Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 54(10) (2023) 455-458
DOI: 10.22060/mej.2022.21308.7420

# Hybrid Position and Force Control for a Spherical Inverted Pendulum Connected to a Quadrotor in a Constrained Motion

A. Soltani*, M. H. Kamari

Department of Mechanical Engineering, Sahand University of Technology, Tabriz, Iran

**ABSTRACT:** Today, the use of drones to automate activities such as civil works, rescue operations, and military missions is expanding to increase speed and accuracy, retaining manpower and reducing costs. According to this approach, in this paper, hybrid control of position and force for a spherical inverted pendulum on top of a quadrotor whose motion is constrained in the vertical direction is studied to enable the quadrotor-spherical inverted pendulum system to perform operations such as painting and cleaning on high ceilings. In this regard, first using Newton-Euler laws, the equations of motion governing the quadrotor-inverted pendulum system in the constrained motion are extracted, and then by presenting a model for the constraint force, a hierarchical control system including position-force control loop, inverted pendulum orientation control loop and quadrotor orientation control loop is provided. Proposed Control laws for the inverted pendulum orientation control loop and the quadrotor orientation control loop are designed using some theorems of geometric control methods. Finally, to study the performance of the proposed control method, some numerical simulations have been performed.

**Review History:**

Received: Apr. 18, 2022
Revised: Oct, 18, 2022
Accepted: Oct. 19, 2022
Available Online: Nov. 02, 2022

**Keywords:**

Hybrid control
Quadrotor
Spherical inverted pendulum
Hierarchical control
Geometric control

## 1- Introduction

In recent years, Unmanned Aerial Vehicles (UAVs), specially quadrotors, have attracted the attention of scientists for performing various tasks autonomously. cleaning or painting high ceilings are examples of tasks that can be performed by the quadrotors. In this study, the possibility of painting and cleaning high ceilings with a quadrotor without adding any actuator via control of an inverted spherical pendulum connected to it has been studied. According to the nature of the mentioned operations, the path of the end of the inverted spherical pendulum, which is actually the location of the painting or cleaning tool, and the force applied from it to the ceiling should be controlled. Many researchers have studied the problem of inverted pendulum control on top of a quadrotor [1-5] but none of them has not proposed a control law for a pendulum in a constrained motion such as the operation considered in this study.

Unlike previous studies, in this study, the pendulum is in contact with a rigid horizontal ceiling, and according to the intended mission, the problem of hybrid control of the horizontal path of the end of the pendulum and the force entering the ceiling has been studied. In other words, the main innovation of this study is the modeling of the quadrotor and pendulum system in contact with a rigid horizontal ceiling, as well as the design of the hybrid force and position controller for the end of the pendulum.

## 2- Methodology

First, a mathematical model is derived for the dynamics of the quadrotor-inverted pendulum system when the pendulum is in contact with a horizontal rigid ceiling (Fig. 2).

The equations of the motions in the model have been derived from Newton- Euler method while the dynamics of the rotors are adapted from previous studies. Moreover, to model the force acting on the pendulum by the ceiling $f_N$, the pendulum is considered as a mass attached to the roof by a spring (Fig. 3).

Then, a hierarchical control scheme is proposed to control the position and force of the pendulum. The control system has three control loops. The outer loop calculates the desired orientation of the connecting rod of the pendulum and desired component of the thrust force of the quadrotor in the direction of the rod. The median loop computes the desired attitude and thrust force of the quadrotor according to the outputs of the outer loop. Finally, the inner loop controls the quadrotor attitude to track its desired computed value. The control loops are designed by backstepping and a simplified model of the system. Geometric error functions are implemented to design the median and inner loops to avoid possible singularities. The stability of the control loops is proven by some theorems of the geometric control literature.

*Corresponding author's email: asoltani@sut.ac.ir

Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.

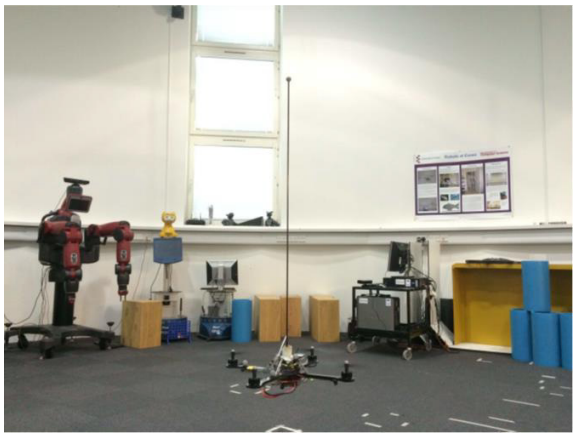


Fig. 1. Quadrotor-inverted pendulum system [5]

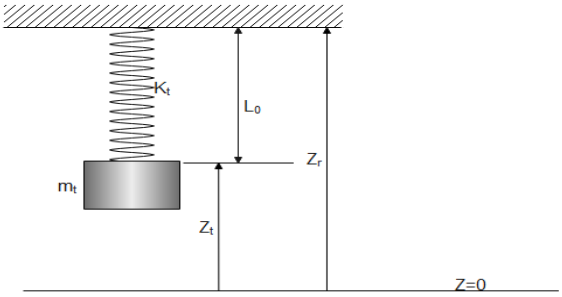



Fig. 3. Schematic of the model of the pendulum- ceiling interaction

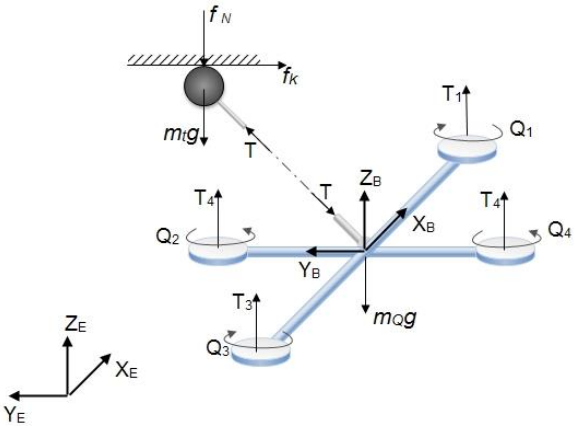



Fig. 2. Free diagram of the forces and torques for quadrotor-inverted pendulum system in a constrained motion

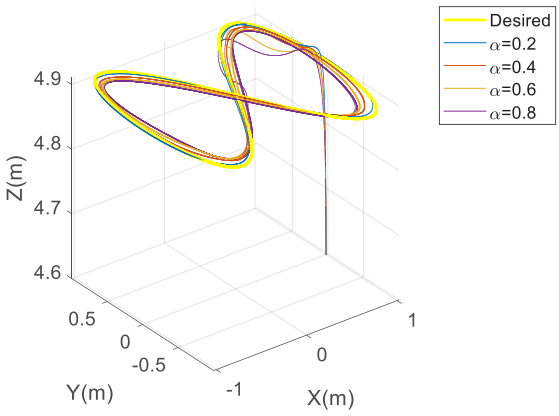



Fig. 4. Pendulum paths while tracking the desired trajectories vs the desired path.

## 3- Results and Discussions

To verify the effectiveness and robustness of the proposed control scheme some simulations have been done. In all of the simulations, a quadrotor is desired to track an eight-shape path with different velocity trajectories. Moreover, the perfect model of the system is implemented in simulations to assess the performance of the controller. Also, to fairly simulate the performance of the controller, the sampling rate is selected equal to 500Hz and a time delay of about 10ms is enforced on all of the measurement channels.

In the first simulation, there is not any disturbance acting on the system and just the performance of the controller has been evaluated. Simulation results show that although the pendulum tip is not on the path initially, it tracks the desired trajectory with a reasonable error even if the velocity of the trajectory is higher than its nominal value for which the controller has been tuned (Fig. 4).

The tracking errors are due to the simplifications made for driving the design model and the transportation delay of the measurements. Furthermore, the desired force of the pendulum and the yaw angle of the quadrotor has been tracked by implementing the proposed control scheme.

In the second simulation, the robustness of the control system against disturbances is evaluated. Therefore, a horizontal step force disturbance has been applied to the quadrotor. The results of the simulation show that despite the disturbances, the pendulum tracked the desired trajectory of its position and force successfully.

## 4- Conclusions

In this paper, a geometric nonlinear hierarchical controller is presented for the hybrid control of the path and force of a spherical inverted pendulum connected to a quadrotor whose vertical movement is constrained by a horizontal surface. Using the theorems presented in the geometric control literature, it was shown that this controller can provide the stability of the pendulum position and the force acting on it from the surface, the direction of the connecting rod, and the attitude of the quadrotor. The results of numerical simulations with a complete model of the quadrotor and simulation of data sampling with a constant rate and with a time delay show that the presented controller, despite the time delay of data transmission and the simplifying assumptions made for its design, can maintain the stability of the pendulum on the desired trajectories and providing the desired force. Of course, despite maintaining the stability of the system on the paths with higher speeds, the efficiency of the controller decreases, which is due to the limitation of the bandwidth of the actuators and the increase in the effect of the terms related to the gyroscopic moment and the inertia of the rotors which are neglected in control design. In addition, the simulation results show that the controller is robust to environmental disturbances on the quadrotor. Future research will include more complete modeling of the quadrotor-pendulum system, adaptive controller design to estimate the friction coefficient and spring constant of the equivalent pendulum, and practical implementation of the presented controller. In addition, the design of a tracking differentiator to calculate the derivatives of inter-loop control parameters to improve the performance of the controller may be studied.

## References

[1] T.A. Tamba, Y.Y. Nazaruddin, E. Juliastuti, The Regulation of a Quadrotor UAV Carrying a Pendulum using Receding Horizon Control, in: 2020 12th International Conference on Information Technology and Electrical Engineering (ICITEE), 2020, pp. 63-67.

[2] A. Nayak, R.N. Banavar, D.H.S. Maithripala, Stabilizing a spherical pendulum on a quadrotor, Asian Journal of Control, 24(3) (2022) 1112-1121.

[3] J. Lu, Y. Yang, X. Jin, Quadrotor inverted Pendulum control based on improved Particle Swarm Optimization, in: Proceeding - 2021 China Automation Congress, CAC 2021, 2021, pp. 6280-6285.

[4] S. Krafes, Z. Chalh, A. Saka, Visual servoing of a spherical inverted pendulum on a quadrotor using backstepping controller, International Review of Aerospace Engineering, 11(1) (2018) 6-14.

[5] C. Zhang, H. Hu, D. Gu, J. Wang, Cascaded control for balancing an inverted pendulum on a flying quadrotor, Robotica, 35(6) (2017) 1263-1279.

**HOW TO CITE THIS ARTICLE**

*A. Soltani, M. H. Kamari, Hybrid Position and Force Control for a Spherical Inverted Pendulum Connected to a Quadrotor in a Constrained Motion, Amirkabir J. Mech Eng., 54(10) (2023) 455-458.*

**DOI:** 10.22060/mej.2022.21308.7420

This page intentionally left blank

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۴، شماره ۱۰، سال ۱۴۰۱، صفحات ۲۲۵۵ تا ۲۲۷۶
DOI: 10.22060/mej.2022.21308.7420

# کنترل هیبریدی موقعیت و نیرو برای یک پاندول معکوس کروی متصل به کوادروتور در یک حرکت مقید

علی سلطانی*، محمدحسین کمری

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران.

**خلاصه:** امروزه استفاده از پهپادها برای انجام خودکار فعالیت‌هایی نظیر امور عمرانی، عملیات امداد و نجات و ماموریت‌های نظامی، با هدف افزایش سرعت و دقت، حفظ نیروی انسانی و کاهش هزینه‌ها در حال گسترش است. با توجه به این رویکرد، در این مقاله نیز با هدف استفاده از سیستم کوادروتور – آونگ معکوس کروی برای انجام عملیاتی نظیر رنگ‌آمیزی و نظافت در سقف‌های مرتفع، مساله‌ی کنترل هیبریدی موقعیت و نیرو برای یک پاندول معکوس کروی متصل به کوادروتور که حرکت آن در راستای قائم مقید شده است، مورد مطالعه قرار گرفته است. در این راستا، ابتدا با استفاده از قوانین نیوتن – اویلر، معادلات حرکت حاکم بر سیستم کوادروتور – آونگ معکوس در حالت مقید استخراج و سپس با ارائه‌ی مدلی برای نیروی مقید کننده، یک سیستم کنترلی سلسله مراتبی شامل حلقه‌ی کنترلی موقعیت – نیرو، حلقه‌ی کنترلی جهت‌گیری پاندول معکوس و حلقه‌ی کنترلی جهت‌گیری کوادروتور، ارائه شده‌است. قوانین کنترلی حلقه‌ی کنترلی جهت‌گیری پاندول معکوس و حلقه‌ی کنترلی جهت‌گیری کوادروتور، با استفاده از مفاهیم مطرح در کنترل هندسی طراحی شده‌اند. در نهایت، عملکرد کنترل‌کننده طراحی شده توسط شبیه‌سازی مورد بررسی قرار گرفته است.

**تاریخچه داوری:**
دریافت: ۱۴۰۱/۰۱/۲۹
بازنگری: ۱۴۰۱/۰۶/۲۷
پذیرش: ۱۴۰۱/۰۷/۲۷
ارائه آنلاین: ۱۴۰۱/۰۸/۱۱

**کلمات کلیدی:**
کنترل هیبریدی
کوادروتور
پاندول معکوس کروی
کنترل سلسله مراتبی
کنترل هندسی

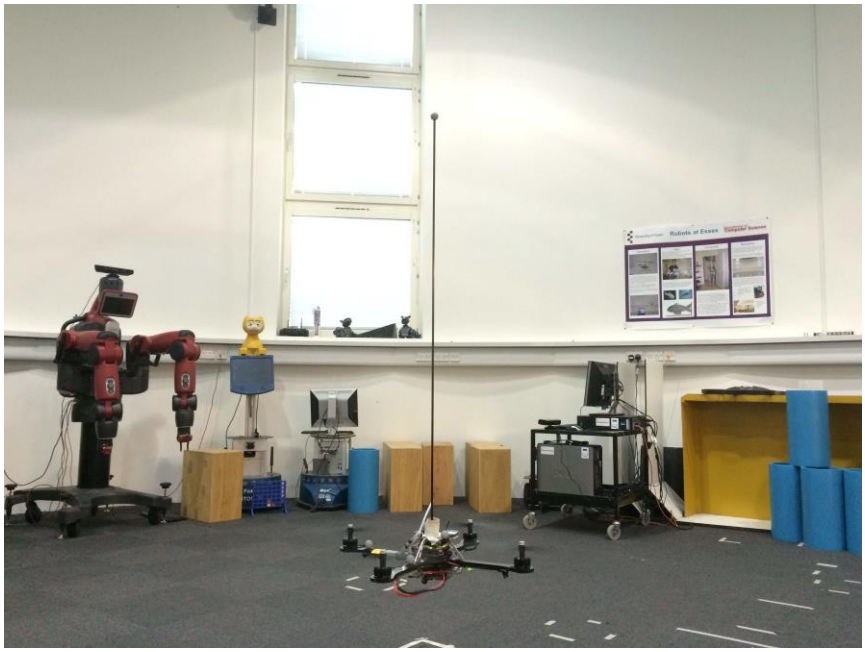
## ۱- مقدمه

در سال‌های اخیر هواپیماهای بدون سرنشین توجه دانشمندان را به خصوص در زمینه انجام خودکار امور توسط آن‌ها، به خود جلب کرده‌اند. در بین پهپادهای مختلف، پرنده کوادروتور به دلیل قابلیت بلند شدن و فرود عمودی، معلق ماندن در هوا، سرعت رضایت بخش و چابکی بالا از محبوبیت خاصی برخوردار است. این ویژگی‌ها باعث می‌شود، بتوان کوادروتورها را برای انجام مأموریت‌هایی نظیر بررسی محیط زمین[۱]، بازرسی منظم سازه‌هایی مانند پل‌ها یا سدها [۲]، جستجو و نجات [۳] ، نظارت بر محصولات کشاورزی [۴] و دستکاری محیط‌های پیچیده به کار برد[۵] این مأموریت‌ها ممکن است شامل تصویربرداری از محیط، برداشتن بار، حمل بار آویزان توسط کوادروتور یا مجموعه‌ای از آن‌ها [۶] ، پاشیدن آب و یا سم [۷]، باز و بست پیچ [۸]، سوراخکاری [۹]، جوشکاری [۱۰] و غیره باشد. از جمله این مأموریت‌ها، نظافت یا رنگ‌آمیزی سقف‌های بلند است که انجام آن توسط کوادروتور باعث کاهش هزینه‌ها و عدم نیاز برای به کارگیری نیروی انسانی، می‌شود. برای انجام برخی عملیات مانند جوشکاری، استفاده از عملگرهایی غیر از عملگرهای کوادروتور اجتناب ناپذیر است. از طرفی، افزوده شدن یک سیستم دینامیکی دارای عملگر نظیر بازوی مکانیکی به سیستم کوادروتور اگر چه باعث افزایش تعداد درجات آزادی می‌شود، از طرفی نیز باعث پیچیده‌تر شدن دینامیک کلی سیستم می‌شود. هم چنین، بدیهی است افزودن عملگر ، موجب افزایش هزینه‌های ساخت و نگهداری نیز می‌شود. به این منظور در این مطالعه، امکان انجام عملیات رنگ‌آمیزی و نظافت سقف‌های بلند توسط کوادروتور بدون افزودن عملگر جدید و با استفاده از یک پاندول کروی معکوس متصل به کوادروتور، مورد مطالعه قرار گرفته‌است. با توجه به نوع عملیات ذکر شده، بایستی مسیر انتهای پاندول معکوس کروی که در حقیقت محل قرارگیری ابزار رنگ‌آمیزی یا نظافت است و نیروی اعمالی از آن به سقف کنترل شود. در شکل ۱ تصویر نمونه‌ای از یک سیستم کوادروتور و آونگ نشان داده شده‌است.

در ادامه به اختصار به مطالعاتی که در زمینه آونگ معکوس متصل به پرنده کوادروتور انجام شده‌است، پرداخته شده‌است. هن و دی‌آندریا [۱۲]،

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: asoltani@sut.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode دیدن فرمائید.



**شکل ۱. تصویر نمونه‌ای از یک سیستم کوادروتور – آونگ [۱۱]**

**Fig. 1. quadrotor-pendulum system [11]**

مسئله کنترل کلاسیک آونگ معکوس را با قرار دادن آن در بالای یک وسیله نقلیه هوایی بررسی کرده‌اند. بدین صورت که، ابتدا حالت‌های اسمی سیستم را در حالت سکون و در مسیرهای دایره‌ای به دست آورده‌اند و با استفاده از قاب بدنه مجازی، توصیفی مستقل از انحراف مرکز جرم برای دینامیک کوادروتور معرفی کرده‌اند. سپس، قوانین کنترلی که شامل کنترل‌کننده خطی‌ساز پسخوراند است، حول این مسیرهای اسمی طراحی نموده‌اند. آن‌ها عملکرد موفقیت آمیز کنترل‌کننده خود را با آزمایش‌های عملی نشان داده‌اند. رایم‌آندز و همکاران [۱۳] به بررسی ادغام بین دو مدل دینامیکی یک پهپاد کوادروتور و یک آونگ کروی معکوس، که یک سیستم پیچیده‌تر را تشکیل می‌دهد، پرداختند. سیستم مورد بررسی آنها شامل یک آونگ کروی است که به صورت عمودی با استفاده از پهپاد کوادروتور تثبیت می‌شود. آن‌ها برای طراحی کنترل‌کننده، دینامیک آونگ معکوس را در مقایسه با دینامیک کوادرروتور به اندازه کافی کند فرض نمودند. کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی آنها که با استفاده از روش لاگرانژین کنترل‌شده [۱۴]، طراحی شده بود، قادر به تثبیت آونگ معکوس کروی بود. ایشان همچنین برای مقابله با خطاهای مدل‌سازی از یک روش تطبیقی تقویت شده بهره گرفتند و در نهایت، با ارائه نتایج شبیه‌سازی عددی اثر بخشی روش کنترلی خود را نشان دادند. تامبا و همکاران [۱۵] رویکردی را برای تنظیم پایداری یک آونگ معکوس در بالای یک پهپاد کوادروتور متحرک، پیشنهاد دادند. رویکرد آنها مبتنی بر طرح کنترل مدل پیش‌بین است که هدف آن تثبیت آونگ در یک موقعیت عمودی است، در حالی که پهپاد کوادروتور از موقعیت‌های اولیه از پیش تعیین‌شده به حالت نهایی در حال حرکت است. به طور خاص، این رویکرد یک بهینه‌سازی درجه دوم پارامتری از تثبیت همزمان آونگ معکوس و پهپاد کوادروتور را بیان می‌کند. آن‌ها با ارائه نتایج شبیه‌سازی عددی، عملکرد موفقیت‌آمیز رویکرد کنترلی پیشنهادی خود را نشان دادند. ایبوکی و همکاران [۱۶] در ابتدا مدل ریاضی سه بعدی سیستم کوادروتور – آونگ را بر اساس معادله اویلر–لاگرانژ استخراج کردند و سپس، با استفاده مؤثر از ورودی عمودی، یک مدل تقریبی با استفاده از بسط تیلور مرتبه دوم ساختند و در ادامه پژوهش خود یک قانون کنترل بهینه معکوس را برای سیستم کوادروتور – آونگ بر اساس مطالعه [۱۷] پیشنهاد کردند. آن‌ها در نهایت، اعتبار قانون کنترلی خود را از طریق شبیه‌سازی‌های عددی نشان دادند. مانور چرخش به بالا یک مانور چالش برانگیز است زیرا آونگ باید از نقطه تعادل

پایدار خود در موقعیت عمودی رو به پایین خارج شود. آونگ باید به گونه‌ای به سمت بالا چرخانده شود که وقتی در موقعیت عمودی رو به بالا قرار دارد سرعتی تا حد امکان نزدیک به صفر داشته باشد. یک روش پرکاربرد برای دستیابی به این هدف، استفاده از کنترل انرژی است. هینتز و همکاران [۱۸] مسئله پایداری و کنترل سیستم کوادروتور – آونگ را با استفاده از این روش بررسی کردند. آن‌ها الگوریتم‌های کنترلی مناسبی را برای حل مسئله‌ی چرخش به بالا و رسیدن به تعادل برای آونگ بالای یک کوادروتور به دو صورت خطی و چرخشی طراحی کردند. سیستم ترکیبی آن‌ها متشکل از یک کنترل انرژی برای چرخاندن آونگ به سمت بالا و یک کنترل کننده رگولاتور خطی درجه دو[1] برای متعادل کردن آن است. همچنین یک منطق سوئیچینگ تصمیم گیرنده‌ی این مسئله بود که آونگ به صورت خطی یا چرخشی به سمت بالا حرکت کند و متعادل شود و وقتی به موقعیت عمودی رو به بالا می‌رسد سرعتی نزدیک به صفر داشته باشد. این امر تضمین‌کننده این بود که کنترل‌کننده رگولاتور خطی درجه دو می‌تواند آونگ را در نقطه تعادل آن کنترل کرده و متعادل کند. آن‌ها با ارائه نتایج آزمایشگاهی اثر بخشی کنترل‌کننده خود را به نمایش گذاشتند. کای و همکاران [۱۹] ابتدا مدل دینامیکی کوادروتور – آونگ را معرفی کردند. آن‌ها یک کنترل‌کننده بازگشت به عقب برای تحقق بخشیدن به کنترل مسیر کوادروتور – آونگ را پیشنهاد دادند و با ارائه شبیه سازی‌های عددی نشان دادند که روش کنترلی پیشنهادی می‌تواند سیستم آونگ–کوادروتور را به خوبی تثبیت کند و آن را به هر موقعیت دلخواهی هدایت کند. گوناوان و همکاران [۲۰] سیستم پرنده هاوربرد را به عنوان یک کوادروتور و سوار به عنوان یک آونگ معکوس در نظر گرفتند. مشکل اصلی آنها این بود که چگونه می‌توان آونگ معکوس را در موقعیت عمودی با حرکت کوادروتور تثبیت کرد. آن‌ها در پروژه خود کنترل‌کننده‌های سوئیچ کننده بین نوع تناسبی–انتگرال–مشتق[2] و نوع تناسبی را به منظور تثبیت آونگ معکوس و پرنده کوادروتور به کار بردند و در نهایت با تست‌های آزمایشگاهی کارایی سیستم خود را به نمایش گذاشتند. کرافس و همکاران [۲۱] سیستم کوادروتور–آونگ را با استفاده از فرمول بندی اویلر لاگرانژ و با در نظر گرفتن هر دو دینامیک آونگ و کوادروتور مدل‌سازی کردند و به دلیل عدم وجود حسگرهایی که قابلیت اندازه گیری حالات را در مفاصل آونگ داشته باشد، استفاده از یک سیستم بصری بر روی کوادروتور را برای تعیین موقعیت آونگ پیشنهاد دادند. همچنین برای طراحی کنترل‌کننده غیرخطی، از یک استراتژی آبشاری سه سطحی استفاده کردند که هر سطح از سیستم کنترلی آبشاری، اجرا کننده یک قانون کنترلی است که با روش بازگشت به عقب طراحی شده‌است. آن‌ها برای صحه سنجی نتایج شبیه‌سازی و تأیید استراتژی کنترلی خود از نرم افزار متلب و محیط واقعیت مجازی استفاده کردند و اثر بخشی کنترل کننده خود را نشان دادند. متعادل‌سازی آونگ به همراه تعقیب مسیر مطلوب توسط کوادروتور نیز با استفاده از یک کنترل‌کننده‌ی آبشاری بر اساس دفع فعال اغتشاشات نیز در مقاله‌ی [۱۱] انجام شده‌است. کارایی و مقاوم بودن کنترل‌کننده ارائه شده در قیاس با کنترل‌کننده رگولاتور خطی درجه دو در محیط یک شبیه‌ساز مورد مقایسه قرار گرفته است و برتری کنترل‌کننده طراحی شده نشان داده شده‌است. هم چنین، روش کنترلی ارائه شده بر روی یک کوادروتور به صورت عملی به کار برده شده و توانایی کنترل‌کننده در حفظ پایداری و مقاوم بودن آن در مقابل اغتشاشات مورد آزمایش و تأیید قرار گرفته است. در مقاله [۲۲] با استفاده از یک کنترل‌کننده رگولاتور خطی درجه دو که توسط روش توده ذرات بهبود یافته طراحی شده‌است،کنترل مسیر کوادروتور به همراه پایدارسازی زاویه آونگ صورت پذیرفته است که کارایی کنترل‌کننده ارائه شده با انجام شبیه‌سازی‌های مختلف مورد تأیید و بررسی قرار گرفته‌است. پایدارسازی آونگ معکوس متصل به کوادروتور با سرووی بصری به روش گام به عقب نیز در مقاله‌ی [۲۳] مورد مطالعه قرار گرفته‌است و کارایی روش ارائه شده با شبیه‌سازی و استفاده از محیط واقعیت مجازی سیمولینک ارزیابی شده‌است.

در مقاله‌ی حاضر، همان طور که پیش‌تر ذکر شد، کنترل یک پاندول معکوس کروی متصل به کوادروتور برای انجام عملیات رنگ‌آمیزی و یا نظافت بر روی سقف‌های افقی بلند مورد مطالعه قرار گرفته است. بر خلاف مطالعات پیشین، در این مطالعه آونگ در تماس با یک سطح افقی صلب است و با توجه به مأموریت در نظر گرفته‌شده، مساله کنترل هیبریدی مسیر افقی انتهای آونگ و نیروی وارد از آن به سطح مورد مطالعه قرار گرفته است. به عبارت دیگر، نوآوری اصلی این مطالعه، مدل‌سازی سیستم کوادروتور و آونگ در تماس با یک سطح افقی صلب و همچنین طراحی کنترل‌کننده‌ی هیبریدی نیرو و موقعیت برای انتهای آونگ است. بدین منظور، ابتدا مدل دینامیکی سیستم کوادروتور و آونگ معکوس که در تماس با یک سطح افقی است ارائه شده است و سپس با مدل‌سازی تعامل آونگ و سطح به صورت یک سیستم جرم – فنر، قانون کنترلی هندسی سلسله مراتبی مناسبی برای کنترل هیبریدی نیروی وارد از پاندول به سقف و مسیر آن بر روی سطح طراحی شده‌است. پایداری سیستم مداربسته با استفاده از قانون

1 Linear Quadratic Regulator (LQR)
2 Proportional Integral Derivative (PID)

کنترلی ارائه شده، علاوه بر روش‌های تحلیلی مبتنی بر قضایای موجود در ادبیات کنترل هندسی، با استفاده از شبیه‌سازی نیز مورد بررسی قرار گرفته است. درشبیه‌سازی‌ها، مدل نسبتاً کاملی از کوادروتور که شامل دینامیک روتور،گشتاور اینرسی روتور، اثرات ژیروسکوپیک آن و اشباع روتورها است، برای ارزیابی مقاوم بودن کنترل‌کننده در مقابل اثرات آن‌ها، به کار برده شده است. هم‌چنین، برای ارزیابی دقیق‌تر کارایی کنترل‌کننده در شبیه‌سازی‌ها داده‌برداری توسط کنترل‌کننده با نرخ ثابت و منطقی همراه با در نظر داشتن تأخیر زمانی انتقال اطلاعات صورت می‌پذیرد. مقاوم بودن کنترل‌کننده در مقابل اغتشاشات نیز در شبیه‌سازی‌ها ارزیابی شده است. ساختار مقاله‌ی حاضر به این شرح است که در بخش اول مقدمه‌ای در مورد کاربردهای امروزی پرنده کوادروتور، پیشینه پژوهش و اهمیت مطالعه‌ی حاضر ارائه شده است. سپس در بخش دوم پس از تشریح ساختار سیستم کوادروتور – آونگ پیشنهادی، معادلات دینامیکی آن استخراج و در بخش سوم، نحوه‌ی طراحی کنترل‌کننده ارائه شده‌است. در ادامه و در بخش چهارم نتایج شبیه‌سازی عملکرد کنترل‌کننده بر اساس مدل ارائه شده، تحلیل و بررسی شده‌است. در نهایت، در بخش پایانی فعالیت‌های صورت گرفته و نتایج این پژوهش به همراه چشم‌انداز مطالعات آتی به صورت اجمالی شرح داده شده است.

## ۲- مدل‌سازی ریاضی

برای مدل‌سازی ریاضی حرکت سیستم کوادروتور – آونگ، برخی فرضیات صورت گرفته‌است. از جمله این فرضیات این است که با توجه به کاربردی که برای پاندول معکوس در این مطالعه در نظر گرفته شده‌است، می‌توان مجموعه پاندول را به صورت یک جرم متمرکز که در انتهای آن قرار دارد، فرض نمود. زیرا ابزار مخصوص نظافت یا رنگ آمیزی در انتهای پاندول قرار می‌گیرد و جرم آن در مقایسه با میله‌ی آونگ بیش‌تر است. بر اساس این فرض، نیرویی که از کوادروتور به آونگ وارد می‌شود و اندازه‌ی آن با $T$ نمایش داده خواهد شد، در امتداد میله‌ی آونگ خواهد بود. افزون بر این، محل اتصال آونگ به کوادروتور باید اصولاً منطبق بر مرکز جرم کوادروتور باشد تا با توجه به این که این اتصال از نوع اتصال کروی است، تأثیر آونگ بر دینامیک دورانی کوادروتور ناچیز باشد. از طرفی، به دلیل این که آونگ در تماس با سقف است، دو نیروی عمودی عکس العمل سطح و اصطکاک جنبشی از طرف سطح به آن وارد خواهد شد. اگر اندازه نیروی عمودی عکس العمل سطح با $f_N$ نمایش داده شود، بردار نیروی اصطکاک $\boldsymbol{f_k}$ که در خلاف جهت مؤلفه‌ی افقی سرعت انتهای پاندول خواهد بود را می‌توان از رابطه‌ی

$$\boldsymbol{f_k} = -\mu_k f_N \frac{\boldsymbol{e}_3 \times \left(\dot{\boldsymbol{X}}_t \times \boldsymbol{e}_3\right)}{\left\| \boldsymbol{e}_3 \times \left(\dot{\boldsymbol{X}}_t \times \boldsymbol{e}_3\right) \right\|} \qquad (۱)$$

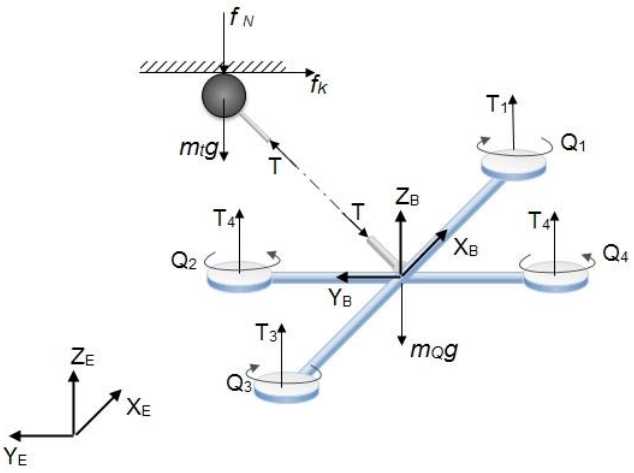
به دست آورد که در آن $\dot{\boldsymbol{X}}_t$ بردار سرعت انتهای پاندول، $\boldsymbol{e}_3 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$ و $\mu_k$ ضریب اصطکاک جنبشی را نشان می‌دهد. از طرفی، اگر فرض شود که سرعت کوادروتور در قیاس با سرعت روتورها و اثرات باد ناچیز است، می‌توان نیروی تراست و گشتاور تولید شده هر روتور را به صورت

$$Q_i = d\,\omega_i^2 \qquad i = 1,2,3,4 \qquad (۲)$$

$$T_i = b\,\omega_i^2 \qquad i = 1,2,3,4 \qquad (۳)$$

مدل‌سازی نمود که $b$ و $d$ مقادیر ثابتی هستند که به آنها به ترتیب ضریب تراست و ضریب گشتاور پسا می‌گویند و $\omega$ سرعت دورانی هر روتور است [۲۴]. هم چنین، در صورتی که اتصال ملخ به شفت روتورها و خود ملخ به قدر کافی صلب باشد، می‌توان نیروی تراست و گشتاور درگ هر ملخ را در راستای شفت روتور آن در نظر گرفت. از آنجایی که جهت دوران روتورهای شماره ۱ و ۳ پادساعتگرد و روتورهای شماره‌ی ۲ و ۴ ساعتگرد در نظر گرفته شده‌است، گشتاور درگ روتورهای شماره ۱ و۳ ساعتگرد و روتورهای شماره‌ی ۲ و ۴ پادساعتگرد خواهد بود. با توجه به فرضیات صورت گرفته دیاگرام آزاد نیروها و گشتاورهای وارد بر آونگ و کوادروتور به صورت شکل ۲ خواهد بود.

در این شکل جرم پاندول و کوادروتور به ترتیب با $m_t$ و $m_Q$ ، اندازه‌ی بردار شتاب گرانش با $g$ نمایش داده شده‌است. هم چنین، دستگاه مختصات $\{B\}$ به مرکز جرم کوادروتور متصل شده‌است که فاصله‌ی مبدأ آن تا محور هر یک از روتورها یکسان است و با $l$ نمایش داده خواهد شد. چهارچوب $\{E\}$ نیز نمایش دهنده‌ی چهارچوب لخت است. حال اگر بردار مکان مرکز جرم آونگ و مرکز جرم کوادروتور به ترتیب با $\boldsymbol{X_t}$ و $\boldsymbol{X_Q}$ نشان داده شود، با استفاده از قوانین نیوتن روابط




**شکل ۲. دیاگرام آزاد نیروها و گشتاورهای وارد بر کوادروتور و پاندول**

**Fig. 2. Free diagram of the forces and torques action on the quadrotor and the pendulum**

$$m_Q \ddot{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{Q}} = fR\boldsymbol{e}_3 - m_Q g\boldsymbol{e}_3 - T\boldsymbol{q} \quad (۴)$$

$$m_t \ddot{\mathbf{X}}_t = T\boldsymbol{q} + \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{k}} - f_N \boldsymbol{e}_3 - m_t g\boldsymbol{e}_3 \quad (۵)$$

به دست می‌آیند که در این روابط $\boldsymbol{q} = \frac{\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{X}_Q}{L}$ بیان‌گر بردار یکه در راستای آونگ، $f$ مجموع نیروهای تراست روتورها یعنی $\sum_{i=1}^{4} T_i$ و ماتریس $R$ ماتریس توصیف جهت‌گیری چهارچوب $\{B\}$ نسبت به چهارچوب لخت $\{E\}$ است. با توجه به ثابت بودن طول میله آونگ، رابطه‌ی

$$\left(\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{X}_Q\right).\left(\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{X}_Q\right) = L^2 \quad (۶)$$

همواره برقرار است که در حقیقت قید حاکم بر حرکت انتقالی کوادروتور و آونگ می‌باشد. با دوبار مشتق گرفتن از این قید، رابطه

$$\left(\ddot{\boldsymbol{X}}_t - \ddot{\boldsymbol{X}}_Q\right).\boldsymbol{q} + L\left(\dot{\boldsymbol{q}}.\dot{\boldsymbol{q}}\right) = 0 \quad (۷)$$

به دست می‌آید که با جایگذاری روابط (۴) و (۵) در رابطه (۷) می‌توان نیروی $T$ را به شکل زیر بدست آورد:

$$T = \frac{\left((-m_Q \boldsymbol{f}_r + m_t fR\boldsymbol{e}_3).\mathbf{q} - m_t m_Q L\left(\dot{\boldsymbol{q}}.\dot{\boldsymbol{q}}\right)\right)}{\left(m_t + m_Q\right)} \quad (۸)$$

در رابطه‌ی اخیر

$$\boldsymbol{f}_r = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{k}} - f_N \boldsymbol{e}_3 \quad (۹)$$

است. بر این اساس و با استفاده از تعریف بردار یکه $\boldsymbol{q}$ و معادلات (۴) و (۵) می‌توان معادلات حرکت انتقالی سیستم را به صورت

$$\begin{aligned} \mathrm{m_t}\left(\mathrm{m_t} + \mathrm{m_Q}\right)\ddot{\boldsymbol{X}}_t = \\ -\left(\mathrm{m_Q}\mathbf{f_r}.\mathbf{q}\right)\mathbf{q} + \left(\mathrm{m_t fRe_3}.\mathbf{q}\right)\mathbf{q} - \\ \mathrm{m_t m_Q L}\left(\dot{\mathbf{q}}.\dot{\mathbf{q}}\right)\mathbf{q} + \left(\mathrm{m_t} + \mathrm{m_Q}\right)\mathbf{f_r} - \\ m_t\left(m_t + m_Q\right)g\boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \quad (۱۰)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{q}} = -\frac{1}{m_t L}\boldsymbol{q}\times\left(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{f}_r\right) + \\ \frac{1}{m_Q L}\boldsymbol{q}\times\left(\boldsymbol{q}\times fR\boldsymbol{e}_3\right) - \left(\dot{\boldsymbol{q}}.\dot{\boldsymbol{q}}\right)\boldsymbol{q} \end{aligned} \quad (۱۱)$$

بازنویسی نمود. از طرفی تکانه زاویه‌ای پرنده در دستگاه مختصات متصل به کوادروتور توسط رابطه‌ی

$$\boldsymbol{H} = J_Q \boldsymbol{\Omega} + J_r \boldsymbol{\Omega}_r \tag{۱۲}$$

قابل بیان است که در آن $J_Q$ ماتریس ممان اینرسی کل مجموعه کوادروتور در دستگاه مختصات متصل به مرکز جرم آن است، $J_r$ ممان اینرسی روتور حول محور شفت آن، $\Omega$ بردار سرعت زاویه‌ای در دستگاه متصل به بدنه و $\Omega_r$ بردار مجموع سرعت زاویه‌ای پره‌های موتورهای کوادروتور است که به صورت

$$\boldsymbol{\Omega}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^{4} (-1)^i \omega_i \end{bmatrix} \tag{۱۳}$$

قابل بیان است. بنابراین، دینامیک حرکت دورانی کوادروتور به شکل زیر به دست می‌آید:

$$J_Q \dot{\boldsymbol{\Omega}} + J_r \dot{\boldsymbol{\Omega}}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \left( J_Q \boldsymbol{\Omega} + J_r \boldsymbol{\Omega}_r \right) = \boldsymbol{M} \tag{۱۴}$$

در این رابطه ترم $M$ مجموع گشتاورهای وارد بر پرنده کوادروتور را نشان می‌دهد که بر اساس شکل ۱ و با توجه به این که میله متصل‌کننده به مرکز جرم کوادروتور متصل است، برابر است با:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} l\left(T_2 - T_4\right) \\ l\left(T_3 - T_1\right) \\ \left(\left(Q_2 + Q_4\right) - \left(Q_1 + Q_3\right)\right) \end{bmatrix} \tag{۱۵}$$

که $l$ طول بازوی پرنده کوادروتور یا به عبارتی فاصله‌ی محور روتورها تا مرکز جرم کوادروتور است. رابطه‌ی (۱۴) در کنار رابطه‌ی سینماتیکی

$$\dot{R} = R\hat{\boldsymbol{\Omega}} \tag{۱۶}$$

معادلات حرکت دورانی کوادروتور را تکمیل می‌نمایند. در این رابطه، $\hat{\Omega}$ ماتریس پادمتقارنی است که به صورت

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \tag{۱۷}$$

تعریف شده‌است. معادلات حرکت به دست آمده برای سیستم کوادروتور – آونگ در حالت غیرمقید یعنی حالتی که پاندول با سطح افقی در تماس نباشد، دقیقاً مطابق معادلات ارائه شده در مرجع [۲۵] است.

دینامیک دورانی روتورهای پرنده کوادروتور نیز به صورت

$$\dot{\omega}_i = -k_{esc}\left(\omega_i - \omega_i^d\right) \qquad i = 1,2,3,4 \tag{۱۸}$$

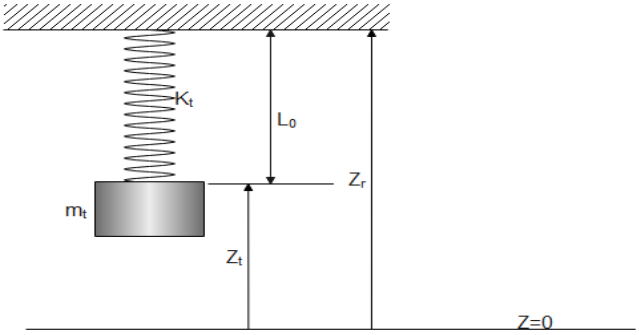
قابل بیان است [۲۶] که $k_{esc}$ ضریب کنترل کننده الکترونیکی سرعت می‌باشد و $\omega_i^d$ دستور سرعت دورانی مطلوب است که از میکروکنترلر به کنترل کننده الکترونیکی سرعت ارسال می‌شود و در حقیقت ورودیهای کنترلی سیستم هستند.

## ۳- طراحی کنترل‌کننده

در این بخش ابتدا مدلی برای نیروی وارد بر پاندول از طرف سطح ارائه و سپس تحلیلی از رفتار غیرخطی سیستم، تأثیر مقدار پارامترهای سیستم بر دینامیک آن و شرایط لازم برای پایداری ارائه شده‌است. در ادامه نیز روند طراحی کنترل‌کننده به صورت مبسوط شرح داده شده‌است.

### ۳- ۱- مدل‌سازی نیروی وارد بر پاندول از طرف سطح

با توجه به این که در این مطالعه یکی از اهداف کنترلی، کنترل نیروی قائم وارد از طرف آونگ به سقف است، لذا باید این نیرو به نحوی مدل‌سازی شود. بدین منظور همانند آنچه در مدل سازی تایر در سیستم تعلیق انجام




**شکل ۳. شماتیک مدل جرم و فنر کششی برای دینامیک قائم آونگ**

**Fig. 3. Schematic of spring-mass model for vertical dynamics of the pendulum**

می‌شود [۲۷]، می‌توان آونگ را به صورت یک سیستم جرم و فنر مطابق شکل ۳ فرض کرد:

در این شکل $z_r$ ارتفاع سقف، $z_t$ ارتفاع آونگ، و $L_0$ و $k_t$ به ترتیب طول آزاد و ثابت فنری است که نیروی وارده از طرف آن به جسم معادل نیروی عمودی است که از طرف سطح سقف به آونگ وارد می‌شود. البته بایستی توجه نمود که این مدل تنها در صورتی که آونگ با سقف در تماس است، کارایی دارد. به عبارت دیگر، مقدار نیروی عمودی وارد از طرف سطح سقف به آونگ $f_N$ به صورت

$$f_N = \begin{cases} 0 & z_r - z_t \geq L_0 \\ -k_t\left(z_r - z_t - L_0\right) & z_r - z_t < L_0 \end{cases} \quad (۱۹)$$

حال، اگر بردار $\zeta$ به صورت زیر تعریف شود:

$$\zeta = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ f_N \end{bmatrix} \quad (۲۰)$$

با استفاده از معادله‌ی (۱۰) و مدل در نظر گرفته شده برای $f_N$ در رابطه‌ی (۱۹)، می‌توان دینامیک حرکت و دینامیک نیروی عمودی وارده از آونگ به سقف را با معادله‌ی

$$\ddot{\zeta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k_t \end{bmatrix} \times \left(\frac{-\left(m_Q \mathbf{f_r}.\mathbf{q}\right)\mathbf{q} + \left(m_t f \mathbf{R} \mathbf{e}_3.\mathbf{q}\right)\mathbf{q}}{m_t\left(m_t + m_Q\right)} + \frac{-m_t m_Q L\left(\dot{\mathbf{q}}.\dot{\mathbf{q}}\right)\mathbf{q}}{m_t\left(m_t + m_Q\right)} \frac{\mathbf{f_r}}{m_t} - g\boldsymbol{e}_3\right) \quad (۲۱)$$

بیان نمود.

## ۳- ۲- تحلیل دینامیک سیستم

سیستم مورد نظر یک سیستم ۸ درجه آزادی است که تنها ۴ ورودی کنترلی دارد. این به معنی است که سیستم مورد مطالعه یک سیستم تحریک ناقص است. با این وجود می‌توان نشان داد که می‌توان توسط این ورودی‌های کنترلی، موقعیت آونگ و نیروی اعمالی از آن به سطح و زاویه یاو کوادروتور را از طریق تغییر جهت‌گیری کوادروتور و حرکت آن که خود باعث حرکت میله می‌شود، بر روی یک ترجکتوری مطلوب هدایت نمود. به عبارت دیگر، بدین وسیله می‌توان کنترل‌پذیری سیستم را به اثبات رساند. برای نشان دادن این واقعیت کافی است فرض شود مسیر و نیروی آونگ بر روی ترجکتوری مطلوب قرار داشته باشد. در این صورت با استفاده از معادله‌ی (۵) می‌توان ترجکتوری نیروی میله و راستای آن را به دست آورد. به عبارتی می‌توان نتیجه گرفت برای طی یک مسیر توسط آونگ و اعمال نیروی مورد نظر راستای میله و نیروی آن یک ترجکتوری مشخصی را

طی خواهند نمود. سپس با استفاده از رابطه‌ی $\boldsymbol{q}=\frac{\boldsymbol{X}_t-\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{Q}}}{L}$ ترجکتوری کوادروتور نیز به دست می‌آید. این به معنی است که کوادروتور نیز بر روی یک مسیر مشخص حرکت خواهد نمود. در ادامه، با استفاده از معادله‌ی (۴) و مشتق‌گیری از ترجکتوری مسیر کوادروتور، ترجکتوری جهت نیروی تراست کوادروتور و مقدار آن هنگام حرکت پاندول روی مسیر مورد نظر و اعمال نیروی مطلوب قابل محاسبه است. ترجکتوری جهت نیروی تراست همراه با ترجکتوری زاویه یاو ترجکتوری ماتریس جهت‌گیری کوادروتور را مشخص می‌نمایند. با استفاده از معادله (۱۶) ترجکتوری سرعت زاویه‌ای کوادروتور قابل محاسبه است و با مشتق‌گیری از آن و فرض ناچیز بودن ممان اینرسی روتور و معادله‌ی (۱۴) ترجکتوری گشتاور وارد بر کوادروتور به دست می‌آید. حال با فرض سریع بودن دینامیک روتورها می‌توان ترجکتوری سرعت زاویه‌ای روتورها که ورودی‌های کنترلی سیستم هستند را به دست آورد. بحث انجام شده در حقیقت مسطح بودن دیفرانسیلی معادلات حرکت سیستم را با فرض موقعیت افقی آونگ، نیروی آن و زاویه‌ی یاو به عنوان خروجی‌های مسطح نشان می‌دهد. در ادامه بحث بیشتری در مورد شرایط پایداری و اثرات مقادیر پارامترهای سیستم انجام شده‌است.

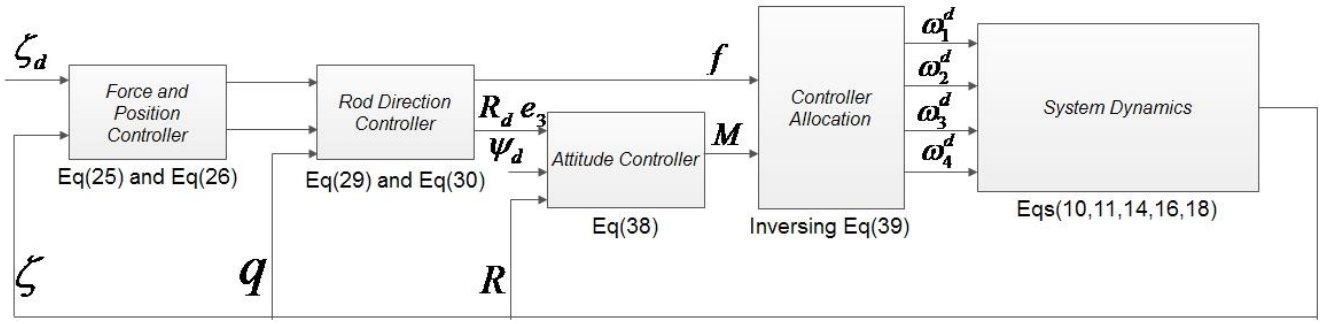
با توجه به معادله (۲۱) معادلات حرکت انتقالی پاندول در راستای $X$ و $Y$ با همدیگر و با دینامیک نیروی وارد بر آن به دلیل نیروی اصطکاک که مقدار آن به مقدار نیرو و جهت آن در خلاف جهت سرعت افقی پاندول بر روی سطح است، کوپل هستند و هر چه ضریب اصطکاک جنبشی بیشتر باشد، کوپلینگ معادلات نیز بیش‌تر خواهد بود. بر اساس معادله‌ی مذکور، برای این که دینامیک حرکت افقی پاندول و دینامیک نیروی آن بر روی ترجکتوری مطلوب پایدار باشد، کافی است راستای میله و مؤلفه‌ی نیروی تراست در راستای آن طوری باشند که اثر ترم‌های اصطکاک و نیروی قائم، شتاب گرانش و مرکزگرا خنثی شود و دینامیک خطای ردیابی مسیر و نیروی پاندول که بدین ترتیب خطی شده‌است، پایدار شود. از طرفی، هر چه مقدار $k_t$ بیشتر باشد، اثر خطای جهت‌گیری راستای میله و خطای مؤلفه‌ی نیروی تراست در راستای میله بر دینامیک خطای ردیابی نیروی مطلوب بیشتر خواهد بود. به عبارت دیگر، برای حفظ پایداری دینامیک خطای ردیابی نیروی مطلوب پاندول، لازم است سرعت همگرایی به نقطه تعادل برای دینامیک خطای راستای میله و خطای جهت‌گیری کوادروتور بیشتر باشد تا دینامیک خطای ردیابی به حالت خطی پایدار مورد نظر نزدیک باقی بماند.

از طرفی، معادله‌ی (۱۱) نشان می‌دهد که دینامیک راستای میله نیز با دینامیک حرکت انتقالی و نیروی پاندول کوپل شده است و هر چه حاصل ضرب طول میله در جرم پاندول کم‌تر باشد، میزان تأثیر نیروی قائم وارد بر پاندول و نیروی اصطکاک بر دینامیک جهت‌گیری میله بیشتر خواهد بود. برای حفظ پایداری راستای میله در امتداد مطلوب کافی است مؤلفه عمود بر میله‌ی نیروی تراست طوری باشد که اثر نیروی اصطکاک را بر دینامیک راستای میله حذف و دینامیک خطای جهت‌گیری میله را پایدار نماید. نکته مهم این است که با داشتن مؤلفه‌ی مماس بر میله و قائم بر میله‌ی نیروی تراست و هم چنین زاویه‌ی یاو مطلوب کوادروتور، جهت‌گیری مطلوب کوادروتور برای پایدارسازی دینامیک خطای پاندول و دینامیک خطای میله قابل تعیین خواهد بود. از معادله‌ی (۱۱) می‌توان نتیجه گرفت که هر چه حاصل ضرب جرم پاندول در طول میله متصل کننده بیشتر باشد اثر خطای جهت‌گیری کوادروتور بر دینامیک خطای جهت‌گیری میله کم‌تر خواهد بود. به عبارت دیگر، هر چه این حاصل ضرب کم‌تر باشد، بایستی خطای جهت‌گیری سریع‌تر به صفر میل نماید، تا پایداری سیستم حفظ شود.

معادلات دینامیک دورانی کوادروتور یعنی معادلات (۱۶) و (۱۸) نشان می‌دهد که برای کنترل جهت‌گیری کوادورتور، بایستی گشتاور ژیروسکوپیک بدنه، گشتاور اینرسی روتورها و گشتاور ژیروسکوپیک حاصل از آنها باید توسط گشتاور حاصل از روتورها جبران و دینامیک جهت‌گیری کوادروتور پایدار شود. هرچه نسبت ممان اینرسی روتورها به ممان اینرسی بدنه بیشتر باشد، اثر گشتاور اینرسی و ژیروسکوپیک آن‌ها بر دینامیک دورانی کوادروتور بیش‌تر خواهد بود. از آن جایی که دینامیک پاندول و میله بر دینامیک دورانی کوادروتور تاثیری ندارند (معادلات (۱۴)و (۱۶)) برای پایدارسازی دینامیک دورانی کوادروتور می‌توان از کنترل‌کننده‌های وضعیت طراحی شده برای کوادروتور در ادبیات بهره جست.

### ۳- ۳- ساختار کنترل‌کننده و قوانین کنترلی

بر اساس تحلیل ارائه شده برای دینامیک سیستم مورد مطالعه، کنترل کننده‌ی طراحی شده، دارای سه حلقه‌ی کنترلی تو در تو است. خارجی‌ترین حلقه‌ی کنترلی، با استفاده از خطای ردیابی مسیر و نیروی مطلوب آونگ، جهت‌گیری مطلوب میله‌ی متصل کننده و مؤلفه‌ی مطلوب بردار نیروی تراست روتورها در راستای میله را محاسبه می‌کند. مقادیر محاسبه شده به حلقه‌ی کنترلی میانی که برای کنترل جهت گیری میله است داده می‌شود. در این حلقه‌ی کنترلی بر اساس خطای جهت گیری میله، مقدار مناسب نیروی تراست و جهت‌گیری مطلوب محور $Z$ دستگاه مختصات متصل به کوادروتور تعیین می‌شود. سپس داخلی‌ترین حلقه‌ی کنترلی که




**شکل ۴. شماتیک ساختار کنترل کننده**

**Fig. 4. Schematic of the controller structure**

کنترل‌کننده‌ی وضعیت کوادروتور است، بر اساس جهت گیری مناسب تعیین شده برای محور $Z$ دستگاه مختصات متصل به کوادروتور و زاویه‌ی یاو مطلوب، جهت گیری مطلوب کوادروتور را محاسبه و بر اساس خطای جهت‌گیری، گشتاورهایی که باید برای کاهش این خطا به کوادروتور اعمال شود محاسبه می‌کند. در نهایت نیز با استفاده از نیروی تراست و گشتاورهای مطلوب محاسبه شده، سرعت‌های زاویه‌ای مطلوب روتورها تعیین می‌شود. در شکل ۴ ساختار کنترل کننده به صورت شماتیک نشان داده شده‌است.

### ۳- ۳- ۱- طراحی حلقه‌ی کنترلی موقعیت ونیروی آونگ

اگر خطای $\zeta$ و مقدار مطلوب آن یعنی $\zeta_d$ به صورت

$$e_\zeta = \zeta - \zeta_d \tag{۲۲}$$

تعریف شود و معادله‌ی دینامیک خطای $e_\zeta$ به صورت

$$\ddot{e}_\zeta = -k_d \dot{e}_\zeta - k_p e_\zeta - k_i \int e_\zeta dt \tag{۲۳}$$

باشد که در آن $k_d$ ، $k_p$ و $k_i$ ماتریس‌های بهره‌ی قطری با درایه‌های ثابت و مثبت می‌باشند، بدیهی است دینامیک خطای $e_\zeta$ به صورت نمایی پایدار خواهد بود و به صفر میل خواهد کرد. با استفاده از روابط (۲۱) و (۲۳) و تعریف $A$ به صورت

$$\begin{aligned} A = m_t\left(m_t + m_Q\right)\Bigg(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k_t \end{bmatrix} \times \\ \left(-k_d \dot{e}_\zeta - k_p e_\zeta - k_i \int e_\zeta dt + \ddot{\zeta}^d\right) + g e_3\Bigg) + \\ \left(m_t + m_Q\right) f_r + m_t m_Q L\left(\dot{q}.\dot{q}\right) q - \left(m_Q f_r . q\right) q \end{aligned} \tag{۲۴}$$

مقدار مطلوب جهت‌گیری پاندول یعنی $q_d$ و همچنین مقدار تصویر نیروی تراست مطلوب $\left(fRe_3\right)^d$ در امتداد میله به شکل زیر قابل محاسبه است:

$$\left(fRe_3\right)^d . q = A.q \,/\, m_t \tag{۲۵}$$

$$q_d = \frac{A}{\|A\|} \tag{۲۶}$$

### ۳- ۳- ۲- طراحی حلقه کنترلی جهت گیری میله متصل کننده

**قضیه ۱:** اگر

$$\dot{e}_{\dot{q}} = -k_q e_q - k_\omega e_{\dot{q}} \tag{۲۷}$$

باشد که در آن $e_q = \hat{q}^2 q_d$ و $e_{\dot{q}} = \dot{q} - \left(q_d \times \dot{q}_d\right) \times q$ است و $k_q, k_\omega > 0$ و دارای مقادیر ثابتی هستند و در صورتی که شرط اولیه‌ی

$$k_q \Psi_q(0) + \frac{1}{2}\boldsymbol{e_{\dot{q}}}(0)^2 < 2k_q \quad (۲۸)$$

برقرار باشد که در آن $\Ø_q = ۱ - \boldsymbol{q}_d^T \boldsymbol{q}$ است و بیان‌گر خطای جهت‌گیری میله است، آن گاه می‌توان نشان داد که $\Ø_q$ بصورت نمایی به سمت صفر میل خواهد کرد که به معنی این است که $\boldsymbol{q} \to \boldsymbol{q}_d$ میل خواهد نمود.

اثبات: مرجع [۲۸].

حال با استفاده از این قضیه و روابط (۱۱) و (۲۵)و (۲۷) می‌توان مقدار و جهت گیری مطلوب نیروی تراست را به صورت

$$f = \boldsymbol{F}.R\boldsymbol{e}_3 \quad (۲۹)$$

$$R_d \boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{F}}{\|\boldsymbol{F}\|} \quad (۳۰)$$

به دست آورد که در آن

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} = &(\boldsymbol{A}.\boldsymbol{q})\boldsymbol{q} / m_t - \frac{m_Q}{m_t}\boldsymbol{q}\times(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{f}_r) + \\ &m_Q L[-(\boldsymbol{q}_d \times \ddot{\boldsymbol{q}}_d)\times\boldsymbol{q} - \\ &(\boldsymbol{q}_d \times \dot{\boldsymbol{q}}_d)\times\dot{\boldsymbol{q}} + k_q \boldsymbol{e}_q + k_\omega \boldsymbol{e}_{\dot{q}}] \end{aligned} \quad (۳۱)$$

در صورتی که ماتریس دوران $R$ با زوایای اویلر رول، پیچ و یاو بیان شود، می‌توان زاویه‌ی رول مطلوب $\phi_d$ و زاویه‌ی پیچ مطلوب $\theta_d$ را از روابط

$$\theta_d = \sin^{-1}\left(\frac{F_x}{\|\boldsymbol{F}\|}\right) \quad (۳۲)$$

$$\phi_d = atan2\left(-\frac{F_y}{\|\boldsymbol{F}\|}, \frac{F_z}{\|\boldsymbol{F}\|}\right) \quad (۳۳)$$

به دست آورد. زاویه‌ی یاو مطلوب نیز همان طور که پیشتر اشاره شد، به صورت دلخواه قابل تعیین است.

### ۳- ۳- ۳- طراحی حلقه کنترلی جهت گیری کوادروتور

**قضیه ۲:** اگر

$$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\Omega}} = -k_R \boldsymbol{e}_R - k_\Omega \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\Omega}} \quad (۳۴)$$

باشد که در آن $k_R$ و $k_\Omega$ مقادیر ثابت و مثبتی هستند و $\mathbf{e_R}$ و $\boldsymbol{e}_\Omega$ از روابط

$$\mathbf{e_R} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{R_d^T R - R^T R_d}\right)^{\mathrm{V}} \quad (۳۵)$$

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\Omega} - R^T R_d \boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{d}} \quad (۳۶)$$

به دست می‌آیند و همچنین شرط اولیه‌ی

$$k_R \Psi_R(0) + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_{\dot{\Omega}}(0)^2 < 2k_R \quad (۳۷)$$

که در آن $\Ø_R = \frac{۱}{۲} trace\left(I - R_d^T R\right)$ است و بیان‌گر خطای جهت‌گیری کوادروتور است، برقرار باشد، آن گاه $\Ø_R$ به صورت نمایی به صفر میل می‌کند که به معنی این است که ماتریس دوران $R$ به سمت ماتریس $R_d$ میل خواهد نمود.

اثبات: مرجع[۲۸].

حال با استفاده از قضیه‌ی اخیر و با فرض ناچیز بودن ممان اینرسی روتورها و در نتیجه ناچیز بودن اثرات گشتاور اینرسی روتورها و اثرات ژیروسکوپیک دوران روتورها، طبق رابطه (۱۴) باید

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = &\boldsymbol{\Omega}\times \mathrm{J_Q}\boldsymbol{\Omega} + \\ &\mathrm{J_Q}\left(-\hat{\Omega}\mathrm{R^T R_d}\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{d}} + \mathrm{R^T R_d}\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathbf{d}} - \mathrm{k_R}\mathbf{e_R} - \mathrm{k_\Omega}\mathbf{e}_{\boldsymbol{\Omega}}\right) \end{aligned} \quad (۳۸)$$

باشد. پس از تعیین نیروی تراست و گشتاورهایی که برای کنترل سیستم باید به آن وارد شود، لازم است ورودی‌های کنترلی لازم برای تأمین این نیرو و گشتاور محاسبه شود. بدین منظور فرض می‌شود دینامیک سرعت زاویه‌ای روتورها به مقدار کافی سریع است. البته این فرض دور از واقعیتی نیست و

پاسخ موتورهای براشلس با استفاده از کنترل کننده‌های الکترونیکی سرعت آنها، معمولاً به میزان کافی سریع می‌باشد. به عبارت دیگربرای هریک از روتورها می‌توان فرض کرد که $\omega_i = \omega_i^d$ می‌باشد. با فرض مذکور و با استفاده از روابط (۲) و (۳) و تعریف $f$ و رابطه‌ی (۱۵) می‌توان رابطه‌ی

$$\begin{bmatrix} f \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & b & b & b \\ 0 & bl & 0 & -bl \\ -bl & 0 & bl & 0 \\ -d & d & -d & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^{d^2} \\ \omega_2^{d^2} \\ \omega_3^{d^2} \\ \omega_4^{d^2} \end{bmatrix} \quad (۳۹)$$

را به دست آورد. حال با معکوس سازی این رابطه و استفاده از روابط (۲۹) و (۳۸) می‌توان سرعت‌های زاویه‌ای مطلوب روتورها برای انجام عمل کنترل، تعیین کرد.

## ۴- نتایج شبیه سازی

در این قسمت، کارایی کنترل کننده‌ی طراحی شده با انجام شبیه‌سازی‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. برای بررسی صحیح عملکرد کنترل‌کننده، در تمام شبیه‌سازی‌ها مدل کامل کوادروتور که شامل دینامیک روتور،گشتاور اینرسی روتور، اثرات ژیروسکوپیک آن و اشباع روتورها است، به کار برده شده‌است. افزون بر این، برای مشابه‌تر بودن شرایط شبیه‌سازی به شرایط عملی، در شبیه‌سازی‌ها داده‌برداری توسط کنترل‌کننده با نرخ ثابت و با در نظر گرفتن تأخیر زمانی انتقال اطلاعات صورت پذیرفته‌است. در شبیه‌سازی اول، عملکرد کنترل‌کننده در کنترل نیروی وارد بر سقف از طرف آونگ در یک مقدار ثابت و ردیابی مسیر مطلوب بررسی و مقاوم بودن کنترل‌کننده در مقابل داده برداری گسسته توسط آن، تأخیر زمانی انتقال اطلاعات و دینامیک مدل نشده روتورها و اثرات آن بر دینامیک دورانی کوادروتور که هنگام طراحی کنترل‌کننده از آن صرف نظر شده‌است، ارزیابی شده‌است. هم‌چنین، اثر افزایش سرعت مسیر مطلوب بر عملکرد قانون کنترلی ارائه شده نیز نشان داده شده‌است. نهایتاً در شبیه‌سازی دوم، مقاوم بودن روش کنترلی ارائه شده در مقابل اغتشاشات وارد بر کوادروتور بررسی شده‌است.

### ۴- ۱- پارامترهای شبیه سازی

در شبیه سازی‌هایی که در این بخش انجام شده‌است، پارامترهای سیستم کوادروتور – آونگ طبق مقادیر مندرج در جدول ۱ انتخاب شده‌است. مشخصات کوادروتور مطابق با کوادروتور مرجع [۲۹] است.

با توجه به این که توانایی حمل بار اضافی توسط کوادروتورها معمولاً حداکثر نصف جرم کل است، جرم آونگ یک سوم جرم کوادروتور انتخاب شده‌است. طول میله متصل کننده نیز ۳۰ سانتی‌متر بیش‌تر از طول بازوی کوادروتور در نظر گرفته شده‌است تا هنگام انجام عملیات کوادروتور با سقف برخوردی نداشته باشد. مقدار ضریب سختی فنر معادل نیز بر اساس کاربرد در نظر گرفته شده و نرم بودن اسفنج نظافت انتخاب شده‌است. مقدار ضریب اصطکاک جنبشی نیز به دلخواه انتخاب شده‌است که البته اثر تغییرات آن در تحلیل دینامیکی سیستم توضیح داده شده‌است.

معادله‌ی مسیر مطلوب با زمان به صورت

$$x_t^d = \cos(\alpha t)$$
$$y_t^d = \sin(2\alpha t) \quad (۴۰)$$

در نظر گرفته شده‌است. از طرفی مقدار مطلوب نیرویی که توسط آونگ معکوس بایستی به سطح سقف اعمال شود به صورت $f_N^d = ۱\ \mathrm{N}$ می‌باشد. هم چنین، زاویه‌ی یاو مطلوب برابر با صفر در نظر گرفته شده‌است. در تمام شبیه‌سازی‌ها کوادروتور در ابتدای حرکت دارای زاویه رول و پیچ صفر و زاویه‌ی یاو برابر با ۰/۱ رادیان است. موقعیت اولیه‌ی کوادروتور در تمام شبیه‌سازی‌ها برابر با $\mathbf{X}_Q(۰) = [۱ \quad ۰ \quad ۴/۰۷]^T\ (\mathrm{m})$ است و میله نیز در ابتدا حالت قائم قرار دارد. شرایط اولیه انتخاب شده برای نشان دادن عملکرد هیبریدی کنترل‌کننده است زیرا که در حالت اولیه پاندول هیچ تماسی با سقف که در ارتفاع ۵ متری قرار دارد، ندارد. در تمام شبیه‌سازی‌ها نرخ داده برداری برای تمام حلقه‌های کنترلی ۵۰۰ هرتز است که با توجه به سیستم‌های ثبت حرکت موجود نظیر وایکون و سنسورهای شتاب سنج و ژیروسکوپ موجود، عملاً امکان‌پذیر است و تأخیر زمانی انتقال اطلاعات ۱۰ میلی‌ثانیه در نظر گرفته شده‌است. ضرایب کنترلی قانون کنترلی نیز با سعی و خطا تا رسیدن به پاسخ مطلوب در ردیابی مسیر مطلوب با فرکانس $\alpha = ۰/۲ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ در حالت نامی یعنی بدون حضور اغتشاشات تعیین شده‌است. البته، سعی و خطای انجام شده بر اساس یک روش سرانگشتی که برای کنترل‌کننده‌های آبشاری استفاده می‌شود، تعیین شده‌است. بر اساس این روش، سرعت دینامیک حلقه‌های کنترلی باید ۳ تا ۱۰ برابر بیش‌تر از حلقه‌ی کنترلی قبلی خود باشد. ضرایب کنترلی به دست آمده در جدول ۲

**جدول ۱. پارامترهای شبیه سازی**

**Table 1. Simulation parameters**

| نام پارامتر | نماد پارامتر | مقدار پارامتر |
|---|---|---|
| اینرسی حول محور $x$ | $J_{Qxx}$ | $۷/۵\times۱۰^{-۳}\ \mathrm{kg.m^۲}$ |
| اینرسی حول محور $y$ | $J_{Qyy}$ | $۷/۵\times۱۰^{-۳}\ \mathrm{kg.m^۲}$ |
| اینرسی حول محور $z$ | $J_{Qzz}$ | $۱/۳\times۱۰^{-۲}\ \mathrm{kg.m^۲}$ |
| ممان اینرسی موتور | $J_r$ | $۶\times۱۰^{-۵}\ \mathrm{kg.m^۲}$ |
| جرم پرنده کوادروتور | $m_Q$ | $۰/۶۵\,\mathrm{kg}$ |
| جرم آونگ متصل به پرنده کوادروتور | $m_t$ | $۰/۲۲\ \mathrm{kg}$ |
| شتاب گرانش | $g$ | $۹/۸۱\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^۲}}$ |
| طول میله آونگ معکوس | $L$ | $۰/۵۳\,\mathrm{m}$ |
| طول بال پرنده کوادروتور | $l$ | $۰/۲۳\ \mathrm{m}$ |
| ضریب اصطکاک جنبشی | $\mu_k$ | ۰/۱۲ |
| ضریب سختی فنر معادل ابزار | $k_t$ | $۱۰\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ |
| ضریب تراست | $b$ | $۳/۱۳\times۱۰^{-۵}\ \mathrm{N.s^۲}$ |
| ضریب گشتاور پسا | $d$ | $۷/۵\times۱۰^{-۷}\ \mathrm{N.ms^۲}$ |

**جدول ۲. مقادیر بهره‌های کنترلی**

**Table 2. Magnitudes of the controller gains**

| بهره کنترلی | مقدار |
|---|---|
| $k_d$ | ۲/۸ |
| $k_p$ | ۴ |
| $k_i$ | ۰/۴ |
| $k_q$ | ۴۹ |
| $k_\omega$ | ۹/۸ |
| $k_R$ | ۴۰۰ |
| $k_\omega$ | ۲۸ |

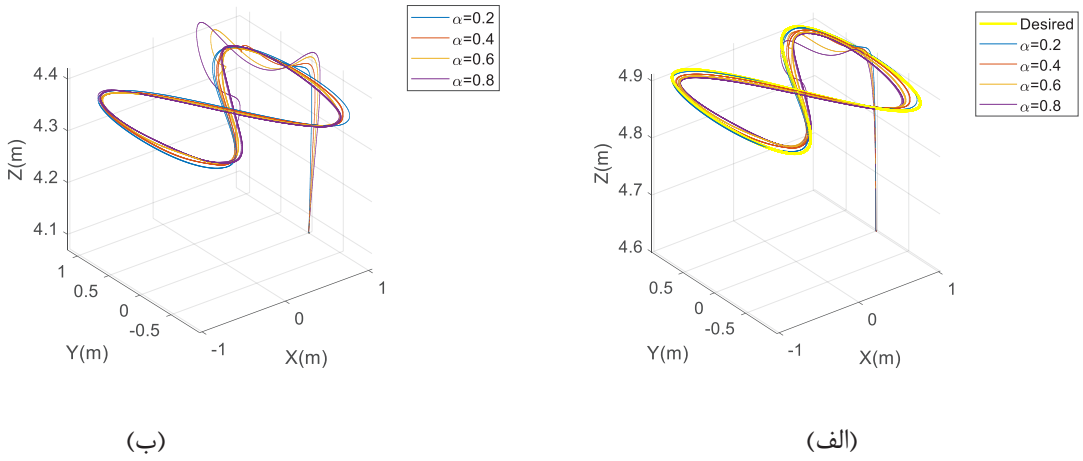
داده شده‌است.

با توجه به مشکلات محاسبه مشتقات $\dot{\boldsymbol{q}}_d, \ddot{q}_d, \Omega_\mathbf{d}, \dot{\Omega}_\mathbf{d}$ در حین کنترل، در شبیه‌سازی‌ها مقادیر نامی آن‌ها که نحوه محاسبه آن‌ها در پاراگراف اول بخش تحلیل دینامیک سیستم به اختصار شرح داده شده‌است، توسط کنترل‌کننده به کار گرفته شده‌است.

## ۴- ۲- شبیه سازی عملکرد کنترل کننده بدون حضور اغتشاشات

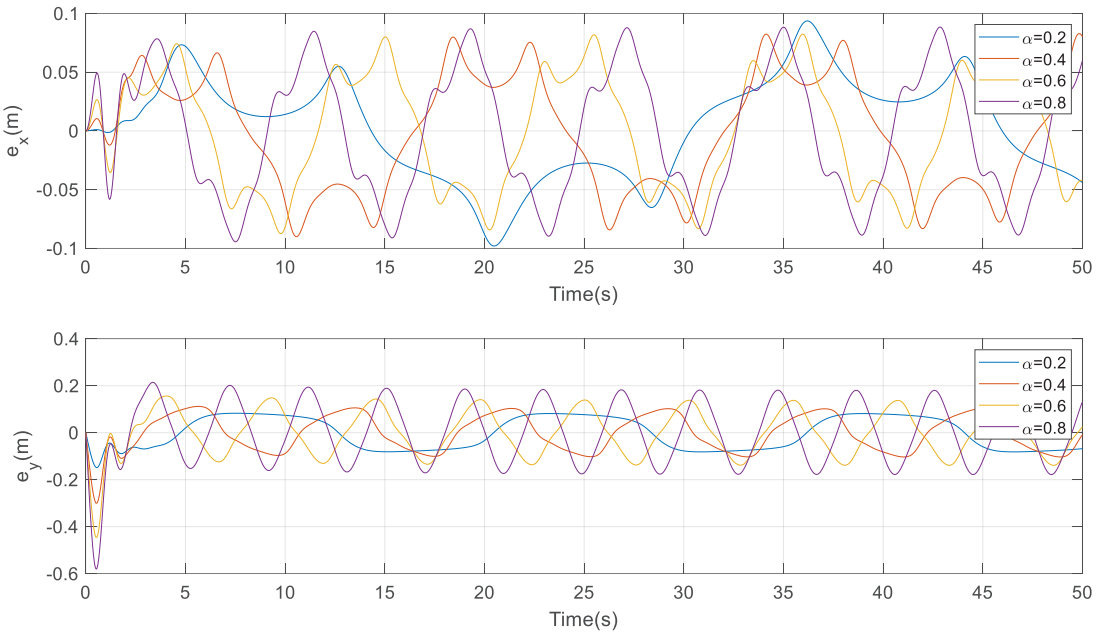
در این قسمت عملکرد کنترل‌کننده در کنترل نیروی آونگ و کنترل آونگ بر روی مسیر مطلوب بررسی خواهد شد و مقاوم بودن کنترل کننده در مقابل تفاوت مدل کامل سیستم با مدل طراحی و تأخیر زمانی انتقال اطلاعات به کنترل‌کننده ارزیابی خواهد شد. با توجه به این که ضرایب کنترلی برای حالتی که $\alpha = ۰/۲ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ است، تعیین شده‌اند، اثر تغییر $\alpha$ یعنی سرعت مسیر بر عملکرد کنترل‌کننده نیز بررسی خواهد شد.

نتایج شبیه‌سازی در شکل‌های ۵ تا ۱۰ نمایش داده شده‌است. در شکل ۵- الف مسیر طی شده توسط آونگ در حین ردیابی مسیر مطلوب با سرعت‌های متفاوت در قیاس با مسیر مطلوب آن نمایش داده شده‌است. در شکل۵-ب، مسیری که کوادروتور برای هدایت آونگ بر روی مسیر مطلوب طی کرده‌است، نمایش داده شده‌است. همانطور که پیداست کنترل کننده توانسته است در تمام حالات به خوبی آونگ را روی مسیر مطلوب کنترل بنماید. تند و تیزتر شدن مسیر کوادروتور برای کنترل پاندول در مسیرهای با سرعت بالاتر نیز مشهود است. برای بررسی دقیق‌تر عملکرد کنترل‌کننده، در شکل ۶ نمودار خطای ردیابی مسیر در امتداد محورهای $X$ و $Y$ نمایش داده شده‌است. همان‌طور که مشخص است، کنترل‌کننده با وجود فرضیاتی که در مدل طراحی صورت گرفته است و با وجود تأخیر زمانی انتقال اطلاعات به کنترل‌کننده به خوبی توانسته است موقعیت آونگ را حول مسیر مطلوب آن پایدار نماید. البته به راحتی از روی نمودار مذکور می‌توان دریافت که با افزایش سرعت مسیر، کارایی کنترل‌کننده از نظر میانگین مربعات خطا مطمئناً کاهش یافته است اما از نظر دامنه‌ی خطای ماندگار تفاوت چندانی وجود ندارد. افزون بر این، بیشینه خطای ردیابی در حالت گذرا با افزایش سرعت مسیر مطلوب، افزایش یافته است که به دلیل اشباع روتورها در مرحله گذرا (شکل ۸) و تغییرات سریع سرعت زاویه‌ای روتورها، افزایش اثر گشتاور اینرسی روتورها و در نتیجه افزایش خطای جهت‌گیری کوادروتور است. اشباع روتورها به دو دلیل ممکن است رخ داده باشد. دلیل اول استفاده از مشتقات نامی به جای مشتقات فرمانهای کنترلی بین حلقه‌ای و دوم عدم در نظر گرفتن محدودیت کوادروتور در تولید تراست‌های منفی در هنگام طراحی کنترل‌کننده است. در شکل ۷ نمودار نیروی آونگ و زاویه یاو کوادروتور نمایش داده شده‌است که موفقیت کنترل‌کننده در کنترل نیروی پاندول و زاویه یاو را نشان می‌دهد. با این وجود، نوسانی شدن پاسخ ماندگار نیروی پاندول حول مقدار مطلوب آن با افزایش سرعت مسیر، نشان دهنده افت کارایی کنترل‌کننده است که عمدتاً به دلیل کم بودن پهنای باند روتورها است. البته در صورتی که کنترل‌کننده‌ی هر حلقه مشتقات فرمانی که حلقه‌ی قبلی به آن ارسال می‌نماید را به طور دقیق محاسبه کند، عملکرد کنترل‌کننده مسلماً بهتر خواهد بود. همین مساله در پاسخ ماندگار زاویه یاو نیز دیده می‌شود. بیش‌تر بودن بیشنه خطای ردیابی زاویه یاو در حالت گذرا



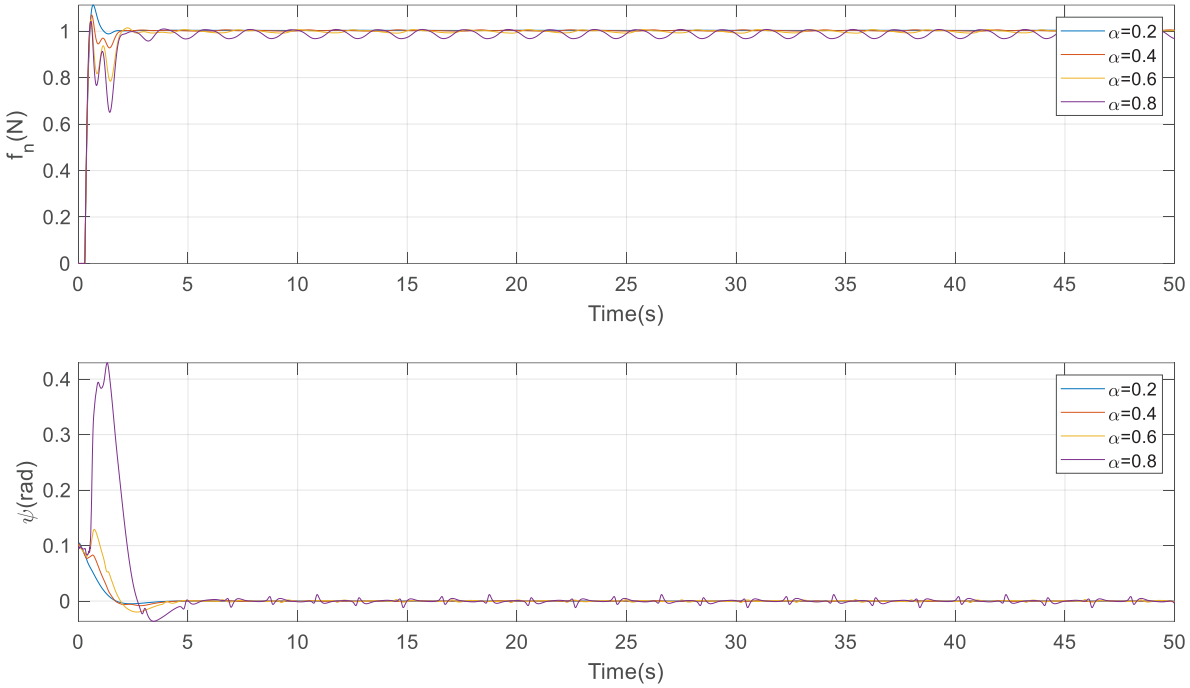

**شکل ۵. مسیر آونگ و کوادروتور در حین ردیابی مسیر و نیروی مطلوب آونگ: (الف) مسیر آونگ و مسیر مطلوب آن، (ب) مسیر کوادروتور برای هدایت آونگ روی مسیر مطلوب**

**Fig. 5. Paths of the quadrotor and pendulum during tracking the desired trajectory of the position and force: (a) Path of the pendulum vs its desired path, (b) Path of the quadrotor for guiding the pendulum on the desired trajectory.**




**شکل ۶. خطای ردیابی مسیر توسط پاندول**

**Fig. 6. Pendulum path tracking error**




**شکل ۷. نیروی آونگ و زاویه‌ی یاو کوادروتور بر حسب زمان**

**Fig. 7. Pendulum force and yaw angle of the quadrotor vs time**

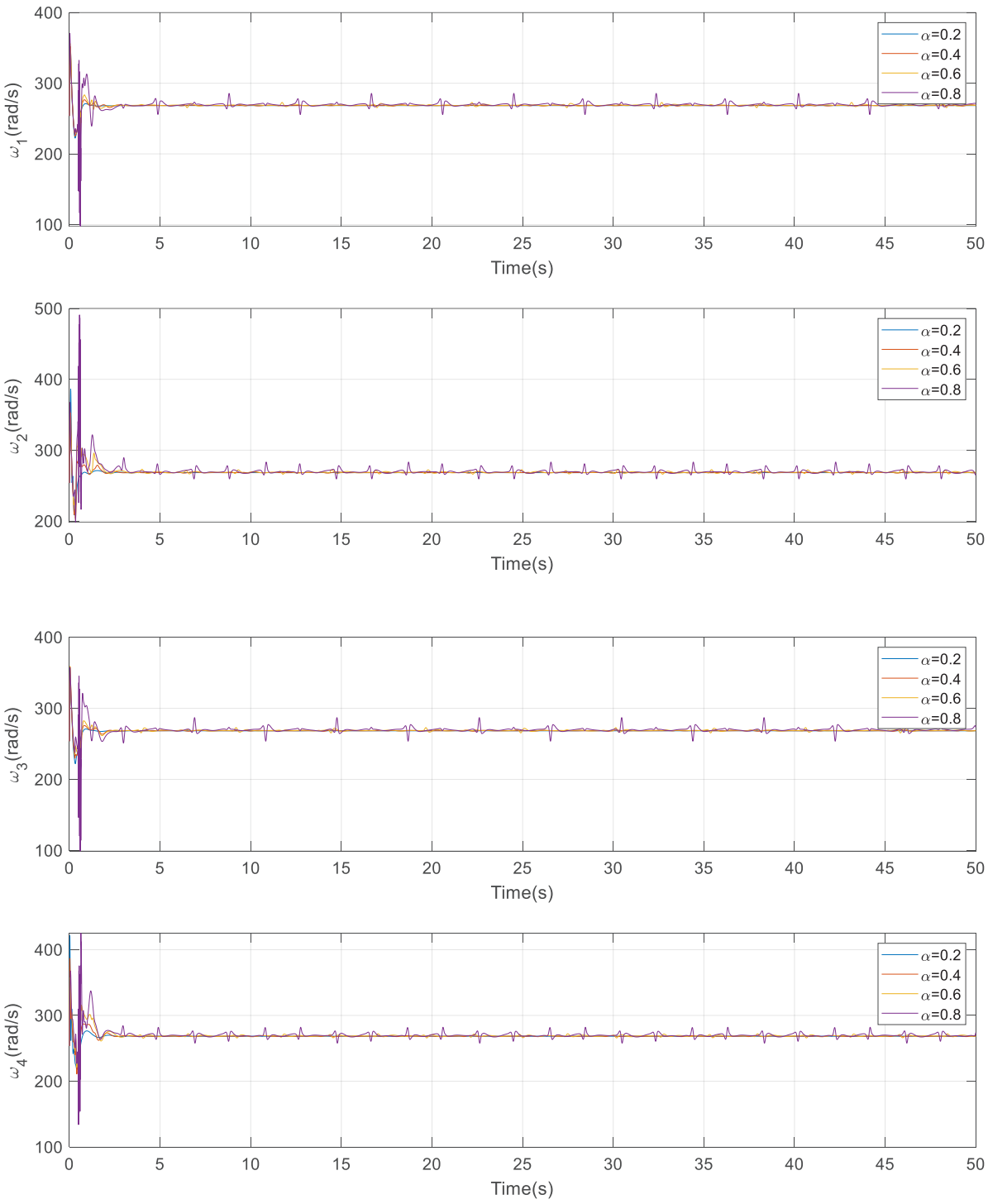
برای مسیرهای با سرعت بالاتر نیز به دلیل اشباع روتورها در مرحله گذرا (شکل ۸) و تغییرات سریع سرعت زاویه‌ای روتورها، بیش‌تر شدن اثر گشتاور اینرسی روتورها و در نتیجه افزایش خطای جهت‌گیری کوادروتور است. نکته مهم این است که، بیش‌ترین تأثیر گشتاور اینرسی روتورها بر روی دینامیک یاو کوادروتور است که شکل ۷ به خوبی این واقعیت را نشان می‌دهد.

در ادامه نمودار مؤلفه‌های راستای میله در حین ردیابی مسیر و نیروی مطلوب بر حسب زمان و نمودارهای زاویه‌های رول و پیچ کوادروتور بر حبس زمان نمایش داده شده‌است. در تمام این نمودارها، تند و تیز شدن تغییر جهت‌های میله و کوادروتور برای حفظ پایداری مسیر و نیروی آونگ حول مقدار مطلوب، در اثر افزایش سرعت مسیر مطلوب، کاملاً مشخص است.

## ۴- ۳- شبیه سازی عملکرد کنترل کننده در حضور اغتشاشات

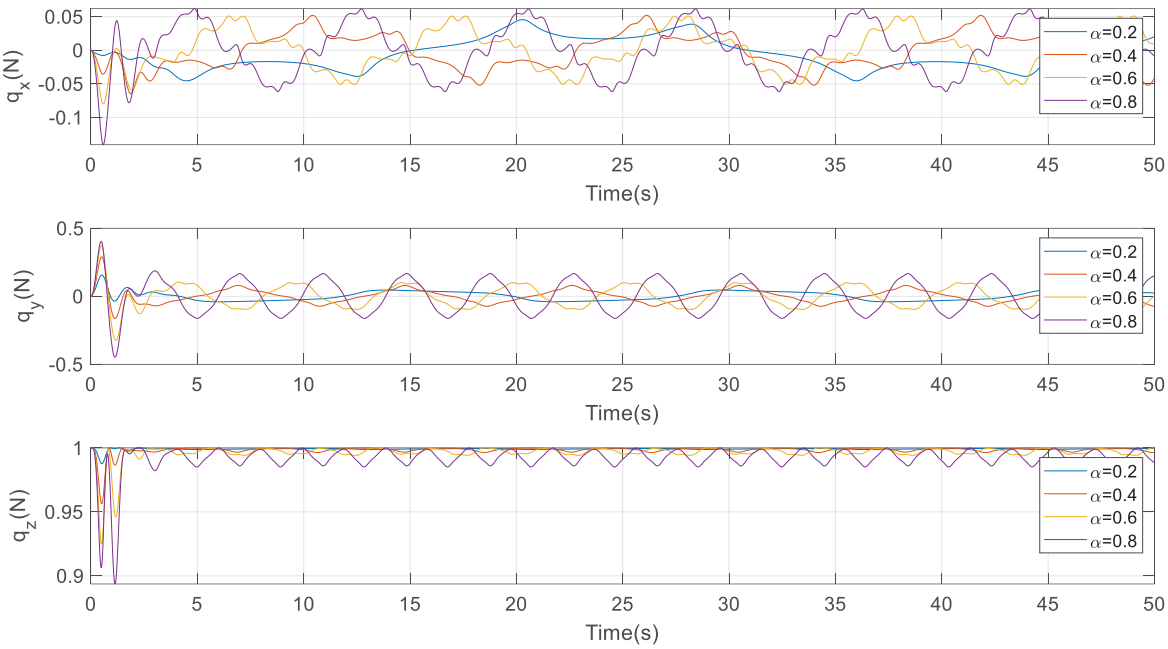
برای بررسی مقاوم بودن روش کنترلی ارائه شده، عملیات ردیابی مسیر و نیروی مطلوب توسط آونگ در حالتی که اغتشاشات پله با دامنه ۰/۲ نیوتن در جهت مثبت محور $X$ و منفی محور $Y$ به کوادروتور وارد می‌شود، شبیه‌سازی شد. نتایج شبیه‌سازی عملکرد قانون کنترلی در حضور اغتشاشات مذکور در شکل‌های ۱۱ تا ۱۳ نمایش داده شده‌است. در شکل ۱۱ نمودار خطای ردیابی مسیر مطلوب توسط آونگ در حضور اغتشاشات بر حسب زمان رسم شده‌است.

در شکل ۱۲ نیز نمودار نیروی وارد از آونگ به سطح و زاویه یاو کوادروتور بر حسب زمان رسم شده‌است. نمودارهای شکل ۱۱ و ۱۲ نشان می‌دهد که کنترل‌کننده ارائه شده در مقابل اغتشاشات وارد بر کوادروتور مقاوم است و علی‌رغم وجود اغتشاشات توانسته است موقعیت و نیروی آونگ و زاویه یاو کوادروتور را حول مقدار مطلوب آنها پایدار نماید. با مقایسه‌ی این نمودارها با نتایج حالت بدون اغتشاش، می‌توان مشاهده کرد که با وجود اینکه اغتشاشات تنها در راستای افقی و به صورت نیرو فرض شده‌اند، اما عملکرد کنترل‌کننده در کنترل پاسخ زاویه‌ی یاو هم تغییر نموده است که به دلیل افزایش نرخ تغییرات سرعت زاویه‌ای روتورها در حالت گذرا با حضور اغتشاشات (شکل ۱۳) و در نتیجه افزایش تأثیر گشتاور اینرسی روتورها بر دینامیک دورانی کوادروتور است.



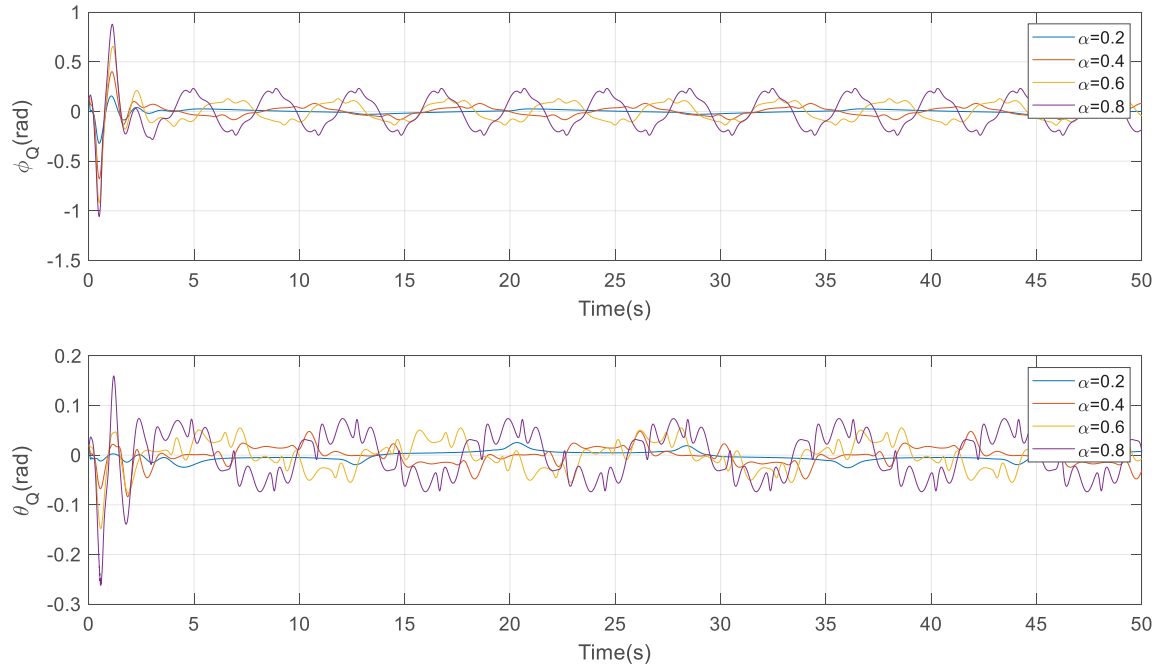

**شکل ۸. سرعت زاویه‌ای روتورها در حین ردیابی مسیر و نیروی مطلوب آونگ**

**Fig. 8. Rotors speeds during tracking the desired path and force of the pendulum**



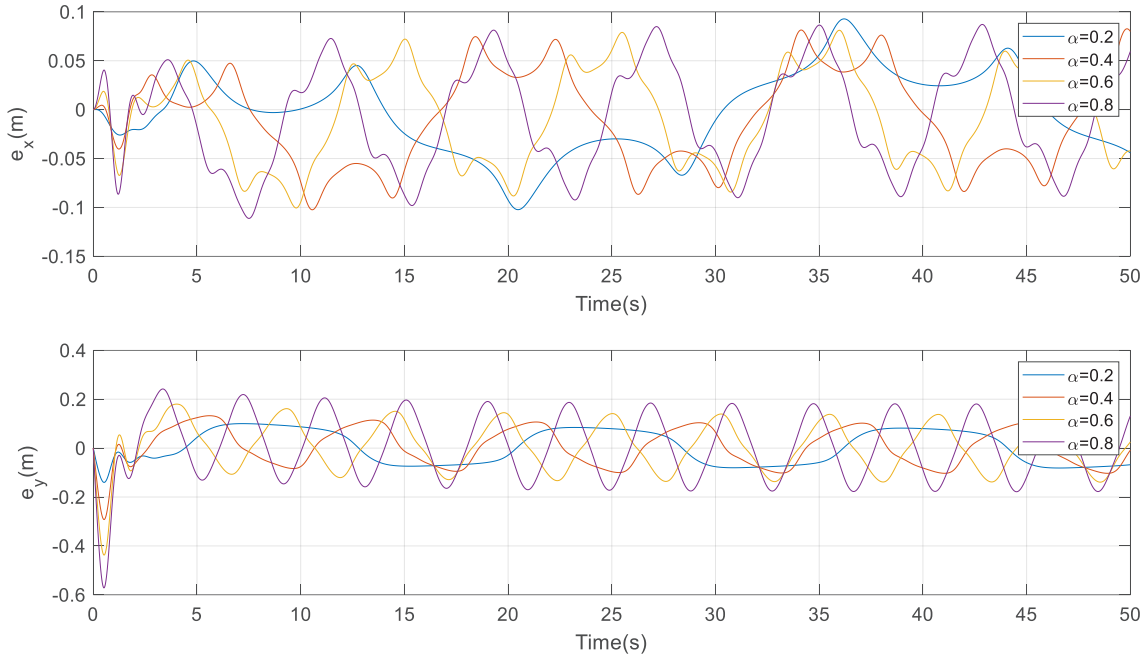

**شکل ۹. مؤلفه‌های راستای میله بر حسب زمان**

**Fig. 9. The components of the rod direction vs time**



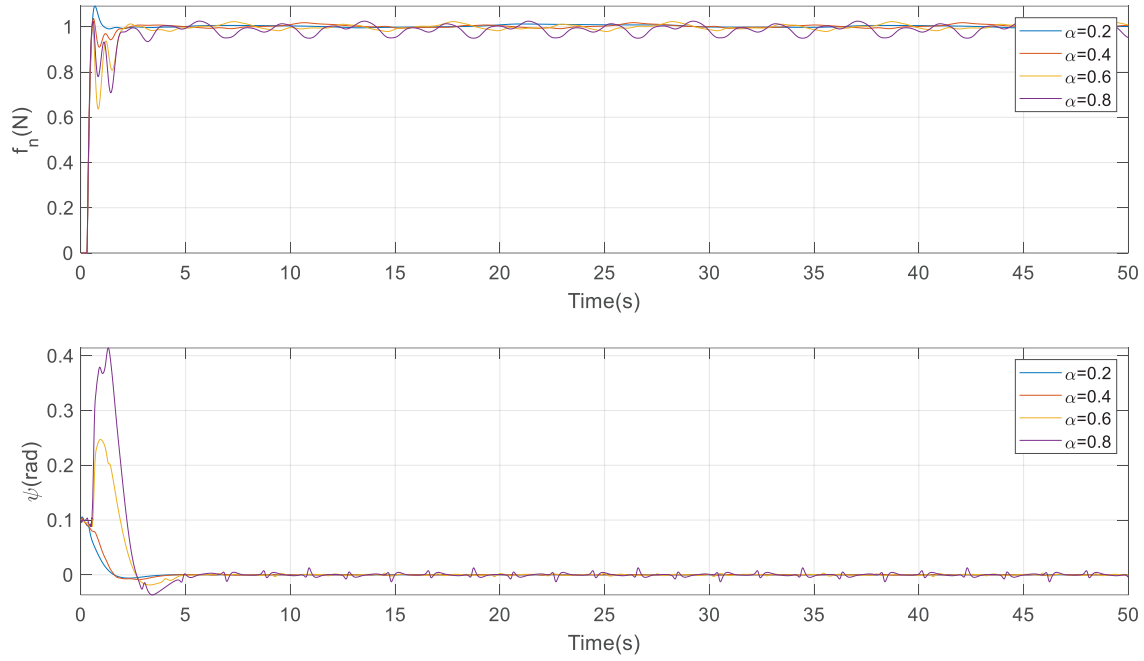

**شکل ۱۰. زوایای رول و پیچ کوادروتور بر حسب زمان**

**Fig. 10. Roll and pitch angle of the quadrotor vs time**



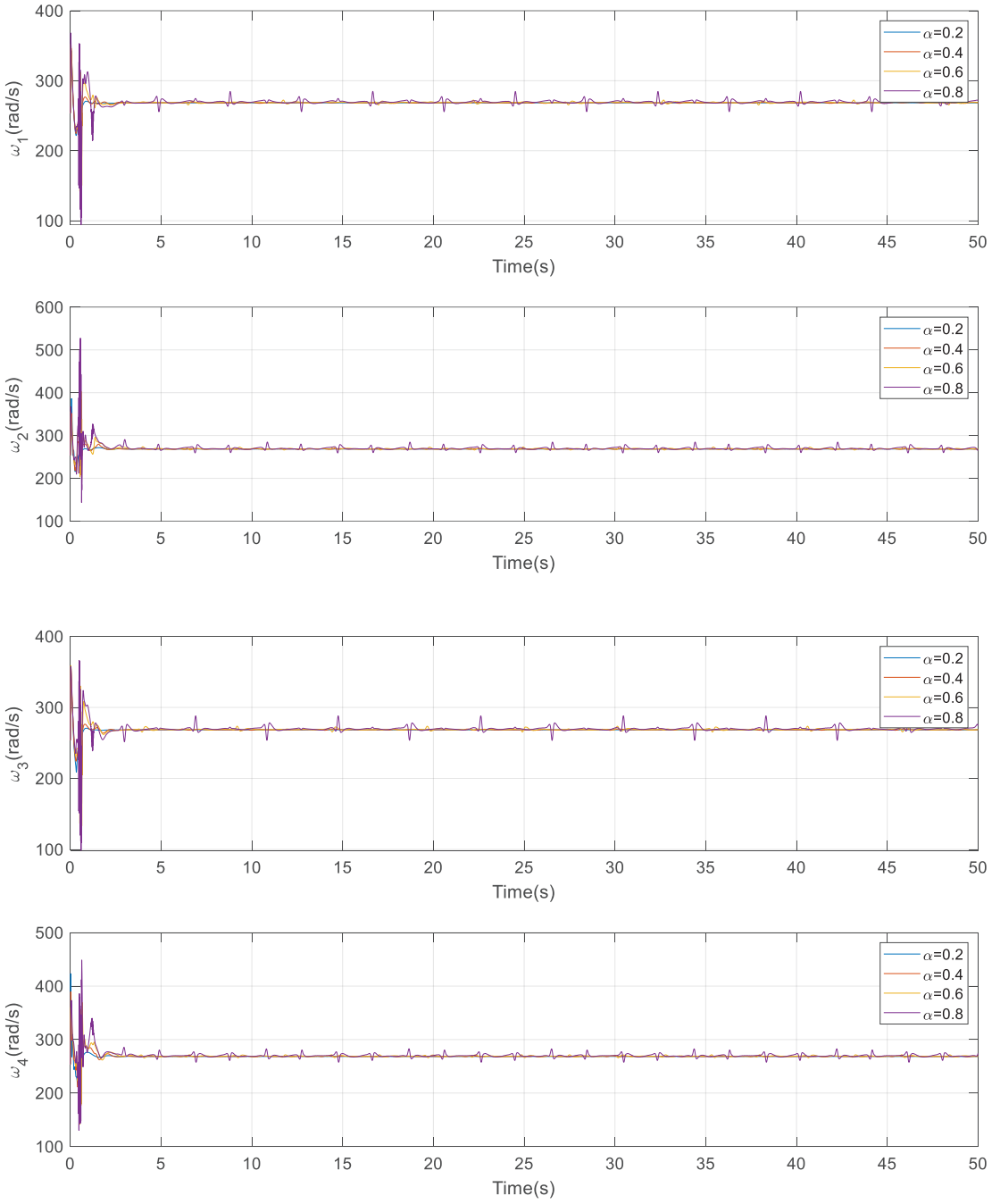

**شکل ۱۱. خطای ردیابی مسیر مطلوب آونگ بر حسب زمان در حضور اغتشاشات وارد بر کوادروتور**

**Fig. 11. Path tracking error vs time in presence of the disturbations**




**شکل ۱۲. نیروی آونگ و زاویه یاو کوادروتور بر حسب زمان در حضور اغتشاشات وارد بر کوادروتور**

**Fig. 12. Pendulum force and quadrotor yaw angle vs time in presence of disturbances**




**شکل ۱۳. سرعت زاویه‌ای روتورها در حین ردیابی مسیر و نیروی مطلوب آونگ در حضور اغتشاشات وارد بر کوادروتور**

**Fig. 13. Speeds of the rotors during tracking the desired path and force of the pendulum in presence of disturbances**

## ۵- جمع بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک کنترل‌کننده سلسله مراتبی غیرخطی هندسی برای کنترل هیبرید مسیر و نیروی یک پاندول معکوس کروی متصل به کوادروتور که حرکت آن در راستای قائم توسط یک سطح افقی مقید شده‌است، ارائه شده‌است. با استفاده از قضایای ارائه شده در ادبیات کنترل هندسی، نشان داده شد که این کنترل‌کننده می‌تواند پایداری موقعیت پاندول و نیروی وارد بر آن از طرف سطح، راستای میله متصل کننده و وضعیت کوادروتور را تأمین نماید. نتایج شبیه‌سازی‌های عددی با مدل کاملی ازکوادروتور و شبیه‌سازی داده‌برداری با نرخ ثابت و همراه با تأخیر زمانی نشان می‌دهد کنترل کننده‌ی ارائه شده، با وجود تأخیر زمانی انتقال اطلاعات و فرضیات ساده کننده‌ای که برای طراحی آن صورت پذیرفته است، می‌تواند پایداری پاندول را در ردیابی مسیرهای مطلوب و تأمین نیروی مطلوب تأمین نماید. البته با وجود حفظ پایداری سیستم در ردیابی مسیرهای با سرعتهای بالاتر، کارایی کنترل‌کننده افت می‌نماید که به دلیل محدودیت پهنای باند عملگرها و افزایش میزان تأثیر جملات مربوط به گشتاور ژیروسکوپیک و اینرسی روتورها است. علاوه بر این، نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد، کنترل‌کننده در مقابل اغتشاشات محیطی وارد بر کوادروتور نیز مقاوم است. تحقیقات آتی شامل مدل‌سازی کاملتر سیستم کوادروتور-آونگ، طراحی کنترل‌کننده تطبیقی برای تخمین ضریب اصطکاک و ثابت فنر معادل پاندول و پیاده‌سازی عملی کنترل‌کننده ارائه شده خواهد بود. افزون بر این، طراحی مشتق‌گیر ردیابی برای محاسبه‌ی مشتقات فرمان‌های کنترلی بین حلقه‌ای که باعث بهبود عملکرد کنترل‌کننده خواهد شد، می‌تواند محل مطالعه باشد.

## منابع


[1] I. Soubry, P. Patias, V. Tsioukas, Monitoring vineyards with UAV and multi-sensors for the assessment of water stress and grape maturity, Journal of Unmanned Vehicle Systems, 5(2) (2017) 37-50.

[2] N. Metni, T. Hamel, A UAV for bridge inspection: Visual servoing control law with orientation limits, Automation in Construction, 17(1) (2007) 3-10.

[3] Y. Naidoo, R. Stopforth, G. Bright, Development of an UAV for search & rescue applications, in: IEEE Africon '11, 2011, pp. 1-6.

[4] T. Elmokadem, Distributed Coverage Control of Quadrotor Multi-UAV Systems for Precision Agriculture, IFAC-PapersOnLine, 52(30) (2019) 251-256.

[5] A. Eresen, N. İmamoğlu, M. Önder Efe, Autonomous quadrotor flight with vision-based obstacle avoidance in virtual environment, Expert Systems with Applications, 39(1) (2012) 894-905.

[6] T. Yoshikawa, Dynamic hybrid position/force control of robot manipulators--Description of hand constraints and calculation of joint driving force, IEEE Journal on Robotics and Automation, 3(5) (1987) 386-392.

[7] S. Wen, J. Han, Z. Ning, Y. Lan, X. Yin, J. Zhang, Y. Ge, Numerical analysis and validation of spray distributions disturbed by quad-rotor drone wake at different flight speeds, Computers and Electronics in Agriculture, 166 (2019) 105036.

[8] H. Tsukagoshi, M. Watanabe, T. Hamada, D. Ashlih, R. Iizuka, Aerial manipulator with perching and door-opening capability, in: 2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 2015, pp. 4663-4668.

[9] D. Sayfeddine, A.G. Bulgakov, T.N. Kruglova, Intelligent passively stabilized quadrotor, IOP Conference Series. Earth and Environmental Science, 87(3) (2017).

[10] N. Azami, P. Zarafshan, A.M. Kermani, M. Khashehchi, Design and Analysis of an Armed-Octorotor to Prune Trees near the Power Lines, in: 16th International Conference of Iran Aerospace Society, Tehran, 1395.

[11] C. Zhang, H. Hu, D. Gu, J. Wang, Cascaded control for balancing an inverted pendulum on a flying quadrotor, Robotica, 35(6) (2017) 1263-1279.

[12] M. Hehn, R.D. Andrea, A flying inverted pendulum, in: 2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2011, pp. 763-770.

[13] C. Raimúndez, J.L. Camaño, A. Barreiro, 1tabilizing an inverted spherical pendulum using a scale quad-rotor, in: The 4th Annual IEEE International Conference on Cyber Technology in Automation, Control and Intelligent, 2014, pp. 111-116.

[14] A.M. Bloch, C. Dong Eui, N.E. Leonard, J.E. Marsden, Controlled Lagrangians and the stabilization of mechanical systems. II. Potential shaping, IEEE Transactions on Automatic Control, 46(10) (2001) 1556-1571.

[15] T.A. Tamba, Y.Y. Nazaruddin, E. Juliastuti, The Regulation of a Quadrotor UAV Carrying a Pendulum using Receding Horizon Control, in: 2020 12th International Conference on Information Technology and Electrical Engineering (ICITEE), 2020, pp. 63-67.

[16] T. Ibuki, Y. Tadokoro, Y. Fujita, M. Sampei, 3D inverted pendulum stabilization on a quadrotor via bilinear system approximations, in: 2015 IEEE Conference on Control Applications (CCA), 2015, pp. 513-518.

[17] M. Kanazawa, S. Nakaura, M. Sampei, Inverse optimal control problem for bilinear systems: Application to the inverted pendulum with horizontal and vertical movement, in: Proceedings of the 48h IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference, 2009, pp. 2260-2267.

[18] C. Hintz, S. Ahmad, J. Kloeppel, R. Fierro, Robust hybrid control for swinging-up and balancing an inverted pendulum attached to a UAV, in: 2017 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA), 2017, pp. 1550-1555.

[19] F. Cai, T. Lai, Q. Chai, W. Wang, Trajectory tracking problem of a quad-rotor Pendulum, in: 2016 Chinese Control and Decision Conference (CCDC), 2016, pp. 578-582.

[20] W.W. Gunawan, A. Likafia, E. Joelianto, A. Widyotriatmo, Inverted Pendulum stabilization with flying quadrotor, Internetworking Indonesia Journal, 10 (2018) 29-35.

[21] S. Krafes, Z. Chalh, A. Saka, Vision-based control of a flying spherical inverted pendulum, in: 2018 4th International Conference on Optimization and Applications (ICOA), 2018, pp. 1-6.

[22] J. Lu, Y. Yang, X. Jin, Quadrotor inverted Pendulum control based on improved Particle Swarm Optimization, in: Proceeding - 2021 China Automation Congress, CAC 2021, 2021, pp. 6280-6285.

[23] S. Krafes, Z. Chalh, A. Saka, Visual servoing of a spherical inverted pendulum on a quadrotor using backstepping controller, International Review of Aerospace Engineering, 11(1) (2018) 6-14.

[24] A.A. Mian, W. Daobo, Modeling and Backstepping-based Nonlinear Control Strategy for a 6 DOF Quadrotor Helicopter, Chinese Journal of Aeronautics, 21(3) (2008) 261-268.

[25] A. Nayak, R.N. Banavar, D.H.S. Maithripala, Stabilizing a spherical pendulum on a quadrotor, Asian Journal of Control, 24(3) (2022) 1112-1121.

[26] S.K. Phang, K. Li, K. Yu, B. Chen, T. Lee, Systematic Design and Implementation of a Micro Unmanned Quadrotor System, Unmanned Systems, 2 (2014) 1-21.

[27] A. Malekshahi, M. Mirzaei, S. Aghasizade, Non-Linear Predictive Control of Multi-Input Multi-Output Vehicle Suspension System, Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control, 34(1) (2015) 87-105.

[28] F. Bullo, A.D. Lewis, Stabilization and tracking for fully actuated systems, in: F. Bullo, A.D. Lewis (Eds.) Geometric Control of Mechanical Systems: Modeling, Analysis, and Design for Simple Mechanical Control Systems, Springer New York, New York, NY, 2005, pp. 529-558.

[29] S. Bouabdallah, Design and control of quadrotors with application to autonomous flying, PhD Dissertation, EPFL, Lausanne, 2007.

**چگونه به این مقاله ارجاع دهیم**

*A. A. Mahdizadeh, M. Nazari, M. Nazari, H. Ahmadi, Sliding Mode Control of Droplet Size in a Microchannel by Adjusting Syringe-Pump Flow: Experimental Study, Amirkabir J. Mech Eng., 54(10) (2023) 2255-2276.*

**DOI:** 10.22060/mej.2022.21308.7420