

## Investigation of the Effect of Porosity on Thermo-Elastoplastic Bending of Functionally Graded Plates Using 3D Meshless Radial Basis Reproducing Kernel Particle Method

R. Vaghefi\*

Department of Mechanical Engineering, Fasa University, Fasa, Iran

**ABSTRACT:** In this paper, the effect of porosity on the thermo-elastoplastic bending response of temperature-dependent functionally graded plates exposed to a combination of thermal and mechanical loads is studied using a three-dimensional meshless model based on the radial basis reproducing kernel particle method. To describe the plastic behavior of the plate, the von Mises yield criterion, isotropic strain hardening, and the Prandtl-Reuss flow rule are adopted. The material properties are continuously varying in the thickness direction according to a power-law function in terms of the ceramic and metal volume fractions. The modified rule of mixtures is employed to locally evaluate the effective thermomechanical parameters of the functionally graded material. A 3D meshless model based on the radial basis reproducing kernel particle method is developed and used in all analyses. To show the accuracy and efficiency of the present method, the obtained results are compared with the existing analytical and numerical results and very good agreements have been observed. Several numerical examples for temperature, deflection, and stress analysis of porous functionally graded plates are presented, and the effect of significant parameters such as porosity coefficient, material gradient index, thickness ratio, and boundary conditions on the bending response of plates has been investigated.

### Review History:

Received: Feb. 02, 2022

Revised: Aug. 14, 2022

Accepted: Sep. 10, 2022

Available Online: Sep. 23, 2022

### Keywords:

Thermo-elastoplastic analysis

Functionally graded plate

Porosity

Reproducing kernel particle method

Radial basis function

### 1- Introduction

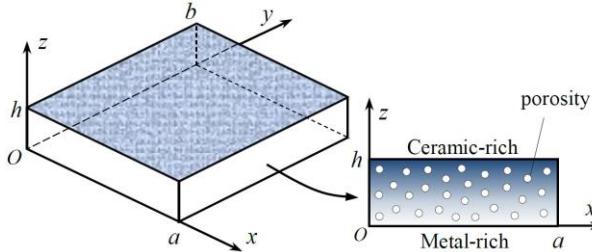
Functionally Graded (FG) materials are advanced composites that are purposefully made through the heterogeneous distribution of different constituents. Continuous changes of properties in FG materials cause different thermo-mechanical behavior in them and this can help to improve physical characteristics including stress concentration, thermal stresses, and residual stresses. The high practical capabilities of FG materials, including high strength, high-temperature resistance, and impact resistance, have made it possible for designers to use them widely in various fields of mechanics, aerospace, electronics, nuclear, biomedicine, etc. The wide use of plates in most modern and practical engineering structures, as well as the unique properties of FG materials, has become the study of the thermo-mechanical behavior of FG plates into an attractive research field. Among the different methods of producing FG materials, the sintering process is known as one of the suitable methods for manufacturing these materials. In this method, due to the large difference in coagulation temperature between the components, the occurrence of porosity in the material is inevitable [1]. For this reason, investigating the effect of porosity in the analysis of functionally graded structures is of particular importance. Zenkour [2] presented the bending responses of porous FG single-layered and sandwich thick

rectangular plates using a quasi-3D shear deformation theory. Thermo-elastic analysis of FG porous materials with temperature-dependent properties using a staggered finite volume method was developed by Gong et al. [3]. The staggered grid technique is employed to incorporate property variation into the discretization of governing equations. Liang and Wang [4] proposed a quasi-3D trigonometric shear deformation theory for wave propagation analysis of FG sandwich plates with porosities resting on a viscoelastic foundation. By dividing the transverse displacement into bending, shear, and stretching components, they calculated the transverse shear and normal deformations. Mashat et al. [5] presented a quasi-3D higher-order plate theory for bending analysis of FG plates resting on elastic foundations under hygro-thermo-mechanical loads with porosity. They considered the impacts of transverse shear deformation as well as the transverse normal strain. The influence of porosity distribution on free vibration and buckling analysis of multi-directional FG sandwich plates was investigated by Sah and Ghosh [6]. To incorporate the porosity in the FG face sheet, they considered even, uneven, logarithmic uneven, linear uneven, and sinusoidal uneven porosity distribution models. In recent years, meshless methods have been developed as one of the most powerful computational methods and have been successfully used to solve many practical problems.

\*Corresponding author's email: vaghefireza@fasau.ac.ir



Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit <https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>.



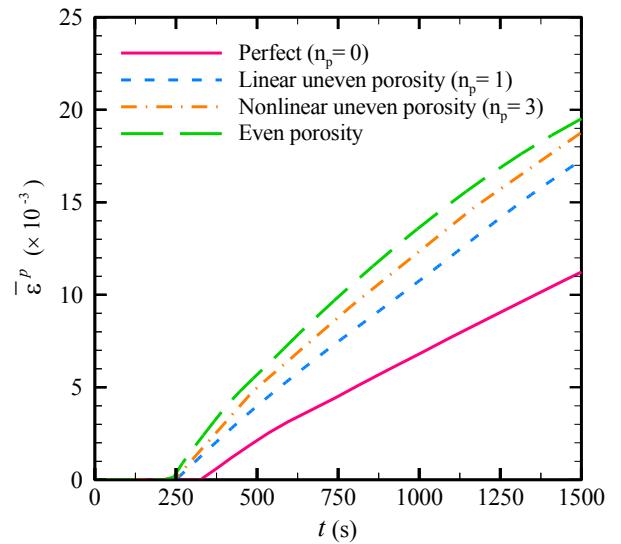
**Fig. 1. Porous FG plate in the 3D coordinate system**

One of the most common and widely used meshless methods, which is well-developed based on the smooth particle hydrodynamics method, is the Reproducing Kernel Particle Method (RKPM). Although the shape functions created by the RKPM method have excellent smoothness, this method has some shortcomings in the numerical simulation process so the accuracy and stability of the results are affected by different kernel functions [7]. To reduce the negative effects of different kernel functions as well as improve the accuracy and stability of calculations, the Radial Basis Function (RBF) has been integrated with the RKPM method and a new method called the Radial Basis Reproducing Kernel Particle Method (RRKPM) has been introduced. One of the most important advantages of the RRKPM is to increase the convergence and accuracy of the results by reducing the dependence of its approximation function on the kernel function [8]. In the present study, a 3D radial basis reproducing kernel particle model is presented for nonlinear thermo-elastoplastic bending analysis of temperature-dependent porous FG plates exposed to a combination of mechanical and thermal loads.

## 2- Methodology

A rectangular porous FG plate with dimensions  $a \times b \times h$  is considered. A schematic view of the plate in the Cartesian coordinate system  $xyz$  is shown in Fig. 1. The  $z$ -axis is positioned across the thickness and the  $xy$  plane ( $z=0$ ) coincides with the bottom surface of the plate. It is assumed that the bottom surface of the plate varies from metal-rich to ceramic-rich at the top surface.

It is assumed that the plate is initially at a uniform temperature  $T_0 = 300\text{ K}$  and is completely stress-free. Subsequently, the top surface of the plate is exposed to a combination of thermal and mechanical loads. The ceramic constituent is completely brittle and always retains its elastic deformation. While yield in FGMs occurs in their metal constituent when the equivalent stresses are greater than the yield limit. So far, various homogenization methods have been proposed to estimate the effective mechanical properties of metal-ceramic composite materials. One of the simplest and most convenient homogenization techniques is the modified rule of mixtures, which predicts the effective material properties of a metal-ceramic composite using the volume fraction of its constituents.



**Fig. 2. Variations of equivalent plastic strain with respect to time for SSSS porous FG square plate for different values of porosity gradient index, ( $h/a = 0.1, n = 1, p_0 = 0.2$ )**

## 3- Results and Discussion

A parametric study has been performed to investigate the effect of important parameters including shape parameter and nodal density on computational accuracy, and their optimal values have been extracted. Then, to prove the efficiency and accuracy of the present method, several numerical examples are analyzed and the results are compared with those obtained from analytical and numerical methods. In Fig. 2, the variations of the equivalent plastic strain with respect to time,  $(\bar{\varepsilon}^p - t)(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, h)$ , through the thickness of SSSS porous FG plate are shown for different values of the porosity gradient index  $n_p$ . It can be seen that with the increase of  $n_p$ ,  $\bar{\varepsilon}^p$  increases significantly. According to the figure, it can be concluded that the effect of increasing the porosity coefficient in increasing plastic strain is significant.

## 4- Conclusions

In this paper, a 3D thermo-elastoplastic formulation based on the radial basis reproducing kernel particle approach was developed to explore the nonlinear bending behavior of temperature-dependent porous FG plates under a combination of mechanical and thermal loads. In this regard, the following results were obtained

- By increasing the porosity coefficient  $p$ , the deflection of the plate increased and the stress  $\sigma_{xx}$  on the upper surface of the plate decreased.

- The increase in the porosity coefficient led to a decrease in the equivalent stress level and an increase in the amount of equivalent strain and plastic strain.

- With the increase of the material gradient index  $n$ , the deflection of the plate increased and its plastic strain decreased.

## References

- [1] J. Zhu, Z. Lai, , Z. Yin, J. Jeon, S. Lee, Fabrication of ZrO<sub>2</sub>-NiCr functionally graded material by powder metallurgy, Materials chemistry and physics 68(1-3) (2001) 130-135.
- [2] A.M. Zenkour, A quasi-3D refined theory for functionally graded single-layered and sandwich plates with porosities, Composite Structures, 201 (2018) 38-48.
- [3] J. Gong, L. Xuan, B. Ying, H. Wang, Thermoelastic analysis of functionally graded porous materials with temperature-dependent properties by a staggered finite volume method, Composite Structures, 224 (2019) 111071.
- [4] C. Liang, Y.Q. Wang, A quasi-3D trigonometric shear deformation theory for wave propagation analysis of FGM sandwich plates with porosities resting on viscoelastic foundation, Composite Structures, 247 (2020) 112478.
- [5] D.S. Mashat, A.M. Zenkour, A.F. Radwan, A quasi-3D higher-order plate theory for bending of FG plates resting on elastic foundations under hygro-thermo-mechanical loads with porosity, European Journal of Mechanics-A/ Solids, 82 (2020) 103985.
- [6] S.K. Sah, A. Ghosh, Influence of porosity distribution on free vibration and buckling analysis of multi-directional functionally graded sandwich plates, Composite Structures, 279 (2022) 114795.
- [7] S. Qin, G. Wei, Z. Liu, G. Su, The elastic dynamics analysis of FGM using a meshless RRKPM, Engineering Analysis with Boundary Elements, 129 (2021) 125-136.
- [8] Z. Liu, G. Wei, S. Qin, Z. Wang, The elastoplastic analysis of functionally graded materials using a meshfree RRKPM, Applied Mathematics and Computation, 413 (2022) 126651.

### HOW TO CITE THIS ARTICLE

R. Vaghefi, *Investigation of the Effect of Porosity on Thermo-Elastoplastic Bending of Functionally Graded Plates Using 3D Meshless Radial Basis Reproducing Kernel Particle Method*, Amirkabir J. Mech Eng., 54(10) (2023) 479-482.

DOI: [10.22060/mej.2022.20998.7356](https://doi.org/10.22060/mej.2022.20998.7356)







## بررسی اثر تخلخل بر خمش ترمو-الاستوپلاستیک ورق‌های مدرج تابعی توسط روش بدون المان بازتولید نقطه با هسته پایه شعاعی سه‌بعدی

رضا واقفی\*

دانشکده مهندسی، دانشگاه فسا، فسا، ایران.

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۰/۱/۱۳

بازنگری: ۱۴۰۱/۰۵/۲۳

پذیرش: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹

ارائه آنلاین: ۱۴۰۱/۰۸/۱۶

### کلمات کلیدی:

تحلیل ترموالاستوپلاستیک

ورق مدرج تابعی

تخلخل

روش بازتولید نقطه با هسته

تابع پایه شعاعی

**خلاصه:** در این مقاله اثر تخلخل بر پاسخ خمش ترمو-الاستوپلاستیک ورق‌های مدرج تابعی با خواص وابسته به دما که در معرض ترکیبی از بارهای حرارتی و مکانیکی واقع شده‌اند، توسط یک مدل بدون المان سه‌بعدی مبتنی بر روش بازتولید نقطه با هسته پایه شعاعی مورد مطالعه قرار گرفته است. برای توصیف رفتار پلاستیک ورق، معیار تسلیم فون میز، کرش سختی همسانگرد و قانون جریان پراندل-رویس بکار گرفته شده است. خواص ماده مدرج تابعی که همگی وابسته به دما فرض شده‌اند، به طور پیوسته در جهت ضخامت ورق، بر اساس کسر حجمی اجزای تشکیل دهنده آن و بر طبق یکتابع توانی تغییر می‌کنند. از قانون آمیختگی اصلاح شده برای ارزیابی موضعی پارامترهای ترمومکانیکی مؤثر در ماده مدرج تابعی استفاده شده است. یک مدل بدون المان سه‌بعدی مبتنی بر روش بازتولید نقطه با هسته پایه شعاعی توسعه یافته و در همه تجزیه و تحلیل‌ها بکار گرفته شده است. برای نشان دادن دقت و کارایی روش حاضر، نتایج بدست آمده با نتایج تحلیلی و عددی موجود در مراجع متعدد مقایسه شده و توافق بسیار خوبی میان نتایج مشاهده شده است. به علاوه تأثیر پارامترهای مهمی مانند ضربیت تخلخل، شاخص تغییرات ماده، نسبت ضخامت و شرایط مرزی بر پاسخ خمش ورق مدرج تابعی مطالعه شده است.

### ۱- مقدمه

مطالعه رفتار ترمومکانیکی ورق‌های مدرج تابعی را به یک حوزه تحقیقاتی جذاب تبدیل کرده است. روش‌های مختلف تولید مواد مدرج تابعی از قبیل متالورژی پودر، رسوب بخار، ریخته‌گری گریز از مرکز و جداسازی مغناطیسی اغلب دارای معایی مانند هزینه بالا و پیچیدگی فرآیند هستند. به عنوان مثال در فرآیند تفجوشی<sup>۱</sup> که به عنوان یکی از روش‌های مناسب جهت تولید مواد مدرج تابعی شناخته می‌شود، به دلیل تفاوت زیاد در دمای انجام اجزای تشکیل دهنده، بروز تخلخل<sup>۲</sup> یا حفره‌های میکروسکوپی درون ماده اجتناب ناپذیر است [۱]. به همین علت بررسی اثر تخلخل در تحلیل سازه‌های مدرج تابعی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. یکی از مزیت‌های بسیار مهم مواد مدرج تابعی متخخل توانایی فوق العاده آن‌ها در جذب انرژی است. همچنین این نوع مواد به دلیل امکان کنترل خواص آنها بر حسب نوع کاربرد، به شدت مورد توجه قرار دارند [۲].

مواد مدرج تابعی<sup>۱</sup> کامپوزیت‌های پیشرفت‌هایی هستند که به طور هدفمند از طریق توزیع ناهمگن اجزای مختلف ساخته می‌شوند. از ویژگی‌های منحصر به فرد این مواد، امکان کنترل تدریجی کسر حجمی اجزای تشکیل دهنده آنها توسط هر تابع دلخواه است. تغییرات پیوسته خواص در مواد مدرج تابعی موجب بروز رفتار ترمومکانیکی متفاوت در آنها شده و این امر می‌تواند به بهبود مشخصه‌های ترمومکانیکی از جمله تمرکز تنش، تنش‌های حرارتی و تنش‌های پسماند کمک کند. قابلیت‌های عملی بالای مواد مدرج تابعی شامل استحکام بالا و مقاومت در برابر دما و ضربه این امکان را برای طراحان فراهم آورده است تا از آنها در زمینه‌های مختلف مکانیک، هواشناسی، الکترونیک، هسته‌ای، زیست‌پزشکی و غیره بطور گسترده‌ای استفاده کنند. استفاده وسیع از ورق‌ها در اکثر سازه‌های مدرن و کاربردی مهندسی و نیز خواص منحصر به فرد مواد مدرج تابعی، خصوصاً در محیط‌های دما بالا،

2 Sintering

3 Porosity

1 Functionally graded

\* نویسنده عهدهدار مکاتبات: vaghefireza@fasau.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسنده‌گان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس <https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode> دیدن فرمائید.



غیریکنواخت در مواد، اثر نسبت هسته به ضخامت، کسر حجمی تخلخل، شاخص تغییرات ماده<sup>۱۱</sup> و تحريك خارجی بر نتایج بررسی شد. در سال ۲۰۲۲، ساح و قوش<sup>۱۲</sup> [۱۲] اثر توزیع تخلخل بر تحلیل ارتعاشات آزاد و کمانش ورق‌های ساندویچی مدرج تابعی چند جهته را بر اساس تئوری تغییر شکل برشی سینوسی مطالعه کردند. آن‌ها علاوه بر توزیع تخلخل یکنواخت، سه نوع توزیع تخلخل غیریکنواخت در ماده شامل توزیع خطی، نمایی و سینوسی را در نظر گرفتند.

همانگونه که ذکر شد تئوری‌های دوبعدی مختلفی در تحلیل ورق‌ها همواره مورد توجه محققین بوده است. با این حال فرضیات در نظر گرفته شده در این تئوری‌ها ممکن است خطاهایی را در حل مساله وارد کند که با افزایش ضخامت ورق، افزایش خواهند یافت. این حقیقت که نتایج حاصل از تحلیل سه‌بعدی، به دلیل عدم وجود فرضیات ساده‌کننده، بینش فیزیکی عمیق‌تر و واقعی‌تری را، خصوصاً در برخورد با ورق‌های ضخیم، ارائه می‌دهد غیر قابل انکار است. ول و باترا<sup>۱۳</sup> [۱۳] با استفاده از تئوری ترمومکانیکی ورق‌های مدرج حل تحلیلی سه‌بعدی را برای مطالعه خمش ترمومکانیکی ورق‌های مدرج تابعی با تکیه‌گاه‌های ساده ارائه کردند. در سال ۲۰۱۰، حل دقیق سه‌بعدی ورق مدرج تابعی با لایه‌های پیزوالکتریک بر روی بستر الاستیک توسعه علی‌بیگلو<sup>۱۴</sup> [۱۴] انجام شد. مژده‌ای و همکاران<sup>۱۵</sup> [۱۵] با استفاده از روش بدون المان پتروف-گالرکین محلی<sup>۱۶</sup> حل سه‌بعدی استاتیکی و دینامیکی ورق‌های مدرج تابعی را بدست آوردند. پاسخ ترمومکانیکی سه‌بعدی ورق‌های مدرج تابعی بر بستر الاستیک با استفاده از روش تربیع دیفرانسیل<sup>۱۵</sup> توسط آدینه و کدخدایان<sup>۱۶</sup> [۱۶] ارائه شد. این مطالعه بر روی ورق‌های موربی که برخی از خواص آن تابع دما است انجام شد. نیکبخت و همکاران<sup>۱۷</sup> [۱۷] پاسخ خمش سه‌بعدی ورق‌های مدرج تابعی را تا رسیدن به ناحیه تسلیم با استفاده از روش المان محدود لایه‌ای<sup>۱۶</sup> ارائه کردند. یک رویکرد واقعاً بدون المان مبتنی بر روش درونیابی متحرک کریجینگ<sup>۱۷</sup> برای تحلیل سه‌بعدی خمش ترمومکانیکی ورق‌های مدرج تابعی مورب تحت بارگذاری ترکیبی توسعه افقی<sup>۱۸</sup> [۱۸] ارائه شد. در این مقاله اثر پارامترهای مهمی از قبیل زاویه تورب<sup>۱۸</sup> و شاخص تغییرات ماده بر روی نتایج مورد مطالعه قرار گرفتند. بررسی

در سال ۲۰۰۳ تحلیل ترمومکانیک ورق مدرج تابعی متخلخل دوبعدی به روش المان محدود<sup>۱</sup> توسعه نعمت‌اله<sup>۲</sup> [۲] انجام شد. پس از آن در سال ۲۰۰۹، نعمت‌اله و همکاران<sup>۳</sup> [۳] رفتار الاستوپلاستیک مواد مدرج تابعی متخلخل را تحت بارگذاری حرارتی شدید بررسی کردند. در این مطالعه، ترکیبی از زیرکونیا ( $ZrO_2$ ) وآلیاژ تیتانیوم ۴V-۶Al-Ti در بازه دمایی ۳۰۰ تا ۲۰۹۰ کلوین استفاده شد. گائو و همکاران<sup>۴</sup> [۴] تحلیل ارتعاشات آزاد خطی و غیرخطی میکرو ورق‌های کامپوزیتی متخلخل تقویت شده با نانو تراشه‌های گرافنی بر روی بستر الاستیک را ارائه کردند. آن‌ها اثر کسر وزنی نانو تراشه‌های گرافنی، نسبت منظر و ضریب متخلخل را برروی فرکانس طبیعی ورق مورد بررسی قرار دادند. زنکور<sup>۵</sup> [۵] تحلیل خمش ورق‌های متخلخل را به کمک نظریه تغییر شکل برشی شبه سه‌بعدی ارائه داد. در این مطالعه ورق‌های تک لایه و ساندویچی مدرج تابعی مورد بررسی قرار گرفتند. تحلیل ترمومکانیک دوبعدی ورق‌های متخلخل مدرج تابعی با خواص واپسنه به دما به کمک روش حجم محدود توسعه گونگ<sup>۶</sup> و همکاران<sup>۷</sup> [۷] انجام شد. سپس در سال ۲۰۲۰، یک نظریه تغییر شکل برشی مثلاً شبیه سه‌بعدی برای تجزیه و تحلیل انتشار موج ورق‌های ساندویچی مدرج تابعی متخلخل بر بستر ویسکوالاستیک توسعه لیانگ<sup>۸</sup> و ونگ<sup>۸</sup> [۸] پیشنهاد گردید. برای محاسبه برش عرضی و تغییر شکل‌های طولی در این روش، جابجایی عرضی به اجزاء خمشی، برشی و کششی تقسیم شده است. ماشات<sup>۹</sup> و همکاران<sup>۹</sup> [۹] خمش ورق‌های مدرج تابعی متخلخل بر روی بستر الاستیک تحت بارهای رطوبتی-ترموکانیکی را توسعه تئوری ورق مرتبه بالا<sup>۱۰</sup> بررسی کردند. در این مطالعه اثرات کرنش‌های نرمال و برشی عرضی در نظر گرفته شده است. در سال ۲۰۲۱، تحلیل ارتعاشات ورق مدرج تابعی متخلخل با ضخامت متغیر بر روی بستر وینکلر-پسترنک<sup>۱۱</sup> به کمک نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول توسعه کومار<sup>۱۰</sup> و همکاران<sup>۱۰</sup> [۱۰] انجام شد. ارتعاشات اجرایی غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی ساخته شده از مواد مدرج تابعی متخلخل بر روی یک بستر الاستیک توسعه لیو<sup>۱۱</sup> و همکاران<sup>۱۱</sup> [۱۱] مورد بررسی قرار گرفت. در این مطالعه ضمن در نظر گرفتن یک توزیع تخلخل

1 Finite element method

2 Nemat-Alla

3 Zenkour

4 Gong

5 Liang and Wang

6 Mashat

7 Higher-order plate theory

8 Winkler-Pasternak

9 Kumar

10 Liu

11 Material gradient index

12 Sah and Ghosh

13 Vel and Batra

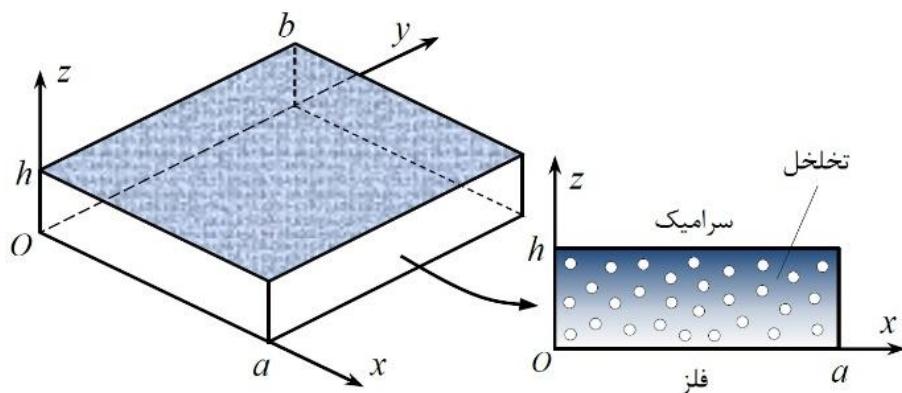
14 Meshless local Petrov-Galerkin method

15 Differential quadrature method

16 Layer-wise

17 Moving Kriging interpolation method

18 Skew angle



شکل ۱. ورق مدرج تابعی متخلخل در دستگاه مختصات سه بعدی

Fig. 1. Porous FG plate in the 3D coordinate system

افزایش همگرایی و دقت نتایج در نتیجه‌ی کاهش وابستگی تابع تقریب به تابع هسته است [۲۰]. تا کنون از روش بازتولید نقطه با هسته پایه شعاعی برای حل چندین مساله از جمله مسائل الاستیک [۲۱]، الاستوپلاستیک [۲۰]، الاستودینامیک [۱۹] و غیره استفاده شده است. با این حال، تقریباً تمامی این مطالعات به تحلیل‌های دوبعدی محدود هستند. با توجه به دانش نویسنده، این اولین باری است که روش بازتولید نقطه با هسته پایه شعاعی برای تحلیل سه‌بعدی یک مساله تermo-استوپلاستیک فرمول‌بندی شده و به کار گرفته می‌شود.

در مطالعه حاضر، یک مدل سه‌بعدی بدون المان مبتنی بر روش بازتولید نقطه با هسته پایه شعاعی به منظور تحلیل خمش تermo-استوپلاستیک ورق‌های مدرج تابعی متخلخل با خواص وابسته به دما در معرض ترکیبی از بارهای مکانیکی و حرارتی ارائه شده است.

## ۲- توصیف مساله و خواص مواد

مطابق شکل ۱، یک ورق مدرج تابعی متخلخل مستطیلی به ابعاد  $a \times b \times h$  در سیستم مختصات دکارتی  $x \times y \times z$  در نظر بگیرید. محور  $z$  در راستای ضخامت و صفحه  $y \times z$  بر سطح پایینی ورق منطبق است. فرض بر این است که خواص ورق از فلز در سطح پایینی تا سرامیک در سطح بالایی تغییر می‌کند. کسر حجمی فلز توسط یک تابع توانی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V^m(z) = 1 - V_{max}^c \left( \frac{z}{h} \right)^n \quad (1)$$

مقالات این حوزه نشان می‌دهد که تاکنون تحلیل سه‌بعدی از تأثیر تخلخل بر خمش تermo-استوپلاستیک ورق‌های مدرج تابعی با خواص وابسته به دما ارائه نشده است.

در سال‌های اخیر روش‌های بدون المان به عنوان یکی از قوی‌ترین روش‌های محاسباتی بخوبی توسعه یافته و در حل بسیاری از مسائل با موفقیت بکار رفته‌اند. از آنجاکه توابع تقریب در این روش‌ها تنها با استفاده از اطلاعات یک سری گره توزیع شده در دامنه مساله ایجاد می‌شوند، اثرات نامطلوب مشبندی در شبیه‌سازی‌های عددی کاهش یافته و یا حذف می‌گردد. از این‌رو روش‌های بدون المان نسبت به دیگر روش‌های عددی متداول مزایای قابل توجهی دارند که از جمله آنها می‌توان به فرآیند پیاده‌سازی عددی ساده، دقت محاسباتی بالا و پایداری خوب نتایج اشاره کرد. یکی از متداول‌ترین و پرکاربردترین این روش‌ها روش بازتولید نقطه با هسته<sup>۱</sup> است که مبتنی بر روش هیدرودینامیک ذرات هموار<sup>۲</sup> بسط یافته است. اگرچه توابع شکل ایجاد شده توسط این روش به اندازه کافی هموار هستند اما تأثیر توابع مختلف هسته بر دقت و پایداری نتایج از کاستی‌های آن محسوب می‌شود [۱۹]. به منظور کاستن از اثرات منفی توابع هسته<sup>۳</sup> و همچنین بهبود دقت و پایداری محاسبات، توابع پایه شعاعی<sup>۴</sup> با روش بازتولید نقطه با هسته ترکیب شده و روش جدیدی به نام روش بازتولید نقطه با هسته پایه شعاعی<sup>۵</sup> معرفی شده است. از مهمترین مزایای این روش

- 
- 1 Reproducing Kernel Particle Method (RKPM)
  - 2 Smooth particle hydrodynamics method
  - 3 Kernel functions
  - 4 Radial basis functions
  - 5 Radial Basis Reproducing Kernel Particle Method (RRKPM)

## جدول ۱. خواص وابسته به دمای اجزای ماده مدرج تابعی [۴]

Table 1. Temperature-dependent properties of FG material components [4]

واحد	پارامتر جزء	جزء
GPa	$E^c(T) = -8/1 \times 10^{-7}T^4 - 0.5T + 122/2$	سرامیک:
-	$\nu^c = 0.333$	(ZrO <sub>۲</sub> )
1 / K	$\alpha^c(T) = 12/7 \times 10^{-11}T^3 - 18/9 \times 10^{-9}T + 13/31 \times 10^{-7}$	
kg/m <sup>3</sup>	$\rho^c(T) = 3657 / \{1 + \alpha(T - 300)\}^{\gamma}$	
W/mK	$\kappa^c(T) = 0.116 \times 10^{-5}T^3 + 0.21 \times 10^{-7}T + 1/71$	
J/kgK	$c^c(T) = 0.71 \times 10^{-7}T^3 - 6/19 \times 10^{-9}T^2 + 0.795T + 274$	
GPa	$E^m(T) = -0.565T + 122/7$	فلز:
-	$\nu^m(T) = 32 \times 10^{-7}T + 0.289$	(Ti-6Al-4V)
MPa	$\sigma_y^m(T) = 2/434 \times 10^{-8}T^3 + 1/607 \times 10^{-6}T^2 - 1/11T + 1540/9$	
MPa	$H^m(T) = -1/1529T + 230.6/14$	
1 / K	$\alpha^m(T) = -2/69 \times 10^{-11}T^3 + 5/56 \times 10^{-9}T + 7/43 \times 10^{-7}$	
kg/m <sup>3</sup>	$\rho^m(T) = 4420 / \{1 + \alpha(T - 300)\}^{\gamma}$	
W/mK	$\kappa^m(T) = 0.17T + 1/1$	
J/kgK	$c^m(T) = 4/43 \times 10^{-7}T^3 - 9/74 \times 10^{-9}T^2 + 0.878T + 350$	

که در آن  $V_{max}^c$  حداکثر کسر حجمی سرامیک مربوط به سطح بالایی (

$n \leq V_{max}^c \leq 1$  و  $n$  شاخص تعییرات مواد در راستای ضخامت است (

). در این مطالعه صفحه مدرج تابعی مخلوطی از زیرکونیا (ZrO<sub>۲</sub>) و آلیاژ

Titanium-4V-6Al در نظر گرفته شده و خواص وابسته به دمای آنها در

جدول ۱ ارائه شده است.

$$\nu_0^{eff}(T, z) = \nu^c(T)V^c(z) + \nu^m(T)V^m(z) \quad (3)$$

با توجه به اینکه جزء سرامیکی همواره تغییر شکل الاستیک خود را

حفظ می‌کند و در واقع تسليم در جزء فلزی مواد مدرج تابعی رخ می‌دهد،

روش‌های همگنس‌سازی متنوعی برای توصیف رفتار غیرخطی و نیز تخمین

خواص مؤثر مواد مدرج تابعی بکار می‌رود. یکی از ساده‌ترین و پرکاربردترین

این روش‌ها، قانون آمیختگی اصلاح شده<sup>۱</sup> [۲۲] است که خواص مواد مؤثر

یک ماده مرکب فلز-سرامیک را توسط کسر حجمی اجزای آن پیش‌بینی

می‌کند. بر اساس این قانون مدول یانگ  $E_{y0}^{eff}$ ، ضریب پواسون  $\nu_{y0}^{eff}$ ، تنش

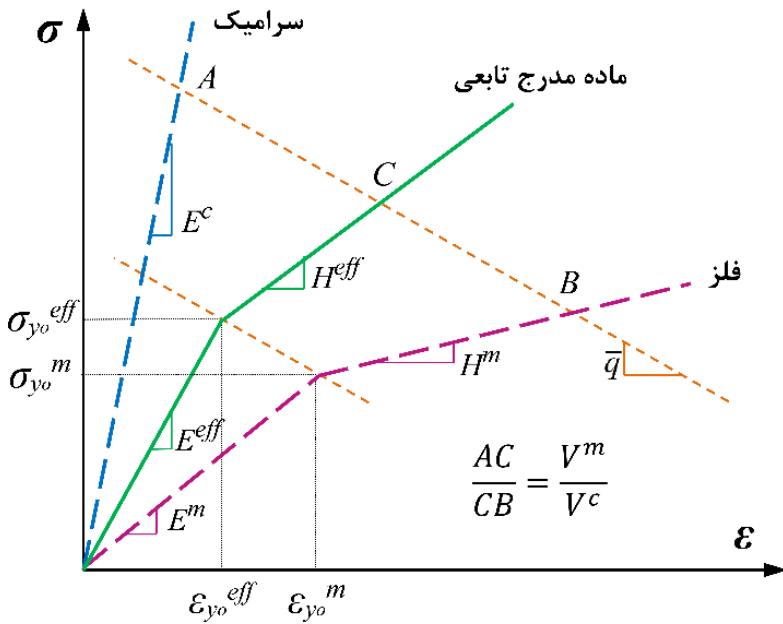
تسليم  $H_0^{eff}$  و مدول مماسی<sup>۲</sup>  $H_{y0}^{eff}$  یک ماده مدرج تابعی غیرمتخلخل

بصورت زیر بیان می‌شود:

$$A_E(T) = \frac{q + E^c(T)}{q + E^m(T)}, \quad A_H(T) = \frac{q + E^c(T)}{q + H^m(T)} \quad (4)$$

1 Modified rule of mixtures

2 Tangent modulus



شکل ۲. نمایش شماتیک قانون آمیختگی اصلاح شده برای تخمین منحنی تنش-کرنش مواد مدرج تابعی

**Fig. 2. Schematic representation of the modified rule of mixtures for estimating the stress-strain curve of FG materials**

$$\alpha_0^{eff}(T, z) = \alpha^m(T) + \frac{[1/K_0^{eff}(T, z) - 1/K^m(T)][\alpha^c(T) - \alpha^m(T)]}{1/K^c(T) - 1/K^m(T)} \quad (10)$$

که در آن  $K^{eff}$  مدول بالک مؤثر بوده و داریم  
 $K_o^{eff}(T, z) = \frac{E_o^{eff}(T, z)}{\tau(1-\nu_o^{eff}(T, z))}$   
 خواص مؤثر ماده مدرج تابعی متخلخل بر اساس مدل دانه‌های کروی  
 معلق<sup>۱</sup> بصورت زیر محاسبه شده است [۳]:

$$E^{eff} = \frac{8E_0^{eff}(1-p)(1-\nu_0^{eff})(23+8\nu_0^{eff})}{8(1+\nu_0^{eff})(23+8\nu_0^{eff}) + p(5+\nu_0^{eff})(37-8\nu_0^{eff})} \quad (11)$$

$$E^{eff} = \frac{8E_0^{eff}(1-p)(1-\nu_0^{eff})(23+8\nu_0^{eff})}{8(1+\nu_0^{eff})(23+8\nu_0^{eff}) + p(5+\nu_0^{eff})(37-8\nu_0^{eff})} \quad (12)$$

$$\rho^{eff} = \rho_0^{eff}(1-p) + \rho_a p \quad (13)$$

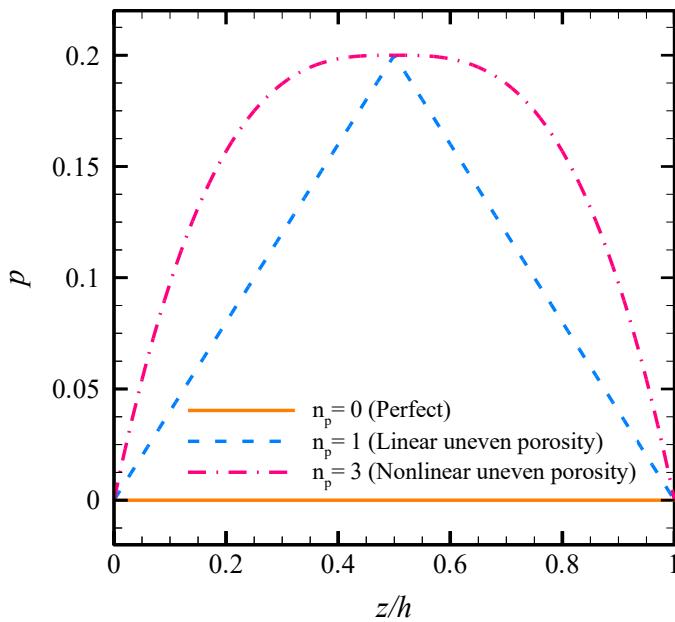
بالانویس‌های  $m$  و  $c$  به ترتیب بیانگر جزء فلزی و سرامیکی و  $\underline{q}$  نسبت انتقال تنش به کرنش است ( $0 \leq \underline{q} \leq \infty$ ). به ازای  $\underline{q} = 0$ ، ماده مدرج تابعی زمانی بصورت پلاستیک جریان می‌یابد که جزء فلزی آن تسلیم شود [۲۳]. در اینجا  $\underline{q}$  برابر ۵ GPa در نظر گرفته شده است. شکل ۲ بطور شماتیک منحنی تنش-کرنش مواد مدرج تابعی را بر اساس قانون آمیختگی اصلاح شده نشان می‌دهد. هدایت حرارتی  $K^{eff}$ ، چگالی  $\rho^{eff}$ ، گرمای ویژه  $c^{eff}$  و ضریب انبساط حرارتی  $\alpha^{eff}$  به صورت بیان می‌شوند [۲۴]:

$$\kappa_0^{eff}(T, z) = \kappa^m(T) + \frac{(\kappa^c(T) - \kappa^m(T))V^c(z)}{1 + \left[ (\kappa^c(T) - \kappa^m(T)) / 3\kappa^m(T) \right] V^m(z)} \quad (4)$$

$$\rho_0^{eff}(T, z) = \rho^m(T)V^m(z) + \rho^c(T)V^c(z) \quad (5)$$

$$c_0^{eff}(T, z) = \frac{1}{\rho_0^{eff}(T, z)} \left( c^c(T)\rho^c(T)V^c(z) + c^m(T)\rho^m(T)V^m(z) \right) \quad (6)$$

۱ Suspended spherical grain model



شکل ۳. تغییرات ضریب تخلخل در راستای ضخامت ورق به ازای مقادیر مختلف شاخص تغییرات تخلخل ( $p_0 = 0.2$ ) ،  $n_p$  ،

**Fig. 3. Variation of the porosity coefficient through the thickness of the plate for different values of the porosity gradient index  $n_p$  , ( $p_0 = 0.2$ )**

$n_p = 0$  نشان‌دهنده ماده غیرمتخلخل و  $n_p = 1$  و  $n_p > 1$  بترتیب بیانگر توزیع تخلخل ناهمگن خطی<sup>۲</sup> و غیرخطی<sup>۳</sup> در ماده می‌باشند.

در این مطالعه فرض شده است که ورق در ابتدا در دمای یکنواخت ۳۰۰ کلوین بوده و کاملاً بدون تنفس است. سپس سطح بالایی ورق در مععرض ترکیبی از بارهای حرارتی و مکانیکی قرار می‌گیرد. بار حرارتی به صورت شار سینوسی  $Q$  با شدت  $q$  بصورت زیر بیان می‌شود:

$$p = p_0 \left[ 1 - \left| \frac{z - 0.5h}{0.5h} \right|^{n_p} \right] \quad (17)$$

بار مکانیکی گستردہ یکنواخت نیز بشرح زیر اعمال می‌شود:

$$Q(x, y, h, t) = q \sin(\pi x / a) \sin(\pi y / b) \quad (18)$$

که در آن  $p$  ضریب تخلخل و  $\kappa_a$ ،  $\rho_a$  و  $c_a$  بترتیب هدایت حرارتی، چگالی و گرمای ویژه هوا هستند. برای حالت توزیع تخلخل ناهمگن،  $p$  از رابطه زیر بدست آمده است [۲۵]:

$$\nu^{\text{eff}} = \nu_0^{\text{eff}}, \quad \alpha^{\text{eff}} = \alpha_0^{\text{eff}}, \quad \sigma_y^{\text{eff}} = \sigma_{y0}^{\text{eff}} \quad (16)$$

که در آن  $p$  ضریب ثابت و  $n_p$  شاخص تغییرات تخلخل است ( $n_p \geq 0$ ). در شکل ۳ توزیع تخلخل در راستای ضخامت ورق به ازای  $p_o = 0.2$  و مقادیر مختلف  $n_p$  نشان داده شده است. مطابق شکل،

2 Linear uneven porosity distribution

3 Nonlinear uneven porosity distribution

1 Uneven porosity distribution

$$d\sigma_{ij,j} + db_i = 0 \quad (26)$$

همچنین شرایط مرزی گیردار (C)، ساده (S) و آزاد (F) در لبه‌های جانبی ورق بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$dt_i = d\sigma_{ij} n_j = d\bar{t}_i : \Gamma_t \quad (27)$$

$$du_i = d\bar{u}_i : \Gamma_u \quad (28)$$

$$Q(x, y, h, t) = q \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b) \quad (19)$$

$$\text{C: } u = v = w = 0 \text{ on } x = 0, a \text{ and } y = 0, b \quad (20)$$

### ۳-۲- معادلات حاکمه مکانیکی

فرم نموی معادلات حاکمه تعادل مکانیکی و شرایط مرزی آن برای دامنه  $\Omega$  با مرز  $\Gamma$  بصورت زیر بیان می‌شود:

که در آن  $du_i, dt_i, d\sigma_{ij}$  و  $db_i$  به ترتیب بیانگر مؤلفه‌های

بردار نمو جابجایی، تنش، ترکش سطح و نیروی حجمی هستند. همچنین  $d\bar{t}_i$  و  $d\bar{u}_i$  به ترتیب نمو جابجایی و تنش سطحی معین بر روی مرزهای  $\Gamma_u$  و  $\Gamma_t$  را نشان می‌دهند. بنابر تئوری پلاستیسیته نموی<sup>۱</sup>، بردار نمو کرنش کل  $\{d\varepsilon\}$ ، که مؤلفه‌های آن بصورت  $(d\varepsilon_{ij} + du_{j,i})/2$  تعریف می‌شوند، می‌تواند به بخش‌های الاستیک  $\{d\varepsilon^e\}$ ، حرارتی  $\{d\varepsilon^{e,th}\}$ ، پلاستیک  $\{d\varepsilon^p\}$  و بخش ناشی از خواص وابسته به دما  $\{d\varepsilon^{e,th}\}$  تفکیک

: [۲۶]

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon^e\} + \{d\varepsilon^{e,th}\} + \{d\varepsilon^p\} + \{d\varepsilon^{e,th}\} \quad (29)$$

$$\text{S: } \begin{cases} \sigma_{xx} = 0, v = w = 0 & \text{on } x = 0, a \\ \sigma_{yy} = 0, u = w = 0 & \text{on } y = 0, b \end{cases} \quad (21)$$

### ۳-۳- معادلات حاکمه

#### ۳-۱- معادلات حاکمه حرارتی

معادله هدایت حرارت زمانمند در دامنه  $\Omega$  که با مرز  $\Gamma$  احاطه شده است، زمانیکه خواص ماده به مختصات نقطه  $(x, y, z)$  و دما وابسته است، در غیاب منبع گرما، بصورت زیر بیان می‌شود:

$$c(\mathbf{x}, T) \nabla T(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, T) c(\mathbf{x}, T) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (22)$$

شرایط اولیه و مرزی مساله به شرح زیر می‌باشد:

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}) \quad \text{روی دامنه } \Omega : \quad (23)$$

که در آن  $\{a\}$ ،  $[\mathbf{D}_e]$  و  $\{\sigma'\}$  بترتیب بردار ضریب انبساط حرارتی، ماتریس سختی الاستیک، ضریب پلاستیک و تانسور تنش انحرافی هستند. برای تعیین نمو کرنش پلاستیک از مدل پراندل-رویس<sup>۲</sup> که بر مبنای قانون جربان همراه<sup>۳</sup> شکل گرفته است در ترکیب باتابع تسلیم فون میزز<sup>۴</sup> ( $F = \sqrt{\sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} - \sqrt{\sigma_y^2}$ ) استفاده شده است. برای حالت کرنش سختی همسانگرد وابسته به دما<sup>۵</sup>، تابع تسلیم بصورت  $\sigma_y = \sigma_y(T) + H(T) \bar{\varepsilon}^p$

$$T(\mathbf{x}, t) = \bar{T}(\mathbf{x}, t) : \Gamma_t \quad \text{روی مرز } \Gamma_t \quad (24)$$

$$q(\mathbf{x}, t) = -\kappa(\mathbf{x}, T) \frac{\partial T}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = \bar{q}(\mathbf{x}, t) : \Gamma_q \quad \text{روی مرز } \Gamma_q \quad (25)$$

که  $T$  بیانگر دمای اولیه و  $\bar{T}$  و  $\bar{q}$  به ترتیب دما و شار حرارتی معین بر روی مرزهای  $\Gamma_t$  و  $\Gamma_q$  را نشان می‌دهند. همچنین  $n$  بردار یکه عمود بر  $\Gamma_q$  به سمت خارج است.

1 Incremental plasticity

2 Prandtl-Reuss model

3 Associated flow rule

4 von-Mises yield function

5 Temperature-dependent isotropic strain hardening

$$f^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^N R_k(\mathbf{x}) a_k(t) + \sum_{l=1}^m g_l(\mathbf{x}) b_l(t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_x \quad (36)$$

بيان می‌شود، که در آن  $\sigma_y$ ،  $H$  و  $\bar{\varepsilon}^p$  به ترتیب تنش تسلیم اولیه، پارامتر ضریب کرنش سختی و کرنش پلاستیک معادل هستند. ضریب پلاستیک را می‌توان با اعمال شرط تطابق<sup>۱</sup> ( $dF(T, \{\boldsymbol{\delta}\}, K) = 0$ ) بدست آورد:

که در آن  $R_k(\mathbf{x})$  تابع بازتولید هسته‌ای،  $g_l(\mathbf{x})$  تابع پایه شعاعی و  $a_k$  و  $b_l$  ضرایب مجهول هستند. همچنین  $N$  تعداد گره‌های توزیع شده در زیردامنه  $\Omega_x$  و  $m$  تعداد توابع پایه شعاعی است. تابع  $R_k$  بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_k(\mathbf{x}) = \mathbf{s}_k^T(\mathbf{x}) \mathbf{p}_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) w_k(\mathbf{x}) R_k(\mathbf{x}_k) \Delta V_k \quad (37)$$

که در آن  $w_k(\mathbf{x})$  تابع هسته،  $\Delta V_k$  حجم دامنه پشتیبان گره  $k$  و  $\mathbf{s}_k^T(\mathbf{x})$  بردار ضرایب است که توسط شرایط بازتولید تقریب هسته تعیین می‌شود. بردار پایه چندجمله‌ای  $\mathbf{p}_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$  را می‌توان برای حالت سه‌بعدی بصورت زیر بیان کرد:

$$\mathbf{p}_k^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) = \{1, x - x_k, y - y_k, z - z_k, (x - x_k)^2, (y - y_k)^2, (z - z_k)^2, (x - x_k)(y - y_k), (y - y_k)(z - z_k), (z - z_k)(x - x_k)\} \quad (38)$$

تابع هسته به صورت زیر در نظر گرفته شده است [۱۹]:

$$w_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} 2/3 - 4\bar{r}_k^2 + 4\bar{r}_k^3 & \bar{r}_k \leq 1/2 \\ 4/3 - 4\bar{r}_k + 4\bar{r}_k^2 - \frac{4}{3}\bar{r}_k^3 & 1/2 < \bar{r}_k \leq 1 \\ 0 & \bar{r}_k > 1 \end{cases} \quad (39)$$

که در آن  $d_k = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|$  و  $\bar{r}_k = d_k / r_k$  می‌باشد. در این مطالعه از زیردامنه پشتیبان کروی به شعاع  $r_k$  اطراف هر گره استفاده شده است و داریم:  $r_k = \alpha_i \bar{d}_k$ ؛  $\alpha_i$  ضریب مقیاس و  $\bar{d}_k$  میانگین  $d_k$  را نشان می‌دهد. در رابطه (۳۶)،  $(\mathbf{x}, t)$  بصورت زیر در نظر گرفته شد و است [۲۰ و ۲۱]:

$$g_l(\mathbf{x}) = \left( 6 + 36 \frac{d_l}{\delta} + 82 \left( \frac{d_l}{\delta} \right)^2 + 72 \left( \frac{d_l}{\delta} \right)^3 + 30 \left( \frac{d_l}{\delta} \right)^4 + 5 \left( \frac{d_l}{\delta} \right)^5 \right) \left( 1 - \frac{d_l}{\delta} \right)^6 \quad (40)$$

$$\{d\varepsilon^{th}\} = \{\boldsymbol{\sigma}\} dT, \{d\varepsilon^{e,th}\} = \left( \frac{\partial [\mathbf{D}^e]^{-1}}{\partial T} \right) \{\boldsymbol{\sigma}\} dT, \{d\varepsilon^p\} = d\lambda \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right) = d\lambda \{\boldsymbol{\sigma}\} \quad (31)$$

$$A = \{\boldsymbol{\sigma}'\}^T [\mathbf{D}^e] \{\boldsymbol{\sigma}'\} - \frac{\partial F}{\partial \sigma} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon^p} \frac{\partial \varepsilon^p}{\partial K} \left\{ \frac{\partial K}{\partial \varepsilon^p} \right\}^T \{\boldsymbol{\sigma}'\} \quad (32)$$

که در آن  $\bar{\sigma}$  تنش معادل و  $K$  ضریب کارسختی<sup>۲</sup> می‌باشد که نمو آن بصورت  $dK = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$  در نظر گرفته شده است. اکنون معادلات مشکله ترمو-استوپلاستیک نموی را می‌توان با استفاده از روابط (۲۹) تا (۳۱) بصورت زیر استخراج کرد:

$$\{d\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}^{ep}] (\{d\varepsilon\} - \{d\tilde{\varepsilon}^{th,ep}\}) \quad (33)$$

$$[\mathbf{D}^{ep}] = [\mathbf{D}^e] - \frac{1}{A} [\mathbf{D}^e] \{\boldsymbol{\sigma}'\} \{\boldsymbol{\sigma}'\}^T [\mathbf{D}^e] \quad (34)$$

که در آن  $[\mathbf{D}^{ep}]$  ماتریس سختی الاستوپلاستیک و  $\{d\tilde{\varepsilon}^{th,ep}\}$  بردار نمو کرنش ترمو-استوپلاستیک کل است.

#### ۴- پیاده‌سازی روش بازتولید نقطه با هسته پایه شعاعی برای مساله ترمو-استوپلاستیک سه‌بعدی

۴-۱- توابع شکل روش بازتولید نقطه با هسته پایه شعاعی  
تابع تقریب  $(\mathbf{x}, t)$ <sup>۳</sup>، که می‌تواند مؤلفه‌های بردار جابجایی یا دما باشد، در هر نقطه  $\mathbf{x}$  بر اساس ترکیب خطی تابع بازتولید هسته‌ای<sup>۴</sup> و تابع پایه شعاعی به شرح زیر ساخته می‌شود [۲۱]:

1 Consistency condition

2 Work hardening

3 Reproducing kernel function

#### ۴-۲- گسسته‌سازی معادلات حرارتی

فرم ضعیف محلی معادله (۲۱) بر روی یک زیردامنه محلی  $\Omega_s^I$  اطراف

گره  $I$  بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_{\Omega_s^I} v_I \left( \rho(\mathbf{x}, T) c(\mathbf{x}, T) \dot{T}(\mathbf{x}, t) - [\kappa(\mathbf{x}, T) T_{,i}(\mathbf{x}, t)]_{,i} \right) d\Omega + \quad (47)$$

$$+ \tilde{\alpha} \int_{\Gamma_{sT}^I} v_I (T(\mathbf{x}, t) - \bar{T}) d\Gamma = 0$$

که در آن  $v_I$  تابع وزن و  $\tilde{\alpha}$  ضریب جریمه جهت ارضاء شرایط مرزی اساسی است ( $\tilde{\alpha} >> 1$ ).  $\Gamma_{sT}^I$  قسمتی از مرز  $\partial\Omega_s^I$  می‌باشد که شرایط مرزی اساسی بر روی آن معین است. با انتگرال‌گیری جزء به جزء و نیز اعمال قضیه دیورژانس و شرایط مرزی طبیعی داریم:

$$\int_{\Omega_s^I} v_I \rho(\mathbf{x}, T) c(\mathbf{x}, T) \dot{T}(\mathbf{x}, t) d\Omega + \quad (48)$$

$$\int_{\Omega_s^I} v_{I,i} \kappa(\mathbf{x}, T) T_{,i}(\mathbf{x}, t) d\Omega -$$

$$\int_{\Gamma_{sq}^I} v_I \kappa(\mathbf{x}, T) T_{,i}(\mathbf{x}, t) n_i d\Gamma -$$

$$- \int_{\Gamma_{sT}^I} v_I \kappa(\mathbf{x}, T) T_{,i}(\mathbf{x}, t) n_i d\Gamma +$$

$$\tilde{\alpha} \int_{\Gamma_{sT}^I} v_I T(\mathbf{x}, t) d\Gamma =$$

$$- \int_{\Gamma_{sq}^I} v_I \bar{q} d\Gamma + \tilde{\alpha} \int_{\Gamma_{sT}^I} v_I \bar{T} d\Gamma$$

که در آن  $\Gamma_{si}^I$  قسمتی از  $\Gamma_s^I$  داخل  $\Omega_s^I$  است و  $\Gamma_{sq}^I$  قسمتی از  $\Gamma_{sT}^I$  است که شرایط مرزی طبیعی روی آن معین می‌باشد. میدان دما را می‌توان بر اساس رابطه (۴۵) بصورت زیر بیان کرد:

$$T^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{J=1}^N \phi_J(\mathbf{x}) T_J(t) \quad (49)$$

که در آن  $T_J(t)$  دمای گره  $J$  است. با جایگذاری رابطه (۴۹) در (۴۸)، سیستم معادلات هدایت حرارت زمانمند غیرخطی بدست می‌آید:

$$\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{x}, T) \dot{\mathbf{T}}(t) + \hat{\mathbf{K}}(\mathbf{x}, T) \mathbf{T}(t) = \hat{\mathbf{q}} \quad (50)$$

که در آن  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|$  و  $\delta$  پارامتر شکل است. قیود زیر باید برای

دستیابی به یک تابع تقریب منحصر به فرد اعمال شوند:

اعمال رابطه (۳۶) به تمام گره‌های توزیع شده در  $\Omega_x$ ، برای تعیین

ضرایب  $a_k$  و  $b_l$ ، منجر به تشکیل  $N$  معادله خطی زیر می‌شود:

$$f(\mathbf{x}_j, t) = \sum_{k=1}^N R_k(\mathbf{x}_j) a_k(t) + \sum_{l=1}^m g_l(\mathbf{x}_j) b_l(t), \quad (j=1, 2, \dots, N) \quad (42)$$

که در آن

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$\hat{\mathbf{f}} = [f_1, f_2, \dots, f_N]^T, \quad \tilde{\mathbf{R}} = [\mathbf{R}(\mathbf{x}_1), \mathbf{R}(\mathbf{x}_2), \dots, \mathbf{R}(\mathbf{x}_N)]_{(N \times N)}^T,$$

$$\mathbf{G} = [\mathbf{g}(\mathbf{x}_1), \mathbf{g}(\mathbf{x}_2), \dots, \mathbf{g}(\mathbf{x}_N)]_{(m \times N)}^T \quad (44)$$

با حل معادله (۴۳) و تعیین ضرایب مجھول، تابع تقریب مساله بصورت

زیر قابل بیان است:

$$f^h(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{f}} = \sum_{l=1}^N \phi_l(\mathbf{x}) f_l(t) \quad (45)$$

بنابراین بردار توابع شکل بصورت زیر است:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \{\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, \phi_N(\mathbf{x})\} \quad (46)$$

$$\Delta u^h(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{u}(t) = \sum_{J=1}^N \phi_J(\mathbf{x}) \Delta u_J(t) \quad (56)$$

$$\Delta u^h(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{u}(t) = \sum_{J=1}^N \phi_J(\mathbf{x}) \Delta u_J(t) \quad (57)$$

که در آن نمو جابجایی گره  $J$  است و  $\mathbf{B}_J$  بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{B}_J = \begin{bmatrix} \phi_{J,x} & 0 & 0 & \phi_{J,y} & 0 & \phi_{J,z} \\ 0 & \phi_{J,y} & 0 & \phi_{J,x} & \phi_{J,z} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{J,z} & 0 & \phi_{J,y} & \phi_{J,x} \end{bmatrix}^T \quad (58)$$

با جایگذاری رابطه (57) در (55)، سیستم معادلات ترمو-استوپلاستیک نموی گسسته بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$\sum_{J=1}^M \mathbf{K}_{IJ} \Delta \mathbf{u}_J = \Delta \mathbf{f}_I, \quad (I = 1, 2, \dots, M) \quad (59)$$

$$\hat{C}_{IJ} = \int_{\Omega_s^I} \rho(\mathbf{x}, T) c(\mathbf{x}, T) \phi_I(\mathbf{x}) \phi_J(\mathbf{x}) d\Omega \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \hat{K}_{IJ} = & \int_{\Omega_s^I} \kappa(\mathbf{x}, T) \phi_{I,i}(\mathbf{x}) \phi_{J,i}(\mathbf{x}) d\Omega - \int_{\Gamma_{st}^I} \kappa(\mathbf{x}, T) \phi_I(\mathbf{x}) \phi_{J,i}(\mathbf{x}) n_i d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_{st}^I} \kappa(\mathbf{x}, T) \phi_I(\mathbf{x}) \phi_{J,i}(\mathbf{x}) n_i d\Gamma + \tilde{\alpha} \int_{\Gamma_{st}^I} \phi_I(\mathbf{x}) \phi_J(\mathbf{x}) d\Gamma \end{aligned} \quad (52)$$

$$\hat{q}_I = - \int_{\Gamma_{sq}^I} \bar{q} \phi_I(\mathbf{x}) d\Gamma + \tilde{\alpha} \int_{\Gamma_{st}^I} \bar{T} \phi_I(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (53)$$

در رابطه (50)،  $\hat{\mathbf{K}}$  و  $\hat{\mathbf{C}}$  به ترتیب ماتریس‌های سختی و میرایی و  $\hat{\mathbf{q}}$  بردار نیرو است. برای حل معادله (50) از روش تکرار در هر گام زمانی استفاده شده و گسسته‌سازی دامنه زمانی توسط روش کرانک-نیکلسون<sup>۱</sup> [۲۷] انجام می‌شود.

#### ۴- گسسته‌سازی معادلات مکانیکی

فرم ضعیف محلی برای رابطه (25) بر روی زیردامنه  $\Omega_s^I$  بصورت بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{IJ} = & \int_{\Omega_s^I} \mathbf{B}_I \mathbf{D}^{ep} \mathbf{B}_J d\Omega - \int_{\Gamma_{st}^I} \Phi_I \mathbf{N} \mathbf{D}^{ep} \mathbf{B}_J d\Gamma - \\ & \int_{\Gamma_{su}^I} \Phi_I \mathbf{N} \mathbf{D}^{ep} \mathbf{B}_J d\Gamma + \tilde{\alpha} \int_{\Gamma_{su}^I} \Phi_I \Phi_J d\Gamma \end{aligned} \quad (60)$$

که در آن  $\Gamma_{su}^I$  بخشی از مرز  $\Gamma_s^I$  می‌باشد که شرایط مرزی اساسی روی آن معین است. با انتگرال‌گیری جزء به جزء و نیز اعمال قضیه دیورژانس و شرایط مرزی طبیعی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_s^I} v_I (\Delta \sigma_{ij,j} + \Delta b_i) d\Omega_s + \tilde{\alpha} \int_{\Gamma_{su}^I} v_I (\Delta u_i - \Delta \bar{u}_i) d\Gamma = 0 \\ & = \int_{\Omega_s^I} v_I \Delta \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_{st}^I} v_I \Delta \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}^I} v_I \Delta \sigma_{ij} n_j d\Gamma + \tilde{\alpha} \int_{\Gamma_{su}^I} v_I \Delta u_i d\Gamma \\ & = \int_{\Omega_s^I} v_I \Delta b_i d\Omega + \int_{\Gamma_{st}^I} v_I \Delta \bar{u}_j d\Gamma + \tilde{\alpha} \int_{\Gamma_{su}^I} v_I \Delta \bar{u}_i d\Gamma \end{aligned} \quad (54)$$

که در آن  $\mathbf{K}$  و  $\Delta \mathbf{f}$  بترتیب ماتریس سختی استوپلاستیک و بردار نمو نیرو بوده و  $M$  تعداد کل گره‌ها است.

#### ۵- نتایج عددی

در این بخش پیش از حل مساله توسط مدل پیشنهادی، ابتدا همگرایی، دقیق و کارایی آن از طریق مقایسه نتایج بدست آمده با نتایج حاصل از روش‌های تحلیلی و عددی موجود در مراجع دیگر اثبات می‌گردد.

به طوری که  $\Gamma_{st}^I$  قسمتی از  $\Gamma_s^I$  است که شرایط مرزی طبیعی روی آن معین می‌باشد. با توجه به روابط (۳۳) و (۴۵)، نمو میدان‌های جابجایی و تش بصورت زیر بیان می‌شوند:

1 Crank-Nicholson method

### جدول ۲. همگرایی نتایج خیز بی بعد برای ورق مربعی SSSS مدرج تابعی (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>)

Table 2. Convergence of dimensionless deflection of SSSS FG square plate (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>)

آرایش گرهی	RRKPM	خطای نسبی (%)	مرجع [۱۷]
۷×۷×۷	۱/۲۱۱۷۹	۲/۲۶۰۴	۱/۱۸۵۰۱
۹×۹×۹	۱/۱۹۵۹۹	۰/۹۲۶۸	۰/۳۴۹۲
۱۱×۱۱×۱۱	۱/۱۸۹۱۵	۰/۳۲۱۵	۰/۳۰۹۸
۱۳×۱۳×۱۳	۱/۱۸۸۸۱		
۱۵×۱۵×۱۵	۱/۱۸۸۶۸		

### جدول ۳. همگرایی نتایج خیز بی بعد برای ورق مربعی SSSS مدرج تابعی (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) به ازای مقادیر مختلف

Table 3. Convergence of dimensionless deflection of SSSS FG square plate (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) for different values of

δ	RRKPM	خطای نسبی (%)	مرجع [۱۷]
۲/۲	۱/۱۹۴۷۷	۰/۸۲۳۶	۱/۱۸۵۰۱
۲/۳	۱/۱۹۲۱۵	۰/۶۰۲۴	۰/۴۷۳۶
۲/۴	۱/۱۹۰۶۲	۰/۳۴۹۲	۰/۳۸۰۵
۲/۵	۱/۱۸۹۱۵	۰/۵۲۴۴۳	۰/۵۲۴۳
۲/۶	۱/۱۸۹۵۲	۰/۶۳۷۰	۰/۶۳۷۰
۲/۷	۱/۱۹۱۲۲		
۲/۸	۱/۱۹۲۵۶		

با حل مرجع [۱۷] تطبیق یافته است. جدول ۳ نیز همگرایی نتایج خیز بی بعد  $\bar{w}$  ورق مربعی مدرج تابعی را به ازای  $h/a = ۰/۱$ ،  $n = ۲$  و مقادیر مختلف پارامتر شکل  $\delta$  نشان می دهد. مشاهده می شود که بهترین مطابقت با حل مرجع [۱۷] به ازای  $\delta = ۰/۵$  حاصل شده است. بنابراین در تمام تحلیل های پیش رو از توزیع گرهی  $11 \times 11 \times 11$  و  $\delta = ۰/۵$  استفاده شده است.

جدول ۴ خیز بی بعد  $\bar{w}$  و تنش های بی بعد ( $\bar{\sigma}_{ij} = h\sigma_{ij}/pa$ ) را به ازای  $h/a = ۰/۱$  و مقادیر مختلف  $n$  ارائه می دهد. در این جدول نتایج بدست آمده با نتایج المان محدود لایه ای سه بعدی [۱۷] و نیز نتایج تئوری تغییر شکل برشی سینوسی<sup>۱</sup> [۲۸] مقایسه شده است. همانگونه که مشاهده می شود به ازای تمام مقادیر  $n$ ، نتایج روش حاضر با نتایج سایر روش ها مطابقت کامل دارد.

۱ Sinusoidal shear deformation theory

۱-۵- مطالعه پارامتری و اعتبارسنجی مدل جهت انجام مطالعات پارامتری و تأیید صحت نتایج روش حاضر، در این بخش پاسخ خمس الاستیک سه بعدی یک ورق مربعی مدرج تابعی با تکیه گاه ساده (SSSS) تحت بارگذاری گسترده یکنواخت  $(x, y, h) = p$  ارائه و با نتایج مراجع دیگر مقایسه شده است. مدول  $GPa380$  در یانگ برای آلومینیوم  $GPa70$  و برای آلومینیا ( $Al_2O_3$ ) در نظر گرفته شده، در حالیکه نسبت پواسون ثابت و برابر با  $۰/۳$  است. جزئیات بیشتر را می توان در مرجع [۱۷] یافت. در جدول ۲ خیز بی بعد ( $\bar{w} = ۱.۰E^6 h^3 w / pa^3$ ) ورق مربعی برای پنج نوع مختلف آرایش گرهی به ازای  $h/a = ۰/۱$ ،  $n = ۲$ ،  $\alpha_i = ۳$  و  $\delta = ۰/۵$  در مقایسه با نتایج المان محدود لایه ای سه بعدی [۱۷] نشان داده شده است. می توان ملاحظه کرد که نتایج بدست آمده با آرایش گرهی  $11 \times 11 \times 11$  (۱۳۳۱ گره) به خوبی

#### جدول ۴. نتایج بی بعد خیز و تنش برای ورق مربعی SSSS مدرج تابعی (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>)

Table 4. Dimensionless deflection and stress results for SSSS FG square plate (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>)

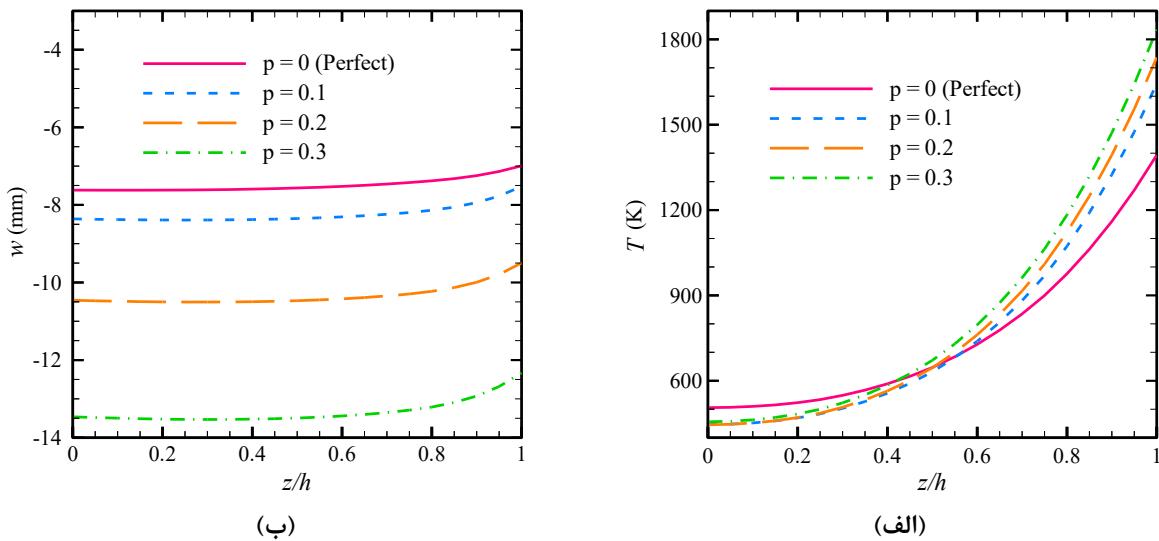
$\bar{\sigma}_{xz}(\frac{a}{r}, \cdot, \frac{h}{r})$	$\bar{\sigma}_{yy}(\frac{a}{r}, \frac{a}{r}, \frac{h}{r})$	$\bar{\sigma}_{xx}(\frac{a}{r}, \frac{a}{r}, h)$	$\bar{w}(\frac{a}{r}, \frac{a}{r}, \frac{h}{r})$	روش	n
۰/۵۰۴۶۸	۲/۱۶۹۰۹	۴/۵۰۲۶	۰/۹۲۴۶۲	RRKPM حاضر	۱
۰/۴۹۷۵۶	۲/۱۵۹۰۴	۴/۵۰۶۷	۰/۹۲۰۲۹	مرجع [۱۷]	
۰/۵۱۱۴	۲/۱۹۶۲	۴/۴۷۴۵	۰/۹۲۸۷	مرجع [۲۸]	
۰/۴۶۹۰۱	۲/۰۲۵۶۴	۵/۲۴۸۵۲	۱/۱۸۹۱۵	RRKPM حاضر	۲
۰/۴۶۷۱۰	۲/۰۱۳۸۸	۵/۲۶۵۶۴	۱/۱۸۵۰۱	مرجع [۱۷]	
۰/۴۷۰۰	۲/۰۳۳۸	۵/۲۲۹۶	۱/۱۹۴۰	مرجع [۲۸]	
۰/۴۶۰۳۴	۱/۲۷۲۱	۷/۳۰۶۴	۱/۵۸۰۵۳	RRKPM حاضر	۱۰
۰/۴۵۱۴۹	۱/۲۵۸۶	۷/۲۲۶۲	۱/۵۷۵۲۷	مرجع [۱۷]	
۰/۴۵۵۲	۱/۲۸۲۰	۷/۳۶۸۹	۱/۵۸۷۶	مرجع [۲۸]	

شکل ۵-الف توزیع تنش نرمال  $\sigma_{xx}$  در راستای ضخامت ورق مدرج تابعی متخلخل با شرایط تکیه‌گاهی SSSS نمایش می‌هد. مشاهده می‌شود که به دلیل تغییر در خواص ورق، سطح خنثی بر صفحه میانی آن منطبق نیست. همچنین با افزایش ضریب تخلخل  $p$  از میزان تنش  $\sigma_{xx}$  در سطح بالایی ورق کاسته می‌شود. تغییرات تنش نرمال  $\sigma_{zz}$  در راستای ضخامت ورق مدرج تابعی متخلخل در شکل ۵-ب ارائه شده است. با توجه به شکل ۵-ب ملاحظه می‌شود که به ازای تمام مقادیر ضریب تخلخل، اندازه تنش  $\sigma_{zz}$  در سطوح بالایی و پایینی ورق بترتیب ۲۰ مگاپاسکال و صفر است؛ با توجه به شرایط مرزی اعمال شده بروی این دو سطح، مقادیر مذکور بار دیگر دقت بالای نتایج حاصل از روش حاضر را تائید می‌کند.

اثر ضریب تخلخل بر منحنی تنش-کرنش معادل ( $\bar{w} - \bar{\sigma}$ ) ورق مربعی مدرج تابعی SSSS در شکل ۶-الف نشان داده شده است. چنانکه مشاهده می‌شود افزایش مقدار  $p$  منجر به کاهش سطح تنش معادل و افزایش میزان کرنش معادل می‌گردد. همچنین با توجه به در نظر گرفتن خواص وابسته به دما برای ورق، ملاحظه می‌شود که نمودار تنش-کرنش حتی در ناحیه الاستیک نیز غیرخطی است. در شکل ۶-ب تغییرات کرنش پلاستیک معادل بر حسب زمان ( $t - \bar{e}^p$ ) رسم شده است. با توجه به شکل افزایش ضریب تخلخل باعث می‌شود بر مقدار  $\bar{w}$  در زمان کوتاهتری افروده شود.

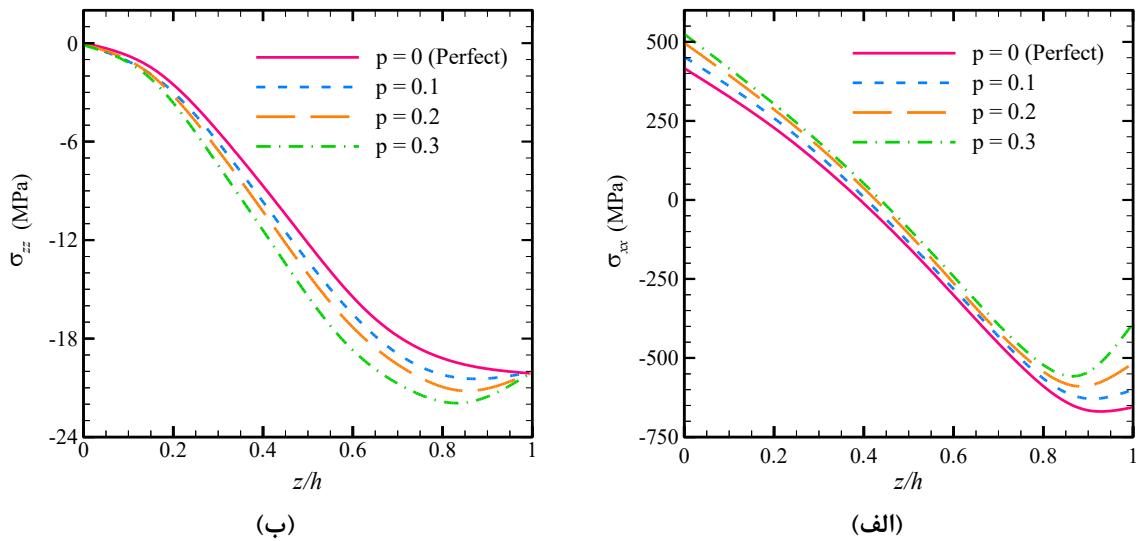
۵-۲- خمث ترمو-الاستوپلاستیک سه بعدی ورق مدرج تابعی متخلخل در این بخش، نتایج خمث ترمو-الاستوپلاستیک ورق مدرج تابعی متخلخل مربعی بطول ۱ متر و با خواص وابسته به دما ارائه شده است. هندسه مساله، خواص مواد، شرایط مرزی و بارگذاری پیش‌تر در بخش ۲ توصیف شده است. در تمام تحلیلهای پیش رو  $V_{max}^c = ۰/۹$  است و شار حرارتی سینوسی با شدت  $(q)$ ، ۷۰ کیلووات بر مترمربع به مدت ۱۵۰۰ ثانیه به ورق اعمال می‌گردد. همچنین شدت بار گسترد (P) برای ورق با نسبت ضخامت ۱/۰ برابر ۲۰ مگاپاسکال و برای ورق با نسبت ضخامت ۳/۰ برابر ۲۰۰ مگاپاسکال در نظر گرفته شده است.

شکل ۴-الف توزیع دمای  $T$  در راستای ضخامت ورق مدرج تابعی متخلخل با شرایط تکیه‌گاهی SSSS،  $h/a = ۰/۱$  و  $n = ۱$  در ازای چهار مقدار مختلف ضریب تخلخل  $p$ ، یعنی  $۰/۱$ ،  $۰/۲$  و  $۰/۳$  نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش ضریب تخلخل، دمای سطح بالایی ورق افزایش یافته و از نفوذ حرارت به داخل ورق کاسته می‌شود. همچنین به ازای تمام مقادیر  $p$ ، حداقل دما در سطح بالایی ورق رخ می‌دهد. در شکل ۴-ب تغییرات خیز  $w$  برای ورق مدرج تابعی متخلخل در راستای ضخامت آن رسم شده است. می‌توان دریافت که با افزایش  $p$ ، خیز ورق افزایش قابل توجهی می‌یابد.



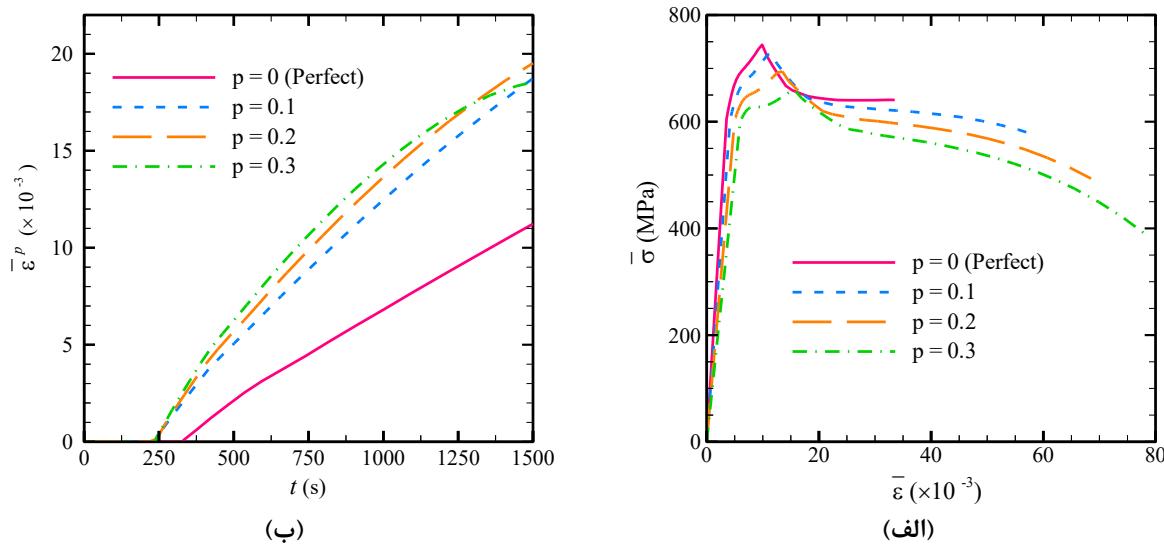
شکل ۴. تغییرات الف) دما  $T(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z)$  و ب) خیز  $w(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z)$  در ورق مربعی مدرج تابعی SSSS به ازای مقادیر مختلف ضریب تخلخل ( $h/a = 0.1, n = 1$ )

Fig. 4. Variations of a) temperature  $T(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z)$ , and b) deflection  $w(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z)$  in the SSSS FG square plate for different values of porosity coefficient ( $h/a = 0.1, n = 1$ )



شکل ۵. تغییرات الف) تنش  $\sigma_{xx}(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z)$  و ب) تنش  $\sigma_{zz}(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z)$  در ورق مربعی مدرج تابعی SSSS به ازای مقادیر مختلف ضریب تخلخل ( $h/a = 0.1, n = 1$ )

Fig. 5. Variations of a) stress , and b) stress in the SSSS FG square plate for different values of porosity coefficient ( $h/a = 0.1, n = 1$ )



شکل ۶. نمودار (الف) تنش معادل نسبت به زمان در مرکز سطح بالایی ورق مربعی مدرج تابعی SSSS به ازای مقادیر مختلف ضریب متخلخل ( $h/a = 0.1, n = 1$ )

**Fig. 6.** Curves of a) equivalent stress versus equivalent strain, and b) equivalent plastic strain with respect to time at the center of the upper surface of the SSSS FG square plate for different values of porosity coefficient ( $h/a = 0.1, n = 1$ )

( $h/a = 0.1, n = 1$ )

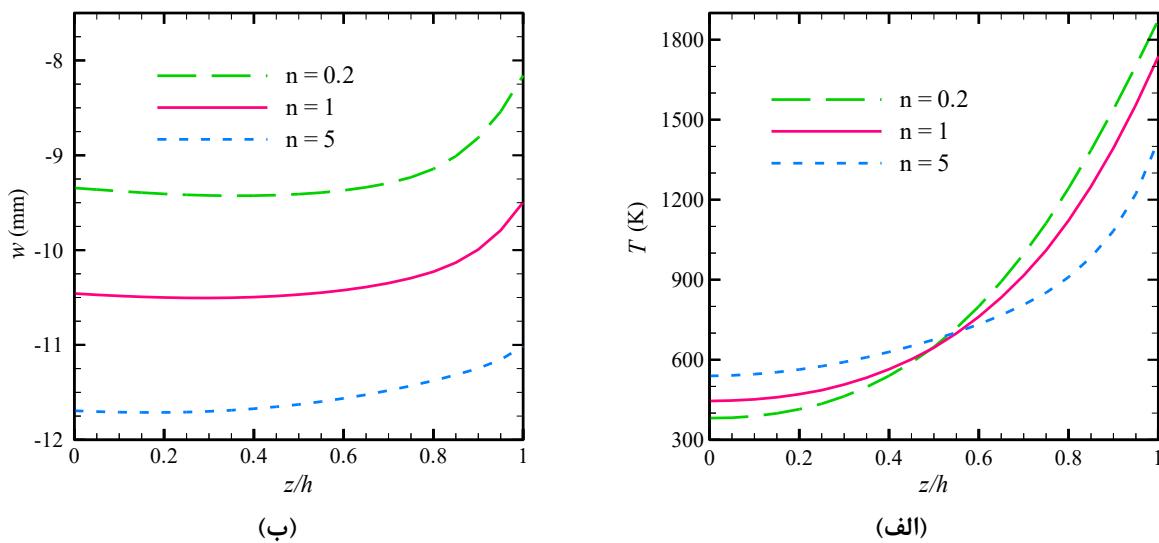
جدول ۵. نتایج عددی در مرکز سطح بالایی ورق مربعی SSSS مدرج تابعی متخلخل ( $n = 1$ )

**Table 5. Numerical results at the center of the upper surface of the SSSS porous FG square plate ( $n = 1$ )**

$\bar{\varepsilon}^p (\times 10^{-7})$		$\bar{\sigma}$ (MPa)		$w$ (mm)		$T$ (K)		$p$	نسبت ضخامت
FEM	RRKPM	FEM	RRKPM	FEM	RRKPM	FEM	RRKPM		
۱۱/۰۲۹	۱۱/۲۳۱	۶۴۵/۵۰	۶۴۰/۹۳	-۶/۹۵۲۳	-۶/۹۹۳۲	۱۳۹۲/۴	۱۳۹۳/۱	.	۰/۱
۱۸/۹۴۸	۱۸/۷۳۳	۵۷۹/۲۰	۵۷۷/۷۰	-۷/۴۷۱۲	-۷/۵۲۳۳	۱۶۴۵/۸	۱۶۴۴/۲	.	۰/۱
۱۹/۸۲۶	۱۹/۵۱۸	۴۹۷/۱۶	۴۹۲/۴۵	-۹/۵۶۶۲	-۹/۴۹۵۷	۱۷۳۷/۶	۱۷۳۶/۸	.	۰/۲
۱۸/۴۶۳	۱۸/۵۴۹	۳۶۷/۸۴	۳۶۵/۴۶	-۱۲/۴۵۱	-۱۲/۳۳۱	۱۸۳۵/۰	۱۸۳۴/۱	.	۰/۳
۱۴/۷۵۶	۱۴/۸۳۱	۶۳۳/۲۶	۶۲۹/۵۳	-۲/۹۲۱۷	-۲/۸۰۷۰	۱۵۲۲/۵	۱۵۲۰/۸	.	۰/۳
۲۱/۷۲۵	۲۱/۶۰۰	۵۱۵/۹۸	۵۱۸/۷۷	-۳/۳۲۹۷	-۳/۳۵۲۳	۱۷۷۷/۲	۱۷۷۸/۴	.	۰/۱
۲۰/۱۴۳	۲۰/۲۷۵	۳۸۳/۰۶	۳۸۶/۲۱	-۴/۴۴۶۷	-۴/۲۳۶۶	۱۸۸۰/۳	۱۸۷۸/۶	.	۰/۲
۱۵/۵۷۱	۱۵/۶۷۸	۱۷۸/۱۶	۱۷۴/۷۰	-۵/۴۱۹۲	-۵/۴۴۲۸	۱۹۸۵/۶	۱۹۸۷/۰	.	۰/۳

نظر گرفتن المان های ۸ گرهی<sup>۲</sup> بدست آمده نیز در این جدول گنجانده شده است. مشاهده می شود که نتایج روش حاضر با حل المان محدود که با آرایش گرهی متراتکم  $35 \times 35 \times 35$  (۴۲۸۷۵ گره) حاصل شده است، مطابقت بسیار خوبی دارد.

در جدول ۵ نتایج عددی  $T$ ,  $w$  و  $\bar{\varepsilon}^p$  در مرکز سطح بالایی ورق مربعی SSSS مدرج تابعی متخلخل به ازای  $n = 1$  و برای نسبت های ضخامت  $۰/۱$  و  $۰/۳$  ارائه شده است. به منظور مقایسه کامل تر، نتایج المان محدود سه بعدی که توسط نویسنده با استفاده از نرم افزار آباکوس<sup>۱</sup> و با در



شکل ۷. تغییرات (الف) دما  $T(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z)$  و (ب) خیز  $w(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z)$  در ورق مربعی مدرج تابعی SSSS به ازای مقادیر مختلف شاخص تغییرات مواد ( $h/a = 0.1, p = 0.2$ )

**Fig. 7. Variations of a) temperature  $T(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z)$ , and b) deflection  $w(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z)$  in the SSSS FG square plate for different values of material gradient index ( $h/a = 0.1, p = 0.2$ )**

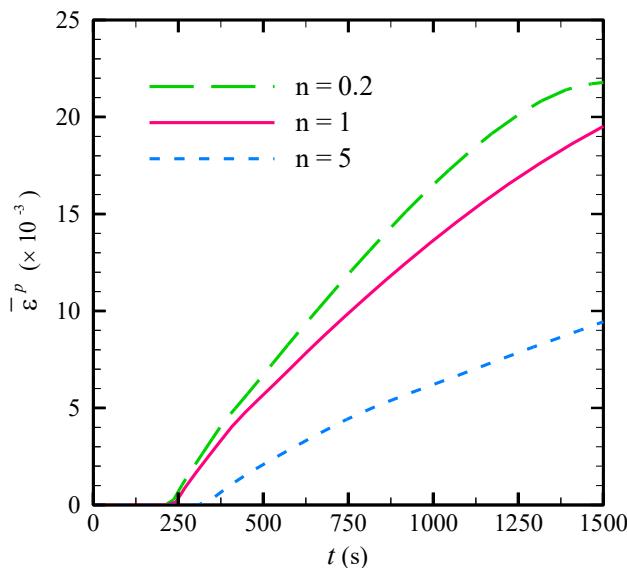
ارائه شده است. مشاهده می‌شود که به ازای تمام مقادیر  $p$ ، با افزایش قیود در لبه‌های ورق، خیز آن کاهش یافته به طوری که حداقل و حدکثر خیز به ترتیب در ورق با شرایط تکیه‌گاهی SSSF و CCCC مربوطی مدرج تابعی متخلخل با  $h/a = 0.3$  رخ می‌دهد. جدول ۸ نتایج عددی مشابهی را برای ورق CCCC و SCSC و CFCF ارائه می‌کند. بر طبق جداول ۵ و ۶ افزایش ضریب متخلخل باعث افزایش خیز و کاهش قابل توجه تنفس معادل در همه انواع شرایط تکیه‌گاهی می‌گردد.

در مطالعه حاضر اثر توزیع تخلخل تاهمگن بر روی نتایج نیز مورد بررسی قرار گرفته است. در شکل ۹-الف توزیع دمای  $T$  در راستای ضخامت ورق مدرج تابعی با شرایط تکیه‌گاهی SSSS،  $h/a = 0.1$ ،  $n = 1$  و  $p = 0.2$ ، به ازای مقادیر مختلف شاخص تغییرات تخلخل  $n$  ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که افزایش شاخص  $n$  باعث افزایش دمای سطح بالایی ورق و کاهش نفوذ حرارت به داخل ورق شده است. در شکل‌های ۹-ب و ۹-ج بترتیب تغییرات خیز و تغییرات کرنش پلاستیک معادل نسبت به زمان، به ازای مقادیر مختلف  $n$  نشان داده شده است. بوضوح ملاحظه می‌شود که با افزایش  $n$ ، خیز ورق بطور چشمگیری افزایش می‌یابد. همچنین مطابق شکل ۹-ج، افزایش  $n$ ، افزایش  $\bar{\epsilon}^P$  را در زمان کوتاهتری به دنبال دارد.

در شکل‌های ۷-الف و ۷-ب توزیع دما و خیز در راستای ضخامت ورق متخلخل با شرایط تکیه‌گاهی SSSS،  $h/a = 0.1$  و  $p = 0.2$  به ازای مقادیر مختلف شاخص تغییرات مواد  $n$ ، یعنی  $0.2, 1, 5$  ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش  $n$ ، دمای سطح بالایی ورق کاهش می‌یابد اما در همه حالات حدکثر دما در همین سطح رخ می‌دهد. این در حالی است که خیز ورق با افزایش ضریب  $n$  افزایش می‌یابد. در شکل ۸ تغییرات کرنش پلاستیک معادل بر حسب زمان در مرکز سطح بالایی ورق مدرج تابعی متخلخل رسم شده است. می‌توان ملاحظه کرد که افزایش  $n$  منجر به کاهش سطح کرنش پلاستیک ورق می‌گردد.

نتایج عددی  $w$ ،  $T$ ،  $\bar{\sigma}$  و  $\bar{\epsilon}^P$  در مرکز سطح بالایی ورق مربعی SSSS مدرج تابعی متخلخل با  $p = 0.2$  و نسبت‌های ضخامت  $h/a = 0.1$  و  $0.3$  در جدول ۶ داده شده است. در این جدول نیز نتایج المان محدود سه‌بعدی بدست آمده با آرایش گرهی متراکم  $35 \times 35 \times 35$  گنجانده شده است که توافق بسیار خوبی میان نتایج روش حاضر و حل المان محدود مشاهده می‌گردد.

در جدول ۷ نتایج عددی  $w$ ،  $\sigma_{xx}$ ،  $\bar{\sigma}$  و  $\bar{\epsilon}^P$  در مرکز سطح بالایی ورق مربعی مدرج تابعی متخلخل به ازای  $n = 1$ ،  $h/a = 0.1$  و با در نظر گرفتن پنج نوع شرایط تکیه‌گاهی مختلف شامل SSSF، SSSS



شکل ۸. تغییرات کرنش پلاستیک معادل نسبت به زمان در مرکز سطح بالایی ورق مربعی مدرج تابعی SSSS به ازای مقادیر مختلف شاخص تغییرات مواد ( $h/a = 0.1, p = 0.2$ )

**Fig. 8. Variation of equivalent plastic strain with respect to time at the center of the upper surface of the SSSS FG square plate for different values of material gradient index ( $h/a = 0.1, p = 0.2$ )**

جدول ۶. نتایج عددی در مرکز سطح بالایی ورق مربعی SSSS مدرج تابعی متخلخل ( $p = 0.2$ )

**Table 6. Numerical results at the center of the upper surface of the SSSS porous FG square plate ( $p = 0.2$ )**

$\bar{\epsilon}^p (\times 10^{-3})$		$\bar{\sigma}$ (MPa)		$w$ (mm)		$T$ (K)		$n$	نسبت خامات
FEM	RRKPM	FEM	RRKPM	FEM	RRKPM	FEM	RRKPM		
۲۱/۵۰۳	۲۱/۷۸۲	۳۳۰/۴۴	۳۳۴/۴۸	-۸/۰۸۶۱	-۸/۱۵۹۴	۱۸۷۲/۵	۱۸۷۴/۱	.۲	.۱
۱۹/۸۲۶	۱۹/۵۱۸	۴۹۷/۱۶	۴۹۲/۴۵	-۹/۵۶۶۲	-۹/۴۹۵۷	۱۷۳۷/۶	۱۷۳۶/۸	۱	
۹/۳۵۹۷	۹/۴۴۳۸	۵۸۳/۷۰	۵۷۹/۴۲	-۱۱/۲۱۴	-۱۱/۰۱۲	۱۴۲۴/۶	۱۴۲۲/۳	۵	
۲۰/۴۷۹	۲۰/۴۰۲	۳۴۵/۴۲	۳۴۸/۵۶	-۴/۱۲۷۴	-۴/۰۷۵۲	۱۹۰۵/۱	۱۹۰۴/۲	.۲	.۳
۲۰/۱۴۳	۲۰/۲۷۵	۳۸۳/۰۶	۳۸۶/۲۱	-۴/۳۴۶۷	-۴/۲۳۶۶	۱۸۸۰/۳	۱۸۷۸/۶	۱	
۱۸/۲۸۵	۱۸/۴۴۰	۴۸۵/۲۴	۴۸۳/۳۸	-۴/۴۵۲۶	-۴/۴۲۹۲	۱۷۸۰/۴	۱۷۷۸/۳	۵	

**جدول ۷. نتایج عددی ورق مربعی مدرج تابعی متخلخل با شرایط مرزی مختلف ( $h/a = 0.1, n = 1$ )**

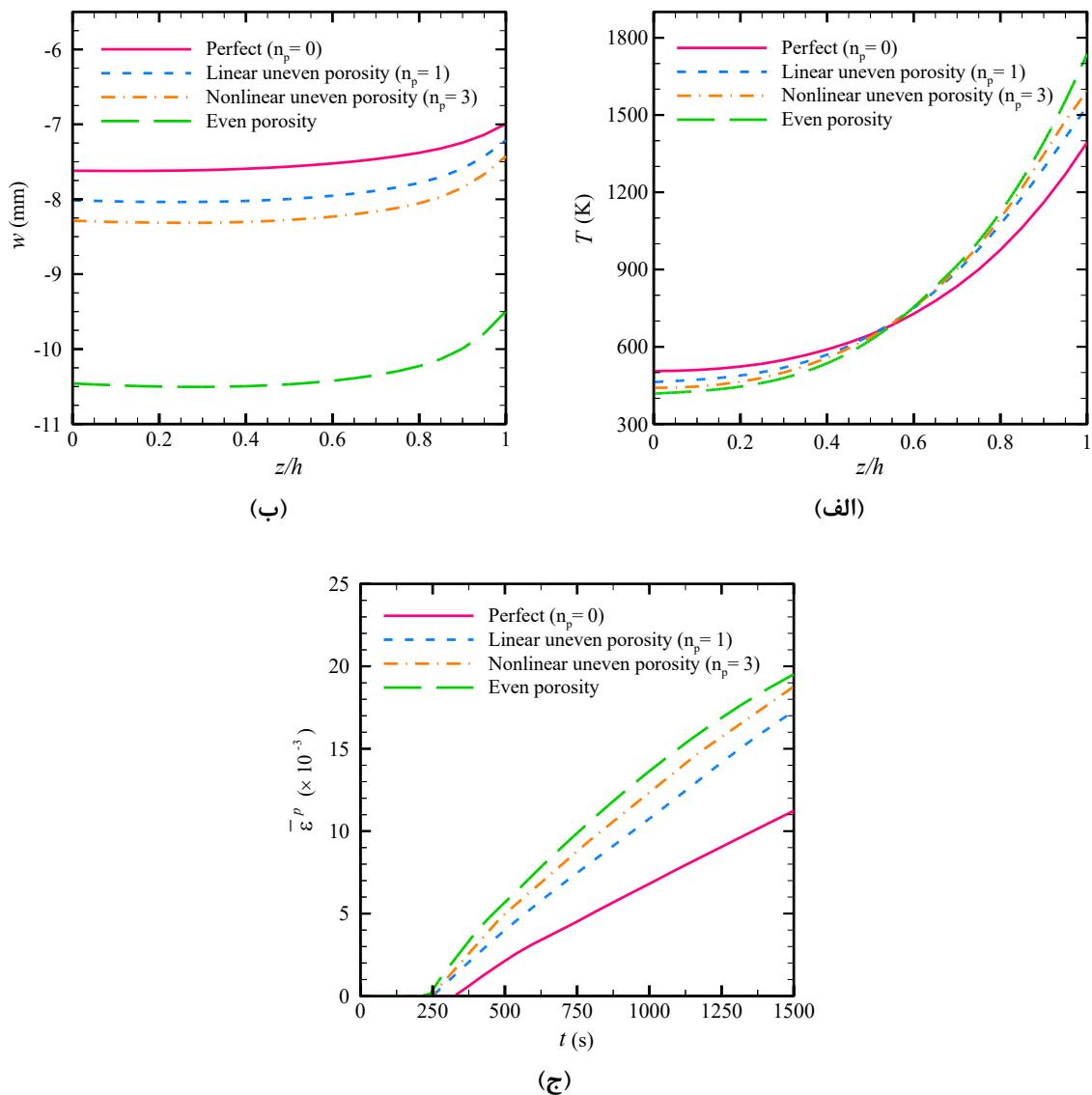
**Table 7. Numerical results of porous FG square plate with various boundary conditions ( $h/a = 0.1, n = 1$ ) .**

$\bar{\varepsilon}^p (\times 10^{-7})$	$\bar{\sigma}$ (MPa)	$\sigma_{xx}$ (MPa)	w(mm)	p	شرایط مرزی
۱۱/۲۳۱	۶۴۰/۹۳	-۶۵۹/۸۶	-۶/۹۹۳۲	.	SSSS
۱۸/۷۳۳	۵۷۷/۷۰	-۵۹۷/۵۹	-۷/۵۲۳۳	./۱	
۱۹/۵۱۸	۴۹۲/۴۵	-۵۱۲/۸۱	-۹/۴۹۵۷	./۲	
۱۸/۵۴۹	۳۶۵/۴۶	-۳۸۵/۵۲	-۱۲/۳۳۱	./۳	
۱۲/۶۲۳	۶۸۰/۲۸	-۶۳۹/۳۱	-۱۵/۹۸۵	.	SSSF
۲۰/۲۱۵	۶۰۸/۰۱	-۵۹۴/۳۷	-۱۸/۳۰۱	./۱	
۲۱/۱۸۴	۵۱۹/۵۲	-۵۰۹/۷۶	-۲۲/۵۹۸	./۲	
۲۰/۳۹۲	۳۸۶/۷۷	-۳۸۲/۲۲	-۲۸/۵۶۵	./۳	
۹/۸۱۴۴	۶۰۷/۵۵	-۶۵۵/۸۸	-۳/۳۰۷۸	.	SCSC
۱۷/۲۷۶	۵۵۳/۲۳	-۵۸۷/۹۳	-۳/۴۹۱۶	./۱	
۱۷/۸۰۷	۴۶۹/۱۲	-۵۰۱/۰۷	-۴/۴۰۰۵	./۲	
۱۶/۵۵۴	۳۴۶/۲۶	-۳۷۴/۶۲	-۵/۷۲۴۶	./۳	
۹/۳۶۵۱	۵۹۷/۳۱	-۵۳۴/۸۳	-۴/۸۱۰۰	.	CFCF
۱۶/۶۳۴	۵۴۲/۴۳	-۵۲۰/۷۰	-۵/۲۸۲۹	./۱	
۱۷/۱۳۳	۴۵۹/۹۲	-۴۴۵/۶۱	-۶/۵۳۰۶	./۲	
۱۵/۸۶۳	۳۳۹/۵۸	-۳۳۳/۲۵	-۸/۲۸۷۰	./۳	
۱۰/۲۳۷	۶۱۷/۳۲	-۶۳۶/۰۴	-۲/۲۱۷۲	.	CCCC
۱۷/۶۴۵	۵۵۹/۳۳	-۵۷۸/۶۶	-۲/۳۳۸۹	./۱	
۱۸/۰۳۸	۴۷۲/۱۸	-۴۹۱/۹۵	-۲/۹۲۸۴	./۲	
۱۶/۶۴۶	۳۴۷/۰۳	-۳۶۶/۵۵	-۳/۸۰۴۴	./۳	

**جدول ۸. نتایج عددی ورق مربعی مدرج تابعی متخلخل با شرایط مرزی مختلف (  $h/a = 0.3, n = 1$  )**

**Table 8. Numerical results of porous FG square plate with various boundary conditions (  $h/a = 0.3, n = 1$  )**

$\bar{\varepsilon}^n (\times 10^{-7})$	$\bar{\sigma}$ (MPa)	$\sigma_{xx}$ (MPa)	$w$ (mm)	$p$	شرایط مرزی
۱۴/۸۳۱	۶۲۹/۵۳	-۸۲۹/۱۴	-۲/۸۰۷۰	.	SSSS
۲۱/۶۰۰	۵۱۸/۷۷	-۷۱۷/۸۰	-۳/۳۵۲۳	.۱	
۲۰/۲۷۵	۳۸۶/۲۱	-۵۸۴/۶۸	-۴/۲۳۶۶	.۲	
۱۵/۶۷۸	۱۷۴/۷۰	-۳۷۰/۶۶	-۵/۴۴۲۸	.۳	
۱۶/۰۲۴	۶۶۱/۴۶	-۸۳۱/۵۸	-۶/۱۹۹۳	.	SSSF
۲۲/۸۱۵	۵۳۹/۱۱	-۷۲۷/۰۵	-۷/۴۳۸۱	.۱	
۲۱/۵۷۶	۴۰۱/۰۳	-۵۹۰/۵۹	-۹/۱۶۳۹	.۲	
۱۷/۱۴۰	۱۸۰/۲۵	-۳۷۳/۸۲	-۱۱/۴۶۶	.۳	
۱۳/۷۰۷	۶۰۶/۶۰	-۸۱۱/۷۷	-۱/۹۴۸۰	.	SCSC
۲۰/۳۹۳	۵۰۳/۲۵	-۷۰۴/۱۷	-۲/۲۶۱۴	.۱	
۱۸/۹۳۱	۳۷۴/۰۲	-۵۷۴/۰۲	-۲/۸۶۸۲	.۲	
۱۴/۱۳۳	۱۷۰/۷۱	-۳۶۶/۸۰	-۳/۷۱۰۹	.۳	
۱۲/۷۳۵	۵۹۰/۹۵	-۷۶۰/۰۵	-۳/۱۱۶۶	.	CFCF
۱۹/۳۴۴	۴۹۲/۴۴	-۶۸۱/۱۲	-۳/۶۳۷۵	.۱	
۱۷/۸۵۲	۳۶۷/۱۳	-۵۵۸/۰۴	-۴/۵۰۲۹	.۲	
۱۳/۱۱۶	۱۶۸/۵۱	-۳۶۳/۴۴	-۵/۶۷۸۳	.۳	
۱۳/۴۲۵	۶۰۰/۰۲	-۸۰۱/۱۴	-۱/۴۳۵۰	.	CCCC
۲۰/۰۱۸	۴۹۸/۲۳	-۶۹۶/۱۵	-۱/۶۲۱۹	.۱	
۱۸/۴۶۹	۳۷۰/۲۹	-۵۶۷/۶۵	-۲/۰۷۱۶	.۲	
۱۳/۵۴۸	۱۶۹/۰۷	-۳۶۴/۳۵	-۲/۷۰۹۸	.۳	



شکل ۹. نمودار تغییرات (الف) دما  $T(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}, z)$  ، (ب) خیز  $w(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}, z)$  و (ج) کرنش پلاستیک معادل نسبت به زمان، برای ورق مربعی مدرج تابعی SSSS به ازای مقادیر مختلف شاخص تغییرات تخلخل ، (  $h/a = 0.1, n = 1, p_0 = 0.2$  )

**Fig. 9. Curves of a) temperature  $T(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}, z)$  , b) deflection  $w(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}, z)$  , and c) equivalent plastic strain with respect to time  $(\bar{\epsilon}^p - t)(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}, h)$  , for SSSS porous FG square plate for different values of porosity gradient index  $n_p$  , (  $h/a = 0.1, n = 1, p_0 = 0.2$  )**

## منابع

- [1] J. Zhu, Z. Lai, , Z. Yin, J. Jeon, S. Lee, Fabrication of ZrO<sub>2</sub>-NiCr functionally graded material by powder metallurgy, Materials chemistry and physics, 68(1-3) (2001) 130-135.
- [2] A.S. Rezaei, , A.R. Saidi, Application of Carrera Unified Formulation to study the effect of porosity on natural frequencies of thick porous-cellular plates. Composites Part B: Engineering, 91 (2016) 361-370.
- [3] M. Nemat-Alla, Reduction of thermal stresses by developing two-dimensional functionally graded materials, International journal of solids and structures, 40(26) (2003) 7339-7356.
- [4] M. Nemat-Alla, K.I. Ahmed, I. Hassab-Allah, Elastic-plastic analysis of two-dimensional functionally graded materials under thermal loading, International Journal of solids and Structures, 46(14-15) (2009) 2774-2786.
- [5] K. Gao, W. Gao, D. Chen, J. Yang, Nonlinear free vibration of functionally graded graphene platelets reinforced porous nanocomposite plates resting on elastic foundation, Composite Structures, 204 (2018) 831-846.
- [6] A.M. Zenkour, A quasi-3D refined theory for functionally graded single-layered and sandwich plates with porosities, Composite Structures, 201 (2018) 38-48.
- [7] J. Gong, L. Xuan, B. Ying, H. Wang, Thermoelastic analysis of functionally graded porous materials with temperature-dependent properties by a staggered finite volume method, Composite Structures, 224 (2019) 111071.
- [8] C. Liang, Y.Q. Wang, A quasi-3D trigonometric shear deformation theory for wave propagation analysis of FGM sandwich plates with porosities resting on viscoelastic foundation, Composite Structures, 247 (2020) 112478.
- [9] D.S. Mashat, A.M. Zenkour, A.F. Radwan, A quasi-3D higher-order plate theory for bending of FG plates resting on elastic foundations under hygro-thermo-mechanical loads with porosity, European Journal of Mechanics-A/

## ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله برای اولین بار یک فرمول‌بندی سه‌بعدی ترمو-الاستوپلاستیک مبتنی بر روش بازتولید نقطه با هسته پایه شعاعی به منظور بررسی اثر تخلخل بر رفتار خمش غیرخطی ورق‌های مدرج تابعی با خواص وابسته به دما که در معرض ترکیبی از بارهای حرارتی و مکانیکی قرار گرفته‌اند، توسعه یافت. معیار تسلیم فون میزز، سخت شوندگی همسانگرد و قانون جریان پراندل-رویس برای توصیف رفتار پلاستیک ورق‌های مدرج تابعی بکار گرفته شدند. خواص ترمومکانیکی مؤثر ورق با استفاده از قانون آنختگی اصلاح‌شده بصورت موضعی ارزیابی شد. برای اثبات قابلیت و کارایی مدل حاضر، نتایج بدست آمده با حل‌های تحلیلی و عددی دیگر مقایسه و تطابق عالی بین نتایج مشاهده گردید. در ادامه ضمن تحلیل مثال‌های عددی متنوع، اثر پارامترهای مهمی مانند ضریب تخلخل، شاخص تغییرات مواد، نسبت ضخامت و شرایط مرزی بر رفتار خمش ترمو-الاستوپلاستیک ورق‌های مدرج تابعی مطالعه گردید. سایر نتایج به شرح زیر است:

- با افزایش ضریب تخلخل  $\bar{\sigma}$ ، دمای سطح بالایی ورق افزایش یافت و از نفوذ حرارت به داخل ورق کاسته شد. همچنین به ازای تمام مقادیر ضریب تخلخل، حداقل دما در سطح بالایی ورق رخ داد.
- برای هر دو نسبت ضخامت مطالعه شده، با افزایش ضریب تخلخل خیز ورق افزایش قابل توجهی یافت و از میزان تنش  $\sigma_{xx}$  در سطح بالایی ورق کاسته شد.
- افزایش مقدار ضریب تخلخل منجر به کاهش سطح تنش معادل  $\bar{\sigma}$  و افزایش میزان کرنش معادل  $\bar{E}$  و کرنش پلاستیک معادل  $\bar{G}$  گردید. همچنین با توجه به در نظر گرفتن خواص وابسته به دما برای ورق، ملاحظه شد که نمودار تنش-کرنش حتی در ناحیه الاستیک نیز غیرخطی است.
- مشخص شد که برای تمام مقادیر ضریب تخلخل، با افزایش قیود در لبه‌ها، خیز ورق کاهش می‌یابد و حدائق و حداقل و حداقل مقدار خیز به ترتیب متعلق به ورق با شرایط تکیه‌گاهی CCCC و SSSF است.
- با افزایش شاخص تغییرات مواد  $n$ ، دمای سطح بالایی ورق کاهش یافت اما حداقل دما در همه حالات در همین سطح رخ داد. این در حالی است که افزایش ضریب  $n$ ، خیز ورق را افزایش و کرنش پلاستیک را کاهش داد.

- Aerospace Science and Technology, 104 (2020) 105916.
- ]19[ S. Qin, G. Wei, Z. Liu, G. Su, The elastic dynamics analysis of FGM using a meshless RRKPM, Engineering Analysis with Boundary Elements, 129 (2021) 125-136.
- ]20[ Z. Liu, G. Wei, S. Qin, Z. Wang, The elastoplastic analysis of functionally graded materials using a meshfree RRKPM, Applied Mathematics and Computation, 413 (2022) 126651.
- ]21[ Z. Liu, G. Wei, Z. Wang, Numerical solution of functionally graded materials based on radial basis reproducing kernel particle method, Engineering Analysis with Boundary Elements, 111 (2020) 32-43.
- ]22[ S. Suresh, A. Mortensen, Fundamentals of Functionally Graded Materials, London: IOM Communications Ltd, 1998.
- ]23[ R.L. Williamson, B.H. Rabin, J.T. Drake, Finite element analysis of thermal residual stresses at graded ceramic-metal interfaces. Part I. Model description and geometrical effects, Journal of Applied Physics, 74(2) (1993) 1310-1320.
- ]24[ T. Mori, K. Tanaka, Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, Acta metallurgica, 21(5) (1973) 571-574.
- ]25[ J. Gong, L. Xuan, B. Ying, H. Wang, Thermoelastic analysis of functionally graded porous materials with temperature-dependent properties by a staggered finite volume method, Composite Structures, 224 (2019) 111071.
- ]26[ A. Sluzalec, Introduction to Nonlinear Thermomechanics, Theory and Finite Element Solutions, London: Springer-Verlag, 1992.
- ]27[ J.N. Reddy, An Introduction to the Finite Element Method, Singapore: McGraw-Hill, 1993.
- ]28[ H.T. Thai, T.P. Vo, A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates, Applied mathematical modelling, 37(5) (2013) 3269-3281.
- Solids, 82 (2020) 103985.
- ]10[ V. Kumar, S.J. Singh, V.H. Saran, S.P. Harsha, Vibration characteristics of porous FGM plate with variable thickness resting on Pasternak's foundation, European Journal of Mechanics-A/Solids, 85 (2021) 104124.
- ]11[ Y. Liu, Z. Qin, F. Chu, Nonlinear forced vibrations of FGM sandwich cylindrical shells with porosities on an elastic substrate, Nonlinear Dynamics, 104(2) (2021) 1007-1021.
- ]12[ S.K. Sah, A. Ghosh, Influence of porosity distribution on free vibration and buckling analysis of multi-directional functionally graded sandwich plates, Composite Structures, 279 (2022) 114795.
- ]13[ S.S. Vel, R.C. Batra, Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates, AIAA journal, 40(7) (2002) 1421-1433.
- ]14[ A. Alibegloo, Three-dimensional exact solution for functionally graded rectangular plate with integrated surface piezoelectric layers resting on elastic foundation, Mechanics of Advanced Materials and Structures, 17(3) (2010) 183-195.
- ]15[ A.R. Mojdehi, A. Darvizeh, A. Basti, H. Rajabi, Three dimensional static and dynamic analysis of thick functionally graded plates by the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method, Engineering Analysis with Boundary Elements, 35(11) (2011) 1168-1180.
- ]16[ M. Adineh, M. Kadkhodayan, Three-dimensional thermo-elastic analysis and dynamic response of a multi-directional functionally graded skew plate on elastic foundation, Composites Part B: Engineering, 125 (2017) 227-240.
- ]17[ S.J. Nikbakht, S.J. Salami, M. Shakeri, Three dimensional analysis of functionally graded plates up to yielding, using full layer-wise finite element method, Composite Structures, 182 (2017) 99-115.
- ]18[ R. Vaghefi, Three-dimensional temperature-dependent thermo-elastoplastic bending analysis of functionally graded skew plates using a novel meshless approach,

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

R. Vaghefi, *Investigation of the Effect of Porosity on Thermo-Elastoplastic Bending of Functionally Graded Plates Using 3D Meshless Radial Basis Reproducing Kernel Particle Method*, Amirkabir J. Mech Eng., 54(10) (2023) 2377-2398.

DOI: [10.22060/mej.2022.20998.7356](https://doi.org/10.22060/mej.2022.20998.7356)

