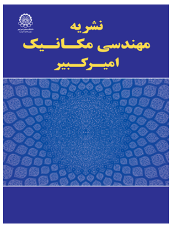


Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 54(11) (2023) 501-504
DOI: 10.22060/mej.2022.20801.7327

Stabilization of Reduced Order Model for Convection-Diffusion Problems Based on Dynamic Mode Decomposition at High Reynolds Numbers Using Eddy Viscosity Approach

M. K. Moayyedi[1,2]*, F. Bigdeloo[2], F. Sabaghzadeghan[1]

[1] CFD, Turbulence, and Combustion Research Lab., Department of Mechanical Engineering, University of Qom, Qom, Iran
[2] Space Science and Earth Atmosphere Research Lab., Department of Mechanical Engineering, University of Qom, Qom, Iran

ABSTRACT: Since the analytical methods have a low accuracy and numerical algorithms are time-consuming with hardware limitations, therefore researchers are interested to develop models with high speed and efficiency. The reduced order model is the method that could be an alternative approach for simulating dynamical systems. These models are mainly developed based on the calculation of the dynamical systems' effective structures. The dynamic mode decomposition method is one of the methods for calculating these basic structures. In this study, using this model and based on the principles of dynamical systems, a reduced order model has been developed for the Burgers equation. The results show that if the Reynolds number increases then the effects of the viscous term in the governing equation are decreased, accordingly the required dissipation of the system to stabilize the numerical solution is reduced. Also, due to the incompleteness of the modes which are selected in the order reduction procedure, the dissipation level of the surrogate model is reduced more. Therefore, by creating an artificial dissipation called the eddy viscosity approach, the stability of the model is enhanced. Finally, by comparing the results obtained from the reduced order model and direct numerical simulation, the accuracy of this model is proven.

Review History:

Received: Dec. 06, 2021
Revised: May, 23, 2022
Accepted: Oct. 17, 2022
Available Online: Oct. 27, 2022

Keywords:

Dynamic mode decomposition
Reduced order model
Eddy viscosity approach
Burgers equation
Dynamical system

1- Introduction

A newer approach to extracting the basic structures of a dynamic system is the dynamic mode decomposition method introduced by Schmid [1]. Dynamic Mode Decomposition (DMD) is a post-processing method that is extracted from the original data information related to the dynamical system. Today, researchers have turned to this method to simulate turbulent flows and nonlinear equations. For example, Rowley et al. [2] used the dynamic mode decomposition method to simulate the flow of a large-scale jet. Hu et al. [3] also investigated the flow of a centrifugal compressor using the dynamic mode decomposition method. Duke et al. [4] investigated the growth rate of flow instability using the dynamic mode decomposition method.

2- Governing Equations

Berger's equation is a differential equation obtained by simplifying the Navier-Stokes equations assuming the absence of pressure changes, and the nonlinear term is the basis to address the turbulent behaviors of flow like the Navier-Stokes equations:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

Where *Re* is Reynolds number. A numerical simulation of the Burgers equation has been made by using the first-order upwind method for the nonlinear term and the second-order central difference method for the diffusion term. Also, time integration is performed using the fourth order Runge - Kutta Scheme.

2- 1- Reduced order model based on dynamic mode decomposition

Reduced order modeling is a technique that can reduce computational complexity or computer storage requirements. This can simplify the analysis, control, and design with alternative Reduced Order Models (ROMs). Finally, the equation of the reduced order model will be obtained as a first-order ordinary differential equation for the time-dependent modal coefficients:

$$\frac{da^k(t)}{dt}+\tilde{A}_{kij}\times a^i(t)+\tilde{B}_{ki}\times a^i(t)+\tilde{C}_k=0 \qquad (2)$$

2- 2- Stabilization of reduced order model using eddy viscosity approach

The system of ordinary differential equations obtained from

*Corresponding author's email: moayyedi@qom.ac.ir

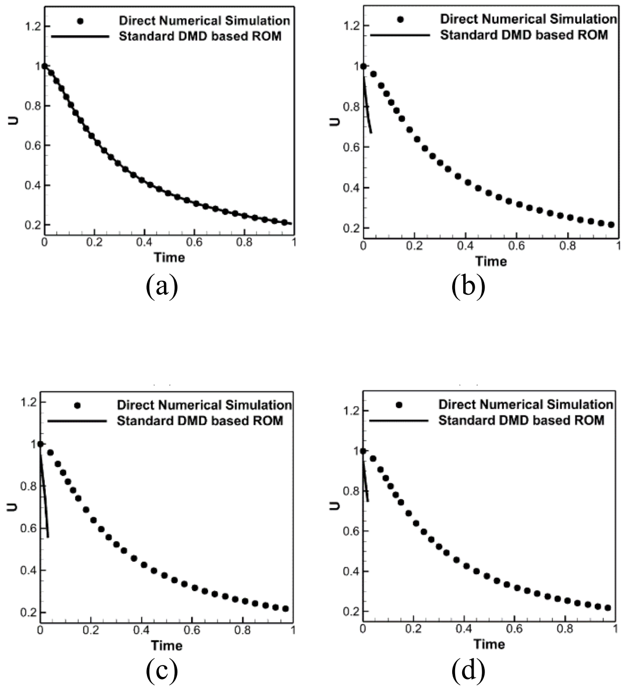


Fig. 1. Comparison between the Prediction of Standard Reduced Order Model and Direct Numerical Simulation of Burgers Equation on x=0.25 at Reynolds Numbers of (a) 100, (b) 1000, (c) 2000, and (d) 5000

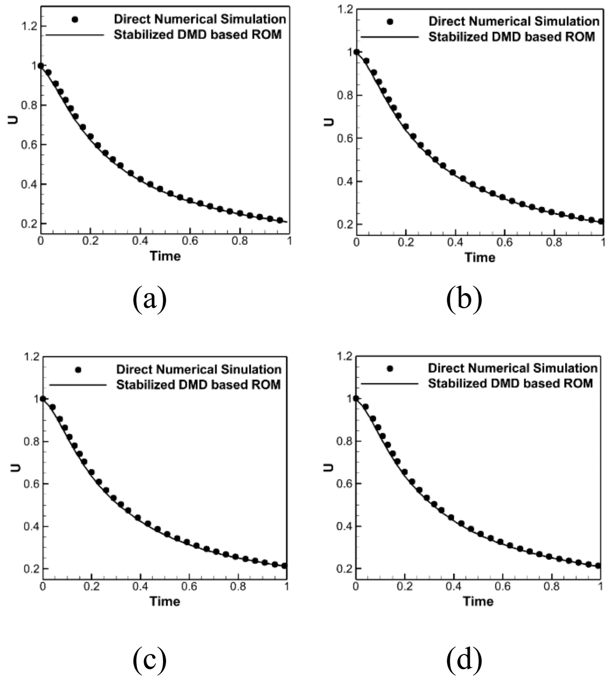


Fig. 2. Comparison between the Prediction of Stabilized Reduced Order Model and Direct Numerical Simulation of Burgers Equation on x=0.25 at Reynolds Numbers of (a) 100, (b) 1000, (c) 2000, and (d) 5000

the Galerkin projection to model the dynamics of the system may be unstable. In this study, as the Reynolds number increases, the viscous term in the Burgers equation will have less effect. Also, neglecting the effects of some modes in the final form of the reduced order model is an important factor in reducing the required dissipation and the stability of the model responses. To correct these effects and compensate for the lost dissipation, an artificial eddy viscosity term is added to the model as a linear and constant term to guarantee the system stability:

$$B_k^2 = \langle \nu_e \nabla^2 \overline{u}\,, \phi_k \rangle$$
$$B_{ki}^1 = \langle \nu_e \nabla^2 \phi_i ; \phi_k \rangle \tag{3}$$

3- Results and Discussion

In this study, the direct numerical simulation method was used to numerically solve Berger's equation, and the time step was assumed to be 0.001. It should be noted that the numerical solution of this equation has been done for one unit of non-dimensional time and for Reynolds numbers of 100, 1000, 2000, and 5000. To investigate the time-dependent behavior of the DMD-based ROM in predicting the response of Berger's equation, the results of the reduced order model and the direct numerical solution method were calculated at a specific location point ($X = 0.25$) and its data are given in Fig. 1 for different Reynolds numbers. As it is clear in the figure, for Reynolds numbers greater than 1000, the results of the reduced order model diverge, and meaningless values are obtained that cannot be shown in the diagram. A comparison is made in Fig. 2 between the results of direct numerical simulation and stabilized reduced order model. So, by using the method of stabilization of the reduced order model, the accuracy of the results obtained from the model at different times has been seen for all Reynolds numbers.

4- Conclusion

In order to develop a physics-Informed reduced order model, the projection of the governing equation in the modal space has been used. This model at low Reynolds numbers has a good accuracy, which is due to the dominance of the diffusion term in the equation and the effect of increasing its dissipation effect. In this situation, the results of the standard reduced order model based on the dynamic mode decomposition method have good accuracy with the related data obtained from the direct numerical simulation. In the development of the reduced order model, the approach of order reduction is based on removing the effect of some modes. This issue is also an important factor in reducing the required dissipation and the stability of the responses of the reduced order model.

By increasing the Reynolds number to higher values, such as 1000, 2000, and 5000 in the present study, the required dissipation of the dynamical system is reduced similar to a turbulent flow. In order to stabilize and compensate for this lost dissipation, an artificial viscosity approach called eddy viscosity based on turbulent flow modeling concepts will be used as a linear and constant term in the ROM equation. These expressions are used as a substitute for the effect of modes that are removed in the order reduction procedure and are similar to the turbulent flow simulation approach for modeling small-scale structures that have a lower energy level. Therefore, the reduced order model reaches a stable form and will give acceptable results in different Reynolds numbers and in all time steps.

References

[1] P.J. Schmid, Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data, Journal of fluid mechanics, 656 (2010) 5-28.

[2] C.W. Rowley, I. Mezić, S. Bagheri, P. Schlatter, D.S. Henningson, Spectral analysis of nonlinear flows, Journal of fluid mechanics, 641 (2009) 115-127.

[3] C. Hu, C. Yang, W. Yi, K. Hadzic, L. Xie, R. Zou, M. Zhou, Numerical investigation of centrifugal compressor stall with compressed dynamic mode decomposition, Aerospace Science and Technology, 106 (2020) 106153.

[4] D. Duke, J. Soria, D. Honnery, An error analysis of the dynamic mode decomposition, Experiments in fluids, 52(2) (2012) 529-542.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

M. K. Moayyedi, F. Bigdeloo, F. Sabaghzadeghan, Stabilization of Reduced Order Model for Convection-Diffusion Problems Based on Dynamic Mode Decomposition at High Reynolds Numbers Using Eddy Viscosity Approach, Amirkabir J. Mech Eng., 54(11) (2023) 501-504.

DOI: 10.22060/mej.2019.15465.6128

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۴، شماره ۱۱، سال ۱۴۰۱، صفحات ۲۴۷۹ تا ۲۴۹۸
DOI: 10.22060/mej.2022.20801.7327

اصلاح ناپایداری مدل رتبه‌کاسته معادلۀ نفوذ- جابجایی مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی در اعداد رینولدز بالا با بهره‌گیری از رویکرد لزجت گردابه‌ای

محمدکاظم مؤیدی[*,1,2]، فاطمه بیگدلو[2]، فرشاد صباغ‌زادگان[1]

۱- آزمایشگاه پژوهشی توربولانس دینامیک سیالات محاسباتی و احتراق، دانشگاه قـم، قم، ایران
۲- آزمایشگاه پژوهشی اتمسفر زمین و علوم فضایی، دانشگاه قـم، قم، ایران.

خلاصه: به دلیل دقت پایین و دامنه کاربرد محدود روش‌های تحلیلی و نیز زمان‌بر بودن و محدودیت‌های سخت‌افزاری کامپیوتری روش‌های عددی به خصوص در مسائل ناپایا، لذا محققان به توسعه مدل‌ها و روش‌های حل با سرعت و راندمان بالاتر روی آورده‌اند. یکی از این الگوها، روش کاهش مرتبه است. روش رتبه‌کاسته یک الگوی جایگزین برای شبیه‌سازی سیستم‌های دینامیکی از جمله جریان سیال می‌باشد. مدل‌های رتبه‌کاسته عمدتاً بر مبنای محاسبه ساختارهای مؤثر سیستم دینامیکی توسعه می‌یابند. روش تجزیه مود دینامیکی یکی از روش‌های محاسبه این ساختارهای اساسی می‌باشد. در این پژوهش با استفاده از این الگو و مبتنی بر اصول سیستم‌های دینامیکی، یک مدل رتبه‌کاسته برای معادله برگرز لزج توسعه داده شده‌است. نتایج نشان می‌دهند در صورت افزایش عدد رینولدز و کاهش اثرات ناشی از ترم لزج موجود در معادله حاکم، استهلاک لازم در سیستم برای پایدارسازی حل عددی کاسته می‌شود. همچنین به دلیل کامل نبودن مودهای فرض شده در مسئله و حذف اثر مودها با شماره بالاتر، این کاهش استهلاک بیش‌تر نمود پیدا خواهد کرد. بنابراین با ایجاد یک اتلاف مصنوعی تحت عنوان لزجت گردابه‌ای سعی در پایدارسازی سیستم می‌شود. در نهایت با مقایسه نتایج بدست آمده از مدل رتبه‌کاسته و نتایج شبیه‌سازی عددی مستقیم معادله، دقت این مدل ثابت می‌شود.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۴۰۰/۰۹/۱۵
بازنگری: ۱۴۰۱/۰۳/۰۲
پذیرش: ۱۴۰۱/۰۷/۲۵
ارائه آنلاین: ۱۴۰۱/۰۸/۰۵

کلمات کلیدی:
روش تجزیه مود دینامیکی
مدل رتبه‌کاسته
الگوی لزجت گردابه‌ای
معادله برگرز
سیستم دینامیکی

۱- مقدمه

جریان آشفته، نوعی رژیم جریان است که مشخصه آن تغییرات تصادفی و آشوبناک خصوصیات سیال می‌باشد. بیان توضیح نظری برای آشفتگی یکی از قدیمی‌ترین مسائل حل نشده فیزیک باقی مانده است. به دلیل آنکه روش‌های تحلیلی برای مطالعه جریان آشفته با فرضیات و ساده‌سازی‌های بسیاری همراه هستند، پس پاسخگوی مسائل پیچیده نخواهند بود. بنابراین محققان به روش‌های عددی روی آورده‌اند. شبیه‌سازی عددی مستقیم یک روش تحلیل جریان آشفته است که در آن معادلات به صورت عددی و بدون هیچ‌گونه مدل‌سازی حل می‌شوند. تا دهه هفتاد میلادی شبیه‌سازی با استفاده از این روش به دلیل عدم وجود سیستم‌های محاسباتی پرسرعت ممکن نبود. هزینه انجام این شبیه‌سازی با توان سوم عدد رینولدز رابطه مستقیم دارد، به همین دلیل هزینه این روش حتی در اعداد رینولدز پایین نیز بسیار بالا بوده و در مقادیر رینولدز بالا تقریباً امکان پذیر نیست. به عنوان مثال معادلات ناویر-استوکس در شبیه‌سازی‌های عددی به دلیل پیچیدگی، چالش‌های بسیاری را ایجاد می‌کنند. در حالی که با استفاده از این معادلات، که شکل خاصی از معادلات اندازه حرکت خطی با فرض سیالات نیوتنی هستند، می‌توان در جریان آشفته رفتار سیال را پیش‌بینی کرد. به همین دلیل پژوهشگران به سمت روش‌های مدل‌سازی مثل مدل کاهش رتبه جذب شدند. هدف از توسعۀ مدل رتبه‌کاسته[1]، کاهش پیچیدگی‌های محاسباتی است. بنابراین در شبیه‌سازی سیستم‌های دینامیکی با کاهش مرتبه یا درجه آزادی مدل، تقریبی از مدل اصلی محاسبه می‌شود که معمولاً از آن به عنوان مدل رتبه‌کاسته یاد می‌شود. این سیستم دینامیکی جدید قادر است در مدت زمان کمتری مسئله مورد نظر را شبیه‌سازی کند. معادله برگرز به عنوان یک نسخه ساده شده از معادلات ناویر-استوکس با حذف ترم فشار پیشنهاد شده‌است[۱]. معادله برگرز دارای سه ترم اصلی گذرا، همرفت و نفوذ می‌باشد که هر یک از این ترم‌ها با توجه به مشخصات ریاضی معادلات دیفرانسیل جزئی رفتار خاصی را نمایش می‌دهند. معادله برگرز یک معادله غیرخطی است، پس انتظار می‌رود پدیده‌هایی مانند آشفتگی را پیش‌بینی کند. بنابراین،

1 Reduced Order Model (ROM)

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: moayyedi@qom.ac.ir

محققان متعددی با استفاده از معادله برگرز به مطالعه جریان آشفته پرداختند. به عنوان مثال، کنستانتین روش‌های مختلف مطالعه معادله برگرز را ارائه داد [۲]. بوچاد و مزارد [۳] یک روش ساده را برای محاسبه تفاوت اختلاف سرعت در معادله برگرز در هر ابعادی پیشنهاد دادند. مقایسه آن‌ها با نتایج عددی نشان داد که دنباله سمت چپ توسط دینامیک تشکیل شوک کنترل می‌شود و نیاز به کنترل فرآیندهای ایجاد یا ادغام شوک‌ها دارد و همچنین دنباله سمت چپ ممکن است با معکوس توان دوم سرعت، اضمحلال یابد. بایونا و همکاران [۴] تقریبی عددی را برای معادله برگرز یک بعدی با استفاده از روش مقیاس‌های زیرشبکه‌ای چند وجهی چند متغیره پیشنهاد کردند. نتایج بدست آمده، حل معادله برگرز با استفاده از این روش را برای توصیف رفتار جریان آشفته، تأیید می‌کند. یکی از پرکاربردترین رویکردها برای مدل‌سازی مسائل، روش رتبه‌کاسته مبتنی بر تجزیه متعامد بهینه[1] است. تجزیه متعامد بهینه یک روش عددی است که امکان کاهش پیچیدگی شبیه‌سازی‌هایی مانند دینامیک سیالات محاسباتی و تجزیه و تحلیل ساختاری را فراهم آورده‌است. اساس روش تجزیه متعامد بهینه به تلاش‌های لاملی [۵] باز می‌گردد. در این روش متغیرهای جریان با استفاده از گسترش مودهای ویژه تقریب می‌شوند. این روش یک الگوی کارآمد در بسیاری از زمینه‌ها مانند کنترل جریان سیال، بازسازی داده‌ها و ساختارها، توسعه مدل رتبه‌کاسته، آنالیز سیگنال، پردازش تصویر، شناخت الگو و بازسازی داده‌های استخراج شده از جریان جوی و اقیانوسی و ... می‌باشد. در این راستا، ژاو و همکاران [۶] به بررسی روش تجزیه متعامد بهینه و تجزیه مود دینامیکی جت در جریان عرضی کانال پرداختند. در پژوهش آن‌ها، بهینه بودن روش تجزیه متعامد بهینه در بازسازی جریان اثبات شده است. آبرو و همکاران [۷] بر روی تجزیه طیفی متعامد بهینه و تجزیه و تحلیل سازه‌های منسجم نزدیک دیوار در لوله‌هایی با جریان آشفته پژوهشی انجام دادند. در پژوهشی دیگر مویدی و صباغ زادگان [۸] از مدل رتبه‌کاسته پارامتری و وابسته به زمان مبتنی بر تجزیه متعامد بهینه برای شبیه‌سازی مسائل نفوذ و نفوذ-جابجایی استفاده کردند. نتایج آن‌ها نشان از دقت بالای مدل‌سازی با استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه دارد. یک رویکرد جدیدتر در استخراج ساختارهای اساسی یک سیستم دینامیکی روش تجزیه مود دینامیکی[2] است. تجزیه مود دینامیکی یک روش جدید پس‌پردازش است که از اطلاعات داده‌های اصلی مربوط به سیستم دینامیکی استخراج می‌شود. این الگو، به عنوان یک روش کاهش ابعاد نیز می‌تواند بکار رود تا داده‌های جریان سیال با ابعاد بزرگ را به ساختار منسجم مکانی-زمانی غالب تجزیه کند. توانایی تجزیه مود دینامیکی برای استخراج ویژگی‌های مربوط به جریان دینامیکی، آن را نیازمند ایجاد یک زیرمجموعه رتبه‌کاسته از داده‌ها برای بدست آوردن یک مدل رتبه‌کاسته می‌کند. از آنجایی که محتوای انرژی مهم است اما به طور کلی برای فهم رفتار دینامیکی کافی نیست، در این پژوهش بر رویه‌ای به نام تجزیه مود دینامیکی تمرکز شده که توسط اشمید [۹] معرفی شده‌است. این الگوریتم به عنوان روشی ارائه شده که می‌تواند ویژگی‌های جریان را از داده‌های تجربی یا حل عددی و بر حسب تغییرات در زمان استخراج کند. این روش به عنوان جایگزین روش تجزیه متعامد بهینه برای بررسی سیستم‌های غیرخطی معرفی شده‌است. امروزه، محققان برای شبیه‌سازی جریان‌های آشفته و معادلات غیرخطی به این روش روی آورده‌اند. به عنوان مثال، رولی و همکاران [۱۰] برای شبیه‌سازی جریان یک جت در مقیاس بزرگ از روش تجزیه مود دینامیکی استفاده کردند. در پژوهش آن‌ها مشخص شد که مودهای حاصل، ساختارهای مکانی مرتبط با لایه برشی و ناحیه نزدیک دیوار را نشان می‌دهند. گریلی و همکاران [۱۱] نیز با استفاده از روش تجزیه مود دینامیکی برهم‌کنش‌های درون لایه مرزی شوک را مورد بررسی قرار دادند. در مطالعه آن‌ها، دینامیک میدان جریان با استفاده از روش تجزیه مود دینامیکی تحلیل شد و نشان داد که یک مود با فرکانس پایین وجود دارد که مرتبط با نوسان ناشی از حباب جدایش و حرکت رو به عقب و جلوی شوک وجود دارد. هونگ و هوانگ [۱۲] با استفاده از روش تجزیه مود دینامیکی، به کنترل میدان جریان مختلط حاصل از جریان ناپایا درون یک دیفیوزر پرداختند. دوک و همکاران [۱۳] با استفاده از روش تجزیه مود دینامیکی، نرخ رشد ناپایداری جریان را مورد بررسی قرار دادند. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد که شکل ناپایدار امواج، تأثیر مشخصی بر نرخ رشد خطا دارد و امواج با توزیع دارای عدم پیوستگی (مانند موج دندانه اره‌ای و مربعی) ممکن است در شرایط یکسان دارای خطای بزرگتری نسبت به امواج سینوسی باشند. سنا و سانگ [۱۴] نیز با استفاده از این روش، جریان درون یک حفره را مورد بررسی قرار داد و موفق به شناسایی مودهایی با قابلیت خود نوسانی گردیدند. کونگ و همکاران [۱۵] با استفاده از اصلاح خطا در روش تجزیه مود دینامیکی به مطالعه بر روی پیش‌بینی بار الکتریکی کوتاه مدت پرداختند و دقت بالای روش تجزیه مود دینامیکی را اثبات کردند. هو و همکاران [۱۶] نیز به بررسی جریان یک کمپرسور گریز از مرکز با استفاده از روش تجزیه مود دینامیکی پرداختند. نتایج مطالعه آن‌ها مشخص کرد که با اعمال رویکردی اصلاح‌شده از این روش، می‌توان مودهای جریان را در زمان کمتر

1 Proper Orthogonal Decomposition (POD)
2 Dynamic Mode Decomposition (DMD)

و در تراکم یک درصد بدست آورد. صباغزادگان و مؤیدی [۱۷] انتقال حرارت هدایت در یک پوسته جامد با استفاده از روش تجزیه مود دینامیکی را مورد مطالعه قرار دادند. شبیه‌سازی آن‌ها نشان از توانایی بالای روش تجزیه مود دینامیکی برای مدل‌سازی انتقال حرارت در یک مدل مبتنی بر معادله داشت.

در پژوهش حاضر از دو الگو استفاده شده است، ابتدا شبیه‌سازی عددی معادله نفوذ–جابجایی (معادلۀ برگرز لزج) و سپس توسعه مدل رتبه‌کاسته معادله محور مبتنی بر روش داده محور تجزیه مود دینامیکی با حفظ ویژگی‌های ذاتی مسئله مورد نظر صورت گرفته است. در نهایت مدل حاصل با پیچیدگی و ابعاد کمتر بازسازی شده‌است. یکی از چالش‌های مهم در توسعۀ مدل‌های رتبه‌کاسته، ناپایداری آنها تحت تأثیر تغییر پارامترهایی مهمی چون عدد رینولدز به ویژه در مقادیر بالا می‌باشد. دلیل این موضوع کاهش اثرات استهلاکی ناشی از کم‌شدن اثر ترم لزج و همچنین تغییرات ساختار دینامیکی حاکم بر مسئله حاصل از حذف تعدادی از مودها می‌باشد. این موضوع سبب کاهش پایداری پاسخ سیستم دینامیکی حاکم بر مسئله شده و ممکن است رفتار سیستم به سمت واگرایی پیش رود. به همین منظور، در این پژوهش با استفاده از مفهوم اتلاف مصنوعی مبتنی بر رویکرد لزجت گردابه‌ای، پایداری مدل رتبه‌کاسته حاصل اصلاح شده و پاسخ‌های سیستم دینامیکی در مقایسه با داده‌های حل دقیق نشان از عملکرد مناسب این روش دارد.

۲- معادلات حاکم

با استفاده از معادلات ناویر–استوکس، که به صورت یک سیستم دینامیکی غیرخطی است، به دلیل وجود ترم غیرخطی موجود در معادله، می‌توان مفهوم آشفتگی و به خصوص میدان سرعت جریان آشفته را توصیف کرد. معادله برگرز، یک معادله دیفرانسیلی است که از ساده‌سازی معادلات ناویر–استوکس با فرض عدم وجود تغییرات فشار بدست آمده و مبنای ایجاد رفتارهایی شبیه به آشفتگی در این معادله همانند معادلات ناویر–استوکس، ترم غیرخطی می‌باشد. از آنجایی که معادله برگرز رفتار غیرخطی شبیه به معادلات ناویر–استوکس دارد، روش‌های مورد استفاده برای معادلات ناویر–استوکس معمولاً برای این معادله نیز قابل استفاده هستند. بنابراین استفاده از معادله برگرز به عنوان میدان مورد آزمایش پاسخ مناسبی را به جای معادله آشفتگی ناویر–استوکس خواهد داشت. این معادله در فرم بدون بعد به صورت رابطه (۱) خواهد بود:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (۱)$$

۳- شبیه‌سازی عددی مستقیم

برای بدست آوردن داده‌های اولیه یا همان نمایه‌ها، از حل عددی معادله برگرز لزج استفاده شده است. بدین منظور برای محاسبه فرم جداسازی شده ترم غیرخطی از روش بالادست مرتبه اول به شرح زیر:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}=\begin{cases} u_i\dfrac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} & if \quad (u_i>0) \\ u_i\dfrac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} & if \quad (u_i<0) \end{cases} \qquad (۲)$$

و برای ترم خطی نفوذ از روش تفاضل مرکزی مرتبه دوم استفاده شده است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{u_{i+1} - 2u_i - u_{i-1}}{\Delta x^2} \qquad (۳)$$

همچنین برای انتگرال‌گیری زمانی نیز از روش رانگ–کوتا با دقت مرتبه چهارم استفاده شده‌است [۱۸]. در این مطالعه، کدی به کار گرفته شده که نتایج شبیه‌سازی عددی مستقیم حاصل از آن با حل دقیق معادله برگرز یک‌بعدی، اعتبارسنجی شده‌است [۸].

٤- روش تجزیه مود دینامیکی

تجزیه مود دینامیکی روش کاهش ابعادی است تا داده‌های جریان سیال با ابعاد بزرگ را به ساختار منسجم مکانی– زمانی غالب تجزیه کند. این روش از رویکردی مشابه روش‌های تکراری برای محاسبه مقادیر ویژه خطی یا سایر مسائل جبر خطی استفاده می‌کند. در این روش هدف، استفاده از یک فرمول‌بندی تنها با تکیه بر داده‌های ورودی، که از طریق حل عددی یا نتایج آزمایشگاهی بدست می‌آید، می‌باشد. در واقع، از یک روش مبتنی بر مدل برای استخراج اطلاعات دینامیکی اجتناب و در عوض روی یک روش مبتنی بر داده تمرکز شده‌است. بنابراین این روش مجموعه‌ای از مودها را همراه با یک مدل تکاملی خطی تولید می‌کند. این روش قدرتمند که مبتنی بر داده می‌باشد، به عنوان روشی برای جداسازی اطلاعات مهم سیستم‌دینامیکی موردنظر (مانند جریان سیال) به منظور تعیین ساختارهای اصلی سازنده رفتار دینامیکی مسئله موردنظر معرفی شده‌است. یکی از مزیت‌های استفاده از روش تجزیه مود دینامیکی، عدم نیاز به دانستن درباره معادله حاکم بر سیستم برای برخی از مسائل می‌باشد. همچنین اگر داده‌های

ورودی به صورت داده‌های آزمایشگاهی و با آزمایش بر روی یک سیستم واقعی اندازه‌گیری شده باشند، برای از بین بردن خطاهای اندازه‌گیری ناشی از خطای انسانی، لازم است پردازش شوند. در قدم اول به مجموعه‌ای از داده‌ها یا همان ماتریس داده‌ها برای روش تجزیه مود دینامیکی نیاز است. به عبارتی، با توصیف کلی میدان‌های جریان جمع آوری شده با نمونه‌گیری از شبیه‌سازی عددی مستقیم یا داده‌های تجربی شروع می‌شود. داده‌هایی که به صورت یک دنباله از میدان‌های لحظه‌ای جریان هستند، تحت عنوان بردار v_i مرتب خواهند شد. نمایه‌ها با گام زمانی ثابت نسبت به یکدیگر قرار دارند، بنابراین سیستم مورد مطالعه به صورت ماتریسی با M سطر و N ستون طبق رابطه (۴) مرتب خواهد شد.

$$V_1^N = \left[v_1, v_2, v_3, \ldots, v_N \right] \tag{۴}$$

در این رابطه، V_i بیانگر میدان لحظه‌ای iام است. حال به ترتیب آخرین نمایه و اولین نمایه از این ماتریس حذف می‌شود:

$$\begin{aligned} V_1^{N\text{-}1} &= \left[v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{N\text{-}1} \right] \\ V_2^N &= \left[v_2, v_3, v_4, \ldots, v_N \right] \end{aligned} \tag{۵}$$

با استفاده از یک نگاشت خطی، بین میدان لحظه‌ای v_i، (مجموعه اول) با میدان لحظه‌ای v_{i+1}، (مجموعه دوم)، رابطه زیر برقرار خواهد بود:

$$\begin{aligned} v_{i+1} &= A v_i \\ V_2^N &= A\, V_1^{N\text{-}1} \end{aligned} \tag{۶}$$

ماتریس نگاشت A، ماتریسی است که شامل اطلاعات تکامل تدریجی سیستم است [۹]. برای برقراری رابطه (۶) باید عبارت به ماتریس A متکی نباشد. ماتریس غیرمربعی $V_1^{N\text{-}1}$ به صورت زیر و با استفاده از روش تجزیه مقادیر تکین، تجزیه می‌شود:

$$V_1^{\mathrm{N\text{-}1}} = U \Sigma\, W^{\mathrm{T}} \tag{۷}$$

در نتیجه:

$$V_2^N = A\, U \Sigma\, W^T \tag{۸}$$

با ضرب U^T و $W\Sigma^T$ در طرفین رابطه (۸) معادلهٔ زیر بدست می‌آید:

$$S = U^T A\, U \Sigma\, W^T W \Sigma^{\text{-}1} = U^T V_2^N W \Sigma^{\text{-}1} \tag{۹}$$

ماتریس S مشابه ماتریس A می‌باشد پس می‌توان گفت مقادیر ویژه ماتریس S با برابر A خواهد بود.

$$S y_i = \mu_i y_i \qquad i = 1, \ldots, M \tag{۱۰}$$

در این رابطه y_i بیانگر بردار ویژه و μ_i مقادیر ویژه ماتریس S هستند. در صورتی که طرفین رابطه در Uضرب شود، ماتریس همانی $U^T U$ در سمت چپ معادله قرار داده خواهدشد.

$$U S U^T U y_i = U \mu_i y_i \tag{۱۱}$$

بنابراین روابط زیر بدست خواهد آمد:

$$U S U^T = A \tag{۱۲}$$

$$A U y_i = \mu_i U y_i \tag{۱۳}$$

$U y_i$ بردارهای ویژه ماتریس A می‌باشد و مقادیر ویژه هر دو ماتریس Sو A برابر با μ_i می‌باشد. بنابراین مودهای مکانی بدست آمده از روش تجزیه مود دینامیکی حاصل می‌شود.

$$\phi_i = U y_i \tag{۱۴}$$

$$A \phi_i = \mu_i \phi_i \tag{۱۵}$$

برای پیش‌بینی رفتار سیستم در بلند مدت و بازسازی مجموعه نمایه‌های اولیه، با استفاده از محاسبه ضرایب زمانی مودها و مودهای دینامیکی، یک بسط خطی تقریب زده می‌شود. این عمل با تصویرسازی هر یک از مودهای تجزیه مود دینامیکی در اولین نمایه طبق رابطه زیر انجام می‌شود.

$$a_i = \varphi_{ij}^t v_{1_j} \tag{۱۶}$$

در رابطه فوق، ϕ^t، معکوس ماتریس مودهای دینامیکی است. به منظور

بازسازی هر یک از نمایه‌های اولیه از رابطه زیر می‌توان بهره برد:

$$V_k = \sum_i^M a_i \varphi_{ij} \mu_i^{k\text{-}1} \quad (۱۷)$$

برای توسعه مدل رتبه‌کاسته مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی، مفهوم مودها و انرژی کل آنها حائز اهمیت می‌باشد. در روش استفاده شده در این مطالعه، برخلاف روش تجزیه متعامد بهینه، مودهای انتخابی برای توسعه مدل‌های رتبه‌کاسته از نمودار تغییرات انرژی (آبشار انرژی) پیروی نمی‌کنند، بنابراین مودهای روش تجزیه مود دینامیکی دارای خاصیت تعامد نبوده و نسبت به یکدیگر مستقل نیستند. بنابراین با استفاده از نرم بدست آمده از هر مود طبق رابطه (۱۸) انرژی نسبی مودها را می‌توان بدست آورد و تنها به آن مود اختصاص ندارد. با این حال از طریق این رابطه و مقدار انرژی نسبی هر مود نیز می‌توان مودهای پرانرژی را مشخص کرد.

$$N = \left| a_i \varphi_{ij} \right| \quad (۱۸)$$

با توجه به دو رابطه (۱۷) و (۱۸) می‌توان به رابطه زیر دست یافت.

$$N_k = \left| a_i \varphi_{ij} \right| \left| \mu_i \right|^{k\text{-}1} \quad (۱۹)$$

در رابطه فوق به دلیل وجود متغیر μ_i می‌توان وضعیت پایداری مودها را بررسی کرد. برای مشخص کردن اهمیت و تأثیر هر یک از مودهای تجزیه دینامیکی باید نرم اولیه و نرم نهایی آن‌ها بررسی شود.

۵- مدل رتبه‌کاسته معادلهٔ محور مبتنی بر روش تجزیه مود دینامیکی

مدل‌سازی رتبه‌کاسته تکنیکی است که می‌تواند پیچیدگی محاسباتی یا نیاز ذخیره‌سازی رایانه‌ای را کاهش دهد. این کار با مدل‌های جایگزین با مرتبه پایین‌تر می‌تواند تجزیه و تحلیل، کنترل و طراحی را ساده کند. به منظور توسعه مدل رتبه‌کاسته، کمیت حاکم بر دینامیک مسئله به صورت حاصل جمع بخش متوسط‌گیری شده زمانی و یک بخش اغتشاشی نوشته می‌شود:

$$u(x,t) = \overline{u}(x) + u'(x,t) \quad (۲۰)$$

بخش اغتشاشی براساس تقریب گالرکین به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$u'(x,t) = \sum_{i=1}^N a^i(t) \phi_i(x) \quad (۲۱)$$

در این رابطه، ϕ_i پایه‌های دلخواه و a^i ضرایب زمانی هستند که باید مقادیر آن‌ها به نحوی انتخاب شود تا معادله دیفرانسیل را با تقریب خوبی ارضا کنند. با جایگذاری روابط مربوط به بخش متوسط و اغتشاشی میدان لحظه‌ای جریان در معادله برگزر، نتیجه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\phi_i(x) \times \sum_1^N \frac{d}{dt}(a^i(t)) + (\overline{u} \times a^i(t) \times \\ &\sum_1^N \nabla \phi_i(x) + \overline{u} \times \\ &\sum_1^N \nabla \overline{u} + a^i(t) \times \sum_1^N \nabla(\overline{u}, \phi_i(x)) + \\ &a^i(t) \times a^j(t) \times \sum_{i=j=1}^N \nabla(\phi_i(x), \phi_j(x))) = \\ &\frac{1}{\mathrm{Re}}(\nabla^2 \overline{u} + a^i(t) \times \sum_1^N \nabla^2 \phi_i(x)) \end{aligned} \quad (۲۲)$$

در روش تجزیه متعامد بهینه، مودها نسبت به یکدیگر دارای خاصیت تعامد هستند و با استفاده از روش تجزیه مقدار تکین، درنهایت ضریب بخش گذرا با رابطهٔ دلتای کرونکر ساده‌سازی می‌شود. اما در روش تجزیه مود دینامیکی، همانطور که پیش‌تر گفته شد، مودها الزاماً دارای ویژگی تعامد نبوده پس یک پایه الحاقی شبه متعامد لازم است تا در طرفین رابطه ضرب ماتریسی شود. این پایه الحاقی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\phi^{ad} = ((\phi_k^H(\vec{x}), \phi_i(\vec{x}))^{\text{-}1} \quad (۲۳)$$

در رابطه فوق، ϕ_k^H مزدوج ترانهاده مودهای روش تجزیه مود دینامیکی است. با ضرب طرفین رابطه (۲۲) در مزدوج ترانهاده مودهای تجزیه مود دینامیکی، معادلهٔ زیر حاصل خواهد شد:

$$
\begin{aligned}
&(\phi_k^H(x),\phi_i(x)) \times \\
&\sum_1^N \frac{d}{dt}(a^i(t)) + (\phi_k^H(x),\bar{u}.\nabla\phi_i(x)) \times a^i(t) - \\
&(\phi_k^H(x),\bar{u}.\nabla\bar{u}) - (\phi_k^H(x),\phi_i(x).\nabla\bar{u}) + \\
&(\phi_k(x),\phi_i(x).\nabla\phi_j(x)) \times a^i(t) \times a^j(t) = \\
&\frac{1}{\mathrm{Re}}(\phi_k^H(x),\nabla^2\bar{u}) + \\
&\frac{1}{\mathrm{Re}}(\phi_k^H(x),\nabla^2\phi_i(x)) \times a^i(t)
\end{aligned} \tag{۲۴}
$$

در نهایت معادلهٔ مدل رتبه‌کاسته به صورت یک معادله دیفرانسیلی ساده مرتبه اول برای ضرایب مودال وابسته به زمان بدست خواهد آمد:

$$
\begin{aligned}
&\frac{da^k(t)}{dt} + \tilde{A}_{kij} \times a^i(t) + \\
&\tilde{B}_{ki} \times a^i(t) + \tilde{C}_k = 0
\end{aligned} \tag{۲۵}
$$

مدل حاصل به صورت سیستم دینامیکی بوده که برای محاسبه ضرایب مودال در گام‌های زمانی مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد. ضرایب موجود در معادلهٔ (۲۵) به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}_{kij} &= A_{ij}^k \times \phi^{ad} \\
\tilde{B}_{ki} &= B_i^k \times \phi^{ad} \\
\tilde{C}_k &= B^k \times \phi^{ad}
\end{aligned}
$$

به طوری که:

$$
\begin{aligned}
&A_{ij}^k = (\phi_i(\vec{x}).\nabla\phi_j(\vec{x}),\phi_k^H(\vec{x})) \times \phi^{ad} \\
&B_i^k = (\bar{U}.\nabla\phi_i(x),\phi_k^H(x)) + \\
&(\phi_i(x).\nabla\bar{U},\phi_k^H(x)) \times \phi^{ad} - \\
&\frac{1}{\mathrm{Re}}(\nabla^2\phi_i(x),\phi_k^H(x)) \times \phi^{ad} \\
&\mathrm{C}^k = (\bar{U}.\nabla\bar{U},\phi_k^H(x)) \times \phi^{ad} - \\
&\frac{1}{\mathrm{Re}}(\nabla^2\bar{U},\phi_k^H(x)) \times \phi^{ad}
\end{aligned}
$$

۶- اصلاح مدل رتبه‌کاسته با استفاده از رویکرد لزجت گردابه‌ای مصنوعی

مدل‌سازی رتبه‌کاسته سیستم‌های دینامیکی با فیزیک غیرخطی و نسبتاً پیچیده می‌تواند تحت تأثیر عوامل مختلفی منجر به کسب نتایج قابل قبول یا داده‌های غیرفیزیکی شود. در این حالت رفتار مدل می‌تواند در بازه زمانی کوتاه یا بلند به نتایج نادرستی سوق پیدا کند. این واگرایی از نتایج درست، تنها مختص مدل‌های مبتنی بر روش تجزیه مود دینامیکی نبوده و در الگوهای رتبه‌کاسته حاصل از روش تجزیه متعامد بهینه نیز مشاهده می‌شود. پس می‌توان گفت سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی که از طرح گالرکین حاصل شده و برای مدل‌سازی رفتار سیستم با تغییر پارامترهای مهم حاکم بر مسئله بکار می‌رود، می‌تواند ناپایدار باشد. در پژوهش حاضر، در صورتی که سیستم در حالت‌های اولیه و با مقادیر عدد رینولدز پایین مدنظر باشد، نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته کاملاً بر هم منطبق بوده و پیش‌بینی درستی از رفتار مسئله بدست می‌آید. یکی از دلایل این موضوع می‌تواند غالب‌تر شدن عبارت نفوذ در معادله و تأثیر افزایش اثر استهلاکی آن باشد. در توسعه مدل رتبه‌کاسته از رویکرد کاهش مرتبه سیستم دینامیکی مبتنی بر حذف اثر برخی مودها بهره برده شده‌است. این موضوع نیز عاملی مهم در کاهش استهلاک لازم و پایداری پاسخ مدل رتبه‌کاسته می‌باشد. اما با افزایش عدد رینولدز، ترم لزج موجود در معادله برگرز اثر کمتری خواهد داشت و مشابه با شرایط جریان آشفته، تأثیر استهلاکی عبارت لزج در معادله کاهش می‌یابد. بنابراین استهلاک مورد نیاز برای پایداری سیستم دینامیکی رتبه‌کاسته کم شده و ممکن است پاسخ‌های حاصل دچار واگرایی شوند. برای اصلاح این ناپایداری و جبران استهلاک از دست رفته برای رسیدن مجدد سیستم به پایداری از یک عبارت لزجت گردابه‌ای مصنوعی[1] در مدل استفاده می‌شود. همچنین این عبارت می‌تواند به عنوان جایگزین اثر مودهای حذف‌شده در فرآیند کاهش مرتبه بکار رفته و مشابه رویکرد شبیه‌سازی جریان‌های آشفته برای مدل‌سازی ساختارهای متجانسی که سطح انرژی پایین‌تری دارند، استفاده شود. ضریب مورد نظر برای پایدارسازی مدل رتبه‌کاسته به ازای مقادیر متفاوت عدد رینولدز متغیر بوده اما به طور کلی در این پژوهش مقدار آن ثابت فرض شده است. ترم استهلاک مصنوعی که به مدل رتبه‌کاسته استاندارد اضافه می‌شود، به صورت رابطه زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
B_k^2 &= \langle \nu_e \nabla^2 \bar{u}, \phi_k \rangle \\
B_{ki}^1 &= \langle \nu_e \nabla^2 \phi_i ; \phi_k \rangle
\end{aligned} \tag{۲۶}
$$

در این دو رابطه مقدار ν_e نشان‌دهنده لزجت گردابه‌ای است. همانطور که

1 Artificial Eddy viscosity

در صورت عبارات مشخص است یکی از آنها در عبارت ثابت مدل رتبه‌کاسته لحاظ شده و دیگری در ترم خطی مدل بکار می‌رود. هدف اصلی این الگو ارائه یک طرح پایدار با حفظ دقت مناسب است که بر این اساس یک لزجت مصنوعی را در بالاترین فرکانس‌ها اضافه می‌کند. بنابراین، طبق این روش مقدار انرژی لازم برای پایداری سیستم تأمین شده و مقادیر بدست آمده از مدل‌سازی در اعداد رینولدز بالا پاسخ مناسبی خواهند داشت. مقادیر ویژه‌ای که از تجزیه مود دینامیکی حاصل می‌شود مختلط است و بخش حقیقی آن پایداری مودهای تجزیه مود دینامیکی را مشخص می‌کند.

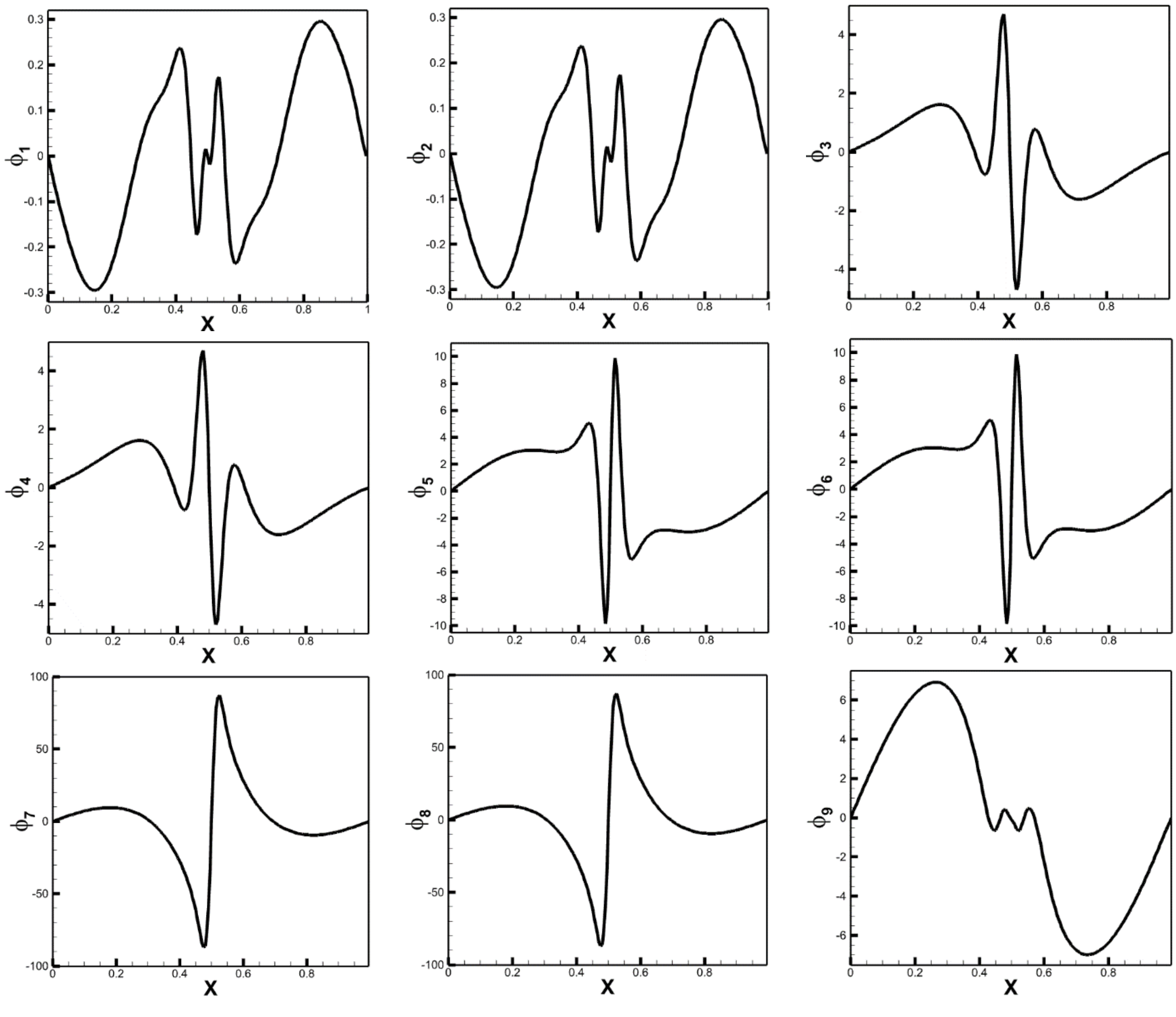
۷- نتایج

در این بخش به بررسی نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل‌سازی رتبه‌کاسته مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی پرداخته می‌شود. در قدم اول معادله برگرز ناپایا یک‌بعدی لزج تراکم‌ناپذیر با استفاده از شبیه‌سازی عددی مستقیم حل شده و سپس با استفاده از رویکرد تشریح شده در بخش‌های پیشین، مدل رتبه‌کاسته بدست آمده و جایگزین مدل اصلی می‌شود. به منظور این کار از مجموعه ماتریس داده‌های بدست آمده از شبیه‌سازی عددی مستقیم برای ورودی مدل‌رتبه‌کاسته استفاده شده‌است. در مطالعه حاضر برای حل عددی معادله برگرز از روش شبیه‌سازی عددی مستقیم استفاده شده و گام زمانی معادل ۰/۰۰۱ فرض شده‌است. لازم به ذکر است، حل عددی این معادله برای یک واحد زمانی و به ازای اعداد رینولدز۱۰۰، ۱۰۰۰، ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ انجام شده‌است. شرایط مرزی و اولیه این مسئله به شرح زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} &u(x,0)=\sin(2\pi x)\\ &u(0,t)=u(1,t)=0 \end{aligned} \tag{۲۷}$$

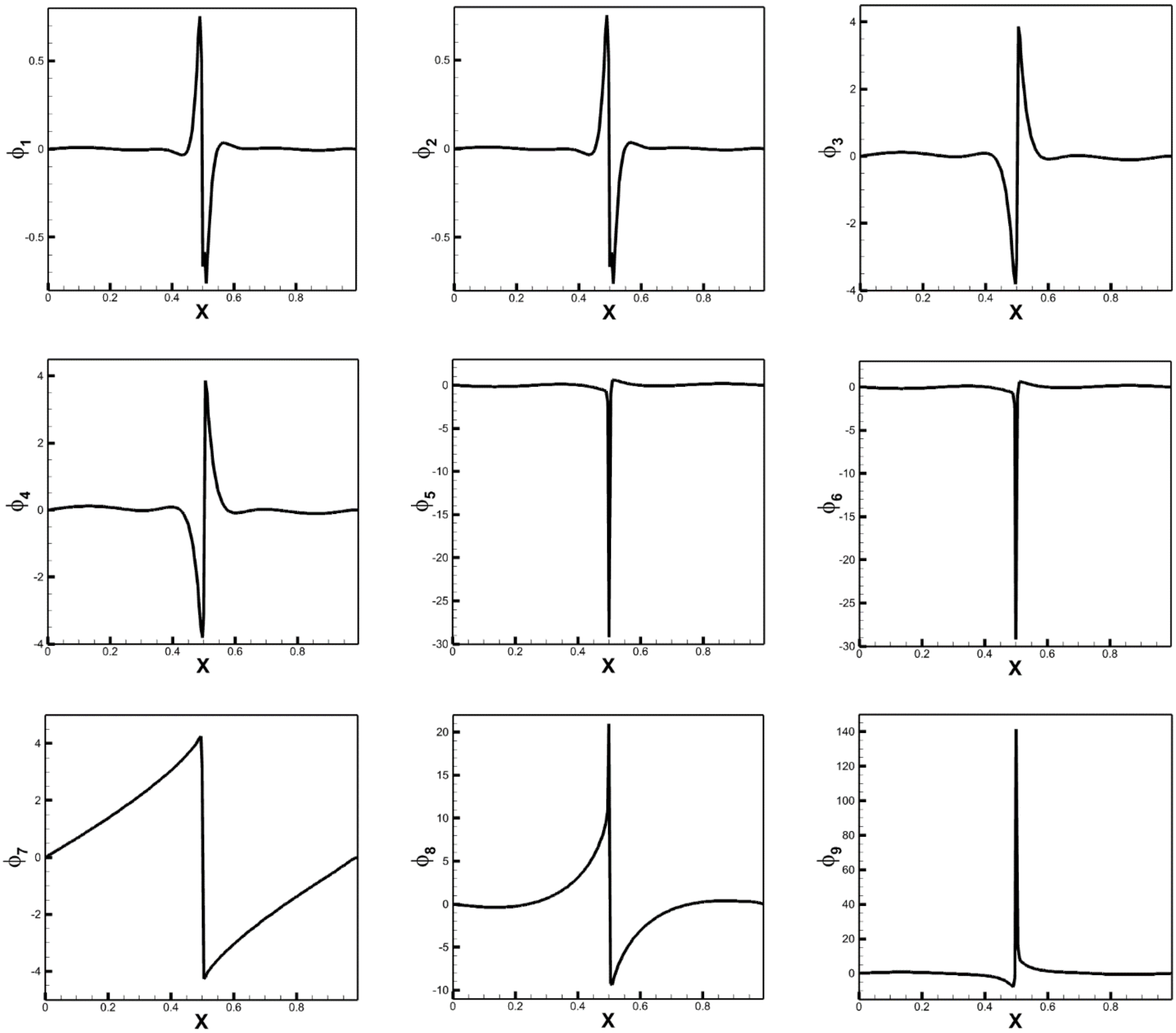
پس از حل عددی مستقیم معادلۀ برگرز، ماتریس داده‌ها شامل ۱۰۰ نمایه (عضو) با گام‌های زمانی مساوی و متوالی ایجاد و به عنوان داده‌های ورودی مدل رتبه‌کاسته در نظر گرفته شده‌است. پس از حل مسئله مقادیر ویژه، مودهای حاصل از روش تجزیه مود دینامیکی محاسبه خواهند شد. در شکل‌های ۱ و ۲ توزیع بخش حقیقی مود دینامیکی شماره ۱ تا ۹ به ترتیب برای کمترین و بیشترین مقادیر عدد رینولدز در این مسئله نمایش داده شده‌است. همانطور که پیش‌تر گفته شد، مودهای بدست آمده از روش تجزیه مود دینامیکی نسبت به یکدیگر برتری سطح انرژی نداشته و این پایه‌ها از هم مستقل نمی‌باشند و این مسئله به طور کامل در این شکل‌ها مشهود است. سپس، با استفاده از ۱۰ مود دینامیکی محاسبه شده برای این مسئله، میدان موردنظر بازسازی شده‌است. ضرایب موادال (بخش حقیقی) بدست آمده به ازای مقادیر مختلف عدد رینولدز ۱۰۰۰، ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ به ترتیب در شکل‌های ۳ تا ۵ نمایش داده شده‌است. این تغییرات زمانی مربوط به ۱۰ مود دینامیکی میدان جریان حاصل از مدل رتبه‌کاسته می‌باشند.

به منظور مطالعه دقت مدل‌سازی با ابعاد پایین برای اعداد رینولدز مختلف در آخرین گام زمانی، نتایج شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته استاندارد و اصلاح‌شده مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی بایکدیگر مقایسه شده‌اند. در شکل ۶ نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته استاندارد در عدد رینولدز ۱۰۰ برای آخرین گام زمانی نمایش داده شده‌است. مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته استاندارد و داده‌های حاصل از حل عددی مستقیم برای واحدهای زمانی ۰/۱، ۰/۲، ۰/۳ و ۰/۴ در عدد رینولدز ۱۰۰۰ در شکل ۷ نشان داده شده است. همانطور که در نتایج نمایش داده‌شده دیده می‌شود دقت مدل رتبه‌کاسته در مقایسه با داده‌های حل عددی مستقیم در زمان‌های مختلف کاهش یافته و به خوبی دینامیک حاکم بر مسئله را پیش‌بینی نکرده‌است. این موضوع با بررسی نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته در اعداد رینولدز ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ که به ترتیب در شکل ۸ برای زمان‌های ۰/۱، ۰/۲، ۰/۳ و ۰/۴ و شکل ۹ برای زمان‌های ۰/۱، ۰/۲ و ۰/۳ آورده‌شده، بیشتر دیده شده و دقت مدل رتبه‌کاسته به صورت مضاعف در برخی گام‌های زمانی کاهش یافته‌است. همانطور که مشخص است، با گذر زمان رفتار غیرخطی معادله شده می‌شود و انحراف مدل رتبه‌کاسته افزایش می‌یابد. به عبارتی در بازه‌های زمانی بالاتر با توجه به شرایط فیزیکی که در این مسئله فرض شده‌است، یک ناپیوستگی ایجاد شده که نشان‌دهنده کاهش اثر ترم استهلاک موجود در معادله است. با اینکه در شکل ۸ تا قبل از زمان ۰/۳ تغییرات ناگهانی وجود ندارد، اما مدل رتبه‌کاسته به اشتباه در این واحد زمانی یک ناپیوستگی را پیش‌بینی کرده‌است. این در حالی است که انتظار می‌رفت این تغییرات در زمان‌های بالاتری صورت گیرد. پس این نتایج نشان می‌دهند که اثر استهلاک در مسئله کاهش یافته و ترم غیرخطی در رفتار معادله غالب شده‌است. این رفتار با افزایش عدد رینولدز مشهودتر شده زیرا که در شکل ۹ نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته تنها تا زمان ۰/۳ قابل مشاهده است و مدل رتبه‌کاسته مقادیر نامعلوم و نامفهمومی را برای زمان‌های بعدی گزارش می‌کند. اگرچه مدل رتبه‌کاسته در اعداد رینولدز کمتر، واگرایی ندارد اما کاملاً مشخص است که فیزیک مسئله را اشتباه پیش‌بینی کرده و این نتایج در زمان‌های بالاتر



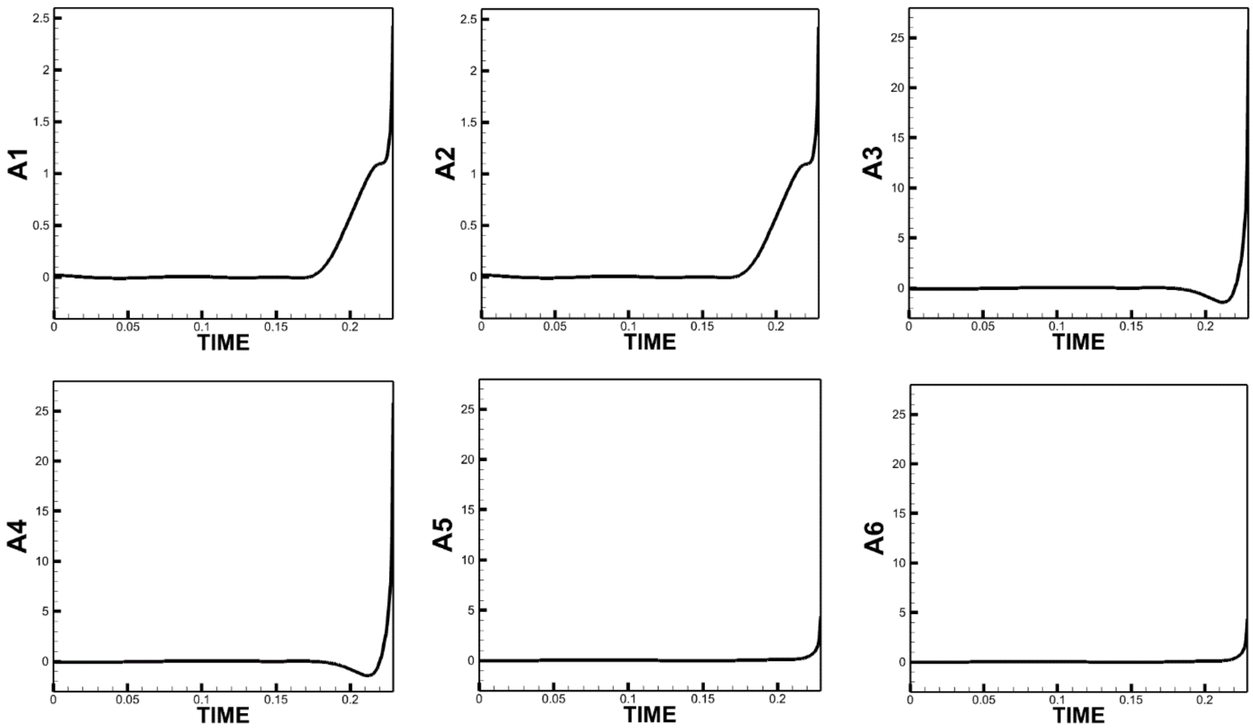
شکل ۱. توزیع مکانی مودهای دینامیکی (شماره ۱ تا ۹) میدان مبتنی بر داده‌های حاصل از حل معادله برگرز به ازای عدد رینولدز ۱۰۰

Fig. 1. Spatial Distribution of Dynamic Modes based on the Data Obtained from Solution of Burgers Equation for Reynolds Number of 100



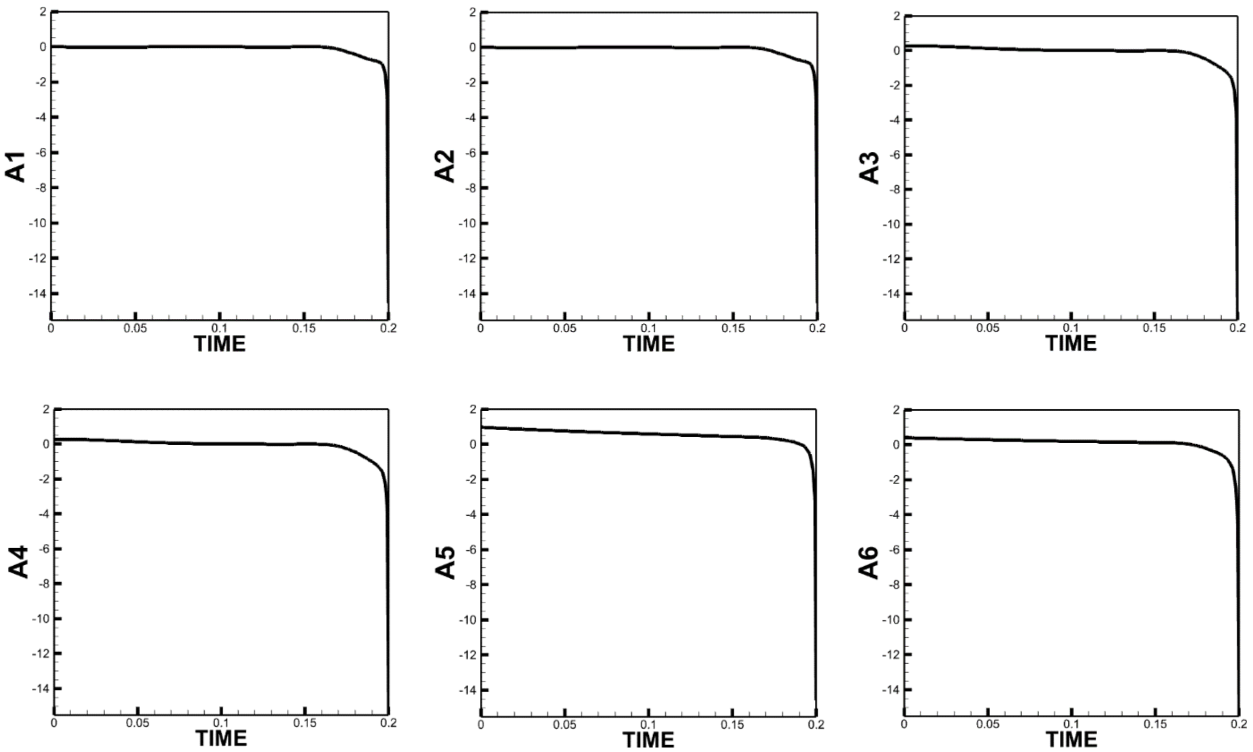
شکل ۲. توزیع مکانی مودهای دینامیکی (شماره ۱ تا ۹) میدان مبتنی بر داده‌های حاصل از حل معادله برگرز به ازای عدد رینولدز ۵۰۰۰

Fig. 2. Spatial Distribution of Dynamic Modes based on the Data Obtained from Solution of Burgers Equation for Reynolds Number of 5000



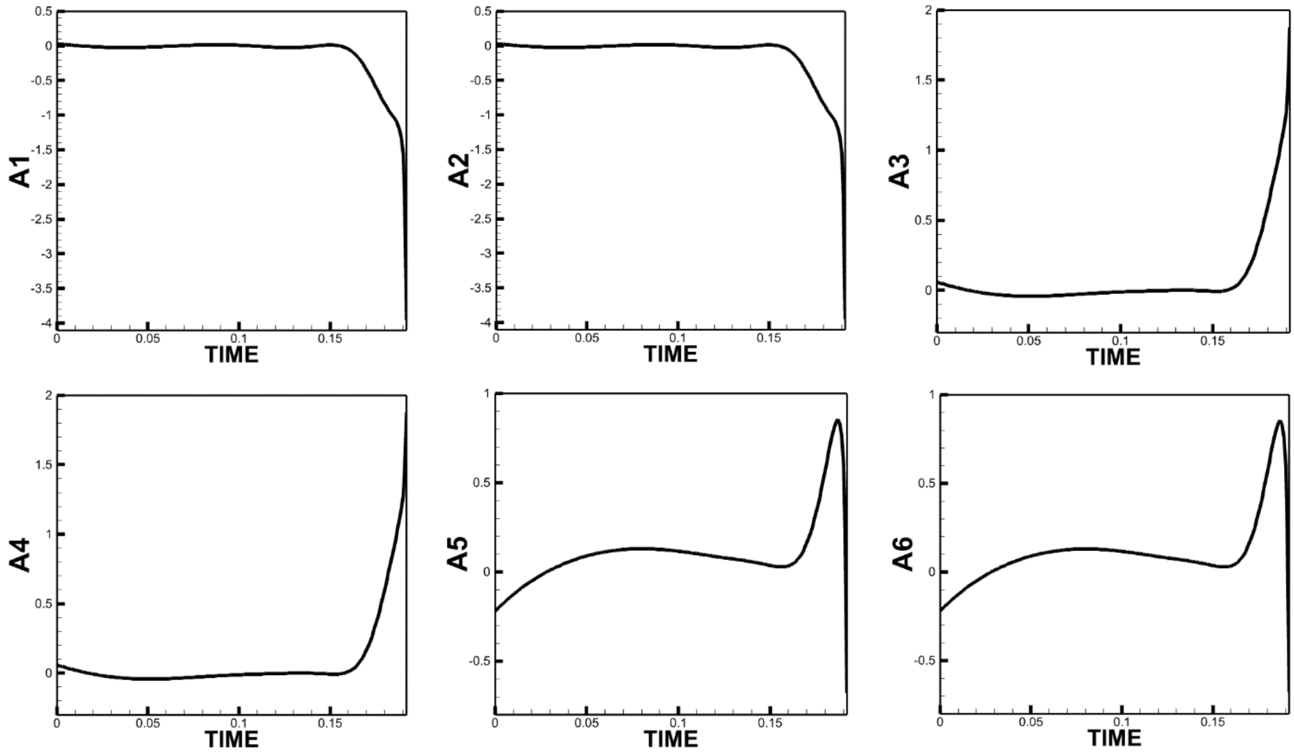
شکل ۳. تغییرات زمانی بخش حقیقی ضرایب مودال به ازای عدد رینولدز ۱۰۰۰

Fig. 3. Temporal Variation of Real Part of Modal Coefficients at Reynolds Number of 1000



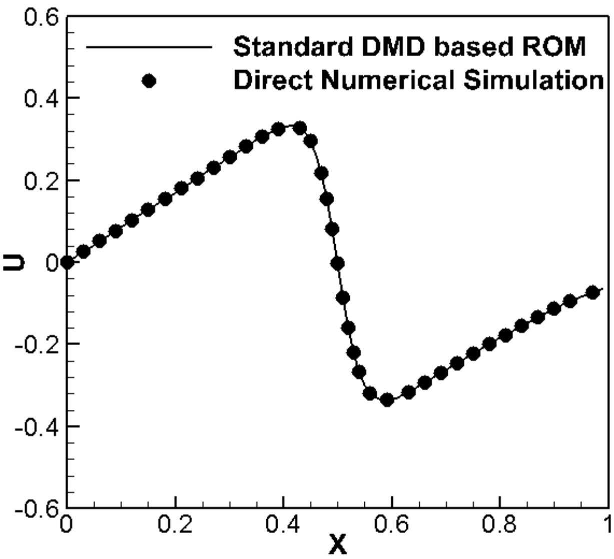
شکل ۴. تغییرات زمانی بخش حقیقی ضرایب مودال به ازای عدد رینولدز ۲۰۰۰

Fig. 4. Temporal Variation of Real Part of Modal Coefficients at Reynolds Number of 2000



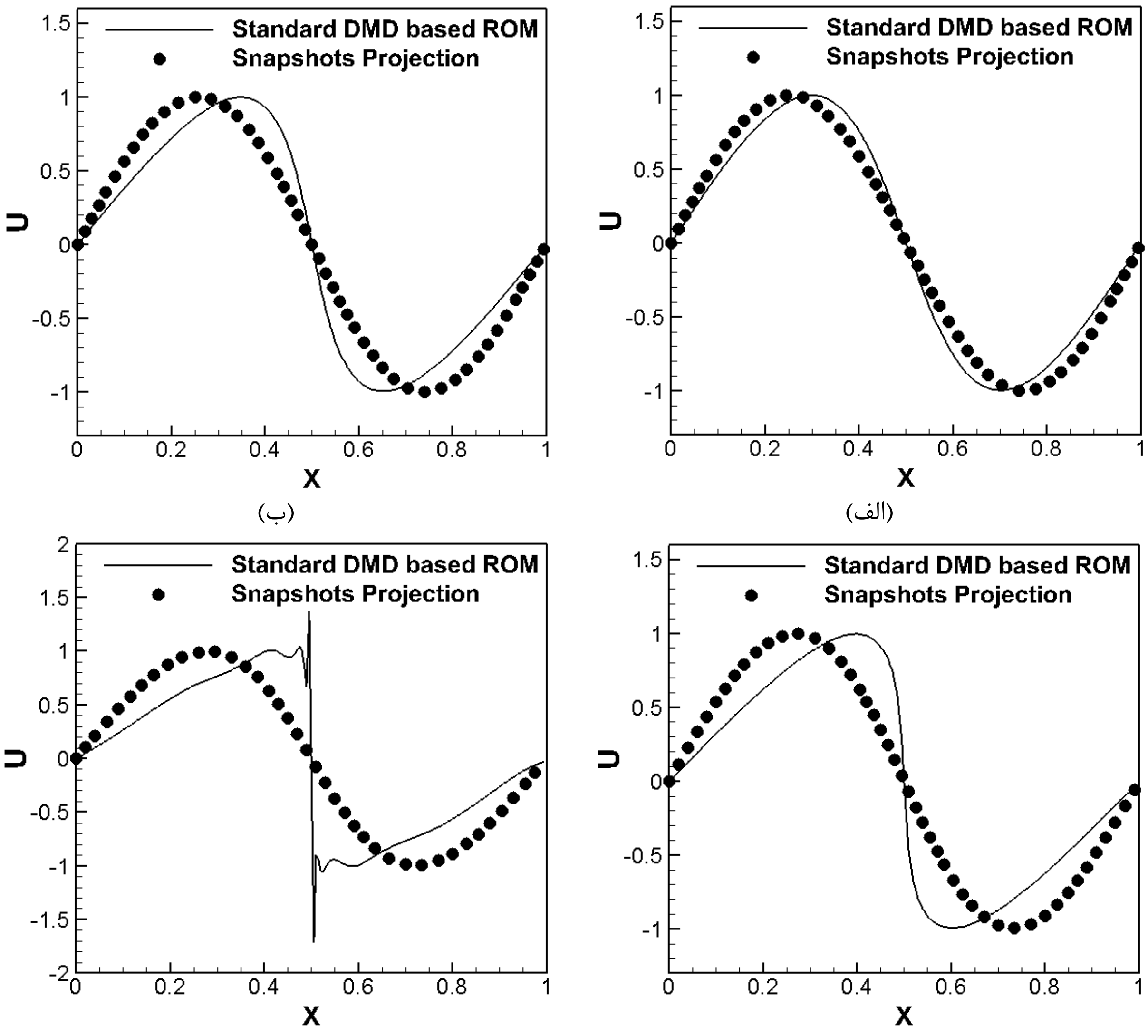
شکل ۵. تغییرات زمانی بخش حقیقی ضرایب مودال نسبت به ازای عدد رینولدز ۵۰۰۰

Fig. 5. Temporal Variation of Real Part of Modal Coefficients at Reynolds Number of 5000



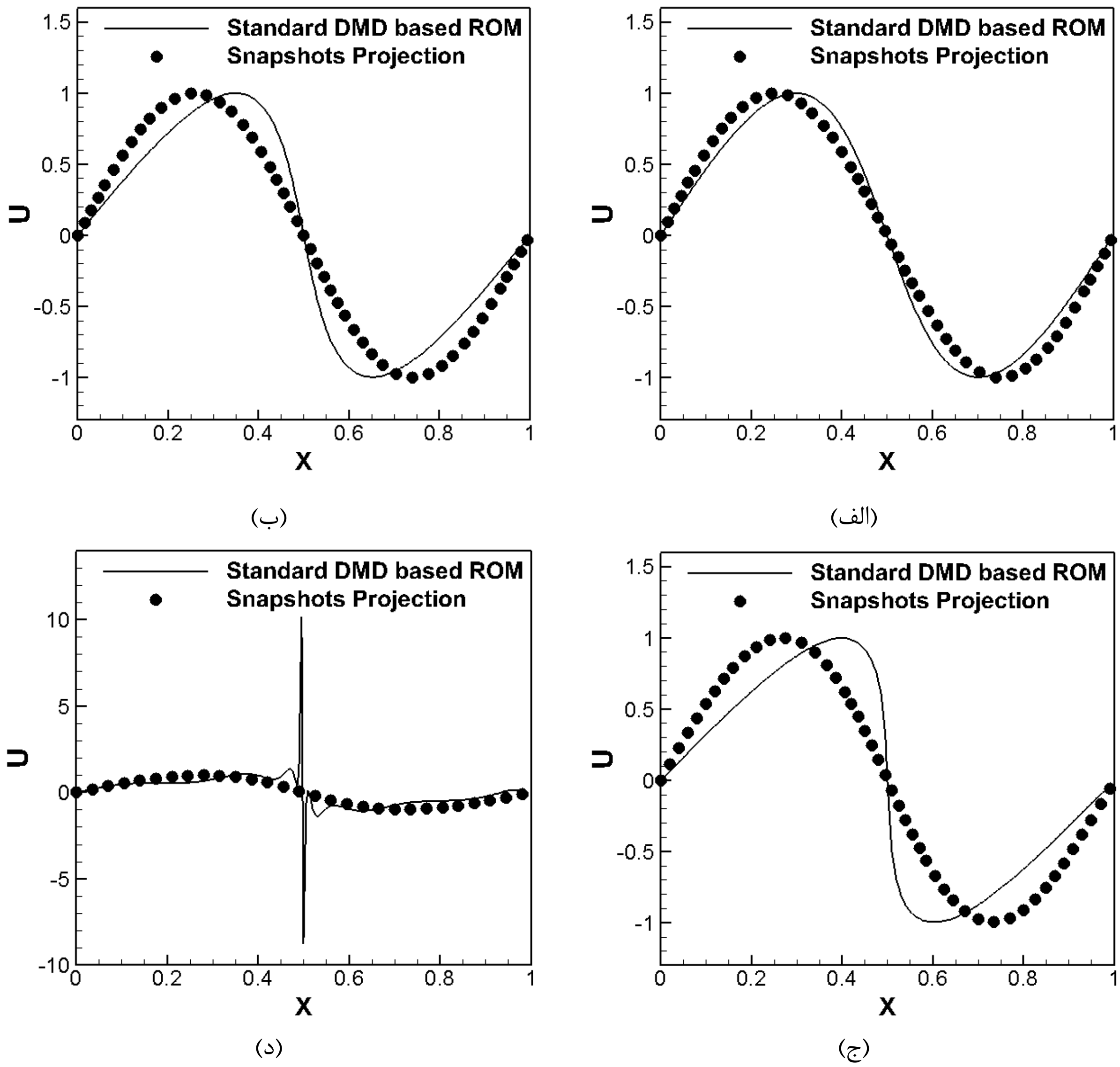
شکل ۶. مقایسه پاسخ معادله برگرز برای آخرین گام زمانی حاصل از مدل رتبه‌کاسته استاندارد و داده‌های شبیه‌سازی عددی مستقیم در عدد رینولدز ۱۰۰

Fig. 6. Comparison between the Prediction of Standard Reduced Order Model for the Last Time Step and Direct Numerical Simulation of Burgers Equation at Reynolds Number of 100



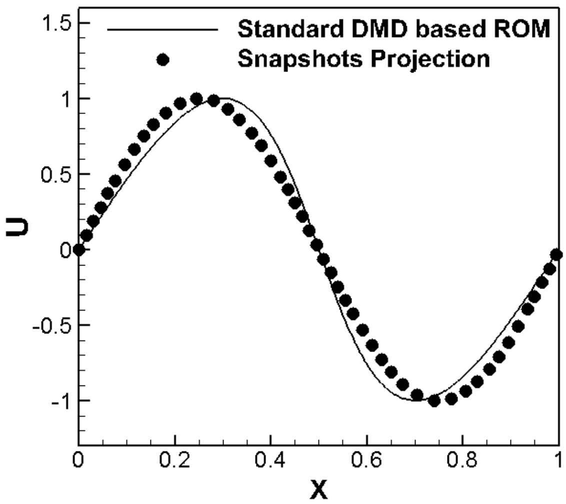
شکل ۷. مقایسه پاسخ معادله برگرز حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته استاندارد در عدد رینولدز ۱۰۰۰ برای (الف) t =۰/۱، (ب) t =۰/۲، (ج) t =۰/۳ و (د) t =۰/۴

Fig. 7. Comparison between the Prediction of Standard Reduced Order Model and Direct Numerical Simulation of Burgers Equation at Reynolds Number of 1000 at (a) t=0.1, (b) t=0.2, (c) t=0.3 and (d) t=0.4

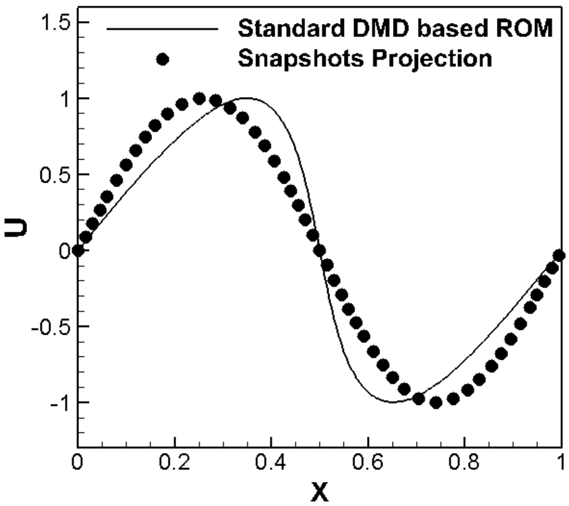


شکل ۸. مقایسه پاسخ معادله برگرز حاصل از شبیه‌سازی عددی و مدل رتبه‌کاسته استاندارد در عدد رینولدز ۲۰۰۰ برای (الف) t =۰/۱، (ب) t =۰/۲، (ج) t =۰/۳ و (د) t =۰/۴

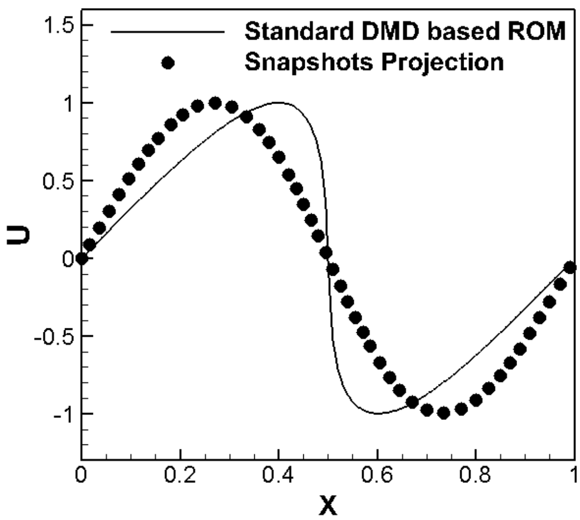
Fig. 8. Comparison between the Prediction of Standard Reduced Order Model and Direct Numerical Simulation of Burgers Equation at Reynolds Number of 2000 at (a) t=0.1, (b) t=0.2, (c) t=0.3 and (d) t=0.4



(الف)



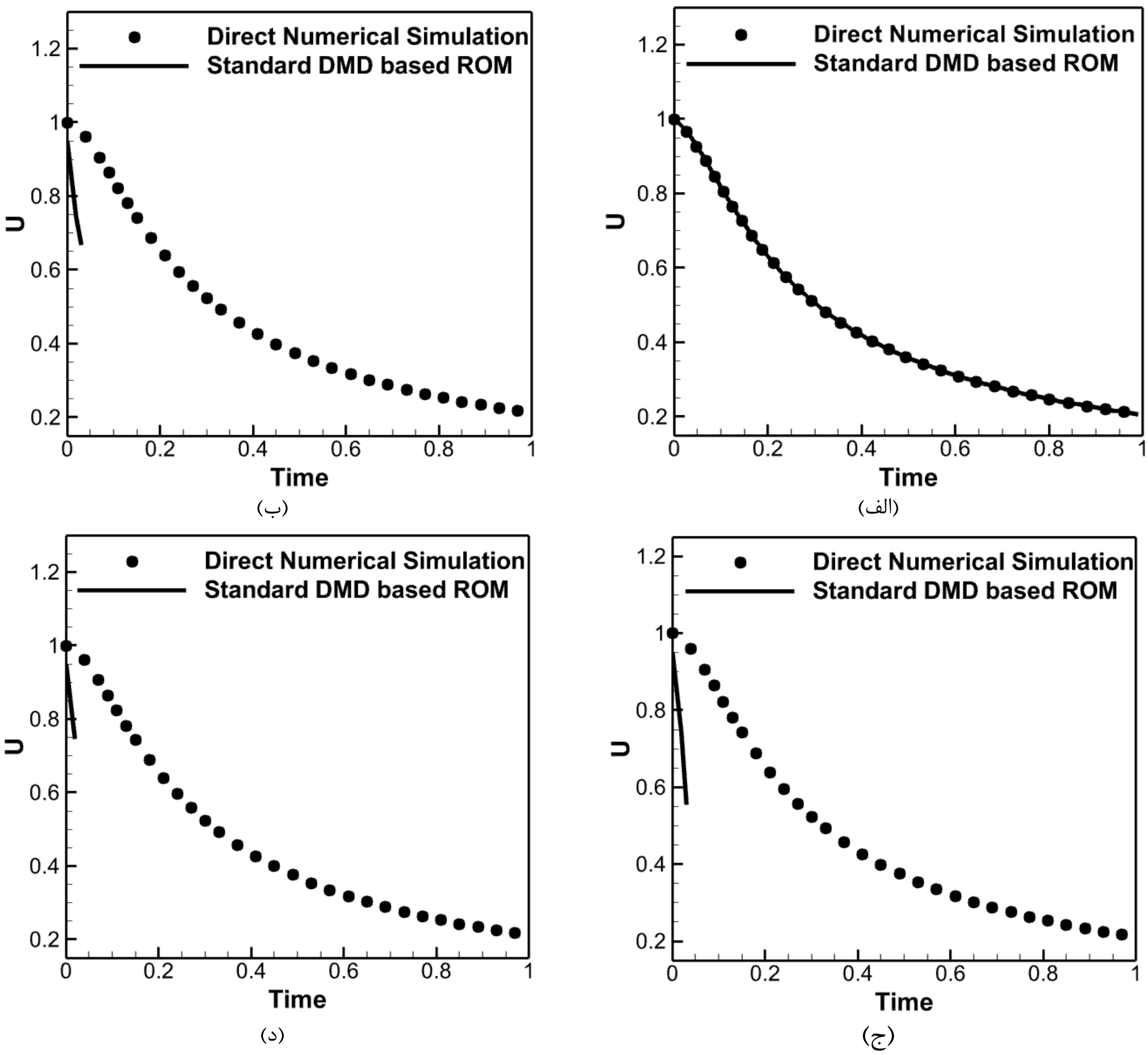
(ب)



(ج)

شکل ۹. مقایسه پاسخ معادله برگرز حاصل از شبیه‌سازی عددی و مدل رتبه‌کاسته استاندارد در عدد رینولدز۵۰۰۰ برای (الف) t =۰/۱، (ب) t =۰/۲، (ج) t =۰/۳

Fig. 9. Comparison between the Prediction of Standard Reduced Order Model and Direct Numerical Simulation of Burgers Equation at Reynolds Number of 5000 at (a) t=0.1, (b) t=0.2 and (c) t=0.3

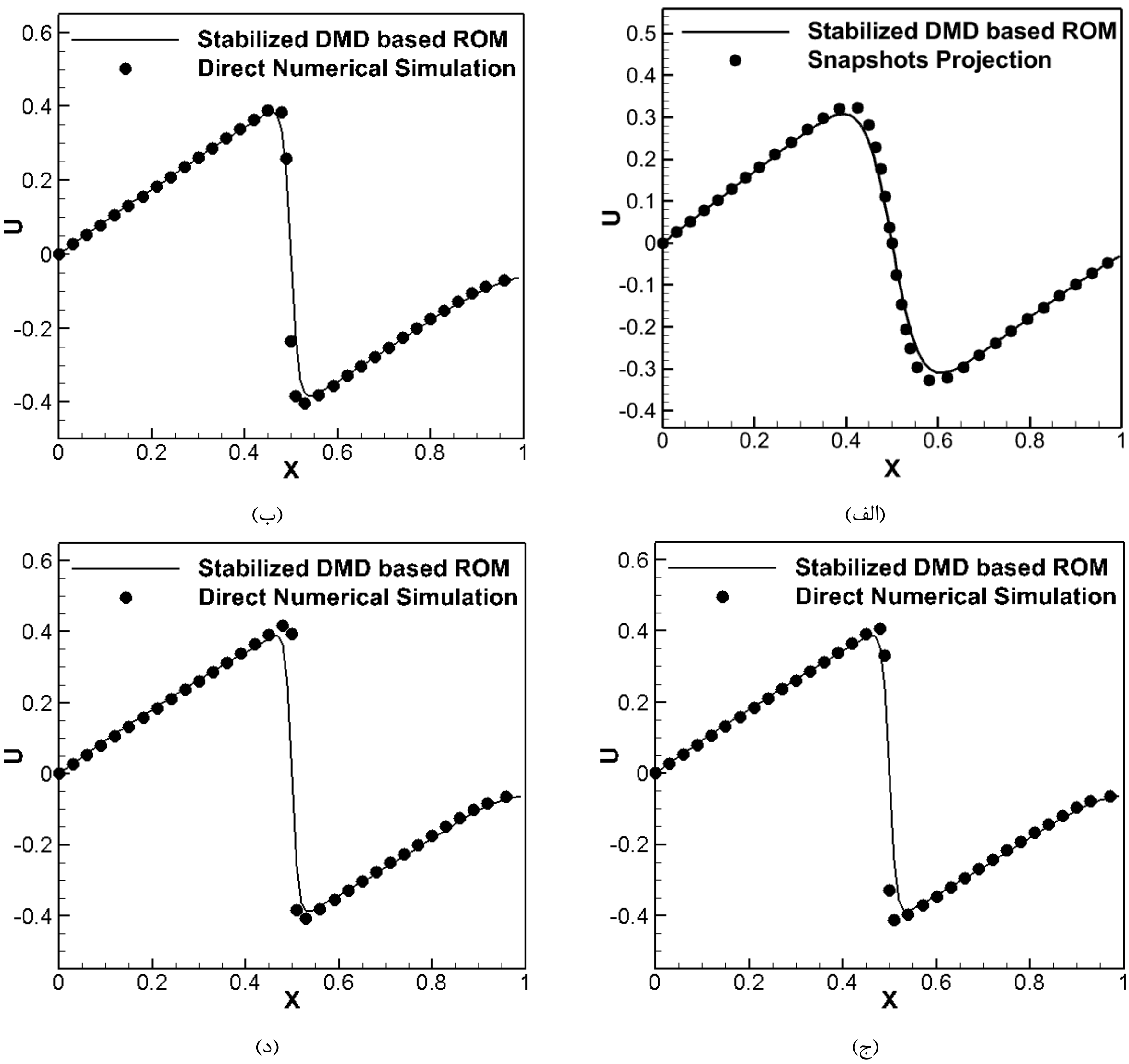


شکل ۱۰. مقایسه تغییرات پاسخ مدل برگرز در x =۰/۲۵ حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته استاندارد مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی در اعداد رینولدز (الف) ۱۰۰، (ب) ۱۰۰۰، (ج) ۲۰۰۰ و (د) ۵۰۰۰

Fig. 10. Comparison between the Prediction of Standard Reduced Order Model and Direct Numerical Simulation of Burgers Equation on x=0.25 at Reynolds Numbers of (a) 100, (b) 1000, (c) 2000 and (d) 5000

و با افزایش عدد رینولدز، بیشتر نمایان است. برای بررسی رفتار وابسته به زمان مدل در پیش‌بینی پاسخ معادله برگرز، نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته و روش حل عددی مستقیم در یک نقطه مکانی مشخص ($x = ۰/۲۵$) محاسبه شده و داده‌های آن در شکل ۱۰ به ازای اعداد رینولدز مختلف آورده شده‌است. همانطور که در شکل مشخص است برای اعداد رینولدز بیشتر از ۱۰۰۰، نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته واگرا شده و اعداد بی‌معنایی بدست آمده که در نمودار قابل ترسیم نمی‌باشد. بنابراین، اهمیت توسعه مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده برای معادلات غیرخطی بر مبنا روش تجزیه مود دینامیکی مشخص می‌گردد.

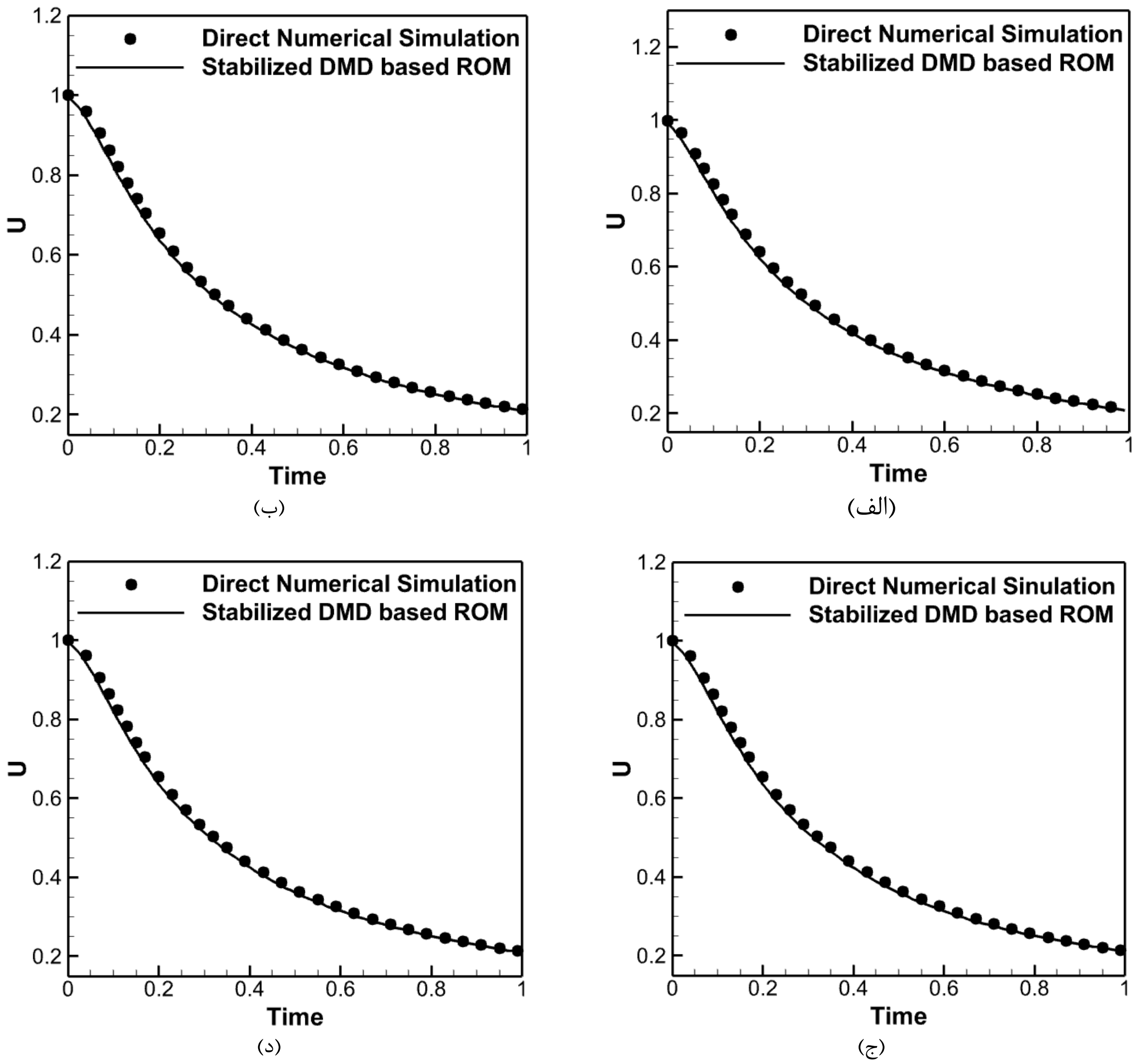
همانطور که در بخش متدولوژی حل و توسعه مدل رتبه‌کاسته اشاره شد برای جبران واگرایی داده‌های حاصل از مدل در مقایسه با نتایج حل عددی دقیق، از طریق ایجاد یک اتلاف مصنوعی مشابه با مفهوم لزجت گردابه‌ای، مدل به پایداری رسیده تا دقت پیش‌بینی داده‌های حاصل از آن در اعداد رینولدز مختلف به درستی انجام شود. در مطالعه حاضر، مقدار لزجت



شکل ۱۱. مقایسه پاسخ معادله برگرز برای آخرین گام زمانی حاصل از مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده و شبیه‌سازی عددی مستقیم در اعداد رینولدز (الف) ۱۰۰، (ب) ۱۰۰۰، (ج) ۲۰۰۰ و (د) ۵۰۰۰

Fig. 11. Comparison between the Prediction of Stabilized Reduced Order Model for the Last Time Step and Direct Numerical Simulation of Burgers Equation at Reynolds Numbers of (a) 100, (b) 1000, (c) 2000 and (d) 5000

گردابه‌ای برابر با ۰/۰۰۳۲ و با توجه به نیاز مسئله برای پایدارسازی مدل، فرض شده‌است. در شکل ۱۱ نتایج مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده در اعداد رینولدز متفاوت برای آخرین گام زمانی، مورد ارزیابی قرار گرفته و همانطور که مشخص است سیستم دینامیکی با افزایش عدد رینولدز پاسخی به مراتب دقیق‌تر در قیاس با مدل رتبه‌کاسته استاندارد و نسبت به داده‌های شبیه‌سازی عددی مستقیم خواهد داشت. برای درک بیشتر این موضوع و بررسی رفتار وابسته به زمان مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده، پاسخ حل مدل جایگزین معادله برگرز در یک نقطه مکانی مشخص ($x = ۰/۲۵$) بر حسب زمان محاسبه شده‌است. مقایسه‌ای در شکل ۱۲ بین نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم با مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده انجام گرفته‌است. همانطور که از نتایج مشخص است، با بهره‌گیری از روش اصلاح مدل رتبه‌کاسته پایداری نتایج حاصل از مدل در زمان‌های مختلف نیز به خوبی حاصل شده و مدل حاصل دارای دقت مناسب برای پیش‌بینی دینامیک حاکم بر مسئله خواهد بود.



شکل ۱۲. مقایسه تغییرات پاسخ مدل برگرز در x =۰/۲۵ حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی در اعداد رینولدز (الف) ۱۰۰، (ب) ۱۰۰۰، (ج) ۲۰۰۰ و (د) ۵۰۰۰

Fig. 12. Comparison between the Prediction of Stabilized Reduced Order Model and Direct Numerical Simulation of Burgers Equation on x=0.25 at Reynolds Numbers of (a) 100, (b) 1000, (c) 2000 and (d) 5000

۸- نتیجه‌گیری

در این پژوهش معادله برگرز لزج برای چهار عدد رینولدز ۱۰۰، ۱۰۰۰، ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ با استفاده از روش شبیه‌سازی عددی مستقیم و سپس مدل‌سازی رتبه‌کاسته با استفاده از الگوی تجزیه مود دینامیکی و طرح گالرکین مورد بررسی قرار گرفته است. معادله برگرز از ساده‌سازی معادلات ناویر-استوکس با حذف ترم فشار بدست می‌آید. به منظور توسعه مدل رتبه‌کاسته معادله محور، از تصویرسازی معادله در فضای مودها بهره گرفته‌شده‌است. مدل حاصل در اعداد رینولدز پایین، به عنوان مثال عدد رینولدز برابر با ۱۰۰، دارای دقت مناسبی است که به دلیل غالب‌تر شدن عبارت نفوذ در معادله و تأثیر افزایش اثر استهلاکی آن می‌باشد. در این شرایط نتایج حاصل از مدل‌سازی رتبه‌کاسته استاندارد مبتنی بر روش تجزیه مود دینامیکی تطابق مناسبی با داده‌های بدست آمده از شبیه‌سازی عددی مستقیم دارد. روشن است در توسعه مدل رتبه‌کاسته از رویکرد کاهش مرتبه سیستم دینامیکی مبتنی بر حذف اثر برخی مودها بهره برده شده‌است. این موضوع نیز عاملی مهم در

کاهش استهلاک لازم و پایداری پاسخ مدل رتبه‌کاسته می‌باشد. با افزایش عدد رینولدز تا مقادیر ۱۰۰۰، ۲۰۰۰ و در نهایت ۵۰۰۰ و به دنبال آن کاهش استهلاک مورد نیاز، مشابه با شرایط جریان آشفته، تأثیر ترم لزج موجود در معادله کاهش یافته و این رفتار در مدل رتبه‌کاسته تشدید می‌شود. در نتیجه پاسخ‌های مدل رتبه‌کاسته ناپایدار شده و در نهایت منجر به واگرایی جواب‌ها خواهد شد که این واگرایی با گذر زمان و در عدد رینولدز ۵۰۰۰ بیشتر است. به منظور پایدارسازی و جبران این استهلاک از دست رفته، یک ترم اتلاف مصنوعی تحت عنوان لزجت گردابه‌ای مبتنی بر مفاهیم مدل‌سازی جریان آشفته به ترم لزج موجود در معادله اضافه خواهد شد. این عبارت به عنوان جایگزین اثر مودهای حذف‌شده در فرآیند کاهش مرتبه بکار رفته و مشابه رویکرد شبیه‌سازی جریان‌های آشفته برای مدل‌سازی ساختارهای متجانسی استفاده می‌شود که سطح انرژی پایین‌تری دارند. بنابراین، فیزیک مسئله هم در عدد رینولدز ۱۰۰ و هم بالاتر با دقت مناسب پیش‌بینی می‌شود. نتایج نشان می‌دهد با اتخاد این رویکرد در اصلاح مدل، سیستم دینامیکی به پایداری رسیده و نتایج حاصل از مدل‌سازی رتبه‌کاسته اصلاح‌شده مبتنی بر روش تجزیه مود دینامیکی در اعداد رینولدز مختلف و در تمامی گام‌های زمانی قابل قبول خواهد بود.

منابع

[1] J.M. Burgers, Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion, in: Selected Papers of JM Burgers, Springer, 1995, pp. 281-334.

[2] J. Bec, K. Khanin, Burgers turbulence, Physics reports, 447(1-2) (2007) 1-66.

[3] J.-P. Bouchaud, M. Mézard, Velocity fluctuations in forced Burgers turbulence, Physical Review E, 54(5) (1996) 5116.

[4] C. Bayona, J. Baiges, R. Codina, Variational multiscale approximation of the one-dimensional forced Burgers equation: The role of orthogonal subgrid scales in turbulence modeling, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 86(5) (2018) 313-328.

[5] J. Lumley, The structure of inhomogeneous turbulence. in atmospheric turbulence and wave propagation. Ed. AM Yaglom, VI Tatarski, 1967, in, Moscow: Nauka.

[6] Z. Wu, D. Laurence, S. Utyuzhnikov, I. Afgan, Proper orthogonal decomposition and dynamic mode decomposition of jet in channel crossflow, Nuclear Engineering and Design, 344 (2019) 54-68.

[7] L.I. Abreu, A.V. Cavalieri, P. Schlatter, R. Vinuesa, D.S. Henningson, Spectral proper orthogonal decomposition and resolvent analysis of near-wall coherent structures in turbulent pipe flows, Journal of Fluid Mechanics, 900 (2020).

[8] M.K. Moayyedi, F. Sabaghzadeghan, Development of parametric and time dependent reduced order model for diffusion and convection-diffusion problems based on proper orthogonal decomposition method, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, 53(7) (2021) 8-8. (In Persian)

[9] P.J. Schmid, Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data, Journal of fluid mechanics, 656 (2010) 5-28.

[10] C.W. Rowley, I. Mezić, S. Bagheri, P. Schlatter, D.S. Henningson, Spectral analysis of nonlinear flows, Journal of fluid mechanics, 641 (2009) 115-127.

[11] M. Grilli, P.J. Schmid, S. Hickel, N.A. Adams, Analysis of unsteady behaviour in shockwave turbulent boundary layer interaction, Journal of Fluid Mechanics, 700 (2012) 16-28.

[12] S. Hong, G. Huang, Introducing DMD method to study dynamic structures of flow separation with and without control, Acta Aeronaut et Astronaut Sin, 38(8) (2017) 10-17.

[13] D. Duke, J. Soria, D. Honnery, An error analysis of the dynamic mode decomposition, Experiments in fluids, 52(2) (2012) 529-542.

[14] A. Seena, H.J. Sung, Spatiotemporal representation of the dynamic modes in turbulent cavity flows, International journal of heat and fluid flow, 44 (2013) 1-13.

[15] X. Kong, C. Li, C. Wang, Y. Zhang, J. Zhang, Short-term electrical load forecasting based on error correction using dynamic mode decomposition, Applied Energy, 261 (2020) 114368.

[16] C. Hu, C. Yang, W. Yi, K. Hadzic, L. Xie, R. Zou, M.

Zhou, Numerical investigation of centrifugal compressor stall with compressed dynamic mode decomposition, Aerospace Science and Technology, 106 (2020) 106153.

[17] F. Sabaghzadeghan, M. Moayyedi, Reduced Order Model of Conduction Heat Transfer in a Solid Plate Based on Dynamic Mode Decomposition, Sharif Journal of Mechanical Engineering, 37(2) (2021) 3-12. (In Persian)

[18] Sabaghzadeghan, F. (2019). “Development the Reduce Order Model for Convection-Diffusion and Diffusion Problems Based on Proper Orthogonal Decomposition and Dynamic Mode Decomposition Methods.” Thesis for Degree of Master of Science (MSc) In Mechanical Engineering-Energy Conversion, Faculty of Engineering, University of Qom. (In Persian)

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. K. Moayyedi, F. Bigdeloo, F. Sabaghzadeghan, Stabilization of Reduced Order Model for Convection-Diffusion Problems Based on Dynamic Mode Decomposition at High Reynolds Numbers Using Eddy Viscosity Approach, Amirkabir J. Mech Eng., 54(11) (2023) 2479-2498.

DOI: 10.22060/mej.2022.20801.7327

این صفحه عمداً خالی است