



اصلاح ناپایداری مدل رتبه کاسته معادله نفوذ- جابجایی مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی در اعداد رینولدز بالا با بهره‌گیری از رویکرد لزجت گردابه‌ای

محمد کاظم مؤیدی^{۱،*}، فاطمه بیگدلو^۲، فرشاد صباغزادگان^۱

۱- آزمایشگاه پژوهشی توربولانس دینامیک سیالات محاسباتی و احتراق، دانشگاه قم، قم، ایران
۲- آزمایشگاه پژوهشی اتمسفر زمین و علوم فضایی، دانشگاه قم، قم، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۰/۰۹/۱۵
بازنگری: ۱۴۰۱/۰۳/۰۲
پذیرش: ۱۴۰۱/۰۷/۲۵
ارائه آنلاین: ۱۴۰۱/۰۸/۰۵

کلمات کلیدی:

روش تجزیه مود دینامیکی
مدل رتبه کاسته
الگوی لزجت گردابه‌ای
معادله برگرز
سیستم دینامیکی

خلاصه: به دلیل دقت پایین و دامنه کاربرد محدود روش‌های تحلیلی و نیز زمان بر بودن و محدودیت‌های سخت‌افزاری کامپیوتری روش‌های عددی به خصوص در مسائل ناپایا، لذا محققان به توسعه مدل‌ها و روش‌های حل با سرعت و راندمان بالاتر روی آورده‌اند. یکی از این الگوها، روش کاهش مرتبه است. روش رتبه کاسته یک الگوی جایگزین برای شبیه‌سازی سیستم‌های دینامیکی از جمله جریان سیال می‌باشد. مدل‌های رتبه کاسته عمدتاً بر مبنای محاسبه ساختارهای مؤثر سیستم دینامیکی توسعه می‌یابند. روش تجزیه مود دینامیکی یکی از روش‌های محاسبه این ساختارهای اساسی می‌باشد. در این پژوهش با استفاده از این الگو و مبتنی بر اصول سیستم‌های دینامیکی، یک مدل رتبه کاسته برای معادله برگرز لزج توسعه داده شده است. نتایج نشان می‌دهند در صورت افزایش عدد رینولدز و کاهش اثرات ناشی از ترم لزج موجود در معادله حاکم، استهلاک لازم در سیستم برای پایداری‌سازی حل عددی کاسته می‌شود. همچنین به دلیل کامل نبودن مودهای فرض شده در مسئله و حذف اثر مودها با شماره بالاتر، این کاهش استهلاک بیش‌تر نمود پیدا خواهد کرد. بنابراین با ایجاد یک ائتلاف مصنوعی تحت عنوان لزجت گردابه‌ای سعی در پایداری‌سازی سیستم می‌شود. در نهایت با مقایسه نتایج بدست آمده از مدل رتبه کاسته و نتایج شبیه‌سازی عددی مستقیم معادله، دقت این مدل ثابت می‌شود.

۱- مقدمه

چالش‌های بسیاری را ایجاد می‌کنند. در حالی که با استفاده از این معادلات، که شکل خاصی از معادلات اندازه حرکت خطی با فرض سیالات نیوتنی هستند، می‌توان در جریان آشفته رفتار سیال را پیش‌بینی کرد. به همین دلیل پژوهشگران به سمت روش‌های مدل‌سازی مثل مدل کاهش رتبه جذب شدند. هدف از توسعه مدل رتبه کاسته^۱، کاهش پیچیدگی‌های محاسباتی است. بنابراین در شبیه‌سازی سیستم‌های دینامیکی با کاهش مرتبه یا درجه آزادی مدل، تقریبی از مدل اصلی محاسبه می‌شود که معمولاً از آن به عنوان مدل رتبه کاسته یاد می‌شود. این سیستم دینامیکی جدید قادر است در مدت زمان کمتری مسئله مورد نظر را شبیه‌سازی کند. معادله برگرز به عنوان یک نسخه ساده شده از معادلات ناویر-استوکس با حذف ترم فشار پیشنهاد شده است [۱]. معادله برگرز دارای سه ترم اصلی گذرا، همرفت و نفوذ می‌باشد که هر یک از این ترم‌ها با توجه به مشخصات ریاضی معادلات دیفرانسیل جزئی رفتار خاصی را نمایش می‌دهند. معادله برگرز یک معادله غیرخطی است، پس انتظار می‌رود پدیده‌هایی مانند آشفتگی را پیش‌بینی کند. بنابراین،

جریان آشفته، نوعی رژیم جریان است که مشخصه آن تغییرات تصادفی و آشوبناک خصوصیات سیال می‌باشد. بیان توضیح نظری برای آشفتگی یکی از قدیمی‌ترین مسائل حل نشده فیزیک باقی مانده است. به دلیل آنکه روش‌های تحلیلی برای مطالعه جریان آشفته با فرضیات و ساده‌سازی‌های بسیاری همراه هستند، پس پاسخگوی مسائل پیچیده نخواهند بود. بنابراین محققان به روش‌های عددی روی آورده‌اند. شبیه‌سازی عددی مستقیم یک روش تحلیل جریان آشفته است که در آن معادلات به صورت عددی و بدون هیچ‌گونه مدل‌سازی حل می‌شوند. تا دهه هفتاد میلادی شبیه‌سازی با استفاده از این روش به دلیل عدم وجود سیستم‌های محاسباتی پرسرعت ممکن نبود. هزینه انجام این شبیه‌سازی با توان سوم عدد رینولدز رابطه مستقیم دارد، به همین دلیل هزینه این روش حتی در اعداد رینولدز پایین نیز بسیار بالا بوده و در مقادیر رینولدز بالا تقریباً امکان پذیر نیست. به عنوان مثال معادلات ناویر-استوکس در شبیه‌سازی‌های عددی به دلیل پیچیدگی،

1 Reduced Order Model (ROM)

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: moayyedi@qom.ac.ir

محققان متعددی با استفاده از معادله برگرز به مطالعه جریان آشفته پرداختند. به عنوان مثال، کنستانتین روش‌های مختلف مطالعه معادله برگرز را ارائه داد [۲]. بوچاد و مزارد [۳] یک روش ساده را برای محاسبه تفاوت اختلاف سرعت در معادله برگرز در هر ابعادی پیشنهاد دادند. مقایسه آن‌ها با نتایج عددی نشان داد که دنباله سمت چپ توسط دینامیک تشکیل شوک کنترل می‌شود و نیاز به کنترل فرآیندهای ایجاد یا ادغام شوک‌ها دارد و همچنین دنباله سمت چپ ممکن است با معکوس توان دوم سرعت، اضمحلال یابد. بایونا و همکاران [۴] تقریبی عددی را برای معادله برگرز یک بعدی با استفاده از روش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای چندوجهی چندمتغیره پیشنهاد کردند. نتایج بدست آمده، حل معادله برگرز با استفاده از این روش را برای توصیف رفتار جریان آشفته، تأیید می‌کند. یکی از پرکاربردترین رویکردها برای مدل‌سازی مسائل، روش رتبه‌کاسته مبتنی بر تجزیه متعامد بهینه^۱ است. تجزیه متعامد بهینه یک روش عددی است که امکان کاهش پیچیدگی شبیه‌سازی‌هایی مانند دینامیک سیالات محاسباتی و تجزیه و تحلیل ساختاری را فراهم آورده‌است. اساس روش تجزیه متعامد بهینه به تلاش‌های لاملی [۵] باز می‌گردد. در این روش متغیرهای جریان با استفاده از گسترش مودهای ویژه تقریب می‌شوند. این روش یک الگوی کارآمد در بسیاری از زمینه‌ها مانند کنترل جریان سیال، بازسازی داده‌ها و ساختارها، توسعه مدل رتبه‌کاسته، آنالیز سیگنال، پردازش تصویر، شناخت الگو و بازسازی داده‌های استخراج شده از جریان جوی و اقیانوسی و ... می‌باشد. در این راستا، ژاو و همکاران [۶] به بررسی روش تجزیه متعامد بهینه و تجزیه مود دینامیکی جت در جریان عرضی کانال پرداختند. در پژوهش آن‌ها، بهینه بودن روش تجزیه متعامد بهینه در بازسازی جریان اثبات شده است. آبرو و همکاران [۷] بر روی تجزیه طیفی متعامد بهینه و تجزیه و تحلیل سازه‌های منسجم نزدیک دیوار در لوله‌هایی با جریان آشفته پژوهشی انجام دادند. در پژوهشی دیگر مویدی و صباغ زادگان [۸] از مدل رتبه‌کاسته پارامتری و وابسته به زمان مبتنی بر تجزیه متعامد بهینه برای شبیه‌سازی مسائل نفوذ و نفوذ-جابجایی استفاده کردند. نتایج آن‌ها نشان از دقت بالای مدل‌سازی با استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه دارد. یک رویکرد جدیدتر در استخراج ساختارهای اساسی یک سیستم دینامیکی روش تجزیه مود دینامیکی^۲ است. تجزیه مود دینامیکی یک روش جدید پس‌پردازش است که از اطلاعات داده‌های اصلی مربوط به سیستم دینامیکی استخراج می‌شود. این الگو، به عنوان یک روش کاهش ابعاد نیز می‌تواند بکار رود تا داده‌های جریان سیال با ابعاد

1 Proper Orthogonal Decomposition (POD)

2 Dynamic Mode Decomposition (DMD)

بزرگ را به ساختار منسجم مکانی-زمانی غالب تجزیه کند. توانایی تجزیه مود دینامیکی برای استخراج ویژگی‌های مربوط به جریان دینامیکی، آن را نیازمند ایجاد یک زیرمجموعه رتبه‌کاسته از داده‌ها برای بدست آوردن یک مدل رتبه‌کاسته می‌کند. از آنجایی که محتوای انرژی مهم است اما به طور کلی برای فهم رفتار دینامیکی کافی نیست، در این پژوهش بر رویه‌ای به نام تجزیه مود دینامیکی تمرکز شده که توسط اشمید [۹] معرفی شده‌است. این الگوریتم به عنوان روشی ارائه شده که می‌تواند ویژگی‌های جریان را از داده‌های تجربی یا حل عددی و بر حسب تغییرات در زمان استخراج کند. این روش به عنوان جایگزین روش تجزیه متعامد بهینه برای بررسی سیستم‌های غیرخطی معرفی شده‌است. امروزه، محققان برای شبیه‌سازی جریان‌های آشفته و معادلات غیرخطی به این روش روی آورده‌اند. به عنوان مثال، رولی و همکاران [۱۰] برای شبیه‌سازی جریان یک جت در مقیاس بزرگ از روش تجزیه مود دینامیکی استفاده کردند. در پژوهش آن‌ها مشخص شد که مودهای حاصل، ساختارهای مکانی مرتبط با لایه برشی و ناحیه نزدیک دیوار را نشان می‌دهند. گرلی و همکاران [۱۱] نیز با استفاده از روش تجزیه مود دینامیکی برهم‌کنش‌های درون لایه مرزی شوک را مورد بررسی قرار دادند. در مطالعه آن‌ها، دینامیک میدان جریان با استفاده از روش تجزیه مود دینامیکی تحلیل شد و نشان داد که یک مود با فرکانس پایین وجود دارد که مرتبط با نوسان ناشی از حباب جدایش و حرکت رو به عقب و جلوی شوک وجود دارد. هونگ و هوانگ [۱۲] با استفاده از روش تجزیه مود دینامیکی، به کنترل میدان جریان مختلط حاصل از جریان ناپایا درون یک دیفیوزر پرداختند. دوک و همکاران [۱۳] با استفاده از روش تجزیه مود دینامیکی، نرخ رشد ناپایداری جریان را مورد بررسی قرار دادند. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد که شکل ناپایدار امواج، تأثیر مشخصی بر نرخ رشد خطا دارد و امواج با توزیع دارای عدم پیوستگی (مانند موج دندان اره‌ای و مربعی) ممکن است در شرایط یکسان دارای خطای بزرگتری نسبت به امواج سینوسی باشند. سنا و سانگ [۱۴] نیز با استفاده از این روش، جریان درون یک حفره را مورد بررسی قرار داد و موفق به شناسایی مودهایی با قابلیت خودنوسانی گردیدند. کونگ و همکاران [۱۵] با استفاده از اصلاح خطا در روش تجزیه مود دینامیکی به مطالعه بر روی پیش‌بینی بار الکتریکی کوتاه مدت پرداختند و دقت بالای روش تجزیه مود دینامیکی را اثبات کردند. هو و همکاران [۱۶] نیز به بررسی جریان یک کمپرسور گریز از مرکز با استفاده از روش تجزیه مود دینامیکی پرداختند. نتایج مطالعه آن‌ها مشخص کرد که با اعمال رویکردی اصلاح‌شده از این روش، می‌توان مودهای جریان را در زمان کمتر

۳- شبیه‌سازی عددی مستقیم

برای بدست آوردن داده‌های اولیه یا همان نمایه‌ها، از حل عددی معادله برگرز لزج استفاده شده است. بدین منظور برای محاسبه فرم جداسازی شده ترم غیرخطی از روش بالادست مرتبه اول به شرح زیر:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} u_i \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} & \text{if } (u_i > 0) \\ u_i \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} & \text{if } (u_i < 0) \end{cases} \quad (2)$$

و برای ترم خطی نفوذ از روش تفاضل مرکزی مرتبه دوم استفاده شده است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1} - 2u_i - u_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (3)$$

همچنین برای انتگرال‌گیری زمانی نیز از روش رانگ-کوتا با دقت مرتبه چهارم استفاده شده است [۱۸]. در این مطالعه، کدی به کار گرفته شده که نتایج شبیه‌سازی عددی مستقیم حاصل از آن با حل دقیق معادله برگرز یک‌بعدی، اعتبارسنجی شده است [۸].

۴- روش تجزیه مود دینامیکی

تجزیه مود دینامیکی روش کاهش ابعادی است تا داده‌های جریان سیال با ابعاد بزرگ را به ساختار منسجم مکانی- زمانی غالب تجزیه کند. این روش از رویکردی مشابه روش‌های تکراری برای محاسبه مقادیر ویژه خطی یا سایر مسائل جبر خطی استفاده می‌کند. در این روش هدف، استفاده از یک فرمول‌بندی تنها با تکیه بر داده‌های ورودی، که از طریق حل عددی یا نتایج آزمایشگاهی بدست می‌آید، می‌باشد. در واقع، از یک روش مبتنی بر مدل برای استخراج اطلاعات دینامیکی اجتناب و در عوض روی یک روش مبتنی بر داده تمرکز شده است. بنابراین این روش مجموعه‌ای از مودها را همراه با یک مدل تکاملی خطی تولید می‌کند. این روش قدرتمند که مبتنی بر داده می‌باشد، به عنوان روشی برای جداسازی اطلاعات مهم سیستم دینامیکی موردنظر (مانند جریان سیال) به منظور تعیین ساختارهای اصلی سازنده رفتار دینامیکی مسئله موردنظر معرفی شده است. یکی از مزیت‌های استفاده از روش تجزیه مود دینامیکی، عدم نیاز به دانستن درباره معادله حاکم بر سیستم برای برخی از مسائل می‌باشد. همچنین اگر داده‌های

و در تراکم یک درصد بدست آورد. صباغ‌زادگان و مؤیدی [۱۷] انتقال حرارت هدایت در یک پوسته جامد با استفاده از روش تجزیه مود دینامیکی را مورد مطالعه قرار دادند. شبیه‌سازی آن‌ها نشان از توانایی بالای روش تجزیه مود دینامیکی برای مدل‌سازی انتقال حرارت در یک مدل مبتنی بر معادله داشت. در پژوهش حاضر از دو الگو استفاده شده است، ابتدا شبیه‌سازی عددی معادله نفوذ-جابجایی (معادله برگرز لزج) و سپس توسعه مدل رتبه‌کاسته معادله محور مبتنی بر روش داده محور تجزیه مود دینامیکی با حفظ ویژگی‌های ذاتی مسئله مورد نظر صورت گرفته است. در نهایت مدل حاصل با پیچیدگی و ابعاد کمتر بازسازی شده است. یکی از چالش‌های مهم در توسعه مدل‌های رتبه‌کاسته، ناپایداری آنها تحت تأثیر تغییر پارامترهایی مهمی چون عدد رینولدز به ویژه در مقادیر بالا می‌باشد. دلیل این موضوع کاهش اثرات استهلاکی ناشی از کم‌شدن اثر ترم لزج و همچنین تغییرات ساختار دینامیکی حاکم بر مسئله حاصل از حذف تعدادی از مودها می‌باشد. این موضوع سبب کاهش پایداری پاسخ سیستم دینامیکی حاکم بر مسئله شده و ممکن است رفتار سیستم به سمت واگرایی پیش رود. به همین منظور، در این پژوهش با استفاده از مفهوم اتلاف مصنوعی مبتنی بر رویکرد لزجت گردابه‌ای، پایداری مدل رتبه‌کاسته حاصل اصلاح شده و پاسخ‌های سیستم دینامیکی در مقایسه با داده‌های حل دقیق نشان از عملکرد مناسب این روش دارد.

۲- معادلات حاکم

با استفاده از معادلات ناویر-استوکس، که به صورت یک سیستم دینامیکی غیرخطی است، به دلیل وجود ترم غیرخطی موجود در معادله، می‌توان مفهوم آشفتگی و به خصوص میدان سرعت جریان آشفتگی را توصیف کرد. معادله برگرز، یک معادله دیفرانسیلی است که از ساده‌سازی معادلات ناویر-استوکس با فرض عدم وجود تغییرات فشار بدست آمده و مبنای ایجاد رفتارهایی شبیه به آشفتگی در این معادله همانند معادلات ناویر-استوکس، ترم غیرخطی می‌باشد. از آنجایی که معادله برگرز رفتار غیرخطی شبیه به معادلات ناویر-استوکس دارد، روش‌های مورد استفاده برای معادلات ناویر-استوکس معمولاً برای این معادله نیز قابل استفاده هستند. بنابراین استفاده از معادله برگرز به عنوان میدان مورد آزمایش پاسخ مناسبی را به جای معادله آشفتگی ناویر-استوکس خواهد داشت. این معادله در فرم بدون بعد به صورت رابطه (۱) خواهد بود:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$S = U^T A U \Sigma W^T W \Sigma^{-1} = U^T V_2^N W \Sigma^{-1} \quad (9)$$

ماتریس S مشابه ماتریس A می‌باشد پس می‌توان گفت مقادیر ویژه ماتریس S با برابر A خواهد بود.

$$S y_i = \mu_i y_i \quad i = 1, \dots, M \quad (10)$$

در این رابطه y_i بیانگر بردار ویژه و μ_i مقادیر ویژه ماتریس S هستند. در صورتی که طرفین رابطه در U ضرب شود، ماتریس همانی $U^T U$ در سمت چپ معادله قرار داده خواهد شد.

$$U S U^T U y_i = U \mu_i y_i \quad (11)$$

بنابراین روابط زیر بدست خواهد آمد:

$$U S U^T = A \quad (12)$$

$$A U y_i = \mu_i U y_i \quad (13)$$

$U y_i$ بردارهای ویژه ماتریس A می‌باشد و مقادیر ویژه هر دو ماتریس S و A برابر با μ_i می‌باشد. بنابراین مودهای مکانی بدست آمده از روش تجزیه مود دینامیکی حاصل می‌شود.

$$\phi_i = U y_i \quad (14)$$

$$A \phi_i = \mu_i \phi_i \quad (15)$$

برای پیش‌بینی رفتار سیستم در بلند مدت و بازسازی مجموعه نمایه‌های اولیه، با استفاده از محاسبه ضرایب زمانی مودها و مودهای دینامیکی، یک بسط خطی تقریب زده می‌شود. این عمل با تصویرسازی هر یک از مودهای تجزیه مود دینامیکی در اولین نمایه طبق رابطه زیر انجام می‌شود.

$$a_i = \varphi_{ij}^t v_{1j} \quad (16)$$

در رابطه فوق، ϕ^t ، معکوس ماتریس مودهای دینامیکی است. به منظور

ورودی به صورت داده‌های آزمایشگاهی و با آزمایش بر روی یک سیستم واقعی اندازه‌گیری شده باشند، برای از بین بردن خطاهای اندازه‌گیری ناشی از خطای انسانی، لازم است پردازش شوند. در قدم اول به مجموعه‌ای از داده‌ها یا همان ماتریس داده‌ها برای روش تجزیه مود دینامیکی نیاز است. به عبارتی، با توصیف کلی میدان‌های جریان جمع آوری شده با نمونه‌گیری از شبیه‌سازی عددی مستقیم یا داده‌های تجربی شروع می‌شود. داده‌هایی که به صورت یک دنباله از میدان‌های لحظه‌ای جریان هستند، تحت عنوان بردار v_i مرتب خواهند شد. نمایه‌ها با گام زمانی ثابت نسبت به یکدیگر قرار دارند، بنابراین سیستم مورد مطالعه به صورت ماتریسی با M سطر و N ستون طبق رابطه (۴) مرتب خواهد شد.

$$V_1^N = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_N] \quad (4)$$

در این رابطه، V_i بیانگر میدان لحظه‌ای i ام است. حال به ترتیب آخرین نمایه و اولین نمایه از این ماتریس حذف می‌شود:

$$V_1^{N-1} = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_{N-1}] \quad (5)$$

$$V_2^N = [v_2, v_3, v_4, \dots, v_N]$$

با استفاده از یک نگاشت خطی، بین میدان لحظه‌ای v_i ، (مجموعه اول) با میدان لحظه‌ای v_{i+1} ، (مجموعه دوم)، رابطه زیر برقرار خواهد بود:

$$v_{i+1} = A v_i \quad (6)$$

$$V_2^N = A V_1^{N-1}$$

ماتریس نگاشت A ، ماتریسی است که شامل اطلاعات تکامل تدریجی سیستم است [۹]. برای برقراری رابطه (۶) باید عبارت به ماتریس A متکی نباشد. ماتریس غیرمربعی V_1^{N-1} به صورت زیر و با استفاده از روش تجزیه مقادیر تکین، تجزیه می‌شود:

$$V_1^{N-1} = U \Sigma W^T \quad (7)$$

در نتیجه:

$$V_2^N = A U \Sigma W^T \quad (8)$$

با ضرب U^T و $W \Sigma^T$ در طرفین رابطه (۸) معادله زیر بدست می‌آید:

بخش اغتشاشی براساس تقریب گالرکین به صورت زیر قابل بازنویسی

است:

$$u'(x, t) = \sum_{i=1}^N a^i(t) \phi_i(x) \quad (21)$$

در این رابطه، ϕ_i پایه‌های دلخواه و a^i ضرایب زمانی هستند که باید مقادیر آن‌ها به نحوی انتخاب شود تا معادله دیفرانسیل را با تقریب خوبی ارضا کنند. با جایگذاری روابط مربوط به بخش متوسط و اغتشاشی میدان لحظه‌ای جریان در معادله برگزر، نتیجه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \phi_i(x) \times \sum_1^N \frac{d}{dt} (a^i(t)) + (\bar{u} \times a^i(t) \times \\ & \sum_1^N \nabla \phi_i(x) + \bar{u} \times \\ & \frac{1}{N} \sum_1^N \nabla \bar{u} + a^i(t) \times \sum_1^N \nabla (\bar{u}, \phi_i(x)) + \\ & a^i(t) \times a^j(t) \times \sum_{i=j=1}^N \nabla (\phi_i(x), \phi_j(x))) = \\ & \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^2 \bar{u} + a^i(t) \times \sum_1^N \nabla^2 \phi_i(x)) \end{aligned} \quad (22)$$

در روش تجزیه متعامد بهینه، مودها نسبت به یکدیگر دارای خاصیت تعامد هستند و با استفاده از روش تجزیه مقدار تکین، در نهایت ضریب بخش گذرا با رابطه دلتای کرونگر ساده‌سازی می‌شود. اما در روش تجزیه مود دینامیکی، همانطور که پیش‌تر گفته شد، مودها الزاماً دارای ویژگی تعامد نبوده پس یک پایه الحاقی شبه متعامد لازم است تا در طرفین رابطه ضرب ماتریسی شود. این پایه الحاقی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\phi^{ad} = ((\phi_k^H(\vec{x}), \phi_i(\vec{x})))^{-1} \quad (23)$$

در رابطه فوق، ϕ_k^H مزدوج ترانهاده مودهای روش تجزیه مود دینامیکی است. با ضرب طرفین رابطه (۲۲) در مزدوج ترانهاده مودهای تجزیه مود دینامیکی، معادله زیر حاصل خواهد شد:

بازسازی هر یک از نمایه‌های اولیه از رابطه زیر می‌توان بهره برد:

$$V_k = \sum_i^M a_i \varphi_{ij} \mu_i^{k-1} \quad (17)$$

برای توسعه مدل رتبه‌کاسته مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی، مفهوم مودها و انرژی کل آنها حائز اهمیت می‌باشد. در روش استفاده شده در این مطالعه، برخلاف روش تجزیه متعامد بهینه، مودهای انتخابی برای توسعه مدل‌های رتبه‌کاسته از نمودار تغییرات انرژی (آبشار انرژی) پیروی نمی‌کنند، بنابراین مودهای روش تجزیه مود دینامیکی دارای خاصیت تعامد نبوده و نسبت به یکدیگر مستقل نیستند. بنابراین با استفاده از نرم بدست آمده از هر مود طبق رابطه (۱۸) انرژی نسبی مودها را می‌توان بدست آورد و تنها به آن مود اختصاص ندارد. با این حال از طریق این رابطه و مقدار انرژی نسبی هر مود نیز می‌توان مودهای پرانرژی را مشخص کرد.

$$N = |a_i \varphi_{ij}| \quad (18)$$

با توجه به دو رابطه (۱۷) و (۱۸) می‌توان به رابطه زیر دست یافت.

$$N_k = |a_i \varphi_{ij} \mu_i|^{k-1} \quad (19)$$

در رابطه فوق به دلیل وجود متغیر μ_i می‌توان وضعیت پایداری مودها را بررسی کرد. برای مشخص کردن اهمیت و تأثیر هر یک از مودهای تجزیه دینامیکی باید نرم اولیه و نرم نهایی آن‌ها بررسی شود.

۵- مدل رتبه‌کاسته معادله محور مبتنی بر روش تجزیه مود دینامیکی

مدل‌سازی رتبه‌کاسته تکنیکی است که می‌تواند پیچیدگی محاسباتی یا نیاز ذخیره‌سازی رایانه‌ای را کاهش دهد. این کار با مدل‌های جایگزین با مرتبه پایین‌تر می‌تواند تجزیه و تحلیل، کنترل و طراحی را ساده کند. به منظور توسعه مدل رتبه‌کاسته، کمیت حاکم بر دینامیک مسئله به صورت حاصل جمع بخش متوسط‌گیری شده زمانی و یک بخش اغتشاشی نوشته می‌شود:

$$u(x, t) = \bar{u}(x) + u'(x, t) \quad (20)$$

نسبتاً پیچیده می‌تواند تحت تأثیر عوامل مختلفی منجر به کسب نتایج قابل قبول یا داده‌های غیرفیزیکی شود. در این حالت رفتار مدل می‌تواند در بازه زمانی کوتاه یا بلند به نتایج نادرستی سوق پیدا کند. این واگرایی از نتایج درست، تنها مختص مدل‌های مبتنی بر روش تجزیه مود دینامیکی نبوده و در الگوهای رتبه‌کاسته حاصل از روش تجزیه متعامد بهینه نیز مشاهده می‌شود. پس می‌توان گفت سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی که از طرح گالرکین حاصل شده و برای مدل‌سازی رفتار سیستم با تغییر پارامترهای مهم حاکم بر مسئله بکار می‌رود، می‌تواند ناپایدار باشد. در پژوهش حاضر، در صورتی که سیستم در حالت‌های اولیه و با مقادیر عدد رینولدز پایین مدنظر باشد، نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته کاملاً بر هم منطبق بوده و پیش‌بینی درستی از رفتار مسئله بدست می‌آید. یکی از دلایل این موضوع می‌تواند غالب‌تر شدن عبارت نفوذ در معادله و تأثیر افزایش اثر استهلاکی آن باشد. در توسعه مدل رتبه‌کاسته از رویکرد کاهش مرتبه سیستم دینامیکی مبتنی بر حذف اثر برخی مودها بهره برده شده‌است. این موضوع نیز عاملی مهم در کاهش استهلاک لازم و پایداری پاسخ مدل رتبه‌کاسته می‌باشد. اما با افزایش عدد رینولدز، ترم لزج موجود در معادله برگرز اثر کمتری خواهد داشت و مشابه با شرایط جریان آشفته، تأثیر استهلاکی عبارت لزج در معادله کاهش می‌یابد. بنابراین استهلاک مورد نیاز برای پایداری سیستم دینامیکی رتبه‌کاسته کم شده و ممکن است پاسخ‌های حاصل دچار واگرایی شوند. برای اصلاح این ناپایداری و جبران استهلاک از دست رفته برای رسیدن مجدد سیستم به پایداری از یک عبارت لزج گردابه‌ای مصنوعی^۱ در مدل استفاده می‌شود. همچنین این عبارت می‌تواند به عنوان جایگزین اثر مودهای حذف‌شده در فرآیند کاهش مرتبه بکار رفته و مشابه رویکرد شبیه‌سازی جریان‌های آشفته برای مدل‌سازی ساختارهای متجانسی که سطح انرژی پایین‌تری دارند، استفاده شود. ضریب مورد نظر برای پایداری مدل رتبه‌کاسته به ازای مقادیر متفاوت عدد رینولدز متغیر بوده اما به طور کلی در این پژوهش مقدار آن ثابت فرض شده است. ترم استهلاک مصنوعی که به مدل رتبه‌کاسته استاندارد اضافه می‌شود، به صورت رابطه زیر می‌باشد:

$$B_k^2 = \langle \nu_e \nabla^2 \bar{u}, \phi_k \rangle \quad (26)$$

$$B_{ki}^1 = \langle \nu_e \nabla^2 \phi_i; \phi_k \rangle$$

در این دو رابطه مقدار ν_e نشان‌دهنده لزج گردابه‌ای است. همانطور که

$$\begin{aligned} & (\phi_k^H(x), \phi_i(x)) \times \\ & \sum_1^N \frac{d}{dt} (a^i(t)) + (\phi_k^H(x), \bar{u} \cdot \nabla \phi_i(x)) \times a^i(t) - \\ & (\phi_k^H(x), \bar{u} \cdot \nabla \bar{u}) - (\phi_k^H(x), \phi_i(x) \cdot \nabla \bar{u}) + \\ & (\phi_k(x), \phi_i(x) \cdot \nabla \phi_j(x)) \times a^i(t) \times a^j(t) = \\ & \frac{1}{\text{Re}} (\phi_k^H(x), \nabla^2 \bar{u}) + \\ & \frac{1}{\text{Re}} (\phi_k^H(x), \nabla^2 \phi_i(x)) \times a^i(t) \end{aligned} \quad (24)$$

در نهایت معادله مدل رتبه‌کاسته به صورت یک معادله دیفرانسیلی ساده مرتبه اول برای ضرایب مودال وابسته به زمان بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} & \frac{da^k(t)}{dt} + \tilde{A}_{kij} \times a^i(t) + \\ & \tilde{B}_{ki} \times a^i(t) + \tilde{C}_k = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

مدل حاصل به صورت سیستم دینامیکی بوده که برای محاسبه ضرایب مودال در گام‌های زمانی مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد. ضرایب موجود در معادله (۲۵) به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{kij} &= A_{ij}^k \times \phi^{ad} \\ \tilde{B}_{ki} &= B_i^k \times \phi^{ad} \\ \tilde{C}_k &= C^k \times \phi^{ad} \end{aligned}$$

به طوری که:

$$\begin{aligned} A_{ij}^k &= (\phi_i(\vec{x}) \cdot \nabla \phi_j(\vec{x}), \phi_k^H(\vec{x})) \times \phi^{ad} \\ B_i^k &= (\bar{U} \cdot \nabla \phi_i(x), \phi_k^H(x)) + \\ & (\phi_i(x) \cdot \nabla \bar{U}, \phi_k^H(x)) \times \phi^{ad} - \\ & \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^2 \phi_i(x), \phi_k^H(x)) \times \phi^{ad} \\ C^k &= (\bar{U} \cdot \nabla \bar{U}, \phi_k^H(x)) \times \phi^{ad} - \\ & \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^2 \bar{U}, \phi_k^H(x)) \times \phi^{ad} \end{aligned}$$

۶- اصلاح مدل رتبه‌کاسته با استفاده از رویکرد لزج گردابه‌ای مصنوعی

مدل‌سازی رتبه‌کاسته سیستم‌های دینامیکی با فیزیک غیرخطی و

1 Artificial Eddy viscosity

است. سپس، با استفاده از ۱۰ مود دینامیکی محاسبه شده برای این مسئله، میدان موردنظر بازسازی شده است. ضرایب مودال (بخش حقیقی) بدست آمده به ازای مقادیر مختلف عدد رینولدز ۱۰۰۰، ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ به ترتیب در شکل های ۳ تا ۵ نمایش داده شده است. این تغییرات زمانی مربوط به ۱۰ مود دینامیکی میدان جریان حاصل از مدل رتبه کاسته می باشد.

به منظور مطالعه دقت مدل سازی با ابعاد پایین برای اعداد رینولدز مختلف در آخرین گام زمانی، نتایج شبیه سازی عددی مستقیم و مدل رتبه کاسته استاندارد و اصلاح شده مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی بایکدیگر مقایسه شده اند. در شکل ۶ نتایج بدست آمده از شبیه سازی عددی مستقیم و مدل رتبه کاسته استاندارد در عدد رینولدز ۱۰۰ برای آخرین گام زمانی نمایش داده شده است. مقایسه ای بین نتایج حاصل از مدل رتبه کاسته استاندارد و داده های حاصل از حل عددی مستقیم برای واحدهای زمانی ۰/۱، ۰/۲، ۰/۳ و ۰/۴ در عدد رینولدز ۱۰۰۰ در شکل ۷ نشان داده شده است. همانطور که در نتایج نمایش داده شده دیده می شود دقت مدل رتبه کاسته در مقایسه با داده های حل عددی مستقیم در زمان های مختلف کاهش یافته و به خوبی دینامیک حاکم بر مسئله را پیش بینی نکرده است. این موضوع با بررسی نتایج حاصل از مدل رتبه کاسته در اعداد رینولدز ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ که به ترتیب در شکل ۸ برای زمان های ۰/۱، ۰/۲، ۰/۳ و ۰/۴ و شکل ۹ برای زمان های ۰/۱، ۰/۲، ۰/۳ و ۰/۴ آورده شده، بیشتر دیده شده و دقت مدل رتبه کاسته به صورت مضاعف در برخی گام های زمانی کاهش یافته است. همانطور که مشخص است، با گذر زمان رفتار غیرخطی معادله شده می شود و انحراف مدل رتبه کاسته افزایش می یابد. به عبارتی در بازه های زمانی بالاتر با توجه به شرایط فیزیکی که در این مسئله فرض شده است، یک ناپیوستگی ایجاد شده که نشان دهنده کاهش اثر ترم استهلاک موجود در معادله است. با اینکه در شکل ۸ تا قبل از زمان ۰/۳ تغییرات ناگهانی وجود ندارد، اما مدل رتبه کاسته به اشتباه در این واحد زمانی یک ناپیوستگی را پیش بینی کرده است. این در حالی است که انتظار می رفت این تغییرات در زمان های بالاتری صورت گیرد. پس این نتایج نشان می دهند که اثر استهلاک در مسئله کاهش یافته و ترم غیرخطی در رفتار معادله غالب شده است. این رفتار با افزایش عدد رینولدز مشهودتر شده زیرا که در شکل ۹ نتایج حاصل از مدل رتبه کاسته تنها تا زمان ۰/۳ قابل مشاهده است و مدل رتبه کاسته مقادیر نامعلوم و نامفهوم را برای زمان های بعدی گزارش می کند. اگرچه مدل رتبه کاسته در اعداد رینولدز کمتر، واگرایی ندارد اما کاملاً مشخص است که فیزیک مسئله را اشتباه پیش بینی کرده و این نتایج در زمان های بالاتر

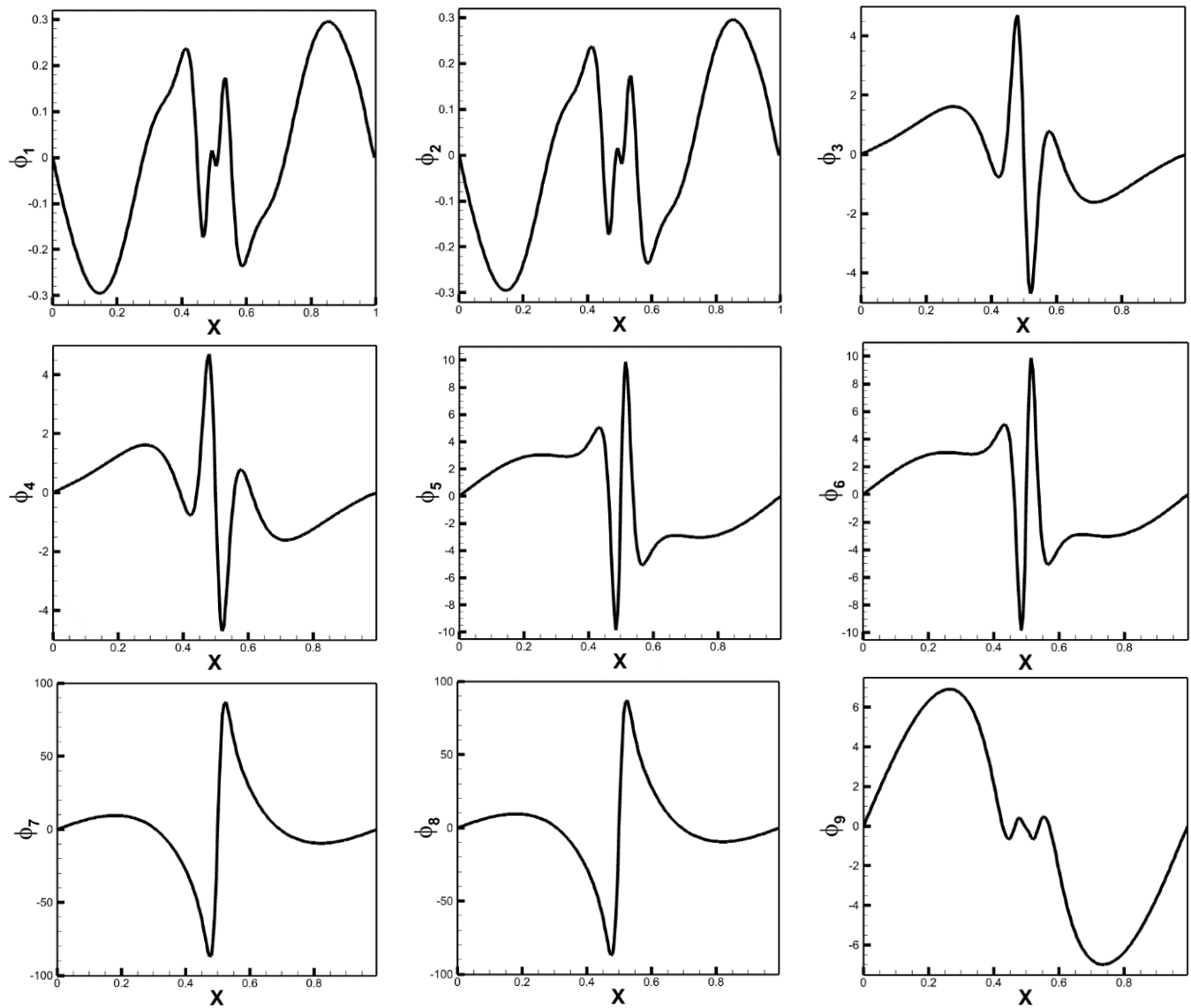
در صورت عبارات مشخص است یکی از آنها در عبارت ثابت مدل رتبه کاسته لحاظ شده و دیگری در ترم خطی مدل بکار می رود. هدف اصلی این الگو ارائه یک طرح پایدار با حفظ دقت مناسب است که بر این اساس یک لزجت مصنوعی را در بالاترین فرکانس ها اضافه می کند. بنابراین، طبق این روش مقدار انرژی لازم برای پایداری سیستم تأمین شده و مقادیر بدست آمده از مدل سازی در اعداد رینولدز بالا پاسخ مناسبی خواهند داشت. مقادیر ویژه ای که از تجزیه مود دینامیکی حاصل می شود مختلط است و بخش حقیقی آن پایداری مودهای تجزیه مود دینامیکی را مشخص می کند.

۷- نتایج

در این بخش به بررسی نتایج بدست آمده از شبیه سازی عددی مستقیم و مدل سازی رتبه کاسته مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی پرداخته می شود. در قدم اول معادله برگز ناپایا یک بعدی لزج تراکم ناپذیر با استفاده از شبیه سازی عددی مستقیم حل شده و سپس با استفاده از رویکرد تشریح شده در بخش های پیشین، مدل رتبه کاسته بدست آمده و جایگزین مدل اصلی می شود. به منظور این کار از مجموعه ماتریس داده های بدست آمده از شبیه سازی عددی مستقیم برای ورودی مدل رتبه کاسته استفاده شده است. در مطالعه حاضر برای حل عددی معادله برگز از روش شبیه سازی عددی مستقیم استفاده شده و گام زمانی معادل ۰/۰۰۱ فرض شده است. لازم به ذکر است، حل عددی این معادله برای یک واحد زمانی و به ازای اعداد رینولدز ۱۰۰، ۱۰۰۰، ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ انجام شده است. شرایط مرزی و اولیه این مسئله به شرح زیر می باشد:

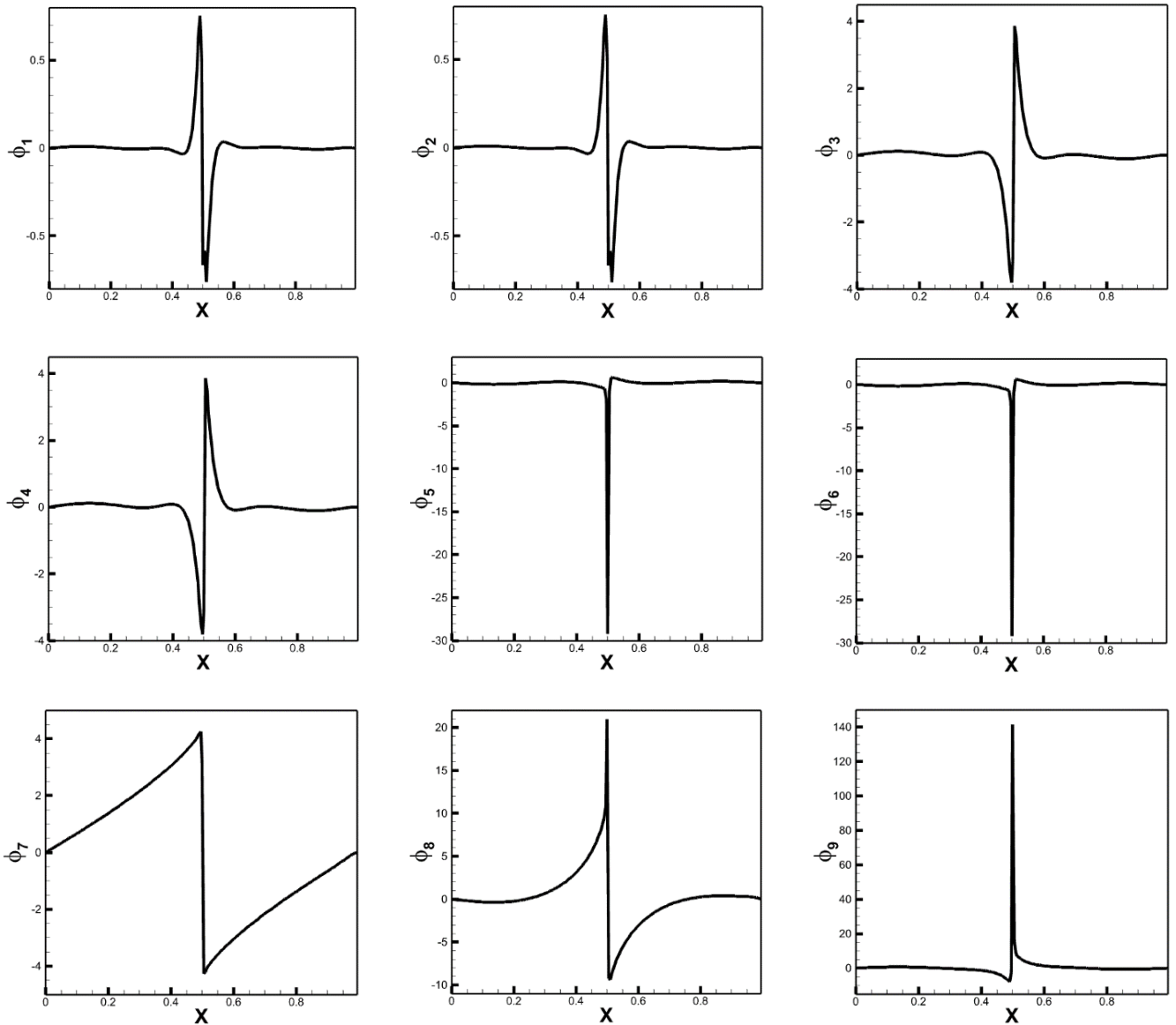
$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sin(2\pi x) \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

پس از حل عددی مستقیم معادله برگز، ماتریس داده ها شامل ۱۰۰ نمایه (عضو) با گام های زمانی مساوی و متوالی ایجاد و به عنوان داده های ورودی مدل رتبه کاسته در نظر گرفته شده است. پس از حل مسئله مقادیر ویژه، مودهای حاصل از روش تجزیه مود دینامیکی محاسبه خواهند شد. در شکل های ۱ و ۲ توزیع بخش حقیقی مود دینامیکی شماره ۱ تا ۹ به ترتیب برای کمترین و بیشترین مقادیر عدد رینولدز در این مسئله نمایش داده شده است. همانطور که پیش تر گفته شد، مودهای بدست آمده از روش تجزیه مود دینامیکی نسبت به یکدیگر برتری سطح انرژی نداشته و این پایه ها از هم مستقل نمی باشند و این مسئله به طور کامل در این شکل ها مشهود



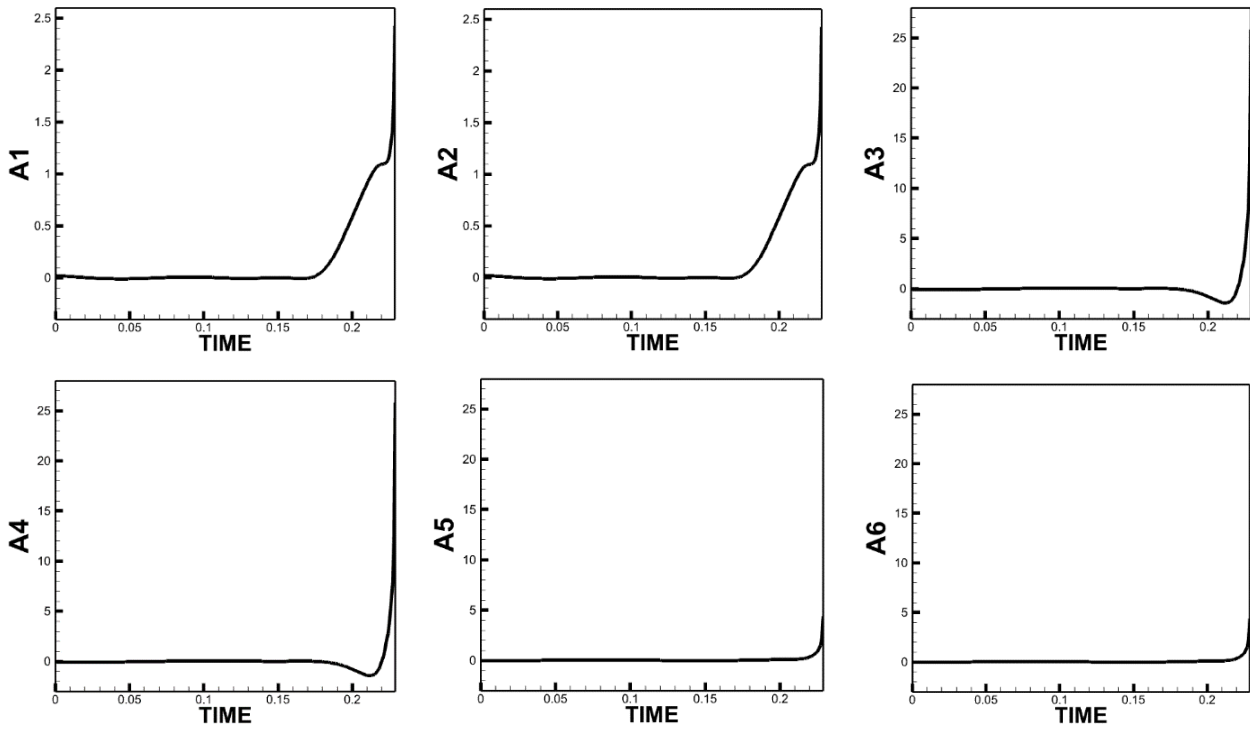
شکل ۱. توزیع مکانی مودهای دینامیکی (شماره ۱ تا ۹) میدان مبتنی بر داده‌های حاصل از حل معادله برگرز به ازای عدد رینولدز ۱۰۰

Fig. 1. Spatial Distribution of Dynamic Modes based on the Data Obtained from Solution of Burgers Equation for Reynolds Number of 100



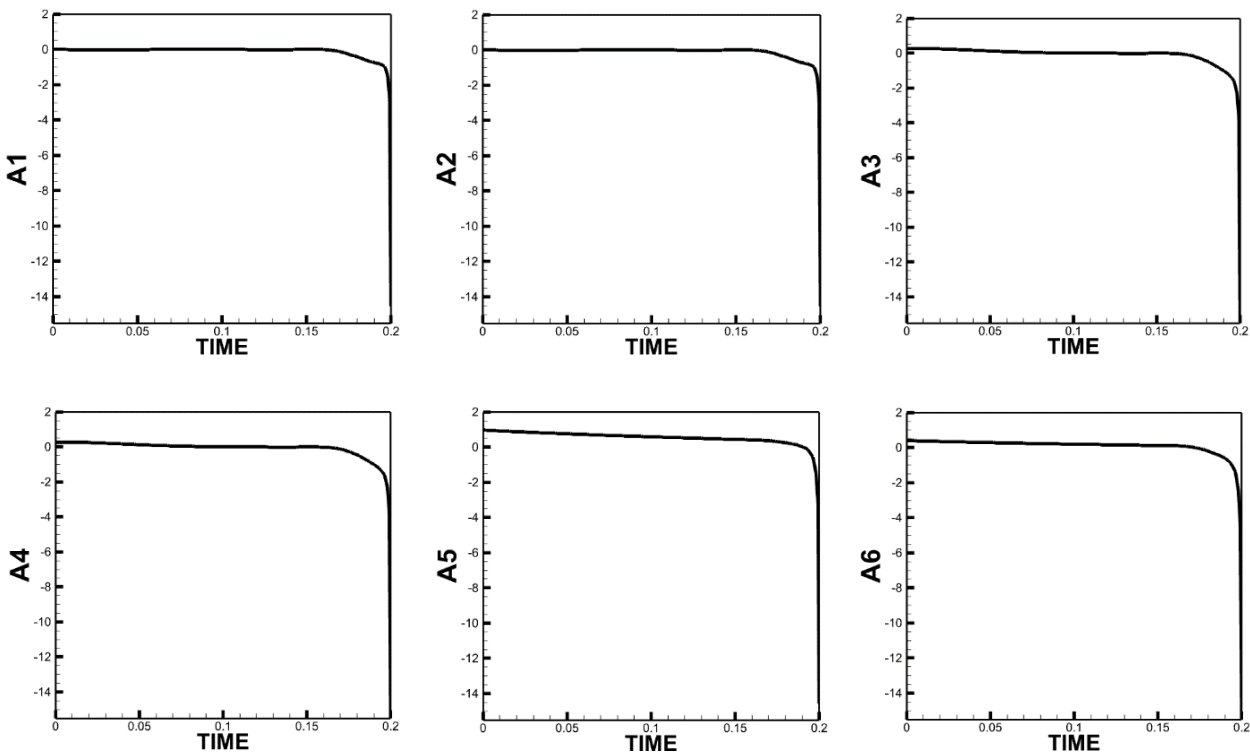
شکل ۲. توزیع مکانی مدهای دینامیکی (شماره ۱ تا ۹) میدان مبتنی بر داده‌های حاصل از حل معادله برگرز به ازای عدد رینولدز ۵۰۰۰

Fig. 2. Spatial Distribution of Dynamic Modes based on the Data Obtained from Solution of Burgers Equation for Reynolds Number of 5000



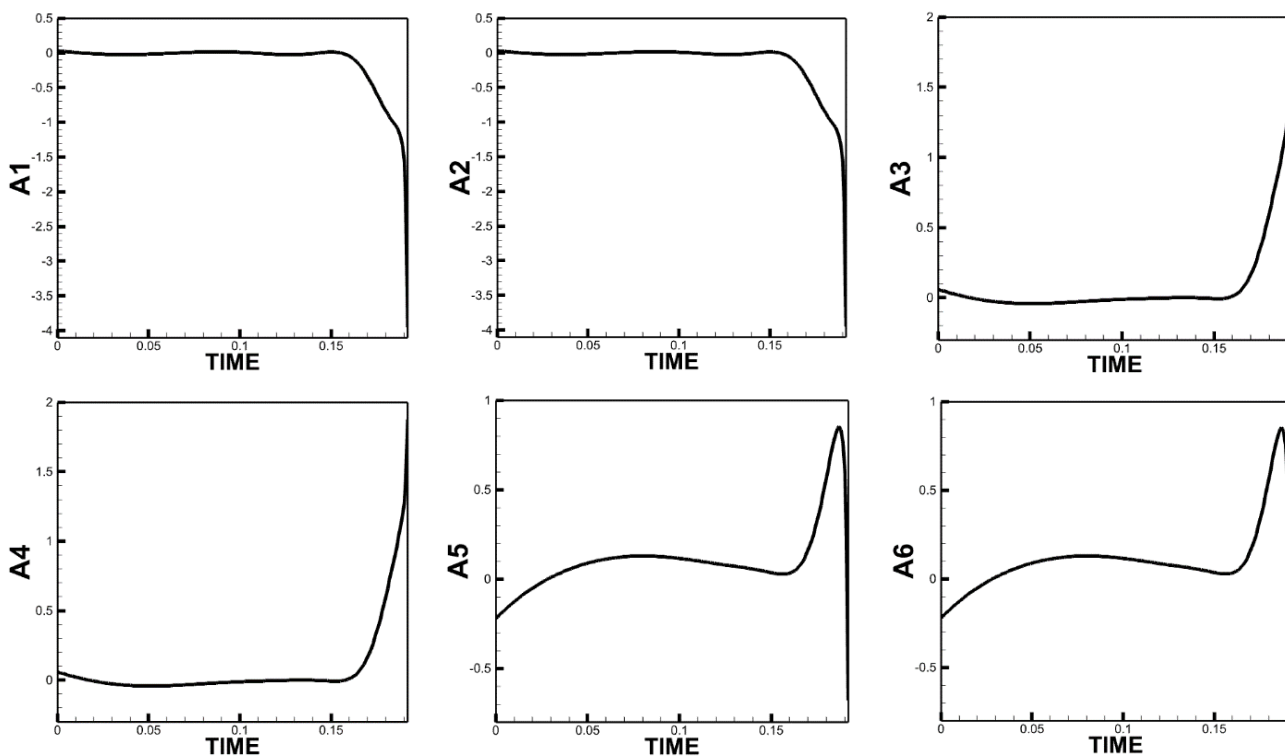
شکل ۳. تغییرات زمانی بخش حقیقی ضرایب مودال به ازای عدد رینولدز ۱۰۰۰

Fig. 3. Temporal Variation of Real Part of Modal Coefficients at Reynolds Number of 1000



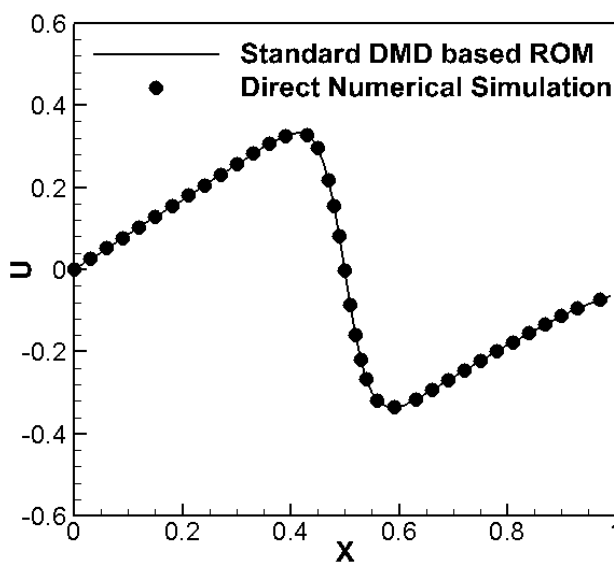
شکل ۴. تغییرات زمانی بخش حقیقی ضرایب مودال به ازای عدد رینولدز ۲۰۰۰

Fig. 4. Temporal Variation of Real Part of Modal Coefficients at Reynolds Number of 2000



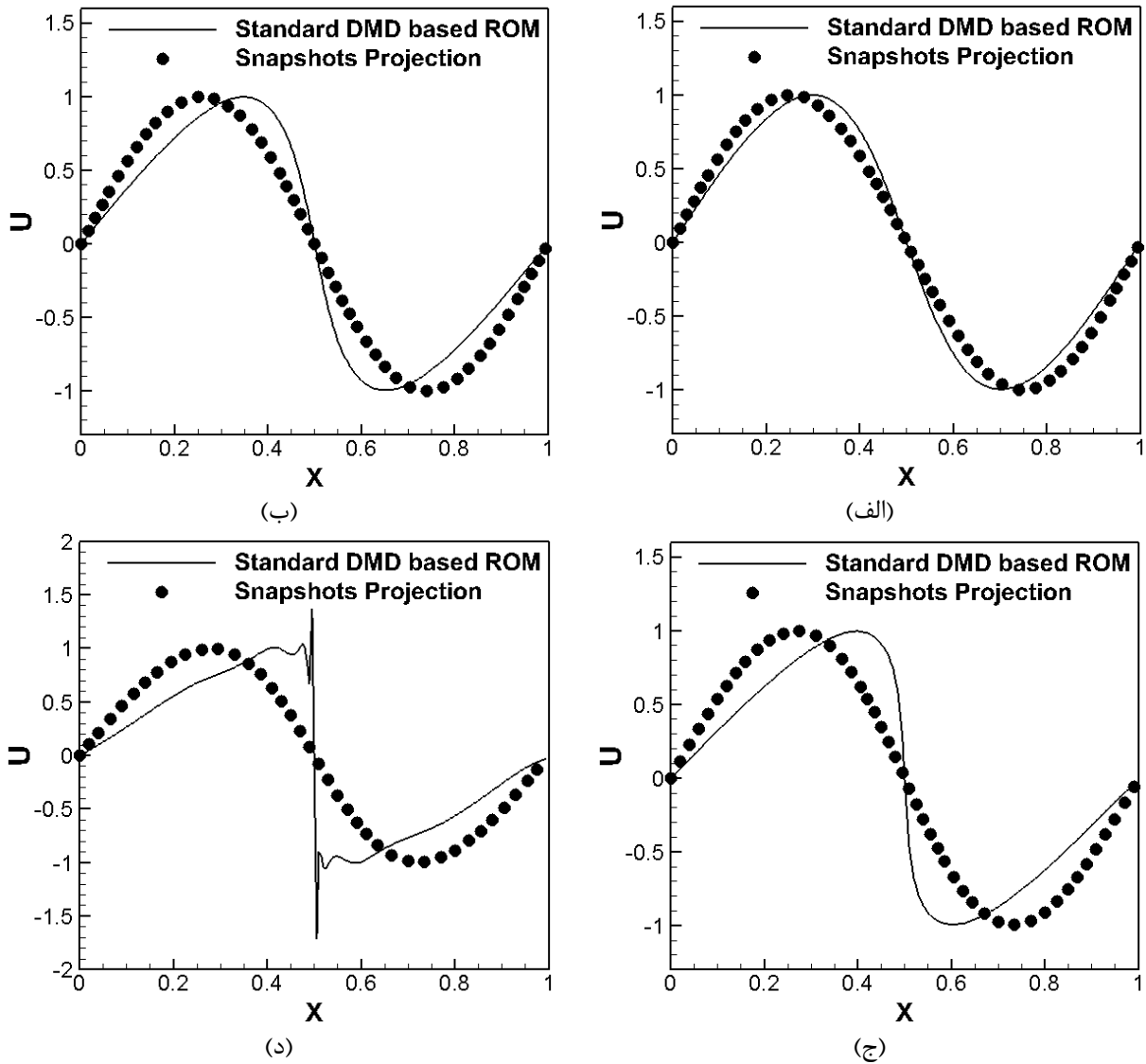
شکل ۵. تغییرات زمانی بخش حقیقی ضرایب مودال نسبت به ازای عدد رینولدز ۵۰۰۰

Fig. 5. Temporal Variation of Real Part of Modal Coefficients at Reynolds Number of 5000



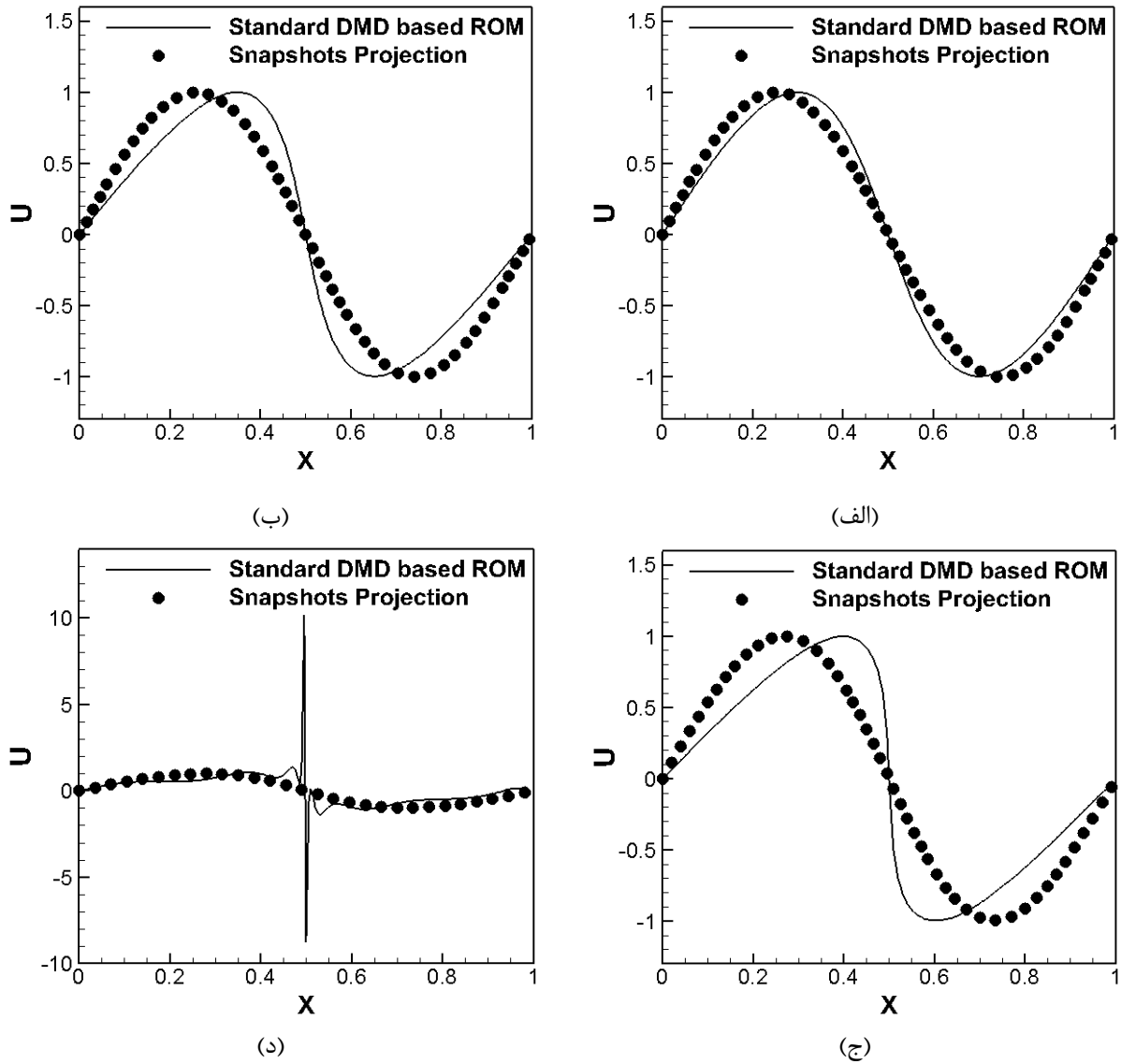
شکل ۶. مقایسه پاسخ معادله برگرز برای آخرین گام زمانی حاصل از مدل رتبه کاسته استاندارد و داده‌های شبیه‌سازی عددی مستقیم در عدد رینولدز ۱۰۰

Fig. 6. Comparison between the Prediction of Standard Reduced Order Model for the Last Time Step and Direct Numerical Simulation of Burgers Equation at Reynolds Number of 100



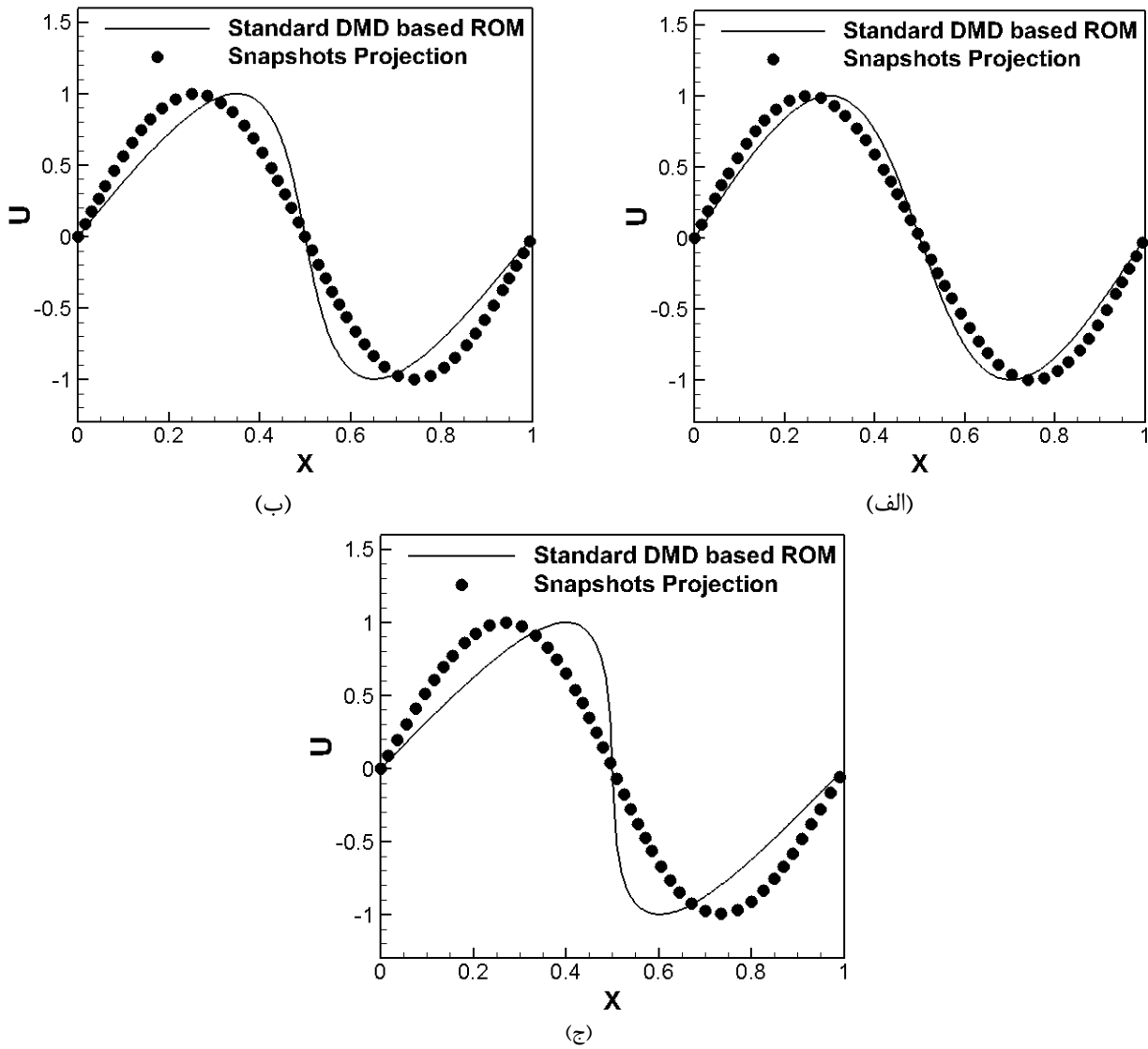
شکل ۷. مقایسه پاسخ معادله برگرز حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته استاندارد در عدد رینولدز ۱۰۰۰ برای (الف) $t=0/1$ ، (ب) $t=0/2$ ، (ج) $t=0/3$ و (د) $t=0/4$

Fig. 7. Comparison between the Prediction of Standard Reduced Order Model and Direct Numerical Simulation of Burgers Equation at Reynolds Number of 1000 at (a) $t=0.1$, (b) $t=0.2$, (c) $t=0.3$ and (d) $t=0.4$



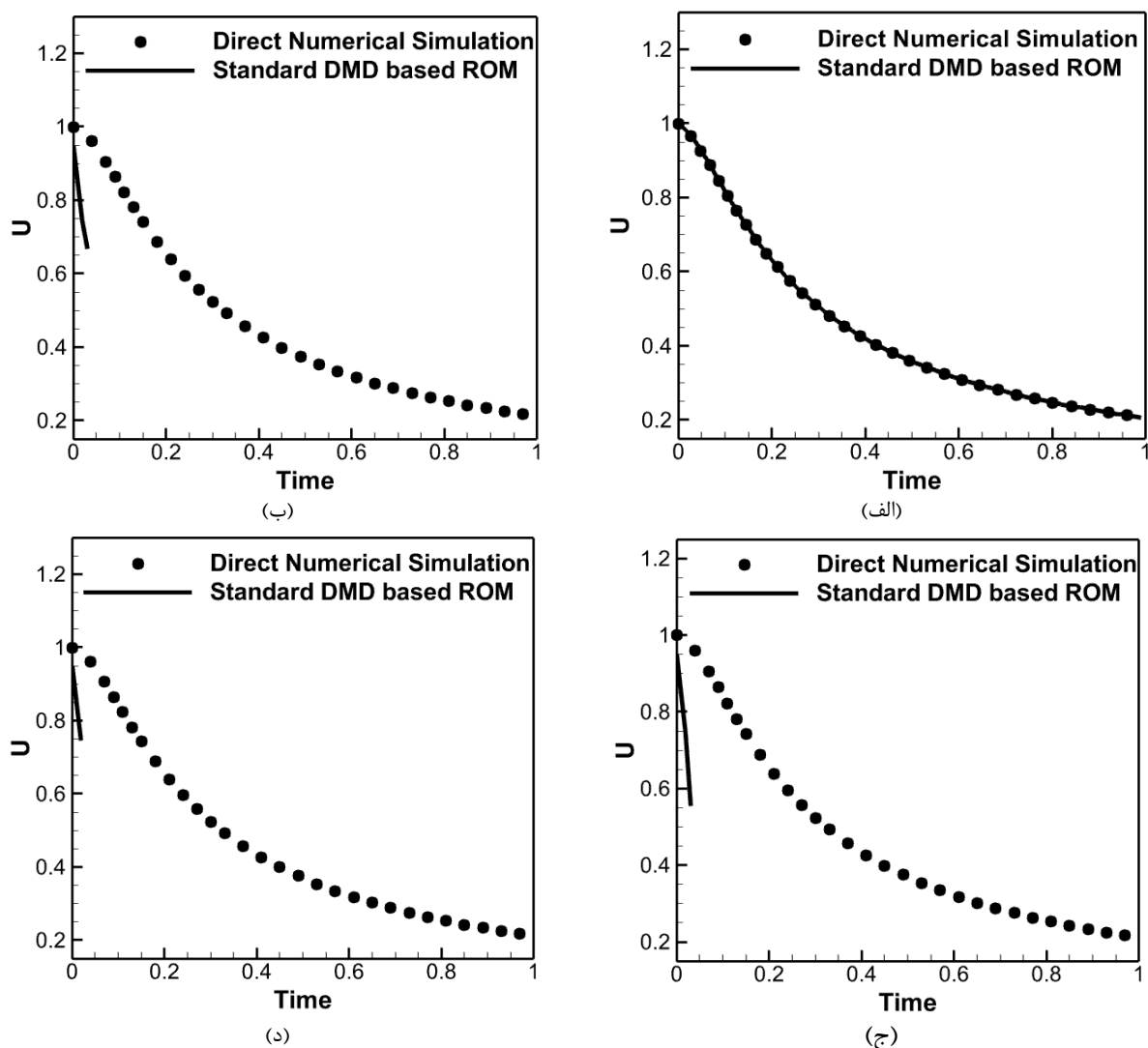
شکل ۸. مقایسه پاسخ معادله برگرز حاصل از شبیه‌سازی عددی و مدل رتبه‌کاسته استاندارد در عدد رینولدز ۲۰۰۰ برای (الف) $t = 0.1$ ، (ب) $t = 0.2$ ، (ج) $t = 0.3$ و (د) $t = 0.4$

Fig. 8. Comparison between the Prediction of Standard Reduced Order Model and Direct Numerical Simulation of Burgers Equation at Reynolds Number of 2000 at (a) $t=0.1$, (b) $t=0.2$, (c) $t=0.3$ and (d) $t=0.4$



شکل ۹. مقایسه پاسخ معادله برگرز حاصل از شبیه‌سازی عددی و مدل رتبه‌کاسته استاندارد در عدد رینولدز ۵۰۰۰ برای (الف) $t=0.1$ ، (ب) $t=0.2$ ، (ج) $t=0.3$

Fig. 9. Comparison between the Prediction of Standard Reduced Order Model and Direct Numerical Simulation of Burgers Equation at Reynolds Number of 5000 at (a) $t=0.1$, (b) $t=0.2$ and (c) $t=0.3$



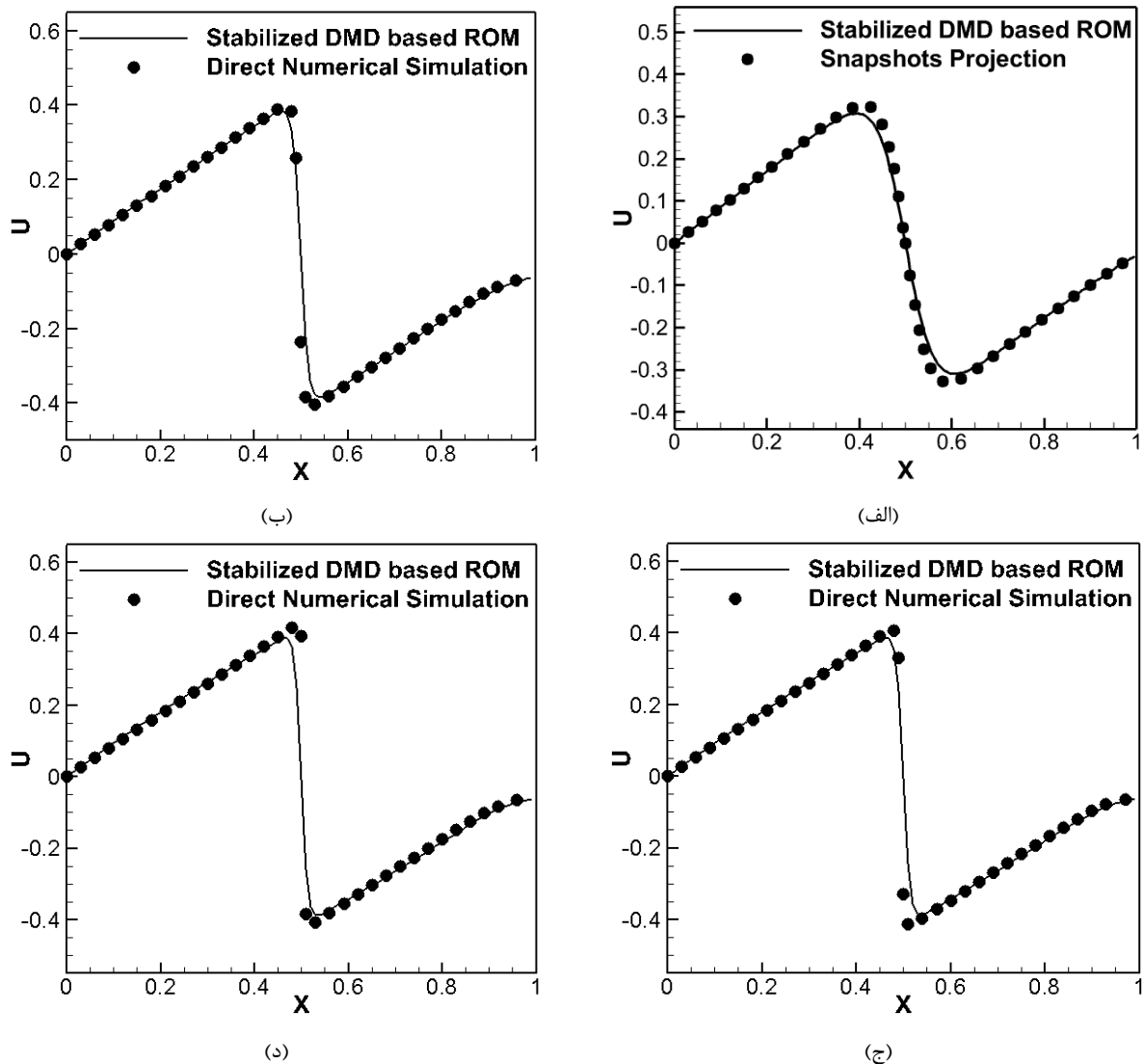
شکل ۱۰. مقایسه تغییرات پاسخ مدل برگرز در $x=0.25$ حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته استاندارد مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی در اعداد رینولدز (الف) ۱۰۰، (ب) ۱۰۰۰، (ج) ۲۰۰۰ و (د) ۵۰۰۰

Fig. 10. Comparison between the Prediction of Standard Reduced Order Model and Direct Numerical Simulation of Burgers Equation on $x=0.25$ at Reynolds Numbers of (a) 100, (b) 1000, (c) 2000 and (d) 5000

مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده برای معادلات غیرخطی بر مبنای روش تجزیه مود دینامیکی مشخص می‌گردد.

همانطور که در بخش متدولوژی حل و توسعه مدل رتبه‌کاسته اشاره شد برای جبران واگرایی داده‌های حاصل از مدل در مقایسه با نتایج حل عددی دقیق، از طریق ایجاد یک اتلاف مصنوعی مشابه با مفهوم لزجت گردابه‌ای، مدل به پایداری رسیده تا دقت پیش‌بینی داده‌های حاصل از آن در اعداد رینولدز مختلف به درستی انجام شود. در مطالعه حاضر، مقدار لزجت

و با افزایش عدد رینولدز، بیشتر نمایان است. برای بررسی رفتار وابسته به زمان مدل در پیش‌بینی پاسخ معادله برگرز، نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته و روش حل عددی مستقیم در یک نقطه مکانی مشخص ($x=0.25$) محاسبه شده و داده‌های آن در شکل ۱۰ به ازای اعداد رینولدز مختلف آورده شده‌است. همانطور که در شکل مشخص است برای اعداد رینولدز بیشتر از ۱۰۰۰، نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته واگرا شده و اعداد بی‌معنایی بدست آمده که در نمودار قابل ترسیم نمی‌باشد. بنابراین، اهمیت توسعه

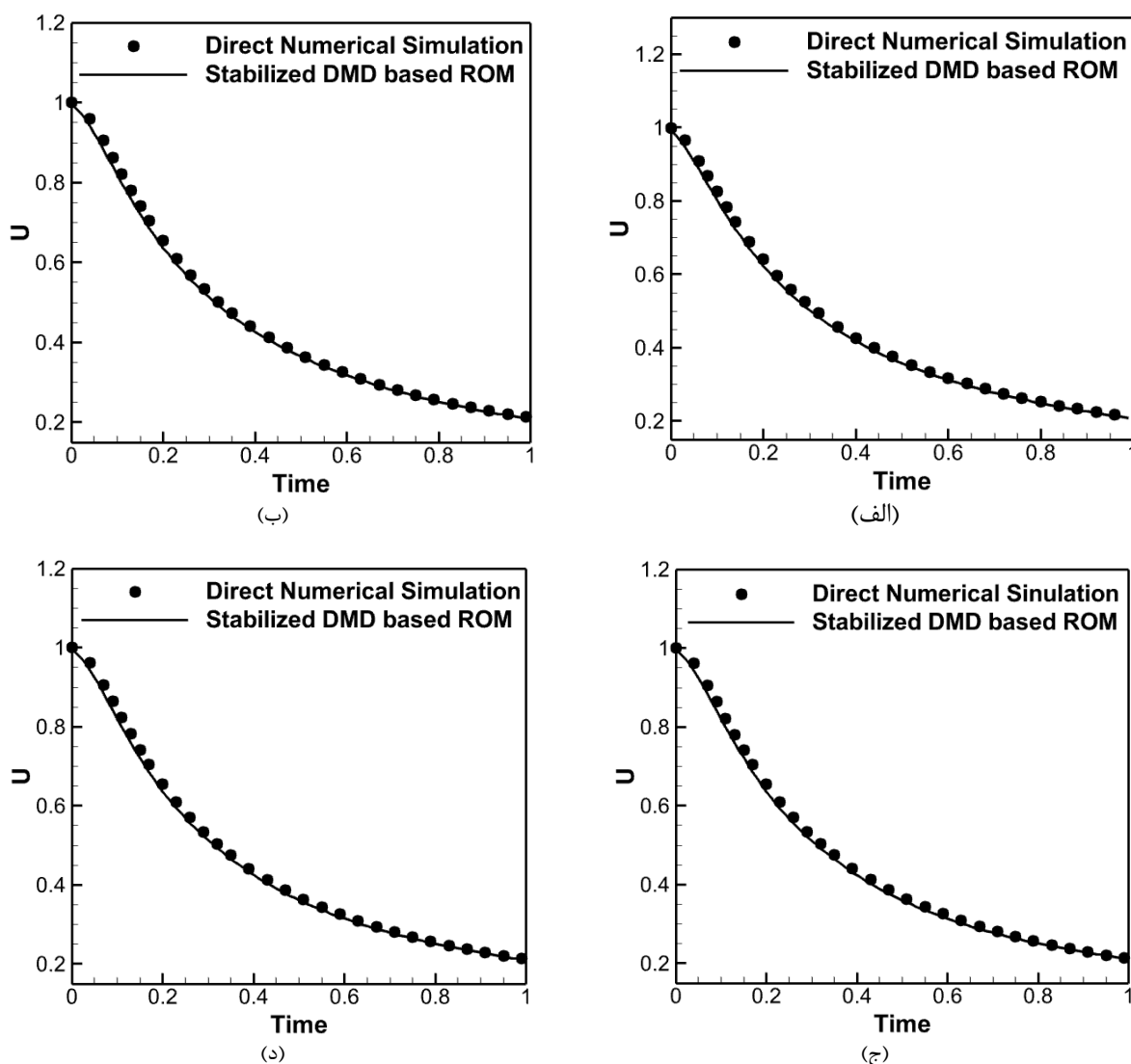


شکل ۱۱. مقایسه پاسخ معادله برگرز برای آخرین گام زمانی حاصل از مدل رتبه کاسته اصلاح شده و شبیه سازی عددی مستقیم در اعداد رینولدز (الف) ۱۰۰، (ب) ۱۰۰۰، (ج) ۲۰۰۰ و (د) ۵۰۰۰

Fig. 11. Comparison between the Prediction of Stabilized Reduced Order Model for the Last Time Step and Direct Numerical Simulation of Burgers Equation at Reynolds Numbers of (a) 100, (b) 1000, (c) 2000 and (d) 5000

برگزر در یک نقطه مکانی مشخص ($x = 0.25$) بر حسب زمان محاسبه شده است. مقایسه ای در شکل ۱۲ بین نتایج حاصل از شبیه سازی عددی مستقیم با مدل رتبه کاسته اصلاح شده انجام گرفته است. همانطور که از نتایج مشخص است، با بهره گیری از روش اصلاح مدل رتبه کاسته پایداری نتایج حاصل از مدل در زمان های مختلف نیز به خوبی حاصل شده و مدل حاصل دارای دقت مناسب برای پیش بینی دینامیک حاکم بر مسئله خواهد بود.

گردابه ای برابر با 0.032 و با توجه به نیاز مسئله برای پایداری مدل، فرض شده است. در شکل ۱۱ نتایج مدل رتبه کاسته اصلاح شده در اعداد رینولدز متفاوت برای آخرین گام زمانی، مورد ارزیابی قرار گرفته و همانطور که مشخص است سیستم دینامیکی با افزایش عدد رینولدز پاسخی به مراتب دقیق تر در قیاس با مدل رتبه کاسته استاندارد و نسبت به داده های شبیه سازی عددی مستقیم خواهد داشت. برای درک بیشتر این موضوع و بررسی رفتار وابسته به زمان مدل رتبه کاسته اصلاح شده، پاسخ حل مدل جایگزین معادله



شکل ۱۲. مقایسه تغییرات پاسخ مدل برگرز در $x=0.25$ حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی در اعداد رینولدز (الف) ۱۰۰، (ب) ۱۰۰۰، (ج) ۲۰۰۰ و (د) ۵۰۰۰

Fig. 12. Comparison between the Prediction of Stabilized Reduced Order Model and Direct Numerical Simulation of Burgers Equation on $x=0.25$ at Reynolds Numbers of (a) 100, (b) 1000, (c) 2000 and (d) 5000

حاصل در اعداد رینولدز پایین، به عنوان مثال عدد رینولدز برابر با ۱۰۰، دارای دقت مناسبی است که به دلیل غالب‌تر شدن عبارت نفوذ در معادله و تأثیر افزایش اثر استهلاکی آن می‌باشد. در این شرایط نتایج حاصل از مدل‌سازی رتبه‌کاسته استاندارد مبتنی بر روش تجزیه مود دینامیکی تطابق مناسبی با داده‌های بدست آمده از شبیه‌سازی عددی مستقیم دارد. روشن است در توسعه مدل رتبه‌کاسته از رویکرد کاهش مرتبه سیستم دینامیکی مبتنی بر حذف اثر برخی مودها بهره برده شده‌است. این موضوع نیز عاملی مهم در

۸- نتیجه‌گیری

در این پژوهش معادله برگرز لزج برای چهار عدد رینولدز ۱۰۰، ۱۰۰۰، ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ با استفاده از روش شبیه‌سازی عددی مستقیم و سپس مدل‌سازی رتبه‌کاسته با استفاده از الگوی تجزیه مود دینامیکی و طرح گالرکین مورد بررسی قرار گرفته است. معادله برگرز از ساده‌سازی معادلات ناویر-استوکس با حذف ترم فشار بدست می‌آید. به منظور توسعه مدل رتبه‌کاسته معادله محور، از تصویرسازی معادله در فضای مودها بهره گرفته شده‌است. مدل

orthogonal decomposition and dynamic mode decomposition of jet in channel crossflow, *Nuclear Engineering and Design*, 344 (2019) 54-68.

- [7] L.I. Abreu, A.V. Cavalieri, P. Schlatter, R. Vinuesa, D.S. Henningson, Spectral proper orthogonal decomposition and resolvent analysis of near-wall coherent structures in turbulent pipe flows, *Journal of Fluid Mechanics*, 900 (2020).
- [8] M.K. Moayyedi, F. Sabaghzadeghan, Development of parametric and time dependent reduced order model for diffusion and convection-diffusion problems based on proper orthogonal decomposition method, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 53(7) (2021) 8-8. (In Persian)
- [9] P.J. Schmid, Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data, *Journal of fluid mechanics*, 656 (2010) 5-28.
- [10] C.W. Rowley, I. Mezić, S. Bagheri, P. Schlatter, D.S. Henningson, Spectral analysis of nonlinear flows, *Journal of fluid mechanics*, 641 (2009) 115-127.
- [11] M. Grilli, P.J. Schmid, S. Hickel, N.A. Adams, Analysis of unsteady behaviour in shockwave turbulent boundary layer interaction, *Journal of Fluid Mechanics*, 700 (2012) 16-28.
- [12] S. Hong, G. Huang, Introducing DMD method to study dynamic structures of flow separation with and without control, *Acta Aeronaut et Astronaut Sin*, 38(8) (2017) 10-17.
- [13] D. Duke, J. Soria, D. Honnery, An error analysis of the dynamic mode decomposition, *Experiments in fluids*, 52(2) (2012) 529-542.
- [14] A. Seena, H.J. Sung, Spatiotemporal representation of the dynamic modes in turbulent cavity flows, *International journal of heat and fluid flow*, 44 (2013) 1-13.
- [15] X. Kong, C. Li, C. Wang, Y. Zhang, J. Zhang, Short-term electrical load forecasting based on error correction using dynamic mode decomposition, *Applied Energy*, 261 (2020) 114368.
- [16] C. Hu, C. Yang, W. Yi, K. Hadzic, L. Xie, R. Zou, M.

کاهش استهلاک لازم و پایداری پاسخ مدل رتبه کاسته می‌باشد. با افزایش عدد رینولدز تا مقادیر ۱۰۰۰، ۲۰۰۰ و در نهایت ۵۰۰۰ و به دنبال آن کاهش استهلاک مورد نیاز، مشابه با شرایط جریان آشفته، تأثیر ترم لزج موجود در معادله کاهش یافته و این رفتار در مدل رتبه کاسته تشدید می‌شود. در نتیجه پاسخ‌های مدل رتبه کاسته ناپایدار شده و در نهایت منجر به واگرایی جواب‌ها خواهد شد که این واگرایی با گذر زمان و در عدد رینولدز ۵۰۰۰ بیشتر است. به منظور پایداری و جبران این استهلاک از دست رفته، یک ترم اتلاف مصنوعی تحت عنوان لزجت گردابه‌ای مبتنی بر مفاهیم مدل‌سازی جریان آشفته به ترم لزج موجود در معادله اضافه خواهد شد. این عبارت به عنوان جایگزین اثر مودهای حذف‌شده در فرآیند کاهش مرتبه بکار رفته و مشابه رویکرد شبیه‌سازی جریان‌های آشفته برای مدل‌سازی ساختارهای متجانسی استفاده می‌شود که سطح انرژی پایین‌تری دارند. بنابراین، فیزیک مسئله هم در عدد رینولدز ۱۰۰ و هم بالاتر با دقت مناسب پیش‌بینی می‌شود. نتایج نشان می‌دهد با اتخاذ این رویکرد در اصلاح مدل، سیستم دینامیکی به پایداری رسیده و نتایج حاصل از مدل‌سازی رتبه کاسته اصلاح‌شده مبتنی بر روش تجزیه مود دینامیکی در اعداد رینولدز مختلف و در تمامی گام‌های زمانی قابل قبول خواهد بود.

منابع

- [1] J.M. Burgers, Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion, in: *Selected Papers of JM Burgers*, Springer, 1995, pp. 281-334.
- [2] J. Bec, K. Khanin, Burgers turbulence, *Physics reports*, 447(1-2) (2007) 1-66.
- [3] J.-P. Bouchaud, M. Mézard, Velocity fluctuations in forced Burgers turbulence, *Physical Review E*, 54(5) (1996) 5116.
- [4] C. Bayona, J. Baiges, R. Codina, Variational multiscale approximation of the one-dimensional forced Burgers equation: The role of orthogonal subgrid scales in turbulence modeling, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 86(5) (2018) 313-328.
- [5] J. Lumley, The structure of inhomogeneous turbulence. in atmospheric turbulence and wave propagation. Ed. AM Yaglom, VI Tatarski, 1967, in, Moscow: Nauka.
- [6] Z. Wu, D. Laurence, S. Utyuzhnikov, I. Afgan, Proper

- [18] Sabaghzadeghan, F. (2019). "Development the Reduce Order Model for Convection-Diffusion and Diffusion Problems Based on Proper Orthogonal Decomposition and Dynamic Mode Decomposition Methods." Thesis for Degree of Master of Science (MSc) In Mechanical Engineering-Energy Conversion, Faculty of Engineering, University of Qom. (In Persian)
- Zhou, Numerical investigation of centrifugal compressor stall with compressed dynamic mode decomposition, *Aerospace Science and Technology*, 106 (2020) 106153.
- [17] F. Sabaghzadeghan, M. Moayyedi, Reduced Order Model of Conduction Heat Transfer in a Solid Plate Based on Dynamic Mode Decomposition, *Sharif Journal of Mechanical Engineering*, 37(2) (2021) 3-12. (In Persian)

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. K. Moayyedi, F. Bigdeloo, F. Sabaghzadeghan, Stabilization of Reduced Order Model for Convection-Diffusion Problems Based on Dynamic Mode Decomposition at High Reynolds Numbers Using Eddy Viscosity Approach, Amirkabir J. Mech Eng., 54(11) (2023) 2479-2498.

DOI: 10.22060/mej.2022.20801.7327



