متشکله ترمو-الاستوپلاستیک نمودی را می‌توان با استفاده از روابط (۲۹) تا (۳۱) بصورت زیر استخراج کرد:

$$\{d\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}^{ep}] (\{d\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{d\boldsymbol{\varepsilon}^{th-ep}\}) \quad (33)$$

$$[\mathbf{D}^{ep}] = [\mathbf{D}^e] - \frac{1}{A} [\mathbf{D}^e] \{\boldsymbol{\sigma}'\} \{\boldsymbol{\sigma}'\}^T [\mathbf{D}^e] \quad (34)$$

$$\{d\boldsymbol{\varepsilon}^{th-ep}\} = \{d\boldsymbol{\varepsilon}^{th}\} + \{d\boldsymbol{\varepsilon}^{ep}\} + \frac{1}{A} [\mathbf{D}^{ep}]^{-1} [\mathbf{D}^e] \{\boldsymbol{\sigma}'\} \frac{\partial F}{\partial T} dT \quad (35)$$

که در آن $[\mathbf{D}^{ep}]$ ماتریس سختی الاستوپلاستیک و $\{d\boldsymbol{\varepsilon}^{th-ep}\}$ بردار نمو کرنش ترمو-الاستوپلاستیک کل است.

۴- پیاده‌سازی روش بازتولید نقطه با هسته پایه شعاعی برای مساله ترمو-الاستوپلاستیسیته سه‌بعدی

۴-۱- توابع شکل روش بازتولید نقطه با هسته پایه شعاعی

تابع تقریب $f^h(\mathbf{x}, t)$ که می‌تواند مؤلفه‌های بردار جابجایی یا دما باشد، در هر نقطه \mathbf{x} بر اساس ترکیب خطی تابع بازتولید هسته‌ای^۳ و تابع پایه شعاعی به شرح زیر ساخته می‌شود [۲۱]:

- 1 Consistency condition
- 2 Work hardening
- 3 Reproducing kernel function

۴-۲- گسسته‌سازی معادلات حرارتی

فرم ضعیف محلی معادله (۲۱) بر روی یک زیردامنه محلی Ω'_s اطراف گره I بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_{\Omega'_s} v_I (\rho(\mathbf{x}, T) c(\mathbf{x}, T) \dot{T}(\mathbf{x}, t) - [\kappa(\mathbf{x}, T) T_{,i}(\mathbf{x}, t)]_{,i}) d\Omega + \alpha \int_{\Gamma'_{st}} v_I (T(\mathbf{x}, t) - \bar{T}) d\Gamma = 0 \quad (47)$$

که در آن v_I تابع وزن و α ضریب جرمه جهت ارضاء شرایط مرزی اساسی است ($\alpha \gg 1$). Γ'_{st} قسمتی از مرز $\Gamma'_s = \partial\Omega'_s$ می‌باشد که شرایط مرزی اساسی بر روی آن معین است. با انتگرال‌گیری جزء به جزء و نیز اعمال قضیه دیورژانس و شرایط مرزی طبیعی داریم:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega'_s} v_I \rho(\mathbf{x}, T) c(\mathbf{x}, T) \dot{T}(\mathbf{x}, t) d\Omega + \\ & \int_{\Omega'_s} v_{I,i} \kappa(\mathbf{x}, T) T_{,i}(\mathbf{x}, t) d\Omega - \\ & \int_{\Gamma'_{st}} v_I \kappa(\mathbf{x}, T) T_{,i}(\mathbf{x}, t) n_i d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma'_{st}} v_I \kappa(\mathbf{x}, T) T_{,i}(\mathbf{x}, t) n_i d\Gamma + \\ & \alpha \int_{\Gamma'_{st}} v_I T(\mathbf{x}, t) d\Gamma = \\ & - \int_{\Gamma'_{sq}} v_I \bar{q} d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma'_{st}} v_I \bar{T} d\Gamma \end{aligned} \quad (48)$$

که در آن Γ'_{st} قسمتی از Γ'_s داخل Ω'_s است و Γ'_{sq} قسمتی از Γ'_s است که شرایط مرزی طبیعی روی آن معین می‌باشد. میدان دما را می‌توان بر اساس رابطه (۴۵) بصورت زیر بیان کرد:

$$T^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^N \phi_j(\mathbf{x}) T_j(t) \quad (49)$$

که در آن $T_j(t)$ دمای گره J است. با جایگذاری رابطه (۴۹) در (۴۸)، سیستم معادلات هدایت حرارت زمانمند غیرخطی بدست می‌آید:

$$\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{x}, T) \dot{\mathbf{T}}(t) + \hat{\mathbf{K}}(\mathbf{x}, T) \mathbf{T}(t) = \hat{\mathbf{q}} \quad (50)$$

که در آن $d_I = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|$ و δ پارامتر شکل است. قیود زیر باید برای دستیابی به یک تابع تقریب منحصر به فرد اعمال شوند:

$$\sum_{k=1}^N g_I(\mathbf{x}_k) a_k(t) = 0 \quad (41)$$

اعمال رابطه (۳۶) به تمام گره‌های توزیع شده در Ω_x ، برای تعیین ضرایب a_k و b_l ، منجر به تشکیل N معادله خطی زیر می‌شود:

$$f(\mathbf{x}_j, t) = \sum_{k=1}^N R_k(\mathbf{x}_j) a_k(t) + \sum_{l=1}^m g_l(\mathbf{x}_j) b_l(t), \quad (j=1, 2, \dots, N) \quad (42)$$

با ترکیب معادلات (۴۱) و (۴۲) داریم:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{f}} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (43)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}} &= \{f_1, f_2, \dots, f_N\}^T, \quad \hat{\mathbf{R}} = [R(\mathbf{x}_1), R(\mathbf{x}_2), \dots, R(\mathbf{x}_N)]_{(N \times N)}^T, \\ \mathbf{G} &= [g(\mathbf{x}_1), g(\mathbf{x}_2), \dots, g(\mathbf{x}_N)]_{(m \times N)}^T \end{aligned} \quad (44)$$

با حل معادله (۴۳) و تعیین ضرایب مجهول، تابع تقریب مساله بصورت زیر قابل بیان است:

$$f^h(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{f}} = \sum_{l=1}^m \phi_l(\mathbf{x}) f_l(t) \quad (45)$$

بنابراین بردار توابع شکل بصورت زیر است:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \{\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, \phi_N(\mathbf{x})\} \quad (46)$$

بطوریکه

$$\Delta u^h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{u}(t) = \sum_{J=1}^N \phi_J(\mathbf{x}) \Delta u_J(t) \quad (56)$$

$$\hat{C}_U = \int_{\Omega_s^t} \rho(\mathbf{x}, T) c(\mathbf{x}, T) \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) d\Omega \quad (51)$$

$$\Delta u^h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{u}(t) = \sum_{J=1}^N \phi_J(\mathbf{x}) \Delta u_J(t) \quad (57)$$

$$\hat{K}_U = \int_{\Omega_s^t} \kappa(\mathbf{x}, T) \phi_{i,i}(\mathbf{x}) \phi_{j,i}(\mathbf{x}) d\Omega - \int_{\Gamma_{st}^t} \kappa(\mathbf{x}, T) \phi_i(\mathbf{x}) \phi_{j,i}(\mathbf{x}) n_i d\Gamma - \int_{\Gamma_{st}^t} \kappa(\mathbf{x}, T) \phi_i(\mathbf{x}) \phi_{j,i}(\mathbf{x}) n_i d\Gamma + \tilde{\alpha} \int_{\Gamma_{st}^t} \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (52)$$

که در آن نمو جابجایی گره J است و \mathbf{B}_J بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{B}_J = \begin{bmatrix} \phi_{J,x} & 0 & 0 & \phi_{J,y} & 0 & \phi_{J,z} \\ 0 & \phi_{J,y} & 0 & \phi_{J,x} & \phi_{J,z} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{J,z} & 0 & \phi_{J,y} & \phi_{J,x} \end{bmatrix}^T \quad (58)$$

$$\hat{q}_I = - \int_{\Gamma_{sq}^t} \bar{q} \phi_I(\mathbf{x}) d\Gamma + \tilde{\alpha} \int_{\Gamma_{st}^t} \bar{T} \phi_I(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (53)$$

با جایگذاری رابطه (۵۷) در (۵۵)، سیستم معادلات ترمو-الاستوپلاستیک نموی گسسته بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$\sum_{J=1}^M \mathbf{K}_{IJ} \Delta \mathbf{u}_J = \Delta \mathbf{f}_I, \quad (I=1, 2, \dots, M) \quad (59)$$

در رابطه (۵۰)، $\hat{\mathbf{C}}$ و $\hat{\mathbf{K}}$ به ترتیب ماتریس‌های سختی و میرایی و $\hat{\mathbf{q}}$ بردار نیرو است. برای حل معادله (۵۰) از روش تکرار در هر گام زمانی استفاده شده و گسسته‌سازی دامنه زمانی توسط روش کرانک-نیکلسون [۲۷] انجام می‌شود.

۳-۴ گسسته‌سازی معادلات مکانیکی

فرم ضعیف محلی برای رابطه (۲۵) بر روی زیردامنه Ω_s^t بصورت بیان می‌شود:

$$\mathbf{K}_U = \int_{\Omega_s^t} \mathbf{B}_I \mathbf{D}^{ep} \mathbf{B}_J d\Omega - \int_{\Gamma_{st}^t} \mathbf{\Phi}_I \mathbf{N} \mathbf{D}^{ep} \mathbf{B}_J d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}^t} \mathbf{\Phi}_I \mathbf{N} \mathbf{D}^{ep} \mathbf{B}_J d\Gamma + \tilde{\alpha} \int_{\Gamma_{su}^t} \mathbf{\Phi}_I \mathbf{\Phi}_J d\Gamma \quad (60)$$

$$\int_{\Omega_s^t} v_I (\Delta \sigma_{ij,j} + \Delta b_i) d\Omega_s + \tilde{\alpha} \int_{\Gamma_{su}^t} v_I (\Delta u_i - \Delta \bar{u}_i) d\Gamma = 0 \quad (54)$$

$$\Delta \mathbf{f}_I = \int_{\Omega_s^t} \mathbf{B}_I \mathbf{D}^{ep} \Delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th-ep} d\Omega - \int_{\Gamma_{st}^t} \mathbf{\Phi}_I \mathbf{N} \mathbf{D}^{ep} \Delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th-ep} d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}^t} \mathbf{\Phi}_I \mathbf{N} \mathbf{D}^{ep} \Delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th-ep} d\Gamma + \int_{\Omega_s^t} \mathbf{\Phi}_I \Delta \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_{st}^t} \mathbf{\Phi}_I \Delta \bar{\mathbf{f}} d\Gamma + \tilde{\alpha} \int_{\Gamma_{su}^t} \mathbf{\Phi}_I \Delta \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (61)$$

که در آن Γ_{su}^t بخشی از مرز Γ_s^t می‌باشد که شرایط مرزی اساسی روی آن معین است. با انتگرال‌گیری جزء به جزء و نیز اعمال قضیه دیورژانس و شرایط مرزی طبیعی خواهیم داشت:

که در آن \mathbf{K} و $\Delta \mathbf{f}$ بترتیب ماتریس سختی الاستوپلاستیک و بردار نمو نیرو بوده و M تعداد کل گره‌ها است.

$$\int_{\Omega_s^t} v_{I,j} \Delta \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_{st}^t} v_I \Delta \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}^t} v_I \Delta \sigma_{ij} n_j d\Gamma + \tilde{\alpha} \int_{\Gamma_{su}^t} v_I \Delta u_i d\Gamma = \int_{\Omega_s^t} v_I \Delta b_i d\Omega + \int_{\Gamma_{st}^t} v_I \Delta \bar{f}_i d\Gamma + \tilde{\alpha} \int_{\Gamma_{su}^t} v_I \Delta \bar{u}_i d\Gamma \quad (55)$$

به طوری که Γ_{st}^t قسمتی از Γ_s^t است که شرایط مرزی طبیعی روی آن معین می‌باشد. با توجه به روابط (۳۳) و (۴۵)، نمو میدان‌های جابجایی و تنش بصورت زیر بیان می‌شوند:

۵- نتایج عددی
در این بخش پیش از حل مساله توسط مدل پیشنهادی، ابتدا همگرایی، دقت و کارایی آن از طریق مقایسه نتایج بدست آمده با نتایج حاصل از روش‌های تحلیلی و عددی موجود در مراجع دیگر اثبات می‌گردد.

1 Crank-Nicholson method

جدول ۲. همگرایی نتایج خیز بی‌بعد برای ورق مربعی SSSS مدرج تابعی (Al/Al₂O₃)

Table 2. Convergence of dimensionless deflection of SSSS FG square plate (Al/Al₂O₃)

| مرجع [۱۷] | خطای نسبی (%) | RRKPM | آرایش گرهی |
|-----------|---------------|---------|------------|
| ۱/۱۸۵۰۱ | ۲/۲۶۰۴ | ۱/۲۱۱۷۹ | ۷×۷×۷ |
| | ۰/۹۲۶۸ | ۱/۱۹۵۹۹ | ۹×۹×۹ |
| | ۰/۳۴۹۲ | ۱/۱۸۹۱۵ | ۱۱×۱۱×۱۱ |
| | ۰/۳۲۱۵ | ۱/۱۸۸۸۱ | ۱۳×۱۳×۱۳ |
| | ۰/۳۰۹۸ | ۱/۱۸۸۶۸ | ۱۵×۱۵×۱۵ |

جدول ۳. همگرایی نتایج خیز بی‌بعد برای ورق مربعی SSSS مدرج تابعی (Al/Al₂O₃) به ازای مقادیر مختلف

Table 3. Convergence of dimensionless deflection of SSSS FG square plate (Al/Al₂O₃) for different values of

| مرجع [۱۷] | خطای نسبی (%) | RRKPM | δ |
|-----------|---------------|---------|-----|
| ۱/۱۸۵۰۱ | ۰/۸۲۳۶ | ۱/۱۹۴۷۷ | ۲/۲ |
| | ۰/۶۰۲۴ | ۱/۱۹۲۱۵ | ۲/۳ |
| | ۰/۴۷۳۶ | ۱/۱۹۰۶۲ | ۲/۴ |
| | ۰/۳۴۹۲ | ۱/۱۸۹۱۵ | ۲/۵ |
| | ۰/۳۸۰۵ | ۱/۱۸۹۵۲ | ۲/۶ |
| | ۰/۵۲۴۳ | ۱/۱۹۱۲۲ | ۲/۷ |
| | ۰/۶۳۷۰ | ۱/۱۹۲۵۶ | ۲/۸ |

با حل مرجع [۱۷] تطبیق یافته است. جدول ۳ نیز همگرایی نتایج خیز بی‌بعد \bar{w} ورق مربعی مدرج تابعی را به ازای $h/a = 0.1$ ، $n = 2$ و مقادیر مختلف پارامتر شکل δ نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که بهترین مطابقت با حل مرجع [۱۷] به ازای $\delta = 2/5$ حاصل شده است. بنابراین در تمام تحلیل‌های پیش رو از توزیع گرهی $11 \times 11 \times 11$ و $\delta = 2/5$ استفاده شده است. جدول ۴ خیز بی‌بعد \bar{w} و تنش‌های بی‌بعد ($\bar{\sigma}_{ij} = h\sigma_{ij}/pa$) را به ازای $h/a = 0.1$ و مقادیر مختلف n ارائه می‌دهد. در این جدول نتایج بدست آمده با نتایج المان محدود لایه‌ای سه‌بعدی [۱۷] و نیز نتایج تئوری تغییر شکل برش ی سینوسی^۱ [۲۸] مقایسه شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود به ازای تمام مقادیر n ، نتایج روش حاضر با نتایج سایر روش‌ها مطابقت کامل دارد.

۵-۱- مطالعه پارامتری و اعتبارسنجی مدل

جهت انجام مطالعات پارامتری و تأیید صحت نتایج روش حاضر، در این بخش پاسخ خمش الاستیک سه‌بعدی یک ورق مربعی مدرج تابعی با تکیه‌گاه ساده (SSSS) تحت بارگذاری گسترده یکنواخت $\sigma_{zz}(x, y, h) = p$ ارائه و با نتایج مراجع دیگر مقایسه شده است. مدول یانگ برای آلومینیوم GPa70 و برای آلومینا (Al₂O₃)، GPa380 در نظر گرفته شده، در حالیکه نسبت پواسون ثابت و برابر با 0.3 است. جزئیات بیشتر را می‌توان در مرجع [۱۷] یافت. در جدول ۲ خیز بی‌بعد ($\bar{w} = 10E^c h^2 w / pa^4$) ورق مربعی برای پنج نوع مختلف آرایش گرهی به ازای $h/a = 0.1$ ، $n = 2$ ، $\alpha_i = 3$ و $\delta = 2/5$ در مقایسه با نتایج المان محدود لایه‌ای سه‌بعدی [۱۷] نشان داده شده است. می‌توان ملاحظه کرد که نتایج بدست آمده با آرایش گرهی $11 \times 11 \times 11$ (گره ۱۳۳۱) به خوبی

1 Sinusoidal shear deformation theory

جدول ۴. نتایج بی‌بعد خیز و تنش برای ورق مربعی SSSS مدرج تابعی (Al/Al₂O₃)

Table 4. Dimensionless deflection and stress results for SSSS FG square plate (Al/Al₂O₃)

| $\bar{\sigma}_{xz}(\frac{a}{r}, \frac{a}{r}, \frac{h}{r})$ | $\bar{\sigma}_{yy}(\frac{a}{r}, \frac{a}{r}, \frac{h}{r})$ | $\bar{\sigma}_{xx}(\frac{a}{r}, \frac{a}{r}, h)$ | $\bar{w}(\frac{a}{r}, \frac{a}{r}, \frac{h}{r})$ | روش | n |
|--|--|--|--|------------|----|
| ۰/۵۰۴۶۸ | ۲/۱۶۹۰۹ | ۴/۵۰۲۶ | ۰/۹۲۴۶۲ | حاضر RRKPM | ۱ |
| ۰/۴۹۷۵۶ | ۲/۱۵۹۰۴ | ۴/۵۰۶۷ | ۰/۹۲۰۲۹ | مرجع [۱۷] | |
| ۰/۵۱۱۴ | ۲/۱۹۶۲ | ۴/۴۷۴۵ | ۰/۹۲۸۷ | مرجع [۲۸] | |
| ۰/۴۶۹۰۱ | ۲/۰۲۵۶۴ | ۵/۲۴۸۵۲ | ۱/۱۸۹۱۵ | حاضر RRKPM | ۲ |
| ۰/۴۶۷۱۰ | ۲/۰۱۳۸۸ | ۵/۲۶۵۶۴ | ۱/۱۸۵۰۱ | مرجع [۱۷] | |
| ۰/۴۷۰۰ | ۲/۰۳۳۸ | ۵/۲۲۹۶ | ۱/۱۹۴۰ | مرجع [۲۸] | |
| ۰/۴۶۰۳۴ | ۱/۲۷۲۱ | ۷/۳۰۶۴ | ۱/۵۸۰۵۳ | حاضر RRKPM | ۱۰ |
| ۰/۴۵۱۴۹ | ۱/۲۵۸۶ | ۷/۲۲۶۲ | ۱/۵۷۵۲۷ | مرجع [۱۷] | |
| ۰/۴۵۵۲ | ۱/۲۸۲۰ | ۷/۳۶۸۹ | ۱/۵۸۷۶ | مرجع [۲۸] | |

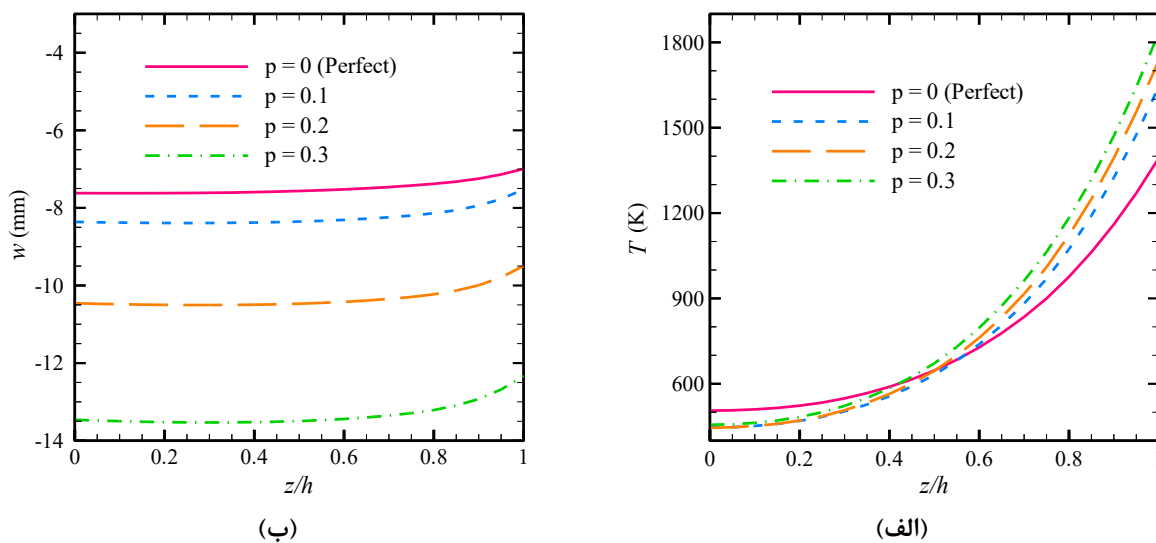
شکل ۵-الف توزیع تنش نرمال σ_{xx} در راستای ضخامت ورق مدرج تابعی متخلخل با شرایط تکیه‌گاهی SSSS نمایش می‌دهد. مشاهده می‌شود که به دلیل تغییر در خواص ورق، سطح خنثی بر صفحه میانی آن منطبق نیست. همچنین با افزایش ضریب تخلخل p ، از میزان تنش σ_{xx} در سطح بالایی ورق کاسته می‌شود. تغییرات تنش نرمال σ_{zz} در راستای ضخامت ورق مدرج تابعی متخلخل در شکل ۵-ب ارائه شده است. با توجه به شکل ۵-ب ملاحظه می‌شود که به ازای تمام مقادیر ضریب تخلخل، اندازه تنش σ_{zz} در سطوح بالایی و پایینی ورق بترتیب ۲۰ مگاپاسکال و صفر است؛ با توجه به شرایط مرزی اعمال شده بر روی این دو سطح، مقادیر مذکور بار دیگر دقت بالای نتایج حاصل از روش حاضر را تأیید می‌کند.

اثر ضریب تخلخل بر منحنی تنش-کرنش معادل ($\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}$) ورق مربعی مدرج تابعی SSSS در شکل ۶-الف نشان داده شده است. چنانکه مشاهده می‌شود افزایش مقدار p منجر به کاهش سطح تنش معادل و افزایش میزان کرنش معادل می‌گردد. همچنین با توجه به در نظر گرفتن خواص وابسته به دما برای ورق، ملاحظه می‌شود که نمودار تنش-کرنش حتی در ناحیه الاستیک نیز غیرخطی است. در شکل ۶-ب تغییرات کرنش پلاستیک معادل بر حسب زمان ($\bar{\epsilon}^p - t$) رسم شده است. با توجه به شکل افزایش ضریب تخلخل باعث می‌شود بر مقدار $\bar{\epsilon}^p$ در زمان کوتاه‌تری افزوده شود.

۵-۲- خمش ترمو-الاستوپلاستیک سه‌بعدی ورق مدرج تابعی متخلخل

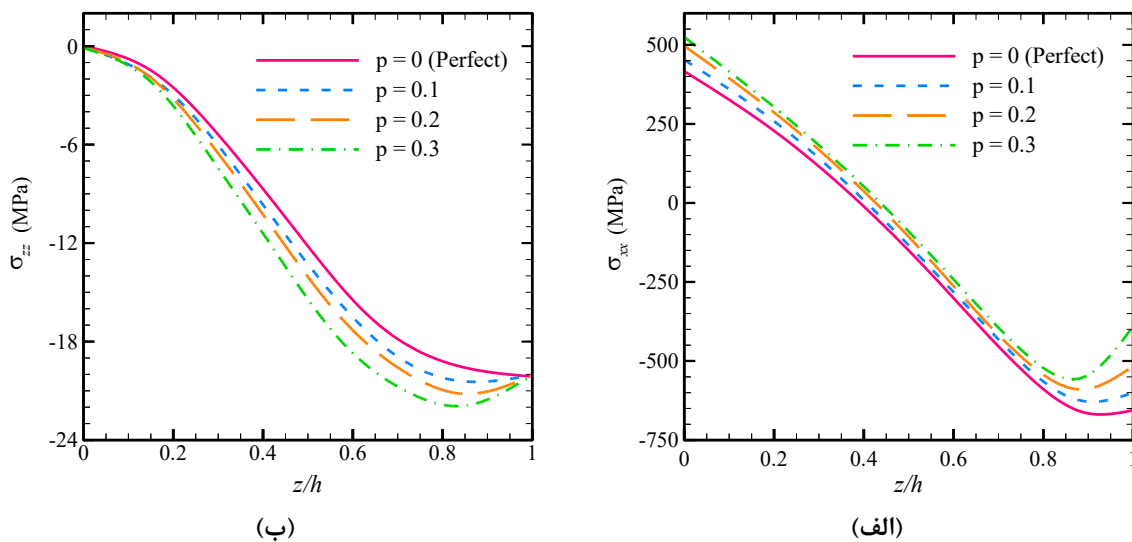
در این بخش، نتایج خمش ترمو-الاستوپلاستیک ورق مدرج تابعی متخلخل مربعی بطول ۱ متر و با خواص وابسته به دما ارائه شده است. هندسه مساله، خواص مواد، شرایط مرزی و بارگذاری پیش‌تر در بخش ۲ توصیف شده است. در تمام تحلیل‌های پیش رو $V_{max}^c = 0/9$ است و شار حرارتی سینوسی با شدت (q)، ۷۰ کیلووات بر مترمربع به مدت ۱۵۰۰ ثانیه به ورق اعمال می‌گردد. همچنین شدت بار گسترده (p) برای ورق با نسبت ضخامت ۰/۱ برابر ۲۰ مگاپاسکال و برای ورق با نسبت ضخامت ۰/۳ برابر ۲۰۰ مگاپاسکال در نظر گرفته شده است.

شکل ۴-الف توزیع دمای T در راستای ضخامت ورق مدرج تابعی متخلخل با شرایط تکیه‌گاهی SSSS، $h/a = 0/1$ و $n = 1$ را به ازای چهار مقدار مختلف ضریب تخلخل p ، یعنی ۰، ۰/۱، ۰/۲ و ۰/۳ نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش ضریب تخلخل، دمای سطح بالایی ورق افزایش یافته و از نفوذ حرارت به داخل ورق کاسته می‌شود. همچنین به ازای تمام مقادیر p حداکثر دما در سطح بالایی ورق رخ می‌دهد. در شکل ۴-ب تغییرات خیز w برای ورق مدرج تابعی متخلخل در راستای ضخامت آن رسم شده است. می‌توان دریافت که با افزایش p ، خیز ورق افزایش قابل توجهی می‌یابد.



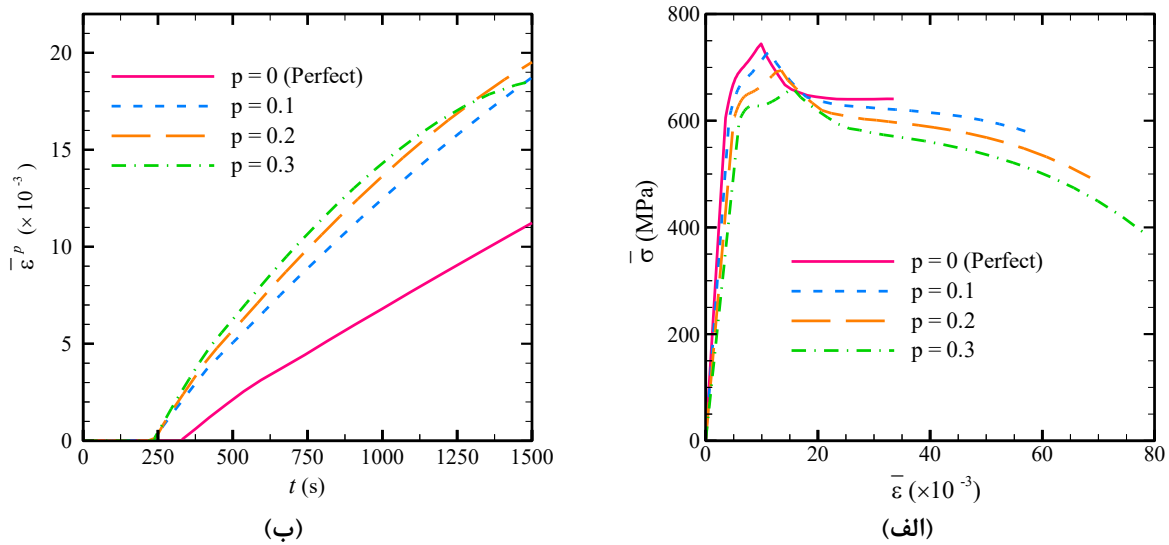
شکل ۴. تغییرات الف) دما $T(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z)$ و ب) خیز $w(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z)$ در ورق مربعی مدرج تابعی SSSS به ازای مقادیر مختلف ضریب تخلخل ($h/a = 0.1, n = 1$)

Fig. 4. Variations of a) temperature $T(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z)$, and b) deflection $w(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z)$ in the SSSS FG square plate for different values of porosity coefficient ($h/a = 0.1, n = 1$)



شکل ۵. تغییرات الف) تنش $\sigma_{xx}(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z)$ و ب) تنش $\sigma_{zz}(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z)$ در ورق مربعی مدرج تابعی SSSS به ازای مقادیر مختلف ضریب تخلخل ($h/a = 0.1, n = 1$)

Fig. 5. Variations of a) stress σ_{xx} , and b) stress σ_{zz} in the SSSS FG square plate for different values of porosity coefficient ($h/a = 0.1, n = 1$)



شکل ۶. نمودار الف) تنش معادل نسبت کرنش معادل و ب) کرنش پلاستیک معادل نسبت به زمان در مرکز سطح بالایی ورق مربعی مدرج تابعی SSSS به ازای مقادیر مختلف ضریب تخلخل ($h/a = 0.1, n = 1$)

Fig. 6. Curves of a) equivalent stress versus equivalent strain, and b) equivalent plastic strain with respect to time at the center of the upper surface of the SSSS FG square plate for different values of porosity coefficient ($h/a = 0.1, n = 1$)

جدول ۵. نتایج عددی در مرکز سطح بالایی ورق مربعی SSSS مدرج تابعی متخلخل ($n = 1$)

Table 5. Numerical results at the center of the upper surface of the SSSS porous FG square plate ($n = 1$)

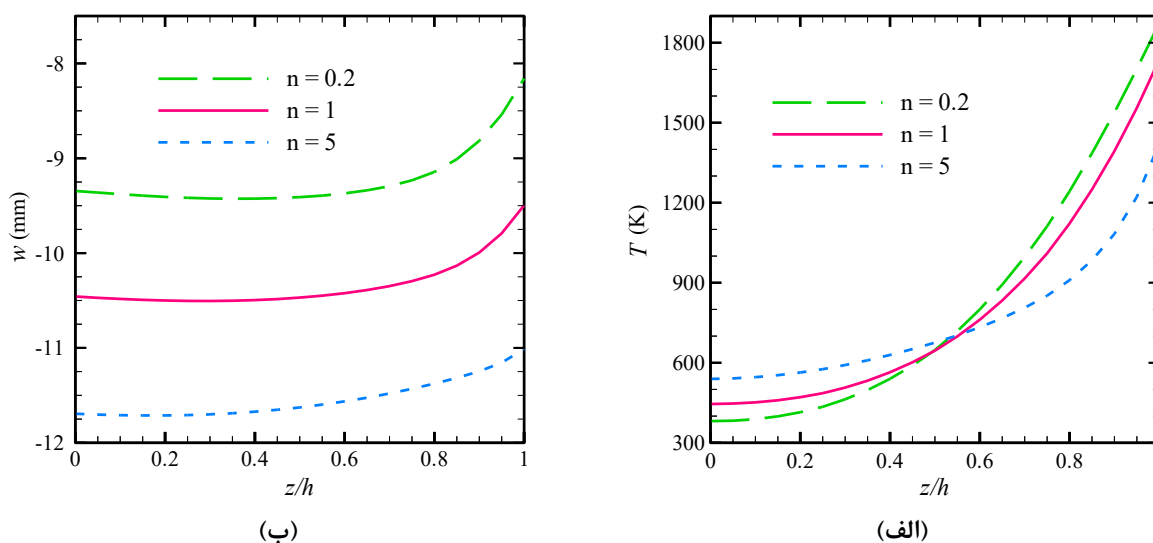
| $\bar{\varepsilon}^p (\times 10^{-3})$ | | $\bar{\sigma} (\text{MPa})$ | | $w (\text{mm})$ | | $T (\text{K})$ | | p | نسبت ضخامت |
|--|--------|-----------------------------|--------|-----------------|---------|----------------|--------|-----|---------------|
| FEM | RRKPM | FEM | RRKPM | FEM | RRKPM | FEM | RRKPM | | |
| ۱۱/۰۲۹ | ۱۱/۲۳۱ | ۶۴۵/۵۰ | ۶۴۰/۹۳ | -۶/۹۵۲۳ | -۶/۹۹۳۲ | ۱۳۹۲/۴ | ۱۳۹۳/۱ | ۰ | ۰/۱ |
| ۱۸/۹۴۸ | ۱۸/۷۳۳ | ۵۷۹/۲۰ | ۵۷۷/۷۰ | -۷/۴۷۱۲ | -۷/۵۲۳۳ | ۱۶۴۵/۸ | ۱۶۴۴/۲ | ۰/۱ | |
| ۱۹/۸۲۶ | ۱۹/۵۱۸ | ۴۹۷/۱۶ | ۴۹۲/۴۵ | -۹/۵۶۶۲ | -۹/۴۹۵۷ | ۱۷۳۷/۶ | ۱۷۳۶/۸ | ۰/۲ | |
| ۱۸/۴۶۳ | ۱۸/۵۴۹ | ۳۶۷/۸۴ | ۳۶۵/۴۶ | -۱۲/۴۵۱ | -۱۲/۳۳۱ | ۱۸۳۵/۰ | ۱۸۳۴/۱ | ۰/۳ | |
| ۱۴/۷۵۶ | ۱۴/۸۳۱ | ۶۳۳/۲۶ | ۶۲۹/۵۳ | -۲/۹۲۱۷ | -۲/۸۰۷۰ | ۱۵۲۲/۵ | ۱۵۲۰/۸ | ۰ | ۰/۳ |
| ۲۱/۷۲۵ | ۲۱/۶۰۰ | ۵۱۵/۹۸ | ۵۱۸/۷۷ | -۳/۳۳۹۷ | -۳/۳۵۲۳ | ۱۷۷۷/۲ | ۱۷۷۸/۴ | ۰/۱ | |
| ۲۰/۱۴۳ | ۲۰/۲۷۵ | ۳۸۳/۰۶ | ۳۸۶/۲۱ | -۴/۴۴۶۷ | -۴/۲۳۶۶ | ۱۸۸۰/۳ | ۱۸۷۸/۶ | ۰/۲ | |
| ۱۵/۵۷۱ | ۱۵/۶۷۸ | ۱۷۸/۱۶ | ۱۷۴/۷۰ | -۵/۴۱۹۲ | -۵/۴۴۲۸ | ۱۹۸۵/۶ | ۱۹۸۷/۰ | ۰/۳ | |

نظر گرفتن المان‌های ۸ گرهی^۲ بدست آمده نیز در این جدول گنجانده شده است. مشاهده می‌شود که نتایج روش حاضر با حل المان محدود که با آرایش گرهی متراکم $35 \times 35 \times 35$ (گره ۴۲۸۷۵) حاصل شده است، مطابقت بسیار خوبی دارد.

در جدول ۵ نتایج عددی $T, w, \bar{\sigma}$ و $\bar{\varepsilon}^p$ در مرکز سطح بالایی ورق مربعی SSSS مدرج تابعی متخلخل به ازای $n = 1$ و برای نسبت‌های ضخامت ۰/۱ و ۰/۳ ارائه شده است. به منظور مقایسه کامل‌تر، نتایج المان محدود سه‌بعدی که توسط نویسنده با استفاده از نرم افزار آباکوس^۱ و با در

2 8-node brick elements

1 ABAQUS software



شکل ۷. تغییرات الف) دما $T(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z)$ و ب) خیز $w(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z)$ در ورق مربعی مدرج تابعی SSSS به ازای مقادیر مختلف شاخص تغییرات مواد ($h/a = 0.1, p = 0.2$)

Fig. 7. Variations of a) temperature $T(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z)$, and b) deflection $w(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z)$ in the SSSS FG square plate for different values of material gradient index ($h/a = 0.1, p = 0.2$)

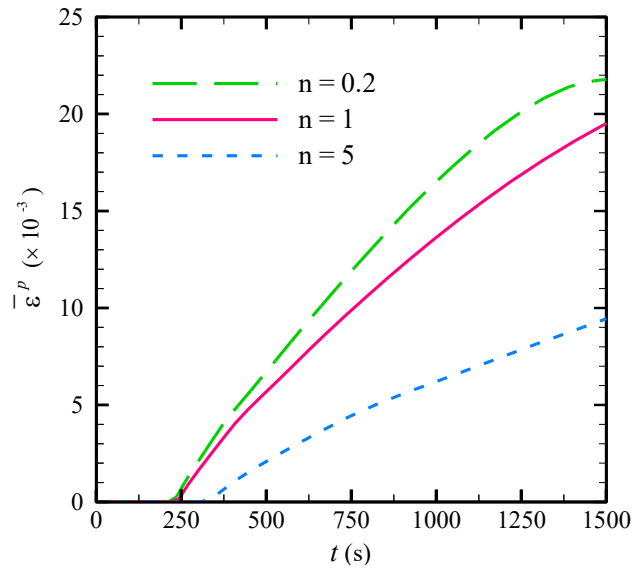
در شکل‌های ۷-الف و ۷-ب توزیع دما و خیز در راستای ضخامت ورق متخلخل با شرایط تکیه‌گاهی SSSS، $h/a = 0.1$ و $p = 0.2$ به ازای مقادیر مختلف شاخص تغییرات مواد n ، یعنی ۰/۲، ۱ و ۵ ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش n ، دمای سطح بالایی ورق کاهش می‌یابد اما در همه حالات حداکثر دما در همین سطح رخ می‌دهد. این در حالی است که خیز ورق با افزایش ضریب n افزایش می‌یابد. در شکل ۸ تغییرات کرنش پلاستیک معادل بر حسب زمان در مرکز سطح بالایی ورق مدرج تابعی متخلخل رسم شده است. می‌توان ملاحظه کرد که افزایش n منجر به کاهش سطح کرنش پلاستیک ورق می‌گردد.

در مطالعه حاضر اثر توزیع تخلخل ناهمگن بر روی نتایج نیز مورد بررسی قرار گرفته است. در شکل ۹-الف توزیع دمای T در راستای ضخامت ورق مدرج تابعی با شرایط تکیه‌گاهی SSSS، $h/a = 0.1$ و $n = 1$ و $p_o = 0.2$ ، به ازای مقادیر مختلف شاخص تغییرات تخلخل n_p ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که افزایش شاخص n_p باعث افزایش دمای سطح بالایی ورق و کاهش نفوذ حرارت به داخل ورق شده است. در شکل‌های ۹-ب و ۹-ج بترتیب تغییرات خیز و تغییرات کرنش پلاستیک معادل نسبت به زمان، به ازای مقادیر مختلف n_p نشان داده شده است. بوضوح ملاحظه می‌شود که با افزایش n_p ، خیز ورق بطور چشمگیری افزایش می‌یابد. همچنین مطابق شکل ۹-ج، افزایش n_p ، افزایش $\bar{\epsilon}^p$ را در زمان کوتاه‌تری به دنبال دارد.

در شکل‌های ۷-الف و ۷-ب توزیع دما و خیز در راستای ضخامت ورق متخلخل با شرایط تکیه‌گاهی SSSS، $h/a = 0.1$ و $p = 0.2$ به ازای مقادیر مختلف شاخص تغییرات مواد n ، یعنی ۰/۲، ۱ و ۵ ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش n ، دمای سطح بالایی ورق کاهش می‌یابد اما در همه حالات حداکثر دما در همین سطح رخ می‌دهد. این در حالی است که خیز ورق با افزایش ضریب n افزایش می‌یابد. در شکل ۸ تغییرات کرنش پلاستیک معادل بر حسب زمان در مرکز سطح بالایی ورق مدرج تابعی متخلخل رسم شده است. می‌توان ملاحظه کرد که افزایش n منجر به کاهش سطح کرنش پلاستیک ورق می‌گردد.

نتایج عددی T ، w ، $\bar{\sigma}$ و $\bar{\epsilon}^p$ در مرکز سطح بالایی ورق مربعی SSSS مدرج تابعی متخلخل با $p = 0.2$ و نسبت‌های ضخامت ۰/۱ و ۰/۳ در جدول ۶ داده شده است. در این جدول نیز نتایج المان محدود سه‌بعدی بدست آمده با آرایش گرهی متراکم $35 \times 35 \times 35$ گنجانده شده است که توافق بسیار خوبی میان نتایج روش حاضر و حل المان محدود مشاهده می‌گردد.

در جدول ۷ نتایج عددی w ، σ_{xx} ، $\bar{\sigma}$ و $\bar{\epsilon}^p$ در مرکز سطح بالایی ورق مربعی مدرج تابعی متخلخل به ازای $n = 1$ ، $h/a = 0.1$ و با در نظر گرفتن پنج نوع شرایط تکیه‌گاهی مختلف شامل SSSS، SSSF،



شکل ۸. تغییرات کرنش پلاستیک معادل نسبت به زمان در مرکز سطح بالایی ورق مربعی مدرج تابعی SSSS به ازای مقادیر مختلف شاخص تغییرات مواد ($h/a = 0.1, p = 0.2$)

Fig. 8. Variation of equivalent plastic strain with respect to time at the center of the upper surface of the SSSS FG square plate for different values of material gradient index ($h/a = 0.1, p = 0.2$)

جدول ۶. نتایج عددی در مرکز سطح بالایی ورق مربعی SSSS مدرج تابعی متخلخل ($p = 0.2$)

Table 6. Numerical results at the center of the upper surface of the SSSS porous FG square plate ($p = 0.2$)

| $\bar{\varepsilon}^p (\times 10^{-3})$ | | $\bar{\sigma}$ (MPa) | | w (mm) | | T (K) | | n | نسبت ضخامت |
|--|--------|----------------------|--------|----------|---------|---------|--------|-----|------------|
| FEM | RRKPM | FEM | RRKPM | FEM | RRKPM | FEM | RRKPM | | |
| ۲۱/۵۰۳ | ۲۱/۷۸۲ | ۳۳۰/۴۴ | ۳۳۴/۴۸ | -۸/۰۸۶۱ | -۸/۱۵۹۴ | ۱۸۷۲/۵ | ۱۸۷۴/۱ | ۰/۲ | ۰/۱ |
| ۱۹/۸۲۶ | ۱۹/۵۱۸ | ۴۹۷/۱۶ | ۴۹۲/۴۵ | -۹/۵۶۶۲ | -۹/۴۹۵۷ | ۱۷۳۷/۶ | ۱۷۳۶/۸ | ۱ | |
| ۹/۳۵۹۷ | ۹/۴۴۳۸ | ۵۸۳/۷۰ | ۵۷۹/۴۲ | -۱۱/۲۱۴ | -۱۱/۰۱۲ | ۱۴۲۴/۶ | ۱۴۲۲/۳ | ۵ | |
| ۲۰/۴۷۹ | ۲۰/۴۰۲ | ۳۴۵/۴۲ | ۳۴۸/۵۶ | -۴/۱۲۷۴ | -۴/۰۷۵۲ | ۱۹۰۵/۱ | ۱۹۰۴/۲ | ۰/۲ | ۰/۳ |
| ۲۰/۱۴۳ | ۲۰/۲۷۵ | ۳۸۳/۰۶ | ۳۸۶/۲۱ | -۴/۳۴۶۷ | -۴/۲۳۶۶ | ۱۸۸۰/۳ | ۱۸۷۸/۶ | ۱ | |
| ۱۸/۲۸۵ | ۱۸/۴۴۰ | ۴۸۵/۲۴ | ۴۸۳/۳۸ | -۴/۴۵۲۶ | -۴/۴۲۹۲ | ۱۷۸۰/۴ | ۱۷۷۸/۳ | ۵ | |

جدول ۷. نتایج عددی ورق مربعی مدرج تابعی متخلخل با شرایط مرزی مختلف ($h/a = 0.1, n = 1$)

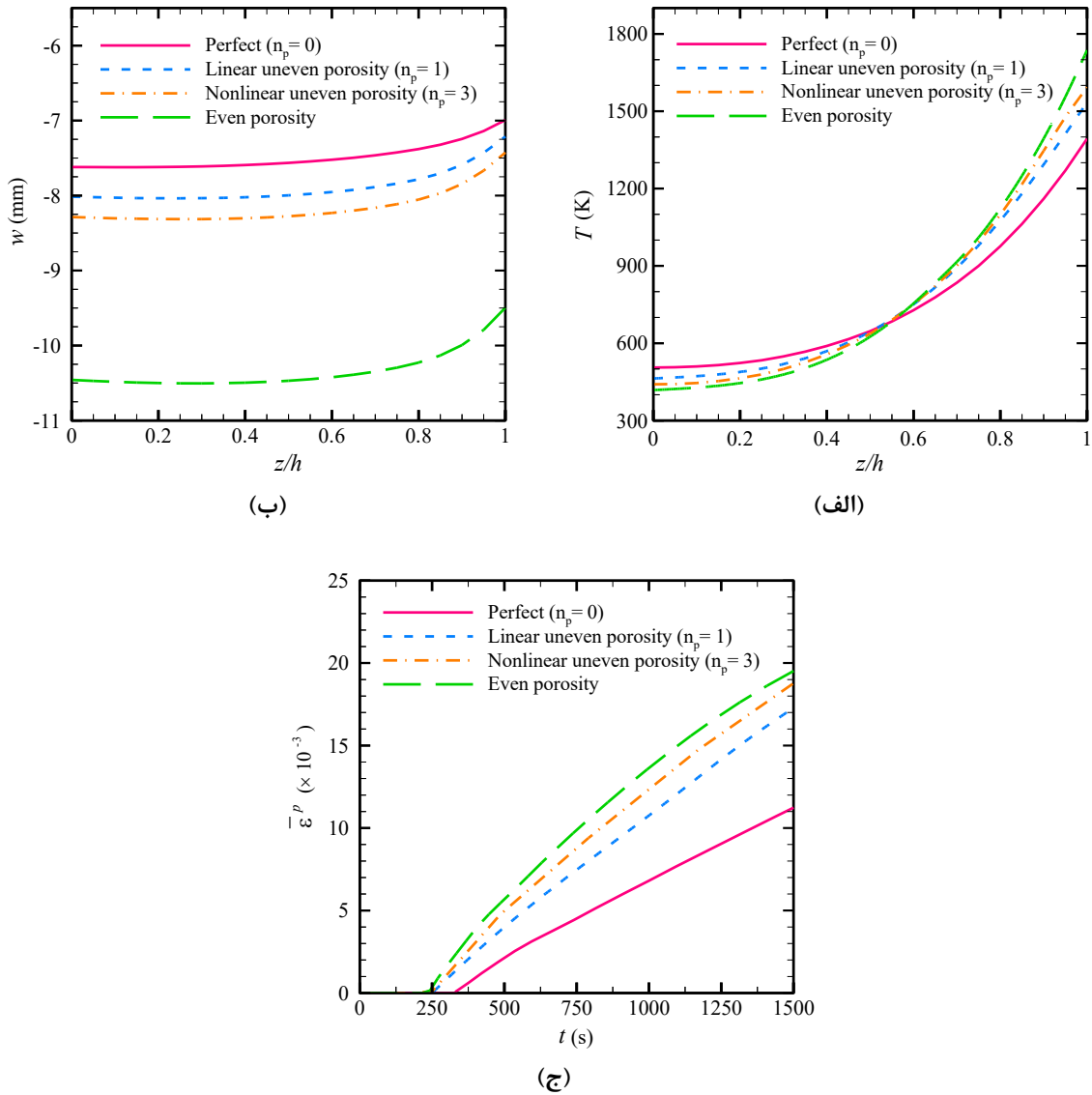
Table 7. Numerical results of porous FG square plate with various boundary conditions ($h/a = 0.1, n = 1$).

| $\bar{\varepsilon}^p (\times 10^{-3})$ | $\bar{\sigma}$ (MPa) | σ_{xx} (MPa) | w (mm) | p | شرایط مرزی |
|--|----------------------|---------------------|----------|-----|------------|
| ۱۱/۲۳۱ | ۶۴۰/۹۳ | -۶۵۹/۸۶ | -۶/۹۹۳۲ | ۰ | SSSS |
| ۱۸/۷۳۳ | ۵۷۷/۷۰ | -۵۹۷/۵۹ | -۷/۵۲۳۳ | ۰/۱ | |
| ۱۹/۵۱۸ | ۴۹۲/۴۵ | -۵۱۲/۸۱ | -۹/۴۹۵۷ | ۰/۲ | |
| ۱۸/۵۴۹ | ۳۶۵/۴۶ | -۳۸۵/۵۲ | -۱۲/۳۳۱ | ۰/۳ | |
| ۱۲/۶۲۳ | ۶۸۰/۲۸ | -۶۳۹/۳۱ | -۱۵/۹۸۵ | ۰ | SSSF |
| ۲۰/۲۱۵ | ۶۰۸/۰۱ | -۵۹۴/۳۷ | -۱۸/۳۰۱ | ۰/۱ | |
| ۲۱/۱۸۴ | ۵۱۹/۵۲ | -۵۰۹/۷۶ | -۲۲/۵۹۸ | ۰/۲ | |
| ۲۰/۳۹۲ | ۳۸۶/۷۷ | -۳۸۲/۲۲ | -۲۸/۵۶۵ | ۰/۳ | |
| ۹/۸۱۴۴ | ۶۰۷/۵۵ | -۶۵۵/۸۸ | -۳/۳۰۷۸ | ۰ | SCSC |
| ۱۷/۲۷۶ | ۵۵۳/۲۳ | -۵۸۷/۹۳ | -۳/۴۹۱۶ | ۰/۱ | |
| ۱۷/۸۰۷ | ۴۶۹/۱۲ | -۵۰۱/۰۷ | -۴/۴۰۰۵ | ۰/۲ | |
| ۱۶/۵۵۴ | ۳۴۶/۲۶ | -۳۷۴/۶۲ | -۵/۷۲۴۶ | ۰/۳ | |
| ۹/۳۶۵۱ | ۵۹۷/۳۱ | -۵۳۴/۸۳ | -۴/۸۱۰۰ | ۰ | CFCF |
| ۱۶/۶۳۴ | ۵۴۲/۴۳ | -۵۲۰/۷۰ | -۵/۲۸۲۹ | ۰/۱ | |
| ۱۷/۱۳۳ | ۴۵۹/۹۲ | -۴۴۵/۶۱ | -۶/۵۳۰۶ | ۰/۲ | |
| ۱۵/۸۶۳ | ۳۳۹/۵۸ | -۳۳۳/۲۵ | -۸/۲۸۷۰ | ۰/۳ | |
| ۱۰/۲۳۷ | ۶۱۷/۳۲ | -۶۳۶/۰۴ | -۲/۲۱۷۲ | ۰ | CCCC |
| ۱۷/۶۴۵ | ۵۵۹/۳۳ | -۵۷۸/۶۶ | -۲/۳۳۸۹ | ۰/۱ | |
| ۱۸/۰۳۸ | ۴۷۲/۱۸ | -۴۹۱/۹۵ | -۲/۹۲۸۴ | ۰/۲ | |
| ۱۶/۶۴۶ | ۳۴۷/۰۳ | -۳۶۶/۵۵ | -۳/۸۰۴۴ | ۰/۳ | |

جدول ۸. نتایج عددی ورق مربعی مدرج تابعی متخلخل با شرایط مرزی مختلف ($h/a = 0.3, n = 1$)

Table 8. Numerical results of porous FG square plate with various boundary conditions ($h/a = 0.3, n = 1$)

| $\bar{\varepsilon}^p (\times 10^{-3})$ | $\bar{\sigma}$ (MPa) | σ_{xx} (MPa) | w (mm) | p | شرایط مرزی |
|--|----------------------|---------------------|----------|-----|------------|
| ۱۴/۸۳۱ | ۶۲۹/۵۳ | -۸۲۹/۱۴ | -۲/۸۰۷۰ | ۰ | SSSS |
| ۲۱/۶۰۰ | ۵۱۸/۷۷ | -۷۱۷/۸۰ | -۳/۳۵۲۳ | ۰/۱ | |
| ۲۰/۲۷۵ | ۳۸۶/۲۱ | -۵۸۴/۶۸ | -۴/۲۳۶۶ | ۰/۲ | |
| ۱۵/۶۷۸ | ۱۷۴/۷۰ | -۳۷۰/۶۶ | -۵/۴۴۲۸ | ۰/۳ | |
| ۱۶/۰۲۴ | ۶۶۱/۴۶ | -۸۳۱/۵۸ | -۶/۱۹۹۳ | ۰ | SSSF |
| ۲۲/۸۱۵ | ۵۳۹/۱۱ | -۷۲۷/۰۵ | -۷/۴۳۸۱ | ۰/۱ | |
| ۲۱/۵۷۶ | ۴۰۱/۰۳ | -۵۹۰/۵۹ | -۹/۱۶۳۹ | ۰/۲ | |
| ۱۷/۱۴۰ | ۱۸۰/۲۵ | -۳۷۳/۸۲ | -۱۱/۴۶۶ | ۰/۳ | |
| ۱۳/۷۰۷ | ۶۰۶/۶۰ | -۸۱۱/۷۷ | -۱/۹۴۸۰ | ۰ | SCSC |
| ۲۰/۳۹۳ | ۵۰۳/۲۵ | -۷۰۴/۱۷ | -۲/۲۶۱۴ | ۰/۱ | |
| ۱۸/۹۳۱ | ۳۷۴/۵۲ | -۵۷۴/۰۲ | -۲/۸۶۸۲ | ۰/۲ | |
| ۱۴/۱۳۳ | ۱۷۰/۷۱ | -۳۶۶/۸۰ | -۳/۷۱۰۹ | ۰/۳ | |
| ۱۲/۷۳۵ | ۵۹۰/۹۵ | -۷۶۰/۰۵ | -۳/۱۱۶۶ | ۰ | CFCF |
| ۱۹/۳۴۴ | ۴۹۲/۴۴ | -۶۸۱/۱۲ | -۳/۶۳۷۵ | ۰/۱ | |
| ۱۷/۸۵۲ | ۳۶۷/۱۳ | -۵۵۸/۰۴ | -۴/۵۰۲۹ | ۰/۲ | |
| ۱۳/۱۱۶ | ۱۶۸/۵۱ | -۳۶۳/۴۴ | -۵/۶۷۸۳ | ۰/۳ | |
| ۱۳/۴۲۵ | ۶۰۰/۵۲ | -۸۰۱/۱۴ | -۱/۴۳۵۰ | ۰ | CCCC |
| ۲۰/۰۱۸ | ۴۹۸/۲۳ | -۶۹۶/۱۵ | -۱/۶۲۱۹ | ۰/۱ | |
| ۱۸/۴۶۹ | ۳۷۰/۲۹ | -۵۶۷/۶۵ | -۲/۰۷۱۶ | ۰/۲ | |
| ۱۳/۵۴۸ | ۱۶۹/۰۷ | -۳۶۴/۳۵ | -۲/۷۰۹۸ | ۰/۳ | |



شکل ۹. نمودار تغییرات الف) دما $T(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z)$ ، ب) خیز $w(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z)$ و ج) کرنش پلاستیک معادل نسبت به زمان، $(\bar{\epsilon}^p - t)(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, h)$ ، برای ورق مربعی مدرج تابعی SSSS به ازای مقادیر مختلف شاخص تغییرات تخلخل، $(h/a = 0.1, n = 1, p_0 = 0.2)$

Fig. 9. Curves of a) temperature $T(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z)$, b) deflection $w(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z)$, and c) equivalent plastic strain with respect to time $(\bar{\epsilon}^p - t)(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, h)$, for SSSS porous FG square plate for different values of porosity gradient index n_p , $(h/a = 0.1, n = 1, p_0 = 0.2)$

منابع

- [1] J. Zhu, Z. Lai, Z. Yin, J. Jeon, S. Lee, Fabrication of ZrO₂-NiCr functionally graded material by powder metallurgy, *Materials chemistry and physics*, 68(1-3) (2001) 130-135.
- [2] A.S. Rezaei, A.R. Saidi, Application of Carrera Unified Formulation to study the effect of porosity on natural frequencies of thick porous-cellular plates. *Composites Part B: Engineering*, 91 (2016) 361-370.
- [3] M. Nemat-Alla, Reduction of thermal stresses by developing two-dimensional functionally graded materials, *International journal of solids and structures*, 40(26) (2003) 7339-7356.
- [4] M. Nemat-Alla, K.I. Ahmed, I. Hassab-Allah, Elastic-plastic analysis of two-dimensional functionally graded materials under thermal loading, *International Journal of solids and Structures*, 46(14-15) (2009) 2774-2786.
- [5] K. Gao, W. Gao, D. Chen, J. Yang, Nonlinear free vibration of functionally graded graphene platelets reinforced porous nanocomposite plates resting on elastic foundation, *Composite Structures*, 204 (2018) 831-846.
- [6] A.M. Zenkour, A quasi-3D refined theory for functionally graded single-layered and sandwich plates with porosities, *Composite Structures*, 201 (2018) 38-48.
- [7] J. Gong, L. Xuan, B. Ying, H. Wang, Thermoelastic analysis of functionally graded porous materials with temperature-dependent properties by a staggered finite volume method, *Composite Structures*, 224 (2019) 111071.
- [8] C. Liang, Y.Q. Wang, A quasi-3D trigonometric shear deformation theory for wave propagation analysis of FGM sandwich plates with porosities resting on viscoelastic foundation, *Composite Structures*, 247 (2020) 112478.
- [9] D.S. Mashat, A.M. Zenkour, A.F. Radwan, A quasi-3D higher-order plate theory for bending of FG plates resting on elastic foundations under hygro-thermo-mechanical loads with porosity, *European Journal of Mechanics-A/*

۶- نتیجه گیری

در این مقاله برای اولین بار یک فرمول بندی سه بعدی ترمو-الاستوپلاستیک مبتنی بر روش بازتولید نقطه با هسته پایه شعاعی به منظور بررسی اثر تخلخل بر رفتار خمش غیرخطی ورق های مدرج تابعی با خواص وابسته به دما که در معرض ترکیبی از بارهای حرارتی و مکانیکی قرار گرفته اند، توسعه یافت. معیار تسلیم فون میزز، سخت شوندگی همسانگرد و قانون جریان پراگماتیک-رویس برای توصیف رفتار پلاستیک ورق های مدرج تابعی بکار گرفته شدند. خواص ترمومکانیکی مؤثر ورق با استفاده از قانون آمیختگی اصلاح شده بصورت موضعی ارزیابی شد. برای اثبات قابلیت و کارایی مدل حاضر، نتایج بدست آمده با حل های تحلیلی و عددی دیگر مقایسه و تطابق عالی بین نتایج مشاهده گردید. در ادامه ضمن تحلیل مثال های عددی متنوع، اثر پارامترهای مهمی مانند ضریب تخلخل، شاخص تغییرات مواد، نسبت ضخامت و شرایط مرزی بر رفتار خمش ترمو-الاستوپلاستیک ورق های مدرج تابعی مطالعه گردید. سایر نتایج به شرح زیر است:

- با افزایش ضریب تخلخل p ، دمای سطح بالایی ورق افزایش یافت و از نفوذ حرارت به داخل ورق کاسته شد. همچنین به ازای تمام مقادیر ضریب تخلخل، حداکثر دما در سطح بالایی ورق رخ داد.
- برای هر دو نسبت ضخامت مطالعه شده، با افزایش ضریب تخلخل خیز ورق افزایش قابل توجهی یافت و از میزان تنش σ_{xx} در سطح بالایی ورق کاسته شد.
- افزایش مقدار ضریب تخلخل منجر به کاهش سطح تنش معادل $\bar{\sigma}$ و افزایش میزان کرنش معادل $\bar{\epsilon}$ و کرنش پلاستیک معادل $\bar{\epsilon}^p$ گردید. همچنین با توجه به در نظر گرفتن خواص وابسته به دما برای ورق، ملاحظه شد که نمودار تنش-کرنش حتی در ناحیه الاستیک نیز غیرخطی است.
- مشخص شد که برای تمام مقادیر ضریب تخلخل، با افزایش قیود در لبه ها، خیز ورق کاهش می یابد و حداقل و حداکثر مقدار خیز به ترتیب متعلق به ورق با شرایط تکیه گاهی CCCC و SSSF است.
- با افزایش شاخص تغییرات مواد n ، دمای سطح بالایی ورق کاهش یافت اما حداکثر دما در همه حالات در همین سطح رخ داد. این در حالی است که افزایش ضریب n ، خیز ورق را افزایش و کرنش پلاستیک را کاهش داد.

- Aerospace Science and Technology, 104 (2020) 105916.
-]19[S. Qin, G. Wei, Z. Liu, G. Su, The elastic dynamics analysis of FGM using a meshless RRKPM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 129 (2021) 125-136.
-]20[Z. Liu, G. Wei, S. Qin, Z. Wang, The elastoplastic analysis of functionally graded materials using a meshfree RRKPM, *Applied Mathematics and Computation*, 413 (2022) 126651.
-]21[Z. Liu, G. Wei, Z. Wang, Numerical solution of functionally graded materials based on radial basis reproducing kernel particle method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 111 (2020) 32-43.
-]22[S. Suresh, A. Mortensen, *Fundamentals of Functionally Graded Materials*, London: IOM Communications Ltd, 1998.
-]23[R.L. Williamson, B.H. Rabin, J.T. Drake, Finite element analysis of thermal residual stresses at graded ceramic-metal interfaces. Part I. Model description and geometrical effects, *Journal of Applied Physics*, 74(2) (1993) 1310-1320.
-]24[T. Mori, K. Tanaka, Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta metallurgica*, 21(5) (1973) 571-574.
-]25[J. Gong, L. Xuan, B. Ying, H. Wang, Thermoelastic analysis of functionally graded porous materials with temperature-dependent properties by a staggered finite volume method, *Composite Structures*, 224 (2019) 111071.
-]26[A. Sluzalec, *Introduction to Nonlinear Thermomechanics, Theory and Finite Element Solutions*, London: Springer-Verlag, 1992.
-]27[J.N. Reddy, *An Introduction to the Finite Element Method*, Singapore: McGraw-Hill, 1993.
-]28[H.T. Thai, T.P. Vo, A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates, *Applied mathematical modelling*, 37(5) (2013) 3269-3281.
- Solids, 82 (2020) 103985.
-]10[V. Kumar, S.J. Singh, V.H. Saran, S.P. Harsha, Vibration characteristics of porous FGM plate with variable thickness resting on Pasternak's foundation, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 85 (2021) 104124.
-]11[Y. Liu, Z. Qin, F. Chu, Nonlinear forced vibrations of FGM sandwich cylindrical shells with porosities on an elastic substrate, *Nonlinear Dynamics*, 104(2) (2021) 1007-1021.
-]12[S.K. Sah, A. Ghosh, Influence of porosity distribution on free vibration and buckling analysis of multi-directional functionally graded sandwich plates, *Composite Structures*, 279 (2022) 114795.
-]13[S.S. Vel, R.C. Batra, Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates, *AIAA journal*, 40(7) (2002) 1421-1433.
-]14[A. Alibeigloo, Three-dimensional exact solution for functionally graded rectangular plate with integrated surface piezoelectric layers resting on elastic foundation, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 17(3) (2010) 183-195.
-]15[A.R. Mojdehi, A. Darvizeh, A. Basti, H. Rajabi, Three dimensional static and dynamic analysis of thick functionally graded plates by the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35(11) (2011) 1168-1180.
-]16[M. Adineh, M. Kadkhodayan, Three-dimensional thermo-elastic analysis and dynamic response of a multi-directional functionally graded skew plate on elastic foundation, *Composites Part B: Engineering*, 125 (2017) 227-240.
-]17[S.J. Nikbakht, S.J. Salami, M. Shakeri, Three dimensional analysis of functionally graded plates up to yielding, using full layer-wise finite element method, *Composite Structures*, 182 (2017) 99-115.
-]18[R. Vaghefi, Three-dimensional temperature-dependent thermo-elastoplastic bending analysis of functionally graded skew plates using a novel meshless approach,

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

R. Vaghefi, Investigation of the Effect of Porosity on Thermo-Elastoplastic Bending of Functionally Graded Plates Using 3D Meshless Radial Basis Reproducing Kernel Particle Method , Amirkabir J. Mech Eng., 54(10) (2023)2377-2398.

DOI: [10.22060/mej.2022.20998.7356](https://doi.org/10.22060/mej.2022.20998.7356)

