



کنترل هیبریدی موقعیت و نیرو برای یک پاندول معکوس کروی متصل به کوادروتور در یک حرکت مقید

علی سلطانی*، محمدحسین کمری

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۱/۰۱/۲۹
بازنگری: ۱۴۰۱/۰۶/۲۷
پذیرش: ۱۴۰۱/۰۷/۲۷
ارائه آنلاین: ۱۴۰۱/۰۸/۱۱

کلمات کلیدی:

کنترل هیبریدی
کوادروتور
پاندول معکوس کروی
کنترل سلسله مراتبی
کنترل هندسی

خلاصه: امروزه استفاده از پهپادها برای انجام خودکار فعالیت‌هایی نظیر امور عمرانی، عملیات امداد و نجات و مأموریت‌های نظامی، با هدف افزایش سرعت و دقت، حفظ نیروی انسانی و کاهش هزینه‌ها در حال گسترش است. با توجه به این رویکرد، در این مقاله نیز با هدف استفاده از سیستم کوادروتور - آونگ معکوس کروی برای انجام عملیاتی نظیر رنگ‌آمیزی و نظافت در سقف‌های مرتفع، مسأله‌ی کنترل هیبریدی موقعیت و نیرو برای یک پاندول معکوس کروی متصل به کوادروتور که حرکت آن در راستای قائم مقید شده است، مورد مطالعه قرار گرفته است. در این راستا، ابتدا با استفاده از قوانین نیوتن - اوپلر، معادلات حرکت حاکم بر سیستم کوادروتور - آونگ معکوس در حالت مقید استخراج و سپس با ارائه‌ی مدلی برای نیروی مقید کننده، یک سیستم کنترلی سلسله مراتبی شامل حلقه‌ی کنترلی موقعیت - نیرو، حلقه‌ی کنترلی جهت‌گیری پاندول معکوس و حلقه‌ی کنترلی جهت‌گیری کوادروتور، ارائه شده است. قوانین کنترلی حلقه‌ی کنترلی جهت‌گیری پاندول معکوس و حلقه‌ی کنترلی جهت‌گیری کوادروتور، با استفاده از مفاهیم مطرح در کنترل هندسی طراحی شده‌اند. در نهایت، عملکرد کنترل کننده طراحی شده توسط شبیه‌سازی مورد بررسی قرار گرفته است.

۱- مقدمه

نیروی انسانی، می‌شود. برای انجام برخی عملیات مانند جوشکاری، استفاده از عملگرهایی غیر از عملگرهای کوادروتور اجتناب ناپذیر است. از طرفی، افزوده شدن یک سیستم دینامیکی دارای عملگر نظیر بازوی مکانیکی به سیستم کوادروتور اگر چه باعث افزایش تعداد درجات آزادی می‌شود، از طرفی نیز باعث پیچیده‌تر شدن دینامیک کلی سیستم می‌شود. هم چنین، بدیهی است افزودن عملگر، موجب افزایش هزینه‌های ساخت و نگهداری نیز می‌شود. به این منظور در این مطالعه، امکان انجام عملیات رنگ‌آمیزی و نظافت سقف‌های بلند توسط کوادروتور بدون افزودن عملگر جدید و با استفاده از یک پاندول کروی معکوس متصل به کوادروتور، مورد مطالعه قرار گرفته است. با توجه به نوع عملیات ذکر شده، بایستی مسیر انتهایی پاندول معکوس کروی که در حقیقت محل قرارگیری ابزار رنگ‌آمیزی یا نظافت است و نیروی اعمالی از آن به سقف کنترل شود. در شکل ۱ تصویر نمونه‌ای از یک سیستم کوادروتور و آونگ نشان داده شده است.

در ادامه به اختصار به مطالعاتی که در زمینه آونگ معکوس متصل به پرنده کوادروتور انجام شده است، پرداخته شده است. هن و دی‌آندریا [۱۲]،

در سال‌های اخیر هواپیماهای بدون سرنشین توجه دانشمندان را به خصوص در زمینه انجام خودکار امور توسط آن‌ها، به خود جلب کرده‌اند. در بین پهپادهای مختلف، پرنده کوادروتور به دلیل قابلیت بلند شدن و فرود عمودی، معلق ماندن در هوا، سرعت رضایت بخش و چابکی بالا از محبوبیت خاصی برخوردار است. این ویژگی‌ها باعث می‌شود، بتوان کوادروتورها را برای انجام مأموریت‌هایی نظیر بررسی محیط زمین [۱]، بازرسی منظم سازه‌هایی مانند پل‌ها یا سدها [۲]، جستجو و نجات [۳]، نظارت بر محصولات کشاورزی [۴] و دستکاری محیط‌های پیچیده به کار برد [۵] این مأموریت‌ها ممکن است شامل تصویربرداری از محیط، برداشتن بار، حمل بار آویزان توسط کوادروتور یا مجموعه‌ای از آن‌ها [۶]، پاشیدن آب و یا سم [۷]، باز و بست پیچ [۸]، سوراخکاری [۹]، جوشکاری [۱۰] و غیره باشد. از جمله این مأموریت‌ها، نظافت یا رنگ‌آمیزی سقف‌های بلند است که انجام آن توسط کوادروتور باعث کاهش هزینه‌ها و عدم نیاز برای به کارگیری

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: asoltani@sut.ac.ir





شکل ۱. تصویر نمونه‌ای از یک سیستم کوادروتور - آونگ [۱۱]

Fig. 1. quadrotor-pendulum system [11]

نتایج شبیه‌سازی عددی اثر بخشی روش کنترلی خود را نشان دادند. تامبا و همکاران [۱۵] رویکردی را برای تنظیم پایداری یک آونگ معکوس در بالای یک پهپاد کوادروتور متحرک، پیشنهاد دادند. رویکرد آنها مبتنی بر طرح کنترل مدل پیش‌بین است که هدف آن تثبیت آونگ در یک موقعیت عمودی است، در حالی که پهپاد کوادروتور از موقعیت‌های اولیه از پیش تعیین شده به حالت نهایی در حال حرکت است. به طور خاص، این رویکرد یک بهینه‌سازی درجه دوم پارامتری از تثبیت همزمان آونگ معکوس و پهپاد کوادروتور را بیان می‌کند. آنها با ارائه نتایج شبیه‌سازی عددی، عملکرد موفقیت‌آمیز رویکرد کنترلی پیشنهادی خود را نشان دادند. ایبوکی و همکاران [۱۶] در ابتدا مدل ریاضی سه بعدی سیستم کوادروتور - آونگ را بر اساس معادله اوپلر-لاگرانژ استخراج کردند و سپس، با استفاده مؤثر از ورودی عمودی، یک مدل تقریبی با استفاده از بسط تیلور مرتبه دوم ساختند و در ادامه پژوهش خود یک قانون کنترل بهینه معکوس را برای سیستم کوادروتور - آونگ بر اساس مطالعه [۱۷] پیشنهاد کردند. آنها در نهایت، اعتبار قانون کنترلی خود را از طریق شبیه‌سازی‌های عددی نشان دادند. مانور چرخش به بالا یک مانور چالش برانگیز است زیرا آونگ باید از نقطه تعادل

مسئله کنترل کلاسیک آونگ معکوس را با قرار دادن آن در بالای یک وسیله نقلیه هوایی بررسی کرده‌اند. بدین صورت که، ابتدا حالت‌های اسمی سیستم را در حالت سکون و در مسیرهای دایره‌ای به دست آورده‌اند و با استفاده از قاب بدنه مجازی، توصیفی مستقل از انحراف مرکز جرم برای دینامیک کوادروتور معرفی کرده‌اند. سپس، قوانین کنترلی که شامل کنترل‌کننده خطی‌ساز پس‌خوراند است، حول این مسیرهای اسمی طراحی نموده‌اند. آنها عملکرد موفقیت‌آمیز کنترل‌کننده خود را با آزمایش‌های عملی نشان داده‌اند. رایم‌اندز و همکاران [۱۳] به بررسی ادغام بین دو مدل دینامیکی یک پهپاد کوادروتور و یک آونگ کروی معکوس، که یک سیستم پیچیده‌تر را تشکیل می‌دهد، پرداختند. سیستم مورد بررسی آنها شامل یک آونگ کروی است که به صورت عمودی با استفاده از پهپاد کوادروتور تثبیت می‌شود. آنها برای طراحی کنترل‌کننده، دینامیک آونگ معکوس را در مقایسه با دینامیک کوادروتور به اندازه کافی کند فرض نمودند. کنترل‌کننده پیشنهادی آنها که با استفاده از روش لاگرانژین کنترل شده [۱۴]، طراحی شده بود، قادر به تثبیت آونگ معکوس کروی بود. ایشان همچنین برای مقابله با خطاهای مدل‌سازی از یک روش تطبیقی تقویت شده بهره گرفتند و در نهایت، با ارائه

سطحی استفاده کردند که هر سطح از سیستم کنترلی آبخاری، اجرا کننده یک قانون کنترلی است که با روش بازگشت به عقب طراحی شده است. آن‌ها برای صحنه سنجی نتایج شبیه‌سازی و تأیید استراتژی کنترلی خود از نرم افزار متلب و محیط واقعیت مجازی استفاده کردند و اثر بخشی کنترل کننده خود را نشان دادند. متعادل‌سازی آونگ به همراه تعقیب مسیر مطلوب توسط کوادروتور نیز با استفاده از یک کنترل‌کننده آبخاری بر اساس دفع فعال اغتشاشات نیز در مقاله‌ی [۱۱] انجام شده است. کارایی و مقاوم بودن کنترل‌کننده ارائه شده در قیاس با کنترل‌کننده رگولاتور خطی درجه دو در محیط یک شبیه‌ساز مورد مقایسه قرار گرفته است و برتری کنترل‌کننده طراحی شده نشان داده شده است. هم‌چنین، روش کنترلی ارائه شده بر روی یک کوادروتور به صورت عملی به کار برده شده و توانایی کنترل‌کننده در حفظ پایداری و مقاوم بودن آن در مقابل اغتشاشات مورد آزمایش و تأیید قرار گرفته است. در مقاله [۲۲] با استفاده از یک کنترل‌کننده رگولاتور خطی درجه دو که توسط روش توده ذرات بهبود یافته طراحی شده است، کنترل مسیر کوادروتور به همراه پایدارسازی زاویه آونگ صورت پذیرفته است که کارایی کنترل‌کننده ارائه شده با انجام شبیه‌سازی‌های مختلف مورد تأیید و بررسی قرار گرفته است. پایدارسازی آونگ معکوس متصل به کوادروتور با سرووی بصری به روش گام به عقب نیز در مقاله‌ی [۲۳] مورد مطالعه قرار گرفته است و کارایی روش ارائه شده با شبیه‌سازی و استفاده از محیط واقعیت مجازی سیمولینک ارزیابی شده است.

در مقاله‌ی حاضر، همان‌طور که پیش‌تر ذکر شد، کنترل یک پاندول معکوس کروی متصل به کوادروتور برای انجام عملیات رنگ‌آمیزی و یا نظافت بر روی سقف‌های افقی بلند مورد مطالعه قرار گرفته است. بر خلاف مطالعات پیشین، در این مطالعه آونگ در تماس با یک سطح افقی صلب است و با توجه به مأموریت در نظر گرفته شده، مساله کنترل هیبریدی مسیر افقی انتهایی آونگ و نیروی وارد از آن به سطح مورد مطالعه قرار گرفته است. به عبارت دیگر، نوآوری اصلی این مطالعه، مدل‌سازی سیستم کوادروتور و آونگ در تماس با یک سطح افقی صلب و هم‌چنین طراحی کنترل‌کننده‌ی هیبریدی نیرو و موقعیت برای انتهایی آونگ است. بدین منظور، ابتدا مدل دینامیکی سیستم کوادروتور و آونگ معکوس که در تماس با یک سطح افقی است ارائه شده است و سپس با مدل‌سازی تعامل آونگ و سطح به صورت یک سیستم جرم - فنر، قانون کنترلی هندسی سلسله مراتبی مناسبی برای کنترل هیبریدی نیروی وارد از پاندول به سقف و مسیر آن بر روی سطح طراحی شده است. پایداری سیستم مدار بسته با استفاده از قانون

پایدار خود در موقعیت عمودی رو به پایین خارج شود. آونگ باید به گونه‌ای به سمت بالا چرخانده شود که وقتی در موقعیت عمودی رو به بالا قرار دارد سرعتی تا حد امکان نزدیک به صفر داشته باشد. یک روش پرکاربرد برای دستیابی به این هدف، استفاده از کنترل انرژی است. هینتز و همکاران [۱۸] مسئله پایداری و کنترل سیستم کوادروتور - آونگ را با استفاده از این روش بررسی کردند. آن‌ها الگوریتم‌های کنترلی مناسبی را برای حل مسئله‌ی چرخش به بالا و رسیدن به تعادل برای آونگ بالای یک کوادروتور به دو صورت خطی و چرخشی طراحی کردند. سیستم ترکیبی آن‌ها متشکل از یک کنترل انرژی برای چرخاندن آونگ به سمت بالا و یک کنترل‌کننده رگولاتور خطی درجه دو^۱ برای متعادل کردن آن است. هم‌چنین یک منطق سوئیچینگ تصمیم‌گیرنده‌ی این مسئله بود که آونگ به صورت خطی یا چرخشی به سمت بالا حرکت کند و متعادل شود و وقتی به موقعیت عمودی رو به بالا می‌رسد سرعتی نزدیک به صفر داشته باشد. این امر تضمین‌کننده این بود که کنترل‌کننده رگولاتور خطی درجه دو می‌تواند آونگ را در نقطه تعادل آن کنترل کرده و متعادل کند. آن‌ها با ارائه نتایج آزمایشگاهی اثر بخشی کنترل‌کننده خود را به نمایش گذاشتند. کای و همکاران [۱۹] ابتدا مدل دینامیکی کوادروتور - آونگ را معرفی کردند. آن‌ها یک کنترل‌کننده بازگشت به عقب برای تحقق بخشیدن به کنترل مسیر کوادروتور - آونگ را پیشنهاد دادند و با ارائه شبیه‌سازی‌های عددی نشان دادند که روش کنترلی پیشنهادی می‌تواند سیستم آونگ-کوادروتور را به خوبی تثبیت کند و آن را به هر موقعیت دلخواهی هدایت کند. گوناوان و همکاران [۲۰] سیستم پرنده هاوربرد را به عنوان یک کوادروتور و سوار به عنوان یک آونگ معکوس در نظر گرفتند. مشکل اصلی آن‌ها این بود که چگونه می‌توان آونگ معکوس را در موقعیت عمودی با حرکت کوادروتور تثبیت کرد. آن‌ها در پروژه خود کنترل‌کننده‌های سوئیچ‌کننده بین نوع تناسی-انترال-مشتق^۲ و نوع تناسی را به منظور تثبیت آونگ معکوس و پرنده کوادروتور به کار بردند و در نهایت با تست‌های آزمایشگاهی کارایی سیستم خود را به نمایش گذاشتند. کرافس و همکاران [۲۱] سیستم کوادروتور-آونگ را با استفاده از فرمول بندی اویلر لاگرانژ و با در نظر گرفتن هر دو دینامیک آونگ و کوادروتور مدل‌سازی کردند و به دلیل عدم وجود حسگرهایی که قابلیت اندازه‌گیری حالات را در مفاصل آونگ داشته باشد، استفاده از یک سیستم بصری بر روی کوادروتور را برای تعیین موقعیت آونگ پیشنهاد دادند. هم‌چنین برای طراحی کنترل‌کننده غیرخطی، از یک استراتژی آبخاری سه

1 Linear Quadratic Regulator (LQR)

2 Proportional Integral Derivative (PID)

می‌توان از رابطه‌ی

$$\mathbf{f}_k = -\mu_k \mathbf{f}_N \frac{\mathbf{e}_3 \times (\dot{\mathbf{X}}_i \times \mathbf{e}_3)}{\|\mathbf{e}_3 \times (\dot{\mathbf{X}}_i \times \mathbf{e}_3)\|} \quad (1)$$

به دست آورد که در آن $\dot{\mathbf{X}}_i$ بردار سرعت انتهای پاندول، $\mathbf{e}_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ و μ_k ضریب اصطکاک جنبشی را نشان می‌دهد. از طرفی، اگر فرض شود که سرعت کوادروتور در قیاس با سرعت روتورها و اثرات باد ناچیز است، می‌توان نیروی تراست و گشتاور تولید شده هر روتور را به صورت

$$Q_i = d \omega_i^2 \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2)$$

$$T_i = b \omega_i^2 \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3)$$

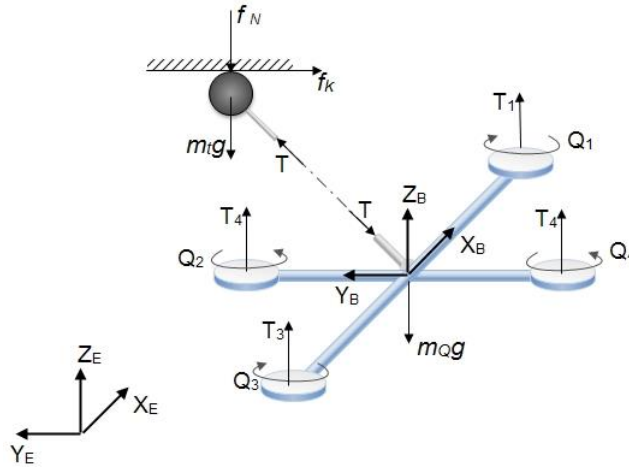
مدل‌سازی نمود که b و d مقادیر ثابتی هستند که به آنها به ترتیب ضریب تراست و ضریب گشتاور پسا می‌گویند و ω سرعت دورانی هر روتور است [۲۴]. هم چنین، در صورتی که اتصال ملخ به شفت روتورها و خود ملخ به قدر کافی صلب باشد، می‌توان نیروی تراست و گشتاور درگ هر ملخ را در راستای شفت روتور آن در نظر گرفت. از آنجایی که جهت دوران روتورهای شماره ۱ و ۳ پادساعتگرد و روتورهای شماره ۲ و ۴ ساعتگرد در نظر گرفته شده‌است، گشتاور درگ روتورهای شماره ۱ و ۳ ساعتگرد و روتورهای شماره ۲ و ۴ پادساعتگرد خواهد بود. با توجه به فرضیات صورت گرفته دیگرام آزاد نیروها و گشتاورهای وارد بر آونگ و کوادروتور به صورت شکل ۲ خواهد بود.

در این شکل جرم پاندول و کوادروتور به ترتیب با m_i و m_0 ، اندازه‌ی بردار شتاب گرانش با \mathbf{g} نمایش داده شده‌است. هم چنین، دستگاه مختصات $\{B\}$ به مرکز جرم کوادروتور متصل شده‌است که فاصله‌ی مبدأ آن تا محور هر یک از روتورها یکسان است و با l نمایش داده خواهد شد. چهارچوب $\{E\}$ نیز نمایش دهنده‌ی چهارچوب لخت است. حال اگر بردار مکان مرکز جرم آونگ و مرکز جرم کوادروتور به ترتیب با \mathbf{X}_0 و \mathbf{X}_i نشان داده شود، با استفاده از قوانین نیوتن روابط

کنترلی ارائه شده، علاوه بر روش‌های تحلیلی مبتنی بر قضایای موجود در ادبیات کنترل هندسی، با استفاده از شبیه‌سازی نیز مورد بررسی قرار گرفته است. در شبیه‌سازی‌ها، مدل نسبتاً کاملی از کوادروتور که شامل دینامیک روتور، گشتاور اینرسی روتور، اثرات ژيروسکوپیک آن و اشباع روتورها است، برای ارزیابی مقاوم بودن کنترل‌کننده در مقابل اثرات آن‌ها، به کار برده شده است. هم‌چنین، برای ارزیابی دقیق‌تر کارایی کنترل‌کننده در شبیه‌سازی‌ها داده‌برداری توسط کنترل‌کننده با نرخ ثابت و منطقی همراه با در نظر داشتن تأخیر زمانی انتقال اطلاعات صورت می‌پذیرد. مقاوم بودن کنترل‌کننده در مقابل اغتشاشات نیز در شبیه‌سازی‌ها ارزیابی شده است. ساختار مقاله‌ی حاضر به این شرح است که در بخش اول مقدمه‌ای در مورد کاربردهای امروزی پرنده کوادروتور، پیشینه پژوهش و اهمیت مطالعه‌ی حاضر ارائه شده است. سپس در بخش دوم پس از تشریح ساختار سیستم کوادروتور – آونگ پیشنهادی، معادلات دینامیکی آن استخراج و در بخش سوم، نحوه‌ی طراحی کنترل‌کننده ارائه شده‌است. در ادامه و در بخش چهارم نتایج شبیه‌سازی عملکرد کنترل‌کننده بر اساس مدل ارائه شده، تحلیل و بررسی شده‌است. در نهایت، در بخش پایانی فعالیت‌های صورت گرفته و نتایج این پژوهش به همراه چشم‌انداز مطالعات آتی به صورت اجمالی شرح داده شده است.

۲- مدل‌سازی ریاضی

برای مدل‌سازی ریاضی حرکت سیستم کوادروتور – آونگ، برخی فرضیات صورت گرفته‌است. از جمله این فرضیات این است که با توجه به کاربردی که برای پاندول معکوس در این مطالعه در نظر گرفته شده‌است، می‌توان مجموعه پاندول را به صورت یک جرم متمرکز که در انتهای آن قرار دارد، فرض نمود. زیرا ابزار مخصوص نظافت یا رنگ آمیزی در انتهای پاندول قرار می‌گیرد و جرم آن در مقایسه با میله‌ی آونگ بیش‌تر است. بر اساس این فرض، نیرویی که از کوادروتور به آونگ وارد می‌شود و اندازه‌ی آن با T نمایش داده خواهد شد، در امتداد میله‌ی آونگ خواهد بود. افزون بر این، محل اتصال آونگ به کوادروتور باید اصولاً منطبق بر مرکز جرم کوادروتور باشد تا با توجه به این که این اتصال از نوع اتصال کروی است، تأثیر آونگ بر دینامیک دورانی کوادروتور ناچیز باشد. از طرفی، به دلیل این که آونگ در تماس با سقف است، دو نیروی عمودی عکس‌العمل سطح و اصطکاک جنبشی از طرف سطح به آن وارد خواهد شد. اگر اندازه نیروی عمودی عکس‌العمل سطح با f_N نمایش داده شود، بردار نیروی اصطکاک \mathbf{f}_k که در خلاف جهت مؤلفه‌ی افقی سرعت انتهای پاندول خواهد بود را



شکل ۲. دیاگرام آزاد نیروها و گشتاورهای وارد بر کوادروتور و پاندول

Fig. 2. Free diagram of the forces and torques action on the quadrotor and the pendulum

نیروی T را به شکل زیر بدست آورد:

$$T = \frac{((-m_Q \mathbf{f}_r + m_t f R \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{q} - m_t m_Q L (\dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}}))}{(m_t + m_Q)} \quad (8)$$

در رابطه‌ی اخیر

$$\mathbf{f}_r = \mathbf{f}_k - f_N \mathbf{e}_3 \quad (9)$$

است. بر این اساس و با استفاده از تعریف بردار یکه \mathbf{q} و معادلات (۴) و (۵) می‌توان معادلات حرکت انتقالی سیستم را به صورت

$$\begin{aligned} m_t (m_t + m_Q) \ddot{\mathbf{X}}_t = & \\ & - (m_Q \mathbf{f}_r \cdot \mathbf{q}) \mathbf{q} + (m_t f R \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{q}) \mathbf{q} - \\ & m_t m_Q L (\dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{q} + (m_t + m_Q) \mathbf{f}_r - \\ & m_t (m_t + m_Q) g \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}} = & - \frac{1}{m_t L} \mathbf{q} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{f}_r) + \\ & \frac{1}{m_Q L} \mathbf{q} \times (\mathbf{q} \times f R \mathbf{e}_3) - (\dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{q} \end{aligned} \quad (11)$$

$$m_Q \ddot{\mathbf{X}}_Q = f R \mathbf{e}_3 - m_Q g \mathbf{e}_3 - T \mathbf{q} \quad (4)$$

$$m_t \ddot{\mathbf{X}}_t = T \mathbf{q} + \mathbf{f}_k - f_N \mathbf{e}_3 - m_t g \mathbf{e}_3 \quad (5)$$

به دست می‌آیند که در این روابط $\mathbf{q} = \frac{\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_Q}{L}$ بیان‌گر بردار یکه در راستای آونگ، f مجموع نیروهای تراست روتورها یعنی $\sum_{i=1}^4 T_i$ و ماتریس R ماتریس توصیف جهت‌گیری چهارچوب $\{B\}$ نسبت به چهارچوب لخت $\{E\}$ است. با توجه به ثابت بودن طول میله آونگ، رابطه‌ی

$$(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_Q) \cdot (\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_Q) = L^2 \quad (6)$$

همواره برقرار است که در حقیقت قید حاکم بر حرکت انتقالی کوادروتور و آونگ می‌باشد. با دوبار مشتق گرفتن از این قید، رابطه

$$(\ddot{\mathbf{X}}_t - \ddot{\mathbf{X}}_Q) \cdot \mathbf{q} + L (\dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}}) = 0 \quad (7)$$

به دست می‌آید که با جایگذاری روابط (۴) و (۵) در رابطه (۷) می‌توان

تا مرکز جرم کوادروتور است. رابطه‌ی (۱۴) در کنار رابطه‌ی سینماتیکی

$$\dot{R} = R\hat{\Omega} \quad (16)$$

معادلات حرکت دورانی کوادروتور را تکمیل می‌نمایند. در این رابطه، $\hat{\Omega}$ ماتریس پادمتقارنی است که به صورت

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

تعریف شده‌است. معادلات حرکت به دست آمده برای سیستم کوادروتور — آونگ در حالت غیرمقید یعنی حالتی که پاندول با سطح افقی در تماس نباشد، دقیقاً مطابق معادلات ارائه شده در مرجع [۲۵] است. دینامیک دورانی روتورهای پرنده کوادروتور نیز به صورت

$$\dot{\omega}_i = -k_{esc} (\omega_i - \omega_i^d) \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (18)$$

قابل بیان است [۲۶] که k_{esc} ضریب کنترل کننده الکترونیکی سرعت می‌باشد و ω_i^d دستور سرعت دورانی مطلوب است که از میکروکنترلر به کنترل کننده الکترونیکی سرعت ارسال می‌شود و در حقیقت ورودیهای کنترلی سیستم هستند.

۳- طراحی کنترل کننده

در این بخش ابتدا مدلی برای نیروی وارد بر پاندول از طرف سطح ارائه و سپس تحلیلی از رفتار غیرخطی سیستم، تأثیر مقدار پارامترهای سیستم بر دینامیک آن و شرایط لازم برای پایداری ارائه شده‌است. در ادامه نیز روند طراحی کنترل کننده به صورت مبسوط شرح داده شده‌است.

۳-۱- مدل سازی نیروی وارد بر پاندول از طرف سطح

با توجه به این که در این مطالعه یکی از اهداف کنترلی، کنترل نیروی قائم وارد از طرف آونگ به سقف است، لذا باید این نیرو به نحوی مدل سازی شود. بدین منظور همانند آنچه در مدل سازی تایلر در سیستم تعلیق انجام

بازنویسی نمود. از طرفی تکانه زاویه‌ای پرنده در دستگاه مختصات متصل به کوادروتور توسط رابطه‌ی

$$H = J_O \Omega + J_r \Omega_r \quad (12)$$

قابل بیان است که در آن J_O ماتریس ممان اینرسی کل مجموعه کوادروتور در دستگاه مختصات متصل به مرکز جرم آن است، J_r ممان اینرسی روتور حول محور شفت آن، Ω بردار سرعت زاویه‌ای در دستگاه متصل به بدنه و Ω_r بردار مجموع سرعت زاویه‌ای پره‌های موتورهای کوادروتور است که به صورت

$$\Omega_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^4 (-1)^i \omega_i \end{bmatrix} \quad (13)$$

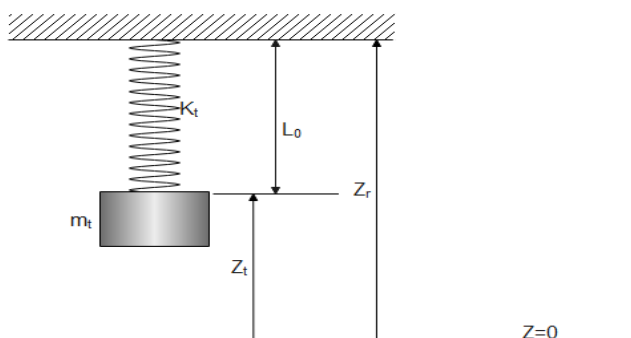
قابل بیان است. بنابراین، دینامیک حرکت دورانی کوادروتور به شکل زیر به دست می‌آید:

$$J_O \dot{\Omega} + J_r \dot{\Omega}_r + \Omega \times (J_O \Omega + J_r \Omega_r) = M \quad (14)$$

در این رابطه ترم M مجموع گشتاورهای وارد بر پرنده کوادروتور را نشان می‌دهد که بر اساس شکل ۱ و با توجه به این که میله متصل کننده به مرکز جرم کوادروتور متصل است، برابر است با:

$$M = \begin{bmatrix} l(T_2 - T_4) \\ l(T_3 - T_1) \\ ((Q_2 + Q_4) - (Q_1 + Q_3)) \end{bmatrix} \quad (15)$$

که l طول بازوی پرنده کوادروتور یا به عبارتی فاصله‌ی محور روتورها



شکل ۳. شماتیک مدل جرم و فنر کششی برای دینامیک قائم آونگ

Fig. 3. Schematic of spring-mass model for vertical dynamics of the pendulum

$$\ddot{\zeta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k_t \end{bmatrix} \times \left(\frac{-(m_Q \mathbf{f}_r \cdot \mathbf{q}) \mathbf{q} + (m_t \mathbf{f} \mathbf{R} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{q}) \mathbf{q}}{m_t (m_t + m_Q)} + \frac{-m_t m_Q L (\dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{q}}{m_t (m_t + m_Q)} \frac{\mathbf{f}_r}{m_t} - g \mathbf{e}_3 \right) \quad (21)$$

بیان نمود.

۳-۲- تحلیل دینامیک سیستم

سیستم مورد نظر یک سیستم ۸ درجه آزادی است که تنها ۴ ورودی کنترلی دارد. این به معنی است که سیستم مورد مطالعه یک سیستم تحریک ناقص است. با این وجود می‌توان نشان داد که می‌توان توسط این ورودی‌های کنترلی، موقعیت آونگ و نیروی اعمالی از آن به سطح و زاویه یاو کوادروتور را از طریق تغییر جهت‌گیری کوادروتور و حرکت آن که خود باعث حرکت میله می‌شود، بر روی یک ترجکتوری مطلوب هدایت نمود. به عبارت دیگر، بدین وسیله می‌توان کنترل‌پذیری سیستم را به اثبات رساند. برای نشان دادن این واقعیت کافی است فرض شود مسیر و نیروی آونگ بر روی ترجکتوری مطلوب قرار داشته باشد. در این صورت با استفاده از معادله‌ی (۵) می‌توان ترجکتوری نیروی میله و راستای آن را به دست آورد. به عبارتی می‌توان نتیجه گرفت برای طی یک مسیر توسط آونگ و اعمال نیروی مورد نظر راستای میله و نیروی آن یک ترجکتوری مشخصی را

می‌شود [۲۷]، می‌توان آونگ را به صورت یک سیستم جرم و فنر مطابق شکل ۳ فرض کرد:

در این شکل z_r ارتفاع سقف، z_t ارتفاع آونگ، و L و k_t به ترتیب طول آزاد و ثابت فنری است که نیروی وارده از طرف آن به جسم معادل نیروی عمودی است که از طرف سطح سقف به آونگ وارد می‌شود. البته بایستی توجه نمود که این مدل تنها در صورتی که آونگ با سقف در تماس است، کارایی دارد. به عبارت دیگر، مقدار نیروی عمودی وارد از طرف سطح سقف به آونگ f_N به صورت

$$f_N = \begin{cases} 0 & z_r - z_t \geq L_0 \\ -k_t (z_r - z_t - L_0) & z_r - z_t < L_0 \end{cases} \quad (19)$$

حال، اگر بردار ζ به صورت زیر تعریف شود:

$$\zeta = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ f_N \end{bmatrix} \quad (20)$$

با استفاده از معادله‌ی (۱۰) و مدل در نظر گرفته شده برای f_N در رابطه‌ی (۱۹)، می‌توان دینامیک حرکت و دینامیک نیروی عمودی وارده از آونگ به سقف را با معادله‌ی

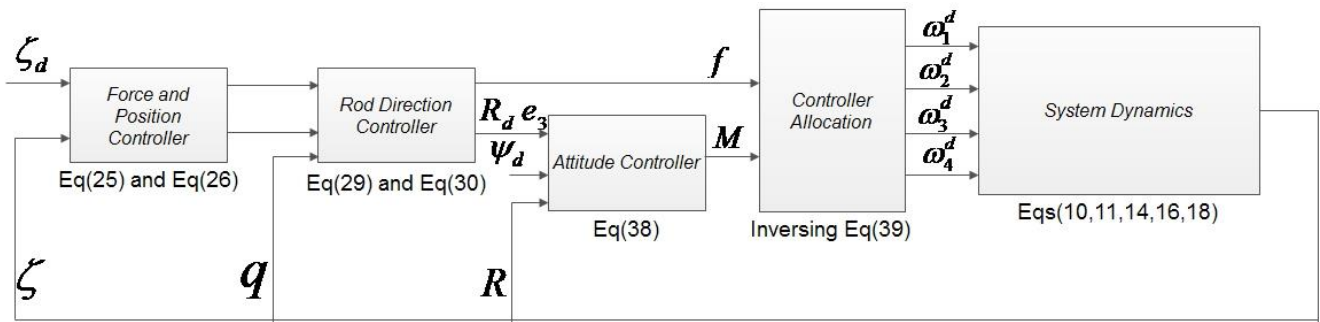
طی خواهند نمود. سپس با استفاده از رابطه‌ی $q = \frac{X_t - X_0}{L}$ ترجکتوری کوادروتور نیز به دست می‌آید. این به معنی است که کوادروتور نیز بر روی یک مسیر مشخص حرکت خواهد نمود. در ادامه، با استفاده از معادله‌ی (۴) و مشتق‌گیری از ترجکتوری مسیر کوادروتور، ترجکتوری جهت نیروی تراست کوادروتور و مقدار آن هنگام حرکت پاندول روی مسیر مورد نظر و اعمال نیروی مطلوب قابل محاسبه است. ترجکتوری جهت نیروی تراست همراه با ترجکتوری زاویه یاو ترجکتوری ماتریس جهت‌گیری کوادروتور را مشخص می‌نماید. با استفاده از معادله (۱۶) ترجکتوری سرعت زاویه‌ای کوادروتور قابل محاسبه است و با مشتق‌گیری از آن و فرض ناچیز بودن ممان اینرسی روتور و معادله‌ی (۱۴) ترجکتوری گشتاور وارد بر کوادروتور به دست می‌آید. حال با فرض سریع بودن دینامیک روتورها می‌توان ترجکتوری سرعت زاویه‌ای روتورها که ورودی‌های کنترلی سیستم هستند را به دست آورد. بحث انجام شده در حقیقت مسطح بودن دیفرانسیلی معادلات حرکت سیستم را با فرض موقعیت افقی آونگ، نیروی آن و زاویه‌ی یاو به عنوان خروجی‌های مسطح نشان می‌دهد. در ادامه بحث بیشتری در مورد شرایط پایداری و اثرات مقادیر پارامترهای سیستم انجام شده است.

با توجه به معادله (۲۱) معادلات حرکت انتقالی پاندول در راستای X و Y با همدیگر و با دینامیک نیروی وارد بر آن به دلیل نیروی اصطکاک که مقدار آن به مقدار نیرو و جهت آن در خلاف جهت سرعت افقی پاندول بر روی سطح است، کوپل هستند و هر چه ضریب اصطکاک جنبشی بیشتر باشد، کوپلینگ معادلات نیز بیش‌تر خواهد بود. بر اساس معادله‌ی مذکور، برای این که دینامیک حرکت افقی پاندول و دینامیک نیروی آن بر روی ترجکتوری مطلوب پایدار باشد، کافی است راستای میله و مؤلفه‌ی نیروی تراست در راستای آن طوری باشند که اثر ترم‌های اصطکاک و نیروی قائم، شتاب گرانش و مرکز‌گرا خنثی شود و دینامیک خطای ردیابی مسیر و نیروی پاندول که بدین ترتیب خطی شده است، پایدار شود. از طرفی، هر چه مقدار k_t بیشتر باشد، اثر خطای جهت‌گیری راستای میله و خطای مؤلفه‌ی نیروی تراست در راستای میله بر دینامیک خطای ردیابی نیروی مطلوب بیشتر خواهد بود. به عبارت دیگر، برای حفظ پایداری دینامیک خطای ردیابی نیروی مطلوب پاندول، لازم است سرعت همگرایی به نقطه تعادل برای دینامیک خطای راستای میله و خطای جهت‌گیری کوادروتور بیشتر باشد تا دینامیک خطای ردیابی به حالت خطی پایدار مورد نظر نزدیک باقی بماند. از طرفی، معادله‌ی (۱۱) نشان می‌دهد که دینامیک راستای میله نیز با دینامیک حرکت انتقالی و نیروی پاندول کوپل شده است و هر چه حاصل

ضرب طول میله در جرم پاندول کم‌تر باشد، میزان تأثیر نیروی قائم وارد بر پاندول و نیروی اصطکاک بر دینامیک جهت‌گیری میله بیشتر خواهد بود. برای حفظ پایداری راستای میله در امتداد مطلوب کافی است مؤلفه عمود بر میله‌ی نیروی تراست طوری باشد که اثر نیروی اصطکاک را بر دینامیک راستای میله حذف و دینامیک خطای جهت‌گیری میله را پایدار نماید. نکته مهم این است که با داشتن مؤلفه‌ی مماس بر میله و قائم بر میله‌ی نیروی تراست و هم چنین زاویه‌ی یاو مطلوب کوادروتور، جهت‌گیری مطلوب کوادروتور برای پایداری دینامیک خطای پاندول و دینامیک خطای میله قابل تعیین خواهد بود. از معادله‌ی (۱۱) می‌توان نتیجه گرفت که هر چه حاصل ضرب جرم پاندول در طول میله متصل کننده بیشتر باشد اثر خطای جهت‌گیری کوادروتور بر دینامیک خطای جهت‌گیری میله کم‌تر خواهد بود. به عبارت دیگر، هر چه این حاصل ضرب کم‌تر باشد، بایستی خطای جهت‌گیری سریع‌تر به صفر میل نماید، تا پایداری سیستم حفظ شود. معادلات دینامیک دورانی کوادروتور یعنی معادلات (۱۶) و (۱۸) نشان می‌دهد که برای کنترل جهت‌گیری کوادروتور، بایستی گشتاور ژيروسکوپیک بدنه، گشتاور اینرسی روتورها و گشتاور ژيروسکوپیک حاصل از آنها باید توسط گشتاور حاصل از روتورها جبران و دینامیک جهت‌گیری کوادروتور پایدار شود. هرچه نسبت ممان اینرسی روتورها به ممان اینرسی بدنه بیشتر باشد، اثر گشتاور اینرسی و ژيروسکوپیک آن‌ها بر دینامیک دورانی کوادروتور بیش‌تر خواهد بود. از آن جایی که دینامیک پاندول و میله بر دینامیک دورانی کوادروتور تأثیری ندارند (معادلات (۱۴) و (۱۶)) برای پایداری دینامیک دورانی کوادروتور می‌توان از کنترل‌کننده‌های وضعیت طراحی شده برای کوادروتور در ادبیات بهره جست.

۳-۳- ساختار کنترل‌کننده و قوانین کنترلی

بر اساس تحلیل ارائه شده برای دینامیک سیستم مورد مطالعه، کنترل‌کننده‌ی طراحی شده، دارای سه حلقه‌ی کنترلی تو در تو است. خارجی‌ترین حلقه‌ی کنترلی، با استفاده از خطای ردیابی مسیر و نیروی مطلوب آونگ، جهت‌گیری مطلوب میله‌ی متصل کننده و مؤلفه‌ی مطلوب بردار نیروی تراست روتورها در راستای میله را محاسبه می‌کند. مقادیر محاسبه شده به حلقه‌ی کنترلی میانی که برای کنترل جهت‌گیری میله است داده می‌شود. در این حلقه‌ی کنترلی بر اساس خطای جهت‌گیری میله، مقدار مناسب نیروی تراست و جهت‌گیری مطلوب محور Z دستگاه مختصات متصل به کوادروتور تعیین می‌شود. سپس داخلی‌ترین حلقه‌ی کنترلی که



شکل ۴. شماتیک ساختار کنترل کننده

Fig. 4. Schematic of the controller structure

$$A = m_t (m_t + m_Q) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k_t \end{bmatrix} \times \quad (24)$$

$$\left(-k_d \dot{e}_\zeta - k_p e_\zeta - k_i \int e_\zeta dt + \zeta^d \right) + g e_3 + (m_t + m_Q) f_r + m_t m_Q L (\dot{q} \cdot q) q - (m_Q f_r \cdot q) q$$

مقدار مطلوب جهت‌گیری پاندول یعنی q_d و همچنین مقدار تصویر نیروی تراست مطلوب $(f R e_3)^d$ در امتداد میله به شکل زیر قابل محاسبه است:

$$(f R e_3)^d \cdot q = A \cdot q / m_t \quad (25)$$

$$q_d = \frac{A}{\|A\|} \quad (26)$$

۳-۲- طراحی حلقه کنترلی جهت‌گیری میله متصل کننده
قضیه ۱: اگر

$$\dot{e}_q = -k_q e_q - k_\omega e_{\dot{q}} \quad (27)$$

باشد که در آن $e_q = \hat{q}^T q_d$ و $e_{\dot{q}} = \dot{q} - (q_d \times \dot{q}_d) \times q$ است و $k_\omega, k_q > 0$ و دارای مقادیر ثابتی هستند و در صورتی که شرط اولیه‌ی

کنترل‌کننده‌ی وضعیت کوادروتور است، بر اساس جهت‌گیری مناسب تعیین شده برای محور Z دستگاه مختصات متصل به کوادروتور و زاویه‌ی یابو مطلوب، جهت‌گیری مطلوب کوادروتور را محاسبه و بر اساس خطای جهت‌گیری، گشتاورهایی که باید برای کاهش این خطا به کوادروتور اعمال شود محاسبه می‌کند. در نهایت نیز با استفاده از نیروی تراست و گشتاورهای مطلوب محاسبه شده، سرعت‌های زاویه‌ای مطلوب روتورها تعیین می‌شود. در شکل ۴ ساختار کنترل کننده به صورت شماتیک نشان داده شده است.

۳-۳-۱ طراحی حلقه‌ی کنترلی موقعیت و نیروی آونگ

اگر خطای ζ و مقدار مطلوب آن یعنی ζ^d به صورت

$$e_\zeta = \zeta - \zeta^d \quad (22)$$

تعریف شود و معادله‌ی دینامیک خطای e_ζ به صورت

$$\ddot{e}_\zeta = -k_d \dot{e}_\zeta - k_p e_\zeta - k_i \int e_\zeta dt \quad (23)$$

باشد که در آن k_d ، k_p ، k_i ماتریس‌های بهره‌ی قطری با درایه‌های ثابت و مثبت می‌باشند، بدیهی است دینامیک خطای e_ζ به صورت نمایی پایدار خواهد بود و به صفر میل خواهد کرد. با استفاده از روابط (۲۱) و (۲۳) و تعریف A به صورت

۳-۳-۳ طراحی حلقه کنترلی جهت گیری کوادروتور

قضیه ۲: اگر

$$\dot{\mathbf{e}}_{\Omega} = -k_R \mathbf{e}_R - k_{\Omega} \mathbf{e}_{\Omega} \quad (34)$$

باشد که در آن k_{Ω} و k_R مقادیر ثابت و مثبتی هستند و \mathbf{e}_{Ω} و \mathbf{e}_R از روابط

$$\mathbf{e}_R = \frac{1}{2} (\mathbf{R}_d^T \mathbf{R} - \mathbf{R}^T \mathbf{R}_d)^V \quad (35)$$

$$\mathbf{e}_{\Omega} = \mathbf{\Omega} - \mathbf{R}^T \mathbf{R}_d \mathbf{\Omega}_d \quad (36)$$

به دست می‌آیند و همچنین شرط اولیهی

$$k_R \Psi_R(0) + \frac{1}{2} \mathbf{e}_{\Omega}(0)^2 < 2k_R \quad (37)$$

که در آن $\mathcal{O}_R = \frac{1}{2} \text{trace}(\mathbf{I} - \mathbf{R}_d^T \mathbf{R})$ است و بیان‌گر خطای جهت‌گیری کوادروتور است، برقرار باشد، آن گاه \mathcal{O}_R به صورت نمایی به صفر میل می‌کند که به معنی این است که ماتریس دوران \mathbf{R} به سمت ماتریس \mathbf{R}_d میل خواهد نمود.

اثبات: مرجع [۲۸].

حال با استفاده از قضیه‌ی اخیر و با فرض ناچیز بودن ممان اینرسی روتورها و در نتیجه ناچیز بودن اثرات گشتاور اینرسی روتورها و اثرات ژيروسکوپیک دوران روتورها، طبق رابطه (۱۴) باید

$$\mathbf{M} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{J}_Q \mathbf{\Omega} + \mathbf{J}_Q (-\hat{\mathbf{\Omega}} \mathbf{R}^T \mathbf{R}_d \mathbf{\Omega}_d + \mathbf{R}^T \mathbf{R}_d \dot{\mathbf{\Omega}}_d - k_R \mathbf{e}_R - k_{\Omega} \mathbf{e}_{\Omega}) \quad (38)$$

باشد. پس از تعیین نیروی تراست و گشتاورهایی که برای کنترل سیستم باید به آن وارد شود، لازم است ورودی‌های کنترلی لازم برای تأمین این نیرو و گشتاور محاسبه شود. بدین منظور فرض می‌شود دینامیک سرعت زاویه‌ای روتورها به مقدار کافی سریع است. البته این فرض دور از واقعیتی نیست و

$$k_q \Psi_q(0) + \frac{1}{2} \mathbf{e}_q(0)^2 < 2k_q \quad (28)$$

برقرار باشد که در آن $\mathcal{O}_q = 1 - \mathbf{q}_d^T \mathbf{q}$ است و بیان‌گر خطای جهت‌گیری میله است، آن گاه می‌توان نشان داد که \mathcal{O}_q بصورت نمایی به سمت صفر میل خواهد کرد که به معنی این است که $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}_d$ میل خواهد نمود.

اثبات: مرجع [۲۸].

حال با استفاده از این قضیه و روابط (۱۱) و (۲۵) و (۲۷) می‌توان مقدار و جهت‌گیری مطلوب نیروی تراست را به صورت

$$\mathbf{f} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{R} \mathbf{e}_3 \quad (29)$$

$$\mathbf{R}_d \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{F}}{\|\mathbf{F}\|} \quad (30)$$

به دست آورد که در آن

$$\mathbf{F} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{q}) \mathbf{q} / m_t - \frac{m_Q}{m_t} \mathbf{q} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{f}_r) + m_Q L [-(\mathbf{q}_d \times \ddot{\mathbf{q}}_d) \times \mathbf{q} - (\mathbf{q}_d \times \dot{\mathbf{q}}_d) \times \dot{\mathbf{q}} + k_q \mathbf{e}_q + k_{\omega} \mathbf{e}_q] \quad (31)$$

در صورتی که ماتریس دوران \mathbf{R} با زوایای اوایلر رول، پیچ و یاو بیان شود، می‌توان زاویه‌ی رول مطلوب ϕ_d و زاویه‌ی پیچ مطلوب θ_d را از روابط

$$\theta_d = \sin^{-1} \left(\frac{F_x}{\|\mathbf{F}\|} \right) \quad (32)$$

$$\phi_d = \text{atan2} \left(-\frac{F_y}{\|\mathbf{F}\|}, \frac{F_z}{\|\mathbf{F}\|} \right) \quad (33)$$

به دست آورد. زاویه‌ی یاو مطلوب نیز همان طور که پیشتر اشاره شد، به صورت دلخواه قابل تعیین است.

مشخصات کوادروتور مطابق با کوادروتور مرجع [۲۹] است.

با توجه به این که توانایی حمل بار اضافی توسط کوادروتورها معمولاً حداکثر نصف جرم کل است، جرم آونگ یک سوم جرم کوادروتور انتخاب شده است. طول میله متصل کننده نیز ۳۰ سانتی متر بیش تر از طول بازوی کوادروتور در نظر گرفته شده است تا هنگام انجام عملیات کوادروتور با سقف برخوردی نداشته باشد. مقدار ضریب سختی فنر معادل نیز بر اساس کاربرد در نظر گرفته شده و نرم بودن اسفنج نظافت انتخاب شده است. مقدار ضریب اصطکاک جنبشی نیز به دلخواه انتخاب شده است که البته اثر تغییرات آن در تحلیل دینامیکی سیستم توضیح داده شده است.

معادله‌ی مسیر مطلوب با زمان به صورت

$$x_i^d = \cos(\alpha t) \quad (40)$$

$$y_i^d = \sin(2\alpha t)$$

در نظر گرفته شده است. از طرفی مقدار مطلوب نیرویی که توسط آونگ معکوس بایستی به سطح سقف اعمال شود به صورت $f_N^d = 1 \text{ N}$ می باشد. هم چنین، زاویه‌ی یاو مطلوب برابر با صفر در نظر گرفته شده است. در تمام شبیه‌سازی‌ها کوادروتور در ابتدای حرکت دارای زاویه رول و پیچ صفر و زاویه‌ی یاو برابر با $0/1$ رادیان است. موقعیت اولیه‌ی کوادروتور در تمام شبیه‌سازی‌ها برابر با $\mathbf{X}_0(0) = [1 \quad 0 \quad 4/0.7]^T \text{ (m)}$ است و میله نیز در ابتدا حالت قائم قرار دارد. شرایط اولیه انتخاب شده برای نشان دادن عملکرد هیبریدی کنترل کننده است زیرا که در حالت اولیه پاندول هیچ تماسی با سقف که در ارتفاع ۵ متری قرار دارد، ندارد. در تمام شبیه‌سازی‌ها نرخ داده برداری برای تمام حلقه‌های کنترلی ۵۰۰ هرتز است که با توجه به سیستم‌های ثبت حرکت موجود نظیر وایکون و سنسورهای شتاب سنج و ژيروسکوپ موجود، عملاً امکان پذیر است و تأخیر زمانی انتقال اطلاعات ۱۰ میلی ثانیه در نظر گرفته شده است. ضرایب کنترلی قانون کنترلی نیز با سعی و خطا تا رسیدن به پاسخ مطلوب در ردیابی مسیر مطلوب با فرکانس $\alpha = 0.2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ در حالت نامی یعنی بدون حضور اغتشاشات تعیین شده است. البته، سعی و خطای انجام شده بر اساس یک سرانگشتی که برای کنترل کننده‌های آبخاری استفاده می شود، تعیین شده است. بر اساس این روش، سرعت دینامیک حلقه‌های کنترلی باید ۳ تا ۱۰ برابر بیش تر از حلقه‌ی کنترلی قبلی خود باشد. ضرایب کنترلی به دست آمده در جدول ۲

پاسخ موتورهای براشلس با استفاده از کنترل کننده‌های الکترونیکی سرعت آنها، معمولاً به میزان کافی سریع می باشد. به عبارت دیگر برای هر یک از روتورها می توان فرض کرد که $\omega_i^d = \omega_i^d$ می باشد. با فرض مذکور و با استفاده از روابط (۲) و (۳) و تعریف f و رابطه‌ی (۱۵) می توان رابطه‌ی

$$\begin{bmatrix} f \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & b & b & b \\ 0 & bl & 0 & -bl \\ -bl & 0 & bl & 0 \\ -d & d & -d & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^{d^2} \\ \omega_2^{d^2} \\ \omega_3^{d^2} \\ \omega_4^{d^2} \end{bmatrix} \quad (39)$$

را به دست آورد. حال با معکوس سازی این رابطه و استفاده از روابط (۲۹) و (۳۸) می توان سرعت‌های زاویه‌ای مطلوب روتورها برای انجام عمل کنترل، تعیین کرد.

۴- نتایج شبیه سازی

در این قسمت، کارایی کنترل کننده‌ی طراحی شده با انجام شبیه‌سازی‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. برای بررسی صحیح عملکرد کنترل کننده، در تمام شبیه‌سازی‌ها مدل کامل کوادروتور که شامل دینامیک روتور، گشتاور اینرسی روتور، اثرات ژيروسکوپیک آن و اشباع روتورها است، به کار برده شده است. افزون بر این، برای مشابه تر بودن شرایط شبیه‌سازی به شرایط عملی، در شبیه‌سازی‌ها داده برداری توسط کنترل کننده با نرخ ثابت و با در نظر گرفتن تأخیر زمانی انتقال اطلاعات صورت پذیرفته است. در شبیه‌سازی اول، عملکرد کنترل کننده در کنترل نیروی وارد بر سقف از طرف آونگ در یک مقدار ثابت و ردیابی مسیر مطلوب بررسی و مقاوم بودن کنترل کننده در مقابل داده برداری گسسته توسط آن، تأخیر زمانی انتقال اطلاعات و دینامیک مدل نشده روتورها و اثرات آن بر دینامیک دورانی کوادروتور که هنگام طراحی کنترل کننده از آن صرف نظر شده است، ارزیابی شده است. هم چنین، اثر افزایش سرعت مسیر مطلوب بر عملکرد قانون کنترلی ارائه شده نیز نشان داده شده است. نهایتاً در شبیه‌سازی دوم، مقاوم بودن روش کنترلی ارائه شده در مقابل اغتشاشات وارد بر کوادروتور بررسی شده است.

۴-۱- پارامترهای شبیه سازی

در شبیه سازی‌هایی که در این بخش انجام شده است، پارامترهای سیستم کوادروتور - آونگ طبق مقادیر مندرج در جدول ۱ انتخاب شده است.

جدول ۱. پارامترهای شبیه سازی

Table 1. Simulation parameters

مقدار پارامتر	نماد پارامتر	نام پارامتر
$7/5 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$	$J_{Q_{xx}}$	اینرسی حول محور x
$7/5 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$	$J_{Q_{yy}}$	اینرسی حول محور y
$1/3 \times 10^{-2} \text{ kg.m}^2$	$J_{Q_{zz}}$	اینرسی حول محور z
$6 \times 10^{-5} \text{ kg.m}^2$	J_r	ممان اینرسی موتور
$0/65 \text{ kg}$	m_Q	جرم پرنده کوادروتور
$0/22 \text{ kg}$	m_t	جرم آونگ متصل به پرنده کوادروتور
$9/81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	g	شتاب گرانش
$0/53 \text{ m}$	L	طول میله آونگ معکوس
$0/23 \text{ m}$	l	طول بال پرنده کوادروتور
$0/12$	μ_k	ضریب اصطکاک جنبشی
$10 \frac{\text{N}}{\text{m}}$	k_t	ضریب سختی فنر معادل ابزار
$3/13 \times 10^{-5} \text{ N.s}^2$	b	ضریب تراست
$7/5 \times 10^{-7} \text{ N.ms}^2$	d	ضریب گشتاور پسا

جدول ۲. مقادیر بهره‌های کنترلی

Table 2. Magnitudes of the controller gains

مقدار	بهره کنترلی
۲/۸	k_d
۴	k_p
۰/۴	k_i
۴۹	k_q
۹/۸	k_ω
۴۰۰	k_R
۲۸	k_ω

Y نمایش داده شده‌است. همان‌طور که مشخص است، کنترل‌کننده با وجود فرضیاتی که در مدل طراحی صورت گرفته است و با وجود تأخیر زمانی انتقال اطلاعات به کنترل‌کننده به خوبی توانسته است موقعیت آونگ را حول مسیر مطلوب آن پایدار نماید. البته به راحتی از روی نمودار مذکور می‌توان دریافت که با افزایش سرعت مسیر، کارایی کنترل‌کننده از نظر میانگین مربعات خطا مطمئناً کاهش یافته است اما از نظر دامنه‌ی خطای ماندگار تفاوت چندانی وجود ندارد. افزون بر این، بیشینه خطای ردیابی در حالت گذرا با افزایش سرعت مسیر مطلوب، افزایش یافته است که به دلیل اشباع روتورها در مرحله گذرا (شکل ۸) و تغییرات سریع سرعت زاویه‌ای روتورها، افزایش اثر گشتاور اینرسی روتورها و در نتیجه افزایش خطای جهت‌گیری کوادروتور است. اشباع روتورها به دو دلیل ممکن است رخ داده باشد. دلیل اول استفاده از مشتقات نامی به جای مشتقات فرمانهای کنترلی بین حلقه‌ای و دوم عدم در نظر گرفتن محدودیت کوادروتور در تولید تراست‌های منفی در هنگام طراحی کنترل‌کننده است. در شکل ۷ نمودار نیروی آونگ و زاویه یاو کوادروتور نمایش داده شده‌است که موفقیت کنترل‌کننده در کنترل نیروی پاندول و زاویه یاو را نشان می‌دهد. با این وجود، نوسانی شدن پاسخ ماندگار نیروی پاندول حول مقدار مطلوب آن با افزایش سرعت مسیر، نشان دهنده افت کارایی کنترل‌کننده است که عمدتاً به دلیل کم بودن پهنای باند روتورها است. البته در صورتی که کنترل‌کننده‌ی هر حلقه مشتقات فرمانی که حلقه‌ی قبلی به آن ارسال می‌نماید را به طور دقیق محاسبه کند، عملکرد کنترل‌کننده مسلماً بهتر خواهد بود. همین مساله در پاسخ ماندگار زاویه یاو نیز دیده می‌شود. بیش‌تر بودن بیشینه خطای ردیابی زاویه یاو در حالت گذرا

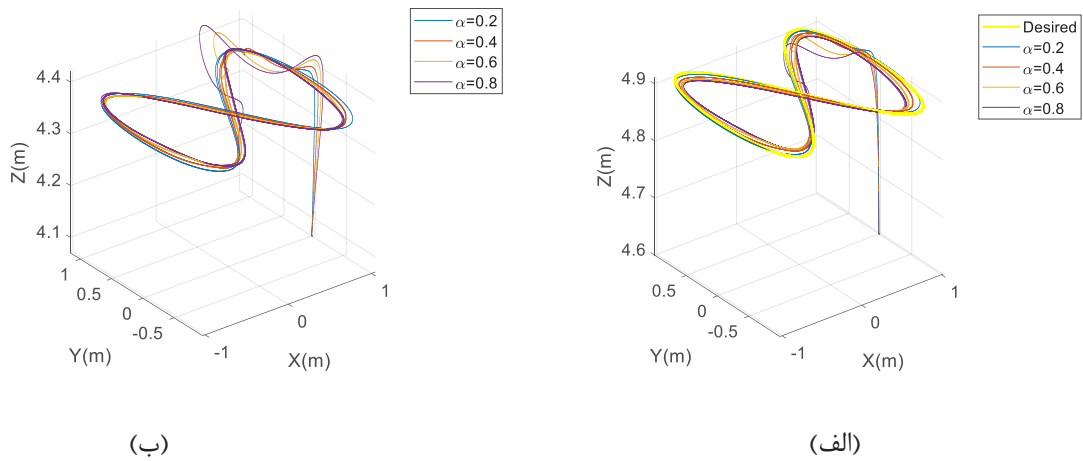
داده شده‌است.

با توجه به مشکلات محاسبه مشتقات $\dot{q}_d, \ddot{q}_d, \Omega_d, \dot{\Omega}_d$ در حین کنترل، در شبیه‌سازی‌ها مقادیر نامی آن‌ها که نحوه محاسبه آن‌ها در پاراگراف اول بخش تحلیل دینامیک سیستم به اختصار شرح داده شده‌است، توسط کنترل‌کننده به کار گرفته شده‌است.

۴-۲- شبیه‌سازی عملکرد کنترل‌کننده بدون حضور اغتشاشات

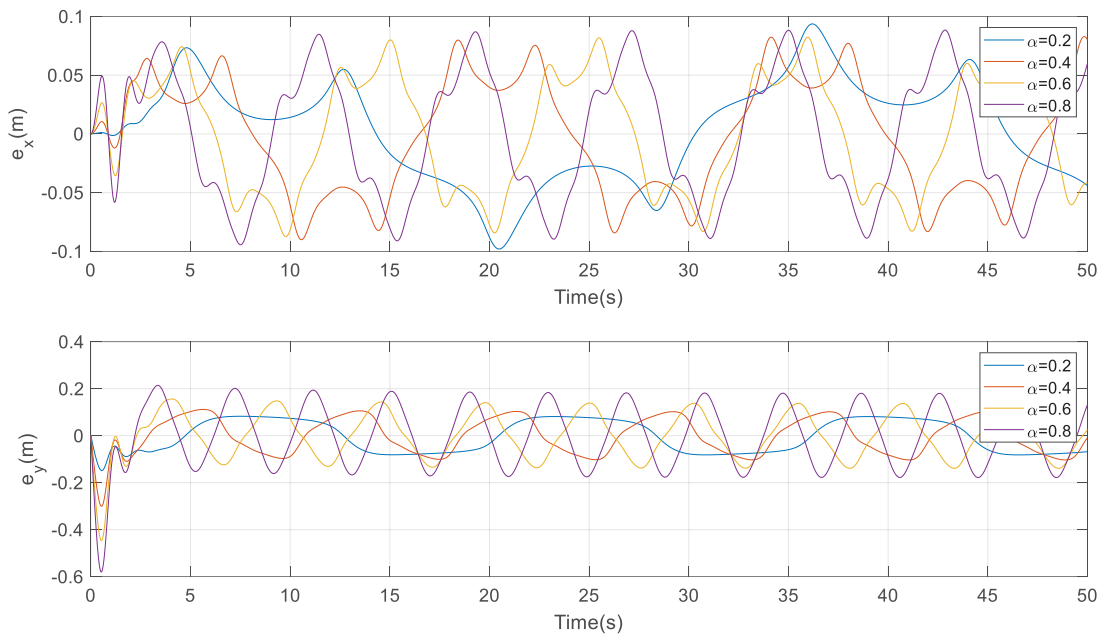
در این قسمت عملکرد کنترل‌کننده در کنترل نیروی آونگ و کنترل آونگ بر روی مسیر مطلوب بررسی خواهد شد و مقاوم بودن کنترل‌کننده در مقابل تفاوت مدل کامل سیستم با مدل طراحی و تأخیر زمانی انتقال اطلاعات به کنترل‌کننده ارزیابی خواهد شد. با توجه به این که ضرایب کنترلی برای حالتی که $\alpha = 0.2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ است، تعیین شده‌اند، اثر تغییر α یعنی سرعت مسیر بر عملکرد کنترل‌کننده نیز بررسی خواهد شد.

نتایج شبیه‌سازی در شکل‌های ۵ تا ۱۰ نمایش داده شده‌است. در شکل ۵- الف مسیر طی شده توسط آونگ در حین ردیابی مسیر مطلوب با سرعت‌های متفاوت در قیاس با مسیر مطلوب آن نمایش داده شده‌است. در شکل ۵-ب، مسیری که کوادروتور برای هدایت آونگ بر روی مسیر مطلوب طی کرده‌است، نمایش داده شده‌است. همان‌طور که پیداست کنترل‌کننده توانسته است در تمام حالات به خوبی آونگ را روی مسیر مطلوب کنترل نماید. تند و تیزتر شدن مسیر کوادروتور برای کنترل پاندول در مسیرهای با سرعت بالاتر نیز مشهود است. برای بررسی دقیق‌تر عملکرد کنترل‌کننده، در شکل ۶ نمودار خطای ردیابی مسیر در امتداد محورهای X و



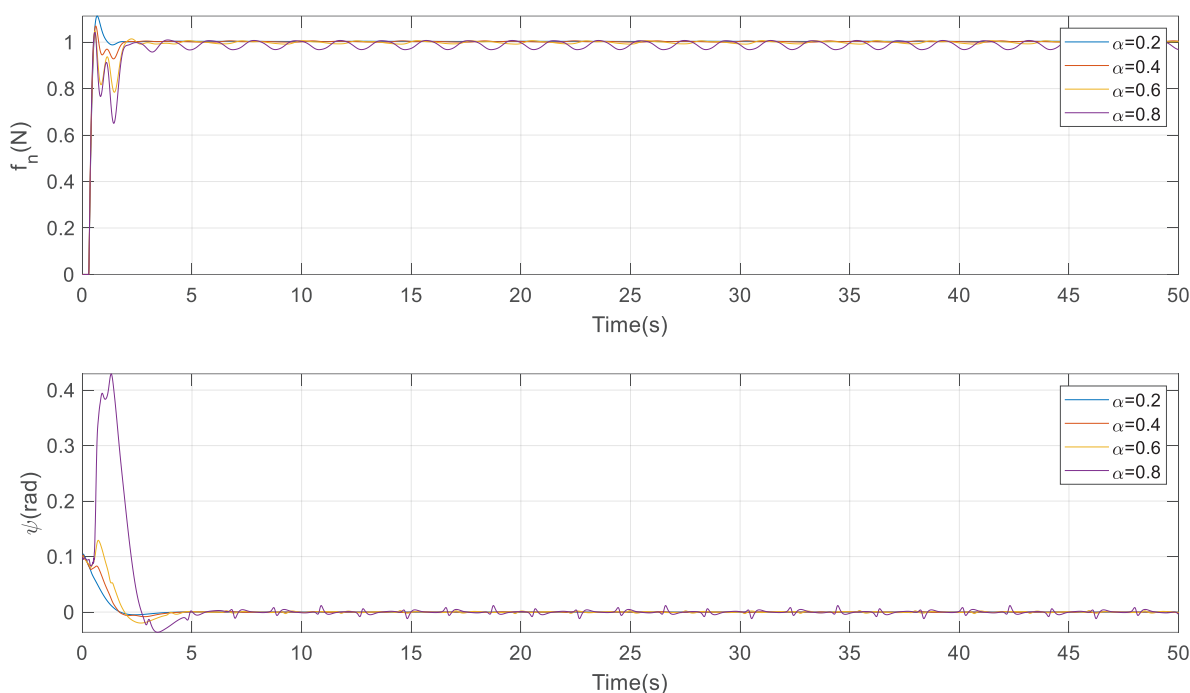
شکل ۵. مسیر آونگ و کوادروتور در حین ردیابی مسیر و نیروی مطلوب آونگ: (الف) مسیر آونگ و مسیر مطلوب آن، (ب) مسیر کوادروتور برای هدایت آونگ روی مسیر مطلوب

Fig. 5. Paths of the quadrotor and pendulum during tracking the desired trajectory of the position and force: (a) Path of the pendulum vs its desired path, (b) Path of the quadrotor for guiding the pendulum on the desired trajectory.



شکل ۶. خطای ردیابی مسیر توسط پاندول

Fig. 6. Pendulum path tracking error



شکل ۷. نیروی آونگ و زاویه‌ی یاو کوادروتور بر حسب زمان

Fig. 7. Pendulum force and yaw angle of the quadrotor vs time

شبیه‌سازی شد. نتایج شبیه‌سازی عملکرد قانون کنترلی در حضور اغتشاشات مذکور در شکل‌های ۱۱ تا ۱۳ نمایش داده شده‌است. در شکل ۱۱ نمودار خطای ردیابی مسیر مطلوب توسط آونگ در حضور اغتشاشات بر حسب زمان رسم شده‌است.

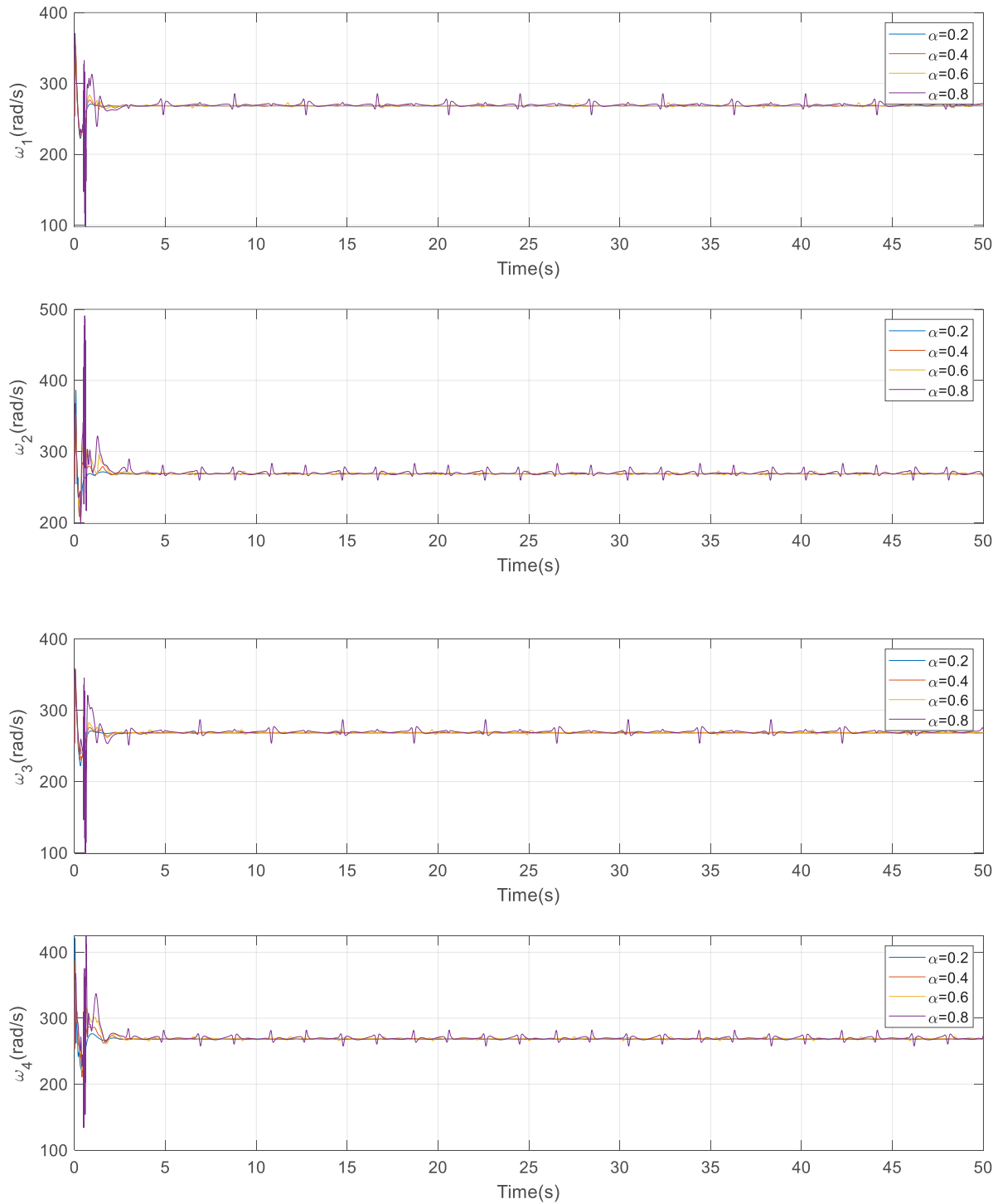
در شکل ۱۲ نیز نمودار نیروی وارد از آونگ به سطح و زاویه یاو کوادروتور بر حسب زمان رسم شده‌است. نمودارهای شکل ۱۱ و ۱۲ نشان می‌دهد که کنترل‌کننده ارائه شده در مقابل اغتشاشات وارد بر کوادروتور مقاوم است و علی‌رغم وجود اغتشاشات توانسته است موقعیت و نیروی آونگ و زاویه یاو کوادروتور را حول مقدار مطلوب آنها پایدار نماید. با مقایسه‌ی این نمودارها با نتایج حالت بدون اغتشاش، می‌توان مشاهده کرد که با وجود اینکه اغتشاشات تنها در راستای افقی و به صورت نیرو فرض شده‌اند، اما عملکرد کنترل‌کننده در کنترل پاسخ زاویه‌ی یاو هم تغییر نموده است که به دلیل افزایش نرخ تغییرات سرعت زاویه‌ای روتورها در حالت گذرا با حضور اغتشاشات (شکل ۱۳) و در نتیجه افزایش تأثیر گشتاور اینرسی روتورها بر دینامیک دورانی کوادروتور است.

برای مسیرهای با سرعت بالاتر نیز به دلیل اشباع روتورها در مرحله گذرا (شکل ۸) و تغییرات سریع سرعت زاویه‌ای روتورها، بیش‌تر شدن اثر گشتاور اینرسی روتورها و در نتیجه افزایش خطای جهت‌گیری کوادروتور است. نکته مهم این است که، بیش‌ترین تأثیر گشتاور اینرسی روتورها بر روی دینامیک یاو کوادروتور است که شکل ۷ به خوبی این واقعیت را نشان می‌دهد.

در ادامه نمودار مؤلفه‌های راستای میله در حین ردیابی مسیر و نیروی مطلوب بر حسب زمان و نمودارهای زاویه‌های رول و پیچ کوادروتور بر حسب زمان نمایش داده شده‌است. در تمام این نمودارها، تند و تیز شدن تغییر جهت‌های میله و کوادروتور برای حفظ پایداری مسیر و نیروی آونگ حول مقدار مطلوب، در اثر افزایش سرعت مسیر مطلوب، کاملاً مشخص است.

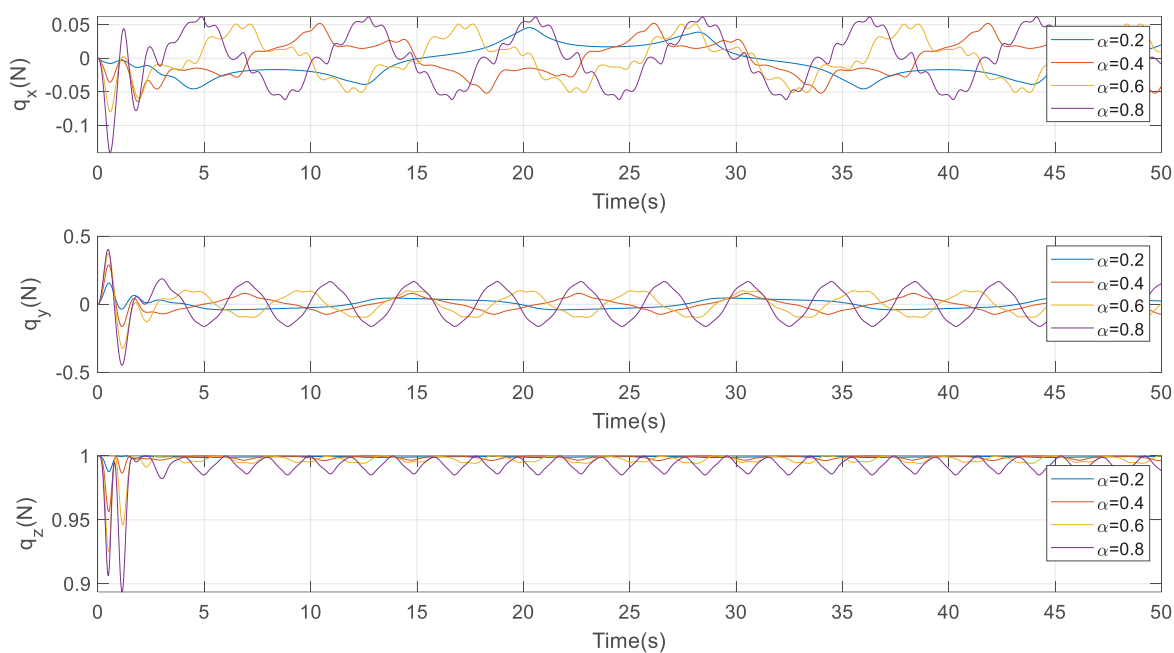
۳-۴- شبیه‌سازی عملکرد کنترل‌کننده در حضور اغتشاشات

برای بررسی مقاوم بودن روش کنترلی ارائه شده، عملیات ردیابی مسیر و نیروی مطلوب توسط آونگ در حالتی که اغتشاشات پله با دامنه 0.7 نیوتن در جهت مثبت محور X و منفی محور Y به کوادروتور وارد می‌شود،



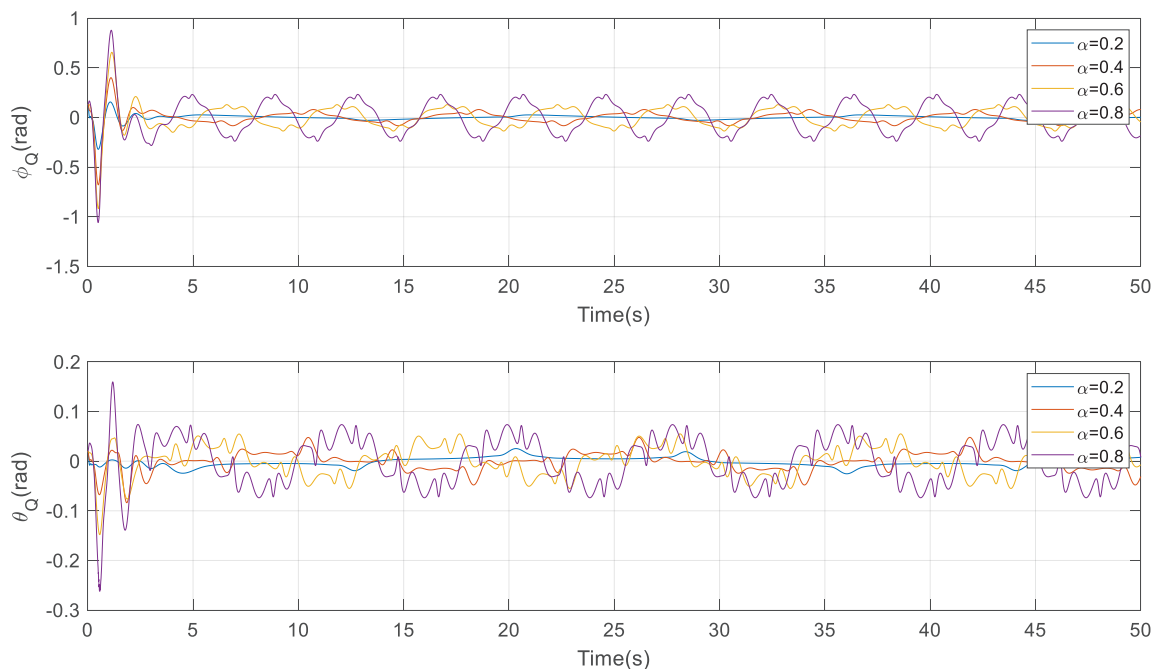
شکل ۸. سرعت زاویه‌ای روتورها در حین ردیابی مسیر و نیروی مطلوب آونگ

Fig. 8. Rotors speeds during tracking the desired path and force of the pendulum



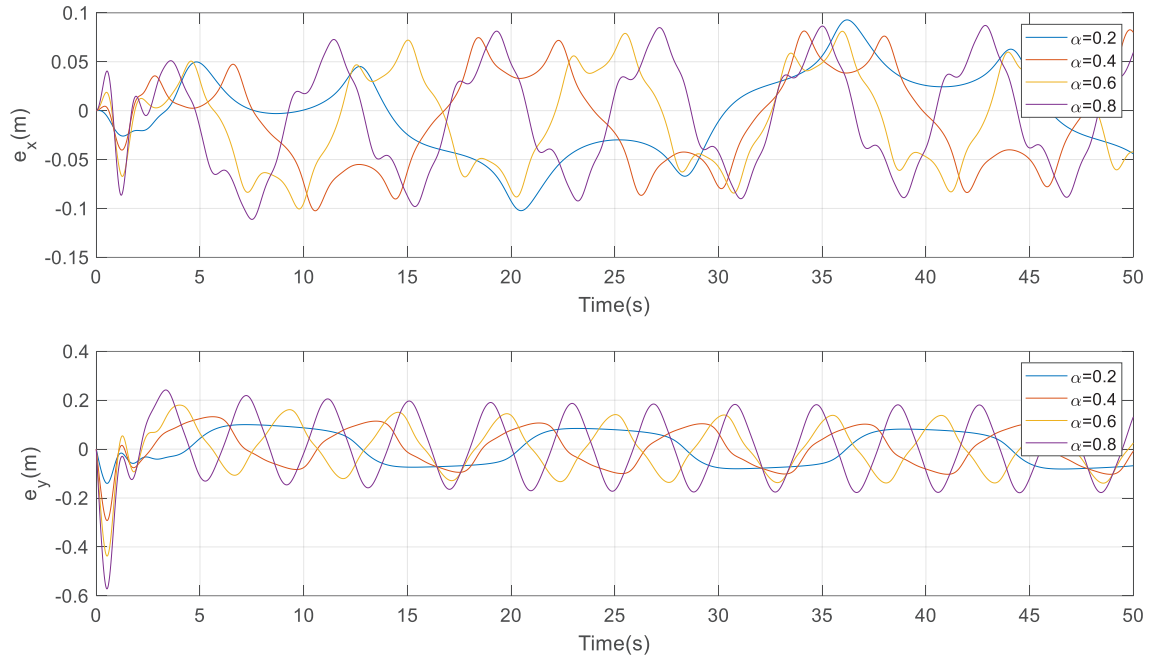
شکل ۹. مؤلفه‌های راستای میله بر حسب زمان

Fig. 9. The components of the rod direction vs time



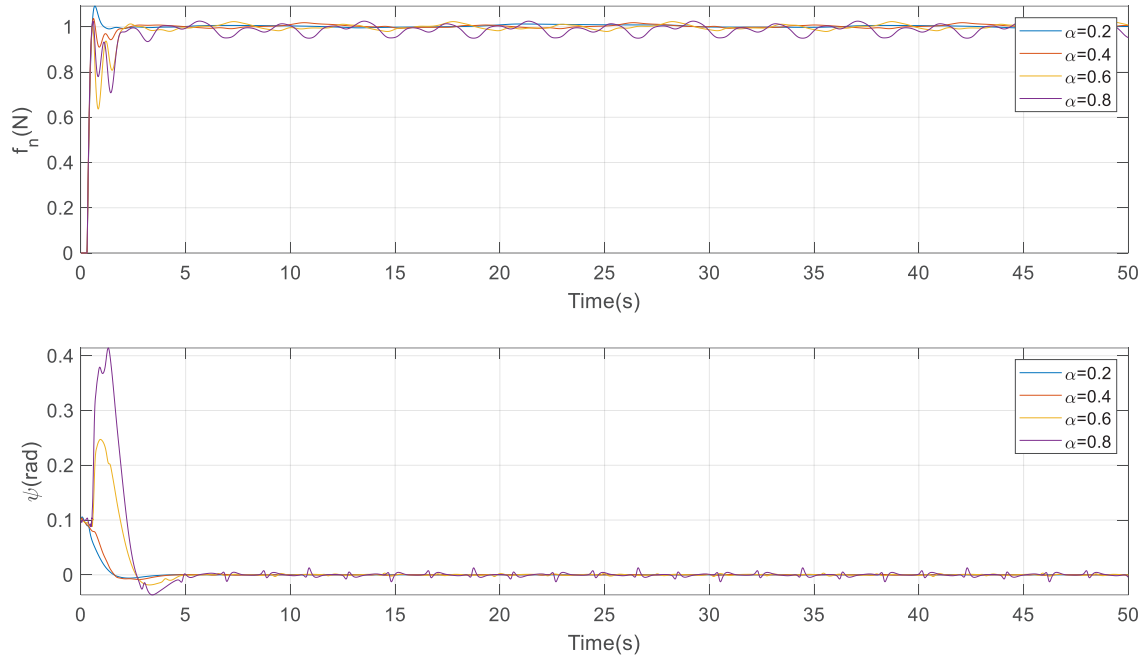
شکل ۱۰. زوایای رول و پیچ کوادروتور بر حسب زمان

Fig. 10. Roll and pitch angle of the quadrotor vs time



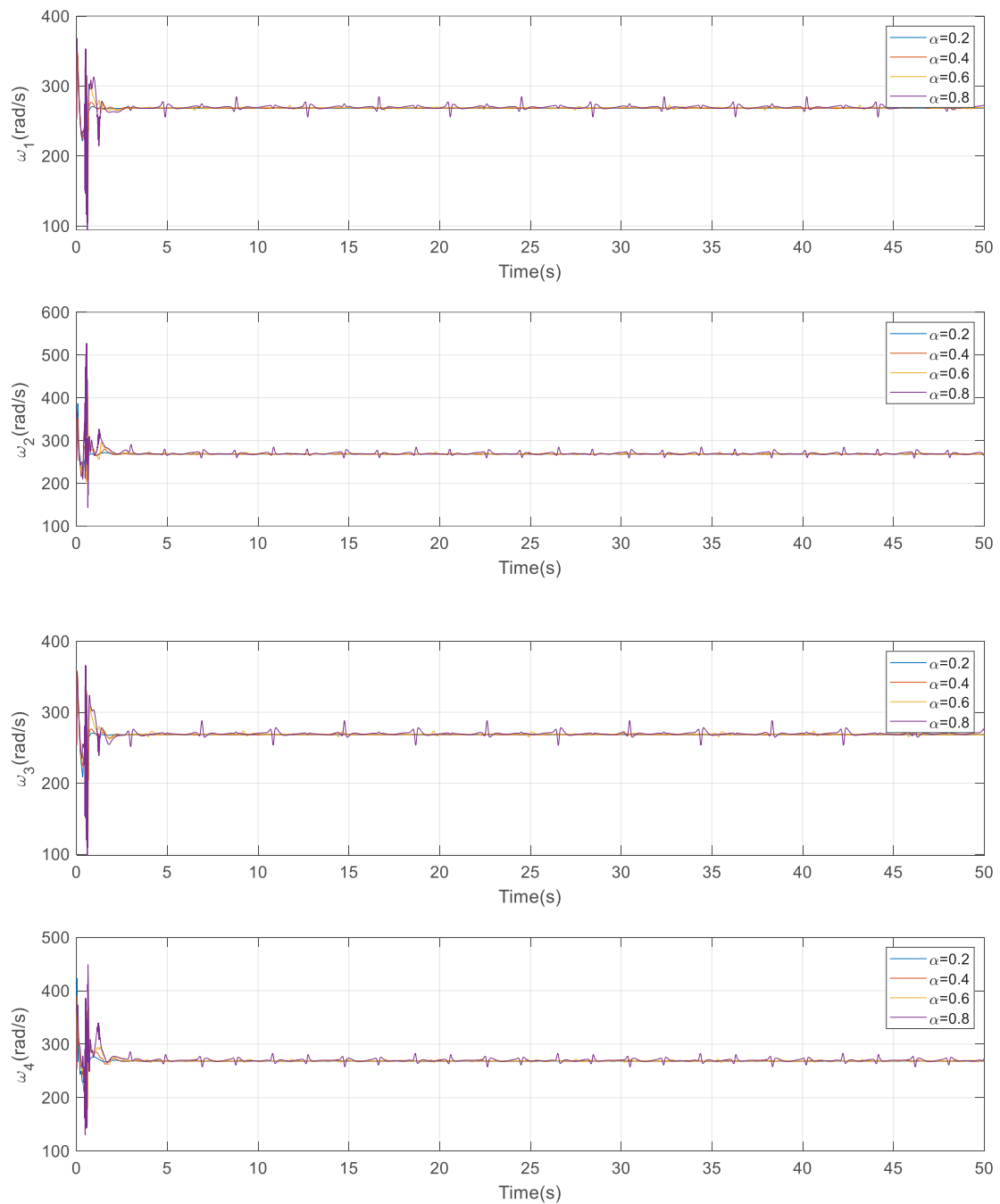
شکل ۱۱. خطای ردیابی مسیر مطلوب آونگ بر حسب زمان در حضور اغتشاشات وارد بر کوادروتور

Fig. 11. Path tracking error vs time in presence of the disturbances



شکل ۱۲. نیروی آونگ و زاویه یابو کوادروتور بر حسب زمان در حضور اغتشاشات وارد بر کوادروتور

Fig. 12. Pendulum force and quadrotor yaw angle vs time in presence of disturbances



شکل ۱۳. سرعت زاویه‌ای روتورها در حین ردیابی مسیر و نیروی مطلوب آونگ در حضور اغتشاشات وارد بر کوادروتور

Fig. 13. Speeds of the rotors during tracking the desired path and force of the pendulum in presence of disturbances

an UAV for search & rescue applications, in: IEEE Africon '11, 2011, pp. 1-6.

- [4] T. Elmokadem, Distributed Coverage Control of Quadrotor Multi-UAV Systems for Precision Agriculture, IFAC-PapersOnLine, 52(30) (2019) 251-256.
- [5] A. Eresen, N. İmamoğlu, M. Önder Efe, Autonomous quadrotor flight with vision-based obstacle avoidance in virtual environment, Expert Systems with Applications, 39(1) (2012) 894-905.
- [6] T. Yoshikawa, Dynamic hybrid position/force control of robot manipulators--Description of hand constraints and calculation of joint driving force, IEEE Journal on Robotics and Automation, 3(5) (1987) 386-392.
- [7] S. Wen, J. Han, Z. Ning, Y. Lan, X. Yin, J. Zhang, Y. Ge, Numerical analysis and validation of spray distributions disturbed by quad-rotor drone wake at different flight speeds, Computers and Electronics in Agriculture, 166 (2019) 105036.
- [8] H. Tsukagoshi, M. Watanabe, T. Hamada, D. Ashlih, R. Iizuka, Aerial manipulator with perching and door-opening capability, in: 2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 2015, pp. 4663-4668.
- [9] D. Sayfeddine, A.G. Bulgakov, T.N. Kruglova, Intelligent passively stabilized quadrotor, IOP Conference Series. Earth and Environmental Science, 87(3) (2017).
- [10] N. Azami, P. Zarafshan, A.M. Kermani, M. Khashehchi, Design and Analysis of an Armed-Octorotor to Prune Trees near the Power Lines, in: 16th International Conference of Iran Aerospace Society, Tehran, 1395.
- [11] C. Zhang, H. Hu, D. Gu, J. Wang, Cascaded control for balancing an inverted pendulum on a flying quadrotor, Robotica, 35(6) (2017) 1263-1279.
- [12] M. Hehn, R.D. Andrea, A flying inverted pendulum, in: 2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2011, pp. 763-770.

۵- جمع بندی و نتیجه گیری

در این مقاله، یک کنترل کننده سلسله مراتبی غیرخطی هندسی برای کنترل هیبرید مسیر و نیروی یک پاندول معکوس کروی متصل به کوادروتور که حرکت آن در راستای قائم توسط یک سطح افقی مقید شده است، ارائه شده است. با استفاده از قضایای ارائه شده در ادبیات کنترل هندسی، نشان داده شد که این کنترل کننده می تواند پایداری موقعیت پاندول و نیروی وارد بر آن از طرف سطح، راستای میله متصل کننده و وضعیت کوادروتور را تأمین نماید. نتایج شبیه سازی های عددی با مدل کاملی از کوادروتور و شبیه سازی داده برداری با نرخ ثابت و همراه با تأخیر زمانی نشان می دهد کنترل کننده ی ارائه شده، با وجود تأخیر زمانی انتقال اطلاعات و فرضیات ساده کننده ای که برای طراحی آن صورت پذیرفته است، می تواند پایداری پاندول را در ردیابی مسیرهای مطلوب و تأمین نیروی مطلوب تأمین نماید. البته با وجود حفظ پایداری سیستم در ردیابی مسیرهای با سرعت های بالاتر، کارایی کنترل کننده افت می نماید که به دلیل محدودیت پهنای باند عملگرها و افزایش میزان تأخیر جملات مربوط به گشتاور ژيروسکوپیک و اینرسی روتورها است. علاوه بر این، نتایج شبیه سازی نشان می دهد، کنترل کننده در مقابل اغتشاشات محیطی وارد بر کوادروتور نیز مقاوم است. تحقیقات آتی شامل مدل سازی کاملتر سیستم کوادروتور-آونگ، طراحی کنترل کننده تطبیقی برای تخمین ضریب اصطکاک و ثابت فنر معادل پاندول و پیاده سازی عملی کنترل کننده ارائه شده خواهد بود. افزون بر این، طراحی مشتق گیر ردیابی برای محاسبه ی مشتقات فرمان های کنترلی بین حلقه های که باعث بهبود عملکرد کنترل کننده خواهد شد، می تواند محل مطالعه باشد.

منابع

- [1] I. Soubry, P. Patias, V. Tsioukas, Monitoring vineyards with UAV and multi-sensors for the assessment of water stress and grape maturity, Journal of Unmanned Vehicle Systems, 5(2) (2017) 37-50.
- [2] N. Metni, T. Hamel, A UAV for bridge inspection: Visual servoing control law with orientation limits, Automation in Construction, 17(1) (2007) 3-10.
- [3] Y. Naidoo, R. Stopforth, G. Bright, Development of

- [21] S. Krafes, Z. Chalh, A. Saka, Vision-based control of a flying spherical inverted pendulum, in: 2018 4th International Conference on Optimization and Applications (ICOA), 2018, pp. 1-6.
- [22] J. Lu, Y. Yang, X. Jin, Quadrotor inverted Pendulum control based on improved Particle Swarm Optimization, in: Proceeding - 2021 China Automation Congress, CAC 2021, 2021, pp. 6280-6285.
- [23] S. Krafes, Z. Chalh, A. Saka, Visual servoing of a spherical inverted pendulum on a quadrotor using backstepping controller, International Review of Aerospace Engineering, 11(1) (2018) 6-14.
- [24] A.A. Mian, W. Daobo, Modeling and Backstepping-based Nonlinear Control Strategy for a 6 DOF Quadrotor Helicopter, Chinese Journal of Aeronautics, 21(3) (2008) 261-268.
- [25] A. Nayak, R.N. Banavar, D.H.S. Maithripala, Stabilizing a spherical pendulum on a quadrotor, Asian Journal of Control, 24(3) (2022) 1112-1121.
- [26] S.K. Phang, K. Li, K. Yu, B. Chen, T. Lee, Systematic Design and Implementation of a Micro Unmanned Quadrotor System, Unmanned Systems, 2 (2014) 1-21.
- [27] A. Malekshahi, M. Mirzaei, S. Aghasizade, Non-Linear Predictive Control of Multi-Input Multi-Output Vehicle Suspension System, Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control, 34(1) (2015) 87-105.
- [28] F. Bullo, A.D. Lewis, Stabilization and tracking for fully actuated systems, in: F. Bullo, A.D. Lewis (Eds.) Geometric Control of Mechanical Systems: Modeling, Analysis, and Design for Simple Mechanical Control Systems, Springer New York, New York, NY, 2005, pp. 529-558.
- [29] S. Bouabdallah, Design and control of quadrotors with application to autonomous flying, PhD Dissertation, EPFL, Lausanne, 2007.
- [13] C. Raimúndez, J.L. Camaño, A. Barreiro, Stabilizing an inverted spherical pendulum using a scale quad-rotor, in: The 4th Annual IEEE International Conference on Cyber Technology in Automation, Control and Intelligent, 2014, pp. 111-116.
- [14] A.M. Bloch, C. Dong Eui, N.E. Leonard, J.E. Marsden, Controlled Lagrangians and the stabilization of mechanical systems. II. Potential shaping, IEEE Transactions on Automatic Control, 46(10) (2001) 1556-1571.
- [15] T.A. Tamba, Y.Y. Nazaruiddin, E. Juliastuti, The Regulation of a Quadrotor UAV Carrying a Pendulum using Receding Horizon Control, in: 2020 12th International Conference on Information Technology and Electrical Engineering (ICITEE), 2020, pp. 63-67.
- [16] T. Ibuki, Y. Tadokoro, Y. Fujita, M. Sampei, 3D inverted pendulum stabilization on a quadrotor via bilinear system approximations, in: 2015 IEEE Conference on Control Applications (CCA), 2015, pp. 513-518.
- [17] M. Kanazawa, S. Nakaura, M. Sampei, Inverse optimal control problem for bilinear systems: Application to the inverted pendulum with horizontal and vertical movement, in: Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference, 2009, pp. 2260-2267.
- [18] C. Hintz, S. Ahmad, J. Kloeppel, R. Fierro, Robust hybrid control for swinging-up and balancing an inverted pendulum attached to a UAV, in: 2017 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA), 2017, pp. 1550-1555.
- [19] F. Cai, T. Lai, Q. Chai, W. Wang, Trajectory tracking problem of a quad-rotor Pendulum, in: 2016 Chinese Control and Decision Conference (CCDC), 2016, pp. 578-582.
- [20] W.W. Gunawan, A. Likafia, E. Joelianto, A. Widiotriatmo, Inverted Pendulum stabilization with flying quadrotor, Internetworking Indonesia Journal, 10 (2018) 29-35.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

A. A. Mahdizadeh, M. Nazari, M. Nazari, H. Ahmadi, *Sliding Mode Control of Droplet Size in a Microchannel by Adjusting Syringe-Pump Flow: Experimental Study*, *Amirkabir J. Mech Eng.*, 54(10) (2023) 2255-2276.

DOI: [10.22060/mej.2022.21308.7420](https://doi.org/10.22060/mej.2022.21308.7420)

