



تأثیر پارامترهای لایه‌چینی بر روی رفتار ارتعاشی محور کامپوزیتی هیبریدی دوار

محمد مهدی نظری، عباس رهی*، روح‌اله سرفراز

دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۲۵
بازنگری: ۱۴۰۱/۰۵/۲۹
پذیرش: ۱۴۰۱/۰۷/۲۵
ارائه آنلاین: ۱۴۰۱/۰۸/۱۴

کلمات کلیدی:

محور کامپوزیتی هیبریدی
لایه‌چینی
یاتاقان ارتجاعی
دیگرام کمبل
سرعت بحرانی

خلاصه: یک محور کامپوزیتی دوار می‌تواند برای انتقال قدرت در صنایع مربوط به ماشین آلات دوار استفاده شود. در مقایسه با یک محور انتقال قدرت فلزی مرسوم، یک محور انتقال قدرت کامپوزیتی، معمولاً دارای فرکانس‌های طبیعی و سرعت‌های بحرانی بالاتری است. در این مقاله ابتدا در حالت دوار، نتایج المان محدود یک محور کامپوزیتی ۸ لایه کربن/اپوکسی در حالت دو دیسک فولادی در وسط به صورت متقارن و قطره‌های مختلف با نتایج پژوهش پیشین مقایسه شده و صحت نتایج تأیید می‌شود. سپس یک محور کامپوزیتی تو خالی هیبریدی ۸ لایه از جنس کربن/اپوکسی و شیشه/اپوکسی با دو دیسک فولادی که روی تکیه‌گاه‌های ارتجاعی قرار دارد، مدل‌سازی می‌گردد. با بکارگیری معادلات لاگرانژ، معادلات حرکت محور کامپوزیتی هیبریدی با استفاده از تئوری تیر مدول معادل اصلاح شده بدست می‌آیند. با کدنویسی در نرم‌افزار متلب و حل عددی، نمودار دامنه بر حسب فرکانس در حالت دوار بدست می‌آید و با نتایج شبیه‌سازی محور کامپوزیتی در نرم‌افزار انسیس مقایسه شده و صحت‌گذاری انجام می‌گیرد. در نهایت تأثیر پارامترهای لایه‌چینی مانند زاویه الیاف و ترتیب استفاده از کربن/اپوکسی و شیشه/اپوکسی بر روی فرکانس‌های طبیعی بررسی می‌شود.

۱- مقدمه

کامپوزیتی با اتصالات فلزی در دو انتها در مقایسه با محور کامپوزیتی بدون اتصالات فلزی ضعیف‌تر می‌شود. باوی و همکاران [۲] اثرات ترکیبی عدم تقارن در محور و غیرخطی بودن هندسی و پایداری محوره‌های کامپوزیتی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها عدم تقارن محور را با یک مقطع مستطیلی مدل‌سازی کردند که باعث می‌شود سفتی محور در یک جهت با جهت دیگر متفاوت باشد. آن‌ها معادلات حرکت را با در نظر گرفتن زوایای اوپلر، خواص ناهمسانگرد ماده کامپوزیت و استفاده از اصل توسعه یافته همپلتون به دست آوردند و اثراتی مانند گشتاور ژيروسکوپ، اینرسی دورانی و کوپلینگ‌های غیرخطی ناشی از کشش را نیز در نظر گرفتند. علاوه بر این، برای تأیید نتایج حل به روش مقیاس‌های چندگانه، از تحلیل‌های عددی بر اساس روش رانگ کوتا استفاده کردند. باربوسا و همکاران [۳] با استفاده از آزمون تجربی در حالت دوار و تحلیل المان محدود با به کارگیری تئوری تیر همگن شده ساده شده^۱ و با لحاظ نمودن میرایی داخلی به صورت مدل کلون-ویت،

امروزه محور کامپوزیتی در صنایع مختلف از جمله صنایع هوا فضا و صنایع خودرو به علت سبک بودن و استحکام مناسب، دارای کاربردهای وسیعی می‌باشد. بررسی محور کامپوزیتی از نظر ارتعاشی برای کارکرد مناسب و پایداری سیستم دوار با سرعت دوران بالا اهمیت زیادی دارد، ولی به دلیل خاصیت غیر ایزوتروپیک مواد کامپوزیتی، تحلیل دینامیکی آن تقریباً دشوار است. کی و همکاران [۱] با استفاده از روش تحلیل المان محدود، روش تحریک ارتعاش پالس^۱ و حل عددی، ویژگی‌های ارتعاش محوره‌های کامپوزیتی را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها نشان دادند که افزایش مدول الیاف یکی از روش‌های مؤثر برای افزایش فرکانس طبیعی محور کامپوزیتی است و نسبت میرایی محوره‌های کامپوزیتی تقویت شده با الیاف کربن در مقایسه با محور کامپوزیتی با الیاف بازالت و شیشه کوچک‌تر است. نتایج المان محدود آنها نسبتاً قابل اعتماد بود. آن‌ها نتیجه گرفتند که میرایی محور

2 Simplified Homogenized Beam Theory (SHBT)

1 Pulse Vibration Excitation Technique (PVET)

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: a_rahi@sbu.ac.ir



ارتعاشات یک محور کامپوزیتی توخالی از جنس کربن/اپوکسی را مطالعه کردند. مجموعه آزمون تجربی از یک محور توخالی کامپوزیتی ۲۰ لایه از جنس کربن/اپوکسی با دو دیسک از جنس آلومینیوم با قطرهای برابر تشکیل می‌شد. در حالت دوار، سنسورهای ارتعاش سنج را به طور عمودی و افقی بر روی هر یاتاقان قرار دادند و داده‌های ارتعاشی را استخراج نمودند. کافی و حسینی [۴] ارتعاشات غیرخطی یک محور کامپوزیتی دوار را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها در پژوهش خود اثر ژيروسکوپ، اینرسی دورانی، کوپلینگ ایجاد شده به دلیل غیرهمسانگرد بودن ماده کامپوزیت در نظر گرفته شده و اثر غیرخطی هندسی را لحاظ کردند و تغییر شکل برشی را ناچیز در نظر گرفتند. با محاسبه انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل کرنشی و کار نیروهای غیرپایستار و با به کارگیری اصل همیلتون، معادلات حرکت محور کامپوزیتی با سرعت دورانی متغیر را استخراج کردند. دیکسیت و همکاران [۵] کاربید آلومینیوم-بورون را به عنوان ماده‌ای سبک برای ساخت محوره‌های کامپوزیتی معرفی کردند و سرعت بحرانی را در این محوره‌های کامپوزیتی بررسی کردند. جگادیل و پادی [۶] یک محور کامپوزیتی از جنس شیشه/اپوکسی به روش رشته پیچی ساختند و استحکام پیچشی آن را مورد ارزیابی قرار دادند. آن‌ها تلاش کردند تا استحکام پیچشی محور انتقال قدرت کامپوزیتی را با حفظ ابعاد مورد مطالعه قرار دهند. مواد انتخاب شده در ساخت محور کامپوزیتی، الیاف شیشه و اپوکسی به عنوان اجزاء اصلی بودند. هدف آنها جایگزینی یک محور کامپوزیتی با یک محور انتقال قدرت بود، به طوری که تمام پارامترهای طراحی را ثابت نگه دارد. مندونسا و همکاران [۷] دینامیک روتور با محور کامپوزیتی را مورد مطالعه قرار دادند. تحلیل دینامیکی این روتورها به دلیل وجود میرایی داخلی در محور با تحلیل‌های مرسوم متفاوت است. آن‌ها تأثیر چیدمان لایه‌های محور کامپوزیتی را بر رفتار دینامیکی روتور بررسی کردند. از نتایج شبیه‌سازی برای ارائه تأثیر لایه‌چینی در نمودارهای کمبل، سرعت بحرانی، آستانه ناپایداری و توابع پاسخ فرکانس استفاده کردند. سان و همکاران [۸] ارتعاشات محوره‌های کامپوزیتی تقویت شده با الیاف کربنی را مطالعه کردند. آن‌ها برای اینکه از خراب شدن محور کامپوزیتی جلوگیری کنند، پیشنهاد نمودند از اتصالات یکپارچه در انتهای محوره‌های انتقال قدرت استفاده شود. آن‌ها فرکانس‌های طبیعی محوره‌های کامپوزیتی تقویت شده با الیاف کربن را با استفاده از روش المان محدود و نیز آزمون تجربی بدست آوردند و نتایج را با یکدیگر مقایسه کردند. علی نژاد و همکاران [۹] رزونانس‌های ترکیبی یک محور کامپوزیتی دوار را با در نظر گرفتن هندسه غیرخطی و با به کارگیری

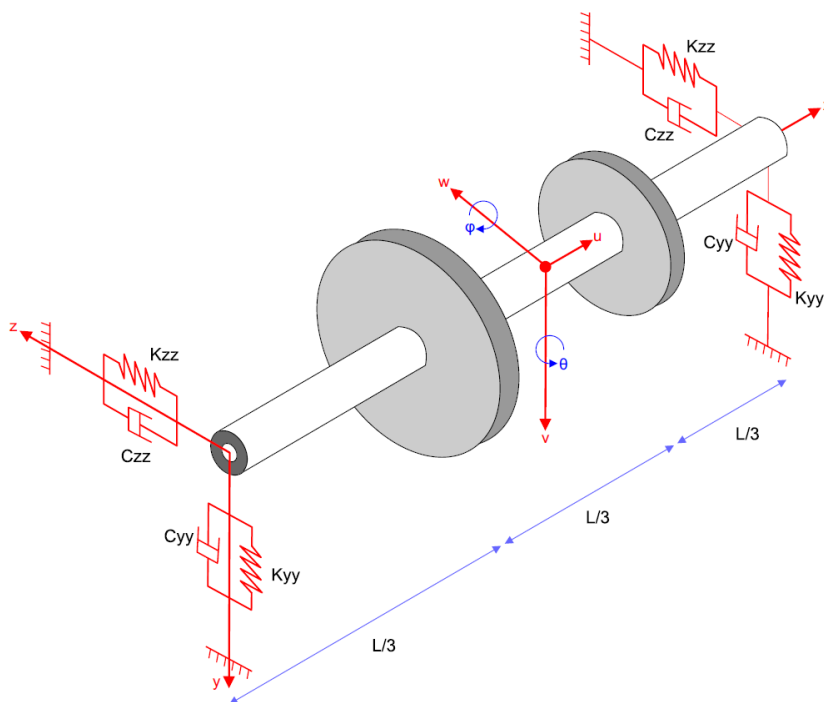
روش حل غیرخطی هارمونیک بالانس، بررسی کردند. عرب و همکاران [۱۰] ارتعاشات و پایداری محور کامپوزیتی دوار با وجود میرایی داخلی هیستریسیس را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها برای تحلیل محور کامپوزیتی، روش المان محدود تیر اولر-برنولی را در نظر گرفتند و از تئوری تک لایه معادل^۱ استفاده کردند و در نهایت تأثیر پارامترهای متفاوت مانند لایه‌چینی الیاف و ضرایب سفتی و میرایی یاتاقان‌ها را بر روی فرکانس‌های طبیعی، سرعت بحرانی و آستانه ناپایداری محور کامپوزیتی بررسی کردند.

ری و همکاران [۱۱] اثر کوپلینگ خمش و پیچش در تحلیل ارتعاشات محور کامپوزیتی را بررسی کردند. آن‌ها با اصلاح تئوری تیر همگن شده ساده شده پارامترهایی همچون اثر پواسون و اثر کوپلینگ پیچش و خمش را در نظر گرفتند. همچنین تغییر شکل برشی عرضی به همراه اثر ژيروسکوپ و اینرسی دورانی را لحاظ نمودند. گوربان و گوپتا [۱۲] تأثیر زاویه لایه‌چینی و مکانیزم‌های کوپلینگ بر روی فرکانس‌های طبیعی محوره‌های کامپوزیتی را بررسی کردند. آن‌ها برای تحلیل تئوری تیر مدول معادل را با در نظر گرفتن تغییر شکل برشی، اینرسی دورانی و اثرات ژيروسکوپ در نظر گرفتند. شینده و ساوانت [۱۳] یک محور کامپوزیتی انتقال قدرت از جنس شیشه/اپوکسی را با کاربرد در وسیله نقلیه سبک را طراحی و مورد بررسی قرار دادند. قونیم و همکاران [۱۴] تأثیر لایه‌چینی الیاف و مکانیزم‌های کوپلینگ بر فرکانس‌های طبیعی محور کامپوزیتی از جنس شیشه/اپوکسی را بررسی کردند.

راویشانکار و همکاران [۱۵] در یک مقاله مروری به بررسی کامپوزیت‌های هیبریدی با کاربرد در خودرو پرداختند. آن‌ها بیان کردند با توجه به اینکه کامپوزیت‌ها برای کاهش وزن در خودرو تبدیل به ماده ارجح و کاربردی شده‌اند، مواد کامپوزیت هیبریدی در بسیاری از کاربردهای مهندسی به دلیل خواص متنوع خود از جمله وزن سبک، نسبت استحکام به وزن بالا، هزینه کم، سهولت در توسعه سازه و مقاومت بالا استفاده می‌شوند. یوداتا و همکاران [۱۶] تأثیر نانو لوله‌های کربنی را در تقویت خواص دینامیکی محوره‌های لوله‌ای کامپوزیتی هیبریدی بررسی کردند. آکلیلو و همکاران [۱۷] تحلیل خرابی در تیرهای کامپوزیتی لایه‌ای هیبریدی دوار را انجام دادند. آن‌ها تحلیل عددی تیرهای دوار را با استفاده از برنامه نویسی متلب انجام دادند و برای ارزیابی محدودیت‌های شکست تئوری تیرهای دوار غیر هیبریدی و هیبریدی، معیار شکست چای-وو^۲ را به کار گرفتند. یوسف [۱۸] خواص مکانیکی کامپوزیت‌های هیبریدی ماتریس اپوکسی تقویت شده با الیاف کربن-کف بافته شده را مورد مطالعه قرار داد. مونتگانیر و هوچارد [۱۹]

1 Equivalent Single Layer Theory (ESLT)

2 Tsai-Wu



شکل ۱. محور کامپوزیتی با دو دیسک و یاتاقان‌های ارتجاعی در دو انتها

Fig. 1. Composite shaft with two discs and elastic bearings at both ends

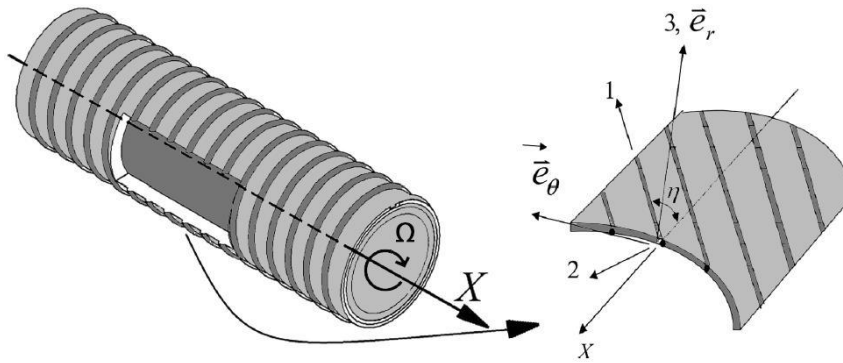
بدست می‌آید و با نتایج شبیه‌سازی محور کامپوزیتی در نرم‌افزار المان محدود انسیس مقایسه شده و صحت نتایج تأیید می‌گردد. سپس در حالت دوار، دیاگرام کمبل محور کامپوزیتی با ۸ لایه کربن / اپوکسی با دیاگرام کمبل پژوهش مندونسا مقایسه شده و صحت‌گذاری انجام می‌گیرد. در نهایت تأثیر پارامترهای مختلف لایه‌چینی محور کامپوزیتی هیبریدی بر روی فرکانس طبیعی آن مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۲- مدل‌سازی و استخراج معادلات حرکت محور کامپوزیتی هیبریدی

ابتدا یک محور کامپوزیتی توخالی غیرهیبریدی با ۸ لایه کربن / اپوکسی به صورت لایه‌چینی متقارن $[45/-45/45/-45]$ یعنی $[45/45/-45/-45/45/-45/45/-45]$ مدل‌سازی می‌شود تا بتوان نتایج آن را صحت‌گذاری کرد و سپس مدل‌سازی را برای بررسی رفتار دینامیکی محور کامپوزیتی هیبریدی تعمیم داد. در شکل ۱، یک محور کامپوزیتی توخالی در حالت دو دیسک فولادی که روی تکیه‌گاه‌های ارتجاعی در دو انتها قرار دارد، نمایش داده شده است. برای بدست آوردن

بهینه‌سازی محورهای انتقال قدرت کامپوزیتی هیبریدی پلاستیک تقویت شده با الیاف کربن با مدول و استحکام بالا را با استفاده از الگوریتم ژنتیک مورد بررسی قرار دادند. آرون و وینوث [۲۰] طراحی و توسعه لایه‌چینی محورهای انتقال قدرت کامپوزیتی هیبریدی با کاربرد در وسایل نقلیه را ارائه دادند. آن‌ها نتیجه گرفتند که افزایش تعداد لایه‌های کامپوزیتی، استحکام در برابر شکست را برای یک محور انتقال قدرت هیبریدی آلومینیوم-کامپوزیت افزایش خواهد داد.

با بررسی نمودن پژوهش‌های انجام گرفته پیشین، مشاهده می‌شود که تاکنون کار خاص و جامعی در خصوص تأثیر پارامترهای لایه‌چینی مانند زاویه لایه‌چینی و چیدمان لایه‌ها از نظر ترتیب استفاده از کربن / اپوکسی و شیشه / اپوکسی بر روی رفتار دینامیکی یک محور کامپوزیتی هیبریدی ارائه نشده است. در این پژوهش یک محور کامپوزیتی توخالی هیبریدی با ۸ لایه از جنس کربن / اپوکسی و شیشه / اپوکسی در حالت دو دیسک فولادی در وسط به صورت متقارن که روی تکیه‌گاه‌های ارتجاعی قرار دارد، مدل‌سازی می‌شود. بعد از استخراج معادلات حاکم بر محور کامپوزیتی هیبریدی، با کدنویسی در نرم‌افزار متلب و حل عددی، نمودار دامنه بر حسب فرکانس



شکل ۲. دستگاه مختصات در جهتهای اصلی ۱-۲-۳ و دستگاه مختصات استوانه‌ای

Fig. 2. The coordinate system in principal directions 1-2-3 and the cylindrical coordinate system

در رابطه بالا σ و τ به ترتیب تنش‌های قائم و برشی و همچنین ε و γ به ترتیب کرنش‌های قائم و برشی در جهتهای اصلی هستند. شکل ۲، یک مدل ساده از یک محور کامپوزیتی با در نظر گرفتن دستگاه مختصات در جهتهای اصلی ۱-۲-۳ و دستگاه مختصات استوانه‌ای $r - \theta - x$ و همچنین زاویه لایه‌چینی η که همان زاویه بین راستای الیاف با محور است، برای یک لایه غیرهمسانگرد دلخواه کامپوزیت را نشان می‌دهد. رابطه تنش و کرنش و ماتریس سختی برای یک ماده غیرهمسانگرد در حالت سه بعدی در دستگاه مختصات استوانه‌ای $r - \theta - x$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۱]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rr} \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{xr} \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{13} & 0 & 0 & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{23} & 0 & 0 & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{13} & \overline{Q}_{23} & \overline{Q}_{33} & 0 & 0 & \overline{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{Q}_{44} & \overline{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{Q}_{45} & \overline{Q}_{55} & 0 \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{36} & 0 & 0 & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{rr} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{xr} \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

رابطه بالا را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

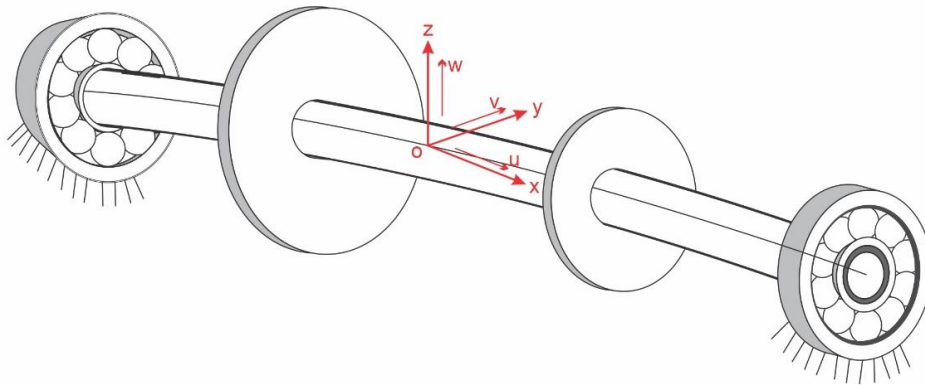
$$\{\sigma\} = [\overline{Q}]\{\varepsilon\} \quad (3)$$

ماتریس سختی $[\overline{Q}]$ به صورت زیر بیان می‌شود [۲۱]:

معادلات حرکت محور کامپوزیتی، می‌توان تئوری تیر مدول معادل اصلاح شده را استفاده کرد. تئوری تیر مدول معادل با اضافه کردن تغییر شکل برشی عرضی، اینرسی دورانی و اثرات ژيروسکوپی به تئوری تیر برسه-تیموشنکو توسعه می‌یابد. در تئوری تیر مدول معادل اصلاح شده، کوپلینگ‌های خمشی-پیچشی، برشی قائم و خمشی-کششی نیز در نظر گرفته می‌شود. منظور از 45_G یعنی زاویه الیاف آن لایه کامپوزیتی، 45° درجه و جنس آن، کربن/اپوکسی است و همچنین منظور از 45_G یعنی زاویه الیاف آن لایه، 45° درجه و جنس آن، شیشه/اپوکسی می‌باشد.

در ادامه یک محور کامپوزیتی هیبریدی با ۸ لایه از جنس شیشه/اپوکسی و کربن/اپوکسی مدل‌سازی می‌شود. با توجه به اینکه هزینه کربن/اپوکسی حدود ۱۰ برابر شیشه/اپوکسی است، در نتیجه برای صرفه‌جویی در هزینه، از ۲ لایه کربن/اپوکسی و ۶ لایه شیشه/اپوکسی استفاده می‌شود. رابطه تنش و کرنش و ماتریس سختی برای یک ماده غیرهمسانگرد در حالت سه بعدی در دستگاه مختصات اصلی به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۱]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (1)$$



شکل ۳. جابجایی محور کامپوزیتی در امتداد محورهای x، y و z

Fig. 3. Displacement of the composite shaft along the x, y, and z axes

در رابطه (۶)، E_1 و E_2 به ترتیب مدول یانگ در جهت‌های ۱ و ۲، V_{12} ضریب پواسون و G_{12} ، G_{13} و G_{23} به ترتیب مدول برشی روی صفحات ۱-۲، ۲-۳ و ۳-۱ می‌باشند. جابجایی محور کامپوزیتی در امتداد محورهای x، y و z به ترتیب $u(x, t)$ ، $v(x, t)$ و $w(x, t)$ هستند. شیب‌های خمش در صفحات xz و xy به ترتیب θ و φ و همچنین زاویه پیچش و Ω سرعت دوران محور کامپوزیتی می‌باشد.

شکل ۳، جابجایی محور کامپوزیتی در امتداد محورهای x، y و z یعنی $u(x, t)$ ، $v(x, t)$ و $w(x, t)$ را نشان می‌دهد. در شکل ۴، شیب‌های خمش در صفحات xz و xy و همچنین زاویه پیچش محور کامپوزیتی مشاهده می‌شود.

انرژی پتانسیل کرنشی به دلیل تغییر شکل خمشی، برشی و پیچشی به صورت رابطه (۷) است [۱۲]:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \begin{aligned} & C_{HB} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] + \\ & C_{HS} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \varphi \right)^2 \right] + \\ & \frac{C_{HBT}}{2} \left[\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right] + \\ & C_{HT} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 \end{aligned} \right\} dx \quad (7)$$

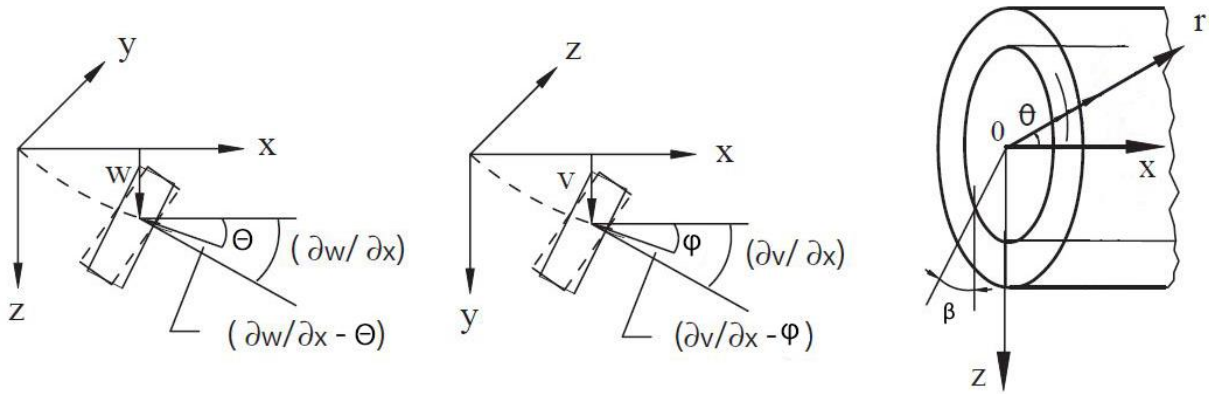
$$[\bar{Q}] = [T]^{-1} [Q] [T]^{-T} \quad (4)$$

که در آن ماتریس‌های $[Q]$ و $[T]$ طبق روابط (۵) و (۶) عبارتند از [۲۱]:

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 2mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2mn \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -mn & mn & 0 & 0 & 0 & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$m = \cos \eta \quad , \quad n = \sin \eta$$

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}} \quad , \quad Q_{12} = \frac{E_2 \nu_{12}}{1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}} \quad , \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}} \quad , \quad Q_{44} = G_{23} \quad , \\ Q_{55} &= G_{13} \quad , \quad Q_{66} = G_{12} \quad , \\ Q_{13} &= Q_{23} = Q_{33} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$



شکل ۴. شیب خمشی در صفحات xz و xy و زاویه پیچش محور کامپوزیتی

Fig. 4. Bending slope in the xz and xy planes and the torsion angle of the composite shaft

داخلی لایه کامپوزیتی هستند. k شماره لایه کامپوزیتی و n تعداد لایه‌های محور کامپوزیتی هیبریدی می‌باشد که برابر ۸ است که ۲ لایه آن کربن/اپوکسی و ۶ لایه آن شیشه/اپوکسی است.

انرژی جنبشی محور کامپوزیتی و انرژی جنبشی دیسک از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$T_{shaft} = \frac{1}{2} \int_0^l [\rho A (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) + I (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) + I_p \dot{\beta}^2 + 2I_p \Omega \dot{\theta} \dot{\phi}] dx \quad (12)$$

$$T_{disk} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \{ M_{D_i} [(\dot{v}(x_i))^2 + (\dot{w}(x_i))^2] + I_{D_i} [(\dot{\theta}(x_i))^2 + (\dot{\phi}(x_i))^2] + 2I_{D_i} \Omega \dot{\theta}(x_i) \dot{\phi}(x_i) \} \quad (13)$$

انرژی جنبشی کل سیستم برابر مجموع انرژی جنبشی محور کامپوزیتی و دیسک است که در آن l طول محور، ρ چگالی محور کامپوزیتی، Ω سرعت دوران محور، A ، I و I_p به ترتیب سطح مقطع، ممان اینرسی جرمی عرضی و قطبی محور کامپوزیتی هیبریدی هستند. i شماره دیسک، x_i موقعیت مکانی دیسک i ام و N تعداد دیسک است. همچنین M_{D_i}

که در آن ضریب سفتی خمشی C_{HB} ، ضریب سفتی پیچشی C_{HT} و ضریب سفتی برشی C_{HS} محور کامپوزیتی هیبریدی از رابطه‌های زیر بدست می‌آید [۱۲]:

$$C_{HB} = \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{11k} [r_{o_k}^4 - r_{i_k}^4] \quad (8)$$

$$C_{HT} = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{66k} [r_{o_k}^4 - r_{i_k}^4] \quad (9)$$

$$C_{HS} = k' \pi \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{66k} [r_{o_k}^2 - r_{i_k}^2] \quad (10)$$

در رابطه (۱۰)، k' ضریب تصحیح برشی می‌باشد که برای محورهای کامپوزیتی لوله‌ای برابر ۰/۵ است. همچنین ضریب سفتی خمشی-پیچشی C_{HBT} محور کامپوزیتی از رابطه (۱۱) بدست می‌آید [۱۲]:

$$C_{HBT} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{16k} [r_{o_k}^4 - r_{i_k}^4] \quad (11)$$

در تمامی روابط (۸) تا (۱۱)، r_o و r_i به ترتیب شعاع خارجی و شعاع

سپس معادلات حرکت محور کامپوزیتی به صورت پنج معادله جبری به شکل مسئله مقدار ویژه درجه دوم زیر بدست می‌آید:

$$[-\Omega^2[M]+i\Omega[D]+[K]]\{X\}=\{0\} \quad (18)$$

که در آن $[M]$ ماتریس جرم، $[K]$ ماتریس سختی و $[D]$ ماتریس مربوط به اثرات ژيروسکوپی است که به سرعت دوران محور کامپوزیتی وابسته است. همچنین X بردار ویژه شامل V, W, Θ, Φ و β می‌باشد.

۳- تحلیل المان محدود محور کامپوزیتی هیبریدی

ابعاد هندسی محور کامپوزیتی هیبریدی در جدول ۱ نشان داده شده است.

خواص مکانیکی کربن/اپوکسی و شیشه/اپوکسی برای تحلیل المان محدود محور کامپوزیتی هیبریدی در جدول ۲ آمده است.

همچنین خواص هندسی و مکانیکی دو دیسک فولادی در جدول ۳ نمایش داده شده است.

با توجه به جدول ۳ شعاع داخلی دیسک برابر با شعاع خارجی محور می‌باشد و نوع اتصال آنها به صورت چسبیده است. شبیه‌سازی محور کامپوزیتی با ۸ لایه از جنس کربن/اپوکسی که ضخامت همه لایه‌ها یکسان و برابر یک میلی‌متر است، تحلیل در نرم‌افزار المان محدود انسیس انجام می‌شود.

در ادامه شرایط مرزی تکیه‌گاه ارتجاعی را برای محور کامپوزیتی در نظر می‌گیریم. دو یاتاقان انتهایی به صورت فنرهایی با سختی‌های غیرمساوی $K_{yy} = 10^8 \text{ N/m}$ و $K_{zz} = 10^9 \text{ N/m}$ هستند و ثابت میرایی آنها نیز صفر است. شکل ۵ ضرایب سختی و میرایی یاتاقان سمت راست محور کامپوزیتی ۸ لایه کربن/اپوکسی را نشان می‌دهد.

شکل ۶ شبکه‌بندی محور کامپوزیتی ۸ لایه را نشان می‌دهد. نوع المان شبکه، مربعی و اندازه شبکه برای لایه‌های کامپوزیت ۰/۵ میلی‌متر و برای دو دیسک ۵ میلی‌متر است. در ادامه آنالیز حساسیت شبکه بررسی شده که تعداد المان‌های شبکه ۱۳۶۱۲۳ و تعداد گره‌ها ۲۲۵۷۷۳ می‌باشد.

در ادامه شبیه‌سازی محور کامپوزیتی هیبریدی با لایه‌چینی $[45G/-45G/0G/90G/45C/-45C/0G/90G]$ انجام می‌گیرد. به دلیل اینکه هزینه کربن/اپوکسی حدود ۱۰ برابر شیشه/اپوکسی است، از ۲ لایه

I_{D_i} و $I_{D_{P_i}}$ به ترتیب جرم، ممان اینرسی جرمی عرضی و قطبی دیسک i ام می‌باشند. A, I, I_p طبق رابطه (۱۴) بدست می‌آید:

$$A = \pi \sum_{k=1}^n [r_{ok}^2 - r_{ik}^2] ,$$

$$I = \frac{\pi}{4} \left(\sum_{a=1}^c \rho_C [r_{oa}^4 - r_{ia}^4] + \sum_{b=1}^d \rho_G [r_{ob}^4 - r_{ib}^4] \right) \quad (14)$$

$$I_p = \frac{\pi}{2} \left(\sum_{a=1}^c \rho_C [r_{oa}^4 - r_{ia}^4] + \sum_{b=1}^d \rho_G [r_{ob}^4 - r_{ib}^4] \right)$$

در رابطه بالا، ρ_C و ρ_G به ترتیب چگالی کربن/اپوکسی و چگالی شیشه/اپوکسی است. c, d و n به ترتیب تعداد لایه‌های کربن/اپوکسی، شیشه/اپوکسی و تعداد کل لایه‌ها می‌باشد.

نیروهای F_x و F_y اعمال شده روی یاتاقان روتور به ترتیب در جهت y و z به صورت رابطه زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} F_y \\ F_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{yy} & c_{yz} \\ c_{zy} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

با تعریف لاگرانژین $L = T - U$ و با استفاده از معادلات لاگرانژ داریم:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (i=1,2,\dots,5) \quad (16)$$

برای حل معادلات، توابع پاسخ را برای محور کامپوزیتی هیبریدی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$v(x) = \sum_{j=1}^n V_j \sin \frac{j\pi x}{l}, w(x) = \sum_{j=1}^n W_j \sin \frac{j\pi x}{l},$$

$$\theta(x) = \sum_{j=1}^n \Theta_j \cos \frac{j\pi x}{l},$$

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n \Phi_j \cos \frac{j\pi x}{l},$$

$$\beta(x) = \sum_{j=1}^n \beta_j \cos \frac{j\pi x}{l} \quad (17)$$

جدول ۱. ابعاد هندسی محور کامپوزیتی

Table 1. Geometric dimensions of the composite shaft

طول محور (m)	شعاع خارجی (m)	شعاع داخلی (m)	مشخصات محور
۱/۲	۰/۰۴۸	۰/۰۴	مقدار

جدول ۲. خواص مکانیکی کربن / اپوکسی و شیشه / اپوکسی

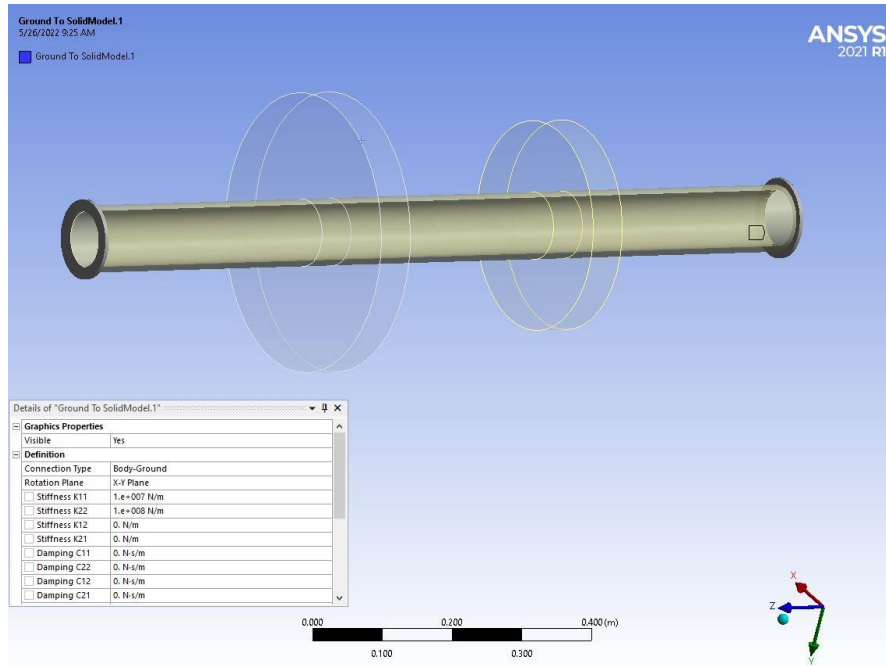
Table 2. Mechanical properties of carbon/epoxy and glass/epoxy

شیشه / اپوکسی	کربن / اپوکسی	واحد	خواص مکانیکی
۳۶/۶	۱۷۲/۷	GPa	مدول طولی (E_1)
۵/۴	۷/۲	GPa	مدول عرضی (E_2)
۴/۱	۳/۷۶	GPa	مدول برشی (G_{12})
۰/۳	۰/۳	-	ضریب پواسون (ν_{12})
۲۰۰۰	۱۴۴۶/۲	kg/m ^۳	چگالی

جدول ۳. خواص هندسی و مکانیکی دیسک‌ها

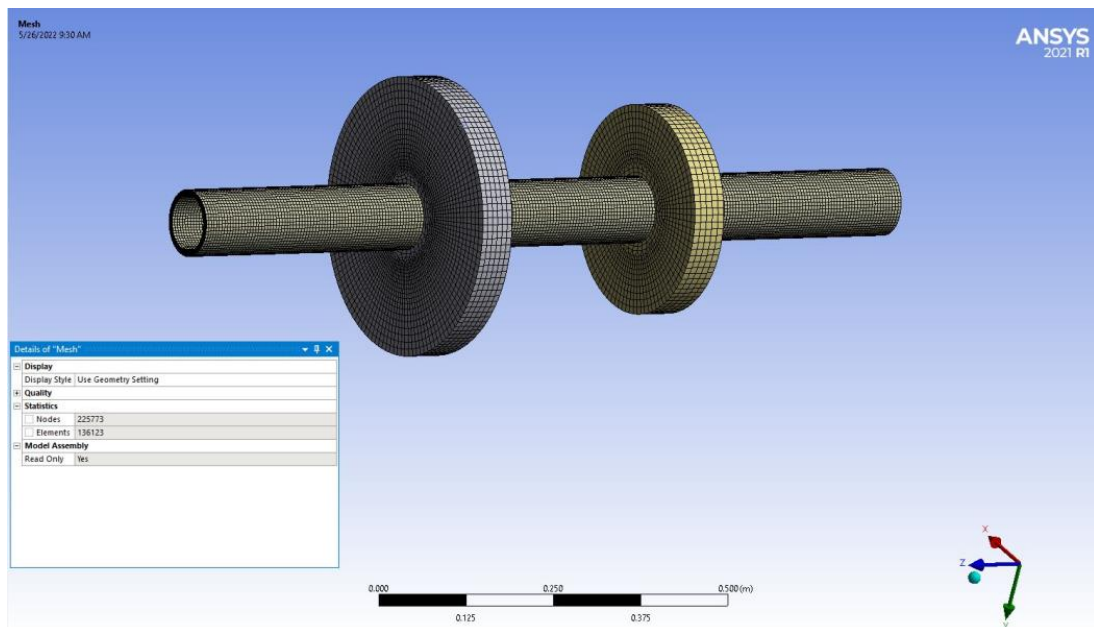
Table 3. Geometrical and mechanical properties of discs

خواص هندسی و مکانیکی	ضخامت (m)	شعاع داخلی (m)	شعاع خارجی (m)	مدول یانگ (GPa)	چگالی (kg / m ^۳)
دیسک سمت راست	۰/۰۵	۰/۰۴۸	۰/۱۵	۲۰۰	۷۸۵۰
دیسک سمت چپ	۰/۰۵	۰/۰۴۸	۰/۲	۲۰۰	۷۸۵۰



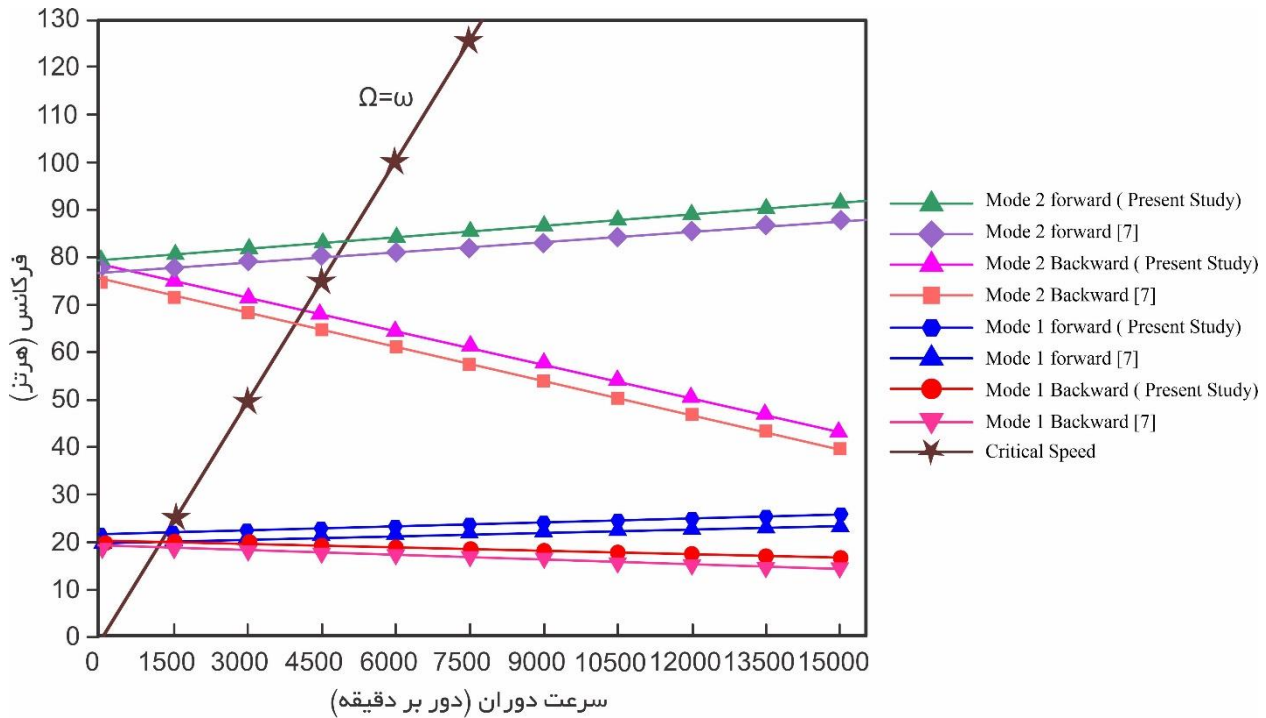
شکل ۵. ضرایب سفتی و میرایی یاتاقان سمت راست محور کامپوزیتی ۸ لایه کربن/ اپوکسی

Fig. 5. Stiffness and damping coefficients of the right bearing of the carbon/epoxy 8 layers composite shaft



شکل ۶. شبکه‌بندی محور کامپوزیتی ۸ لایه کربن/ اپوکسی با دو دیسک و لایه چینی متقارن $[45/-45/45/-45]_S$

Fig. 6. Carbon/epoxy 8 layers composite shaft meshing with two discs and $[45/-45/45/-45]_S$ symmetrical stacking sequence



شکل ۷. مقایسه دیاگرام کمبل محور کامپوزیتی ۸ لایه کربن/اپوکسی و لایه چینی متقارن $[45/-45/45/-45]_S$ با مرجع [۷]

Fig. 7. Comparison of Campbell diagram of carbon/epoxy 8 layers composite shaft and $[45/-45/45/-45]_S$ symmetric stacking sequence with reference [7]

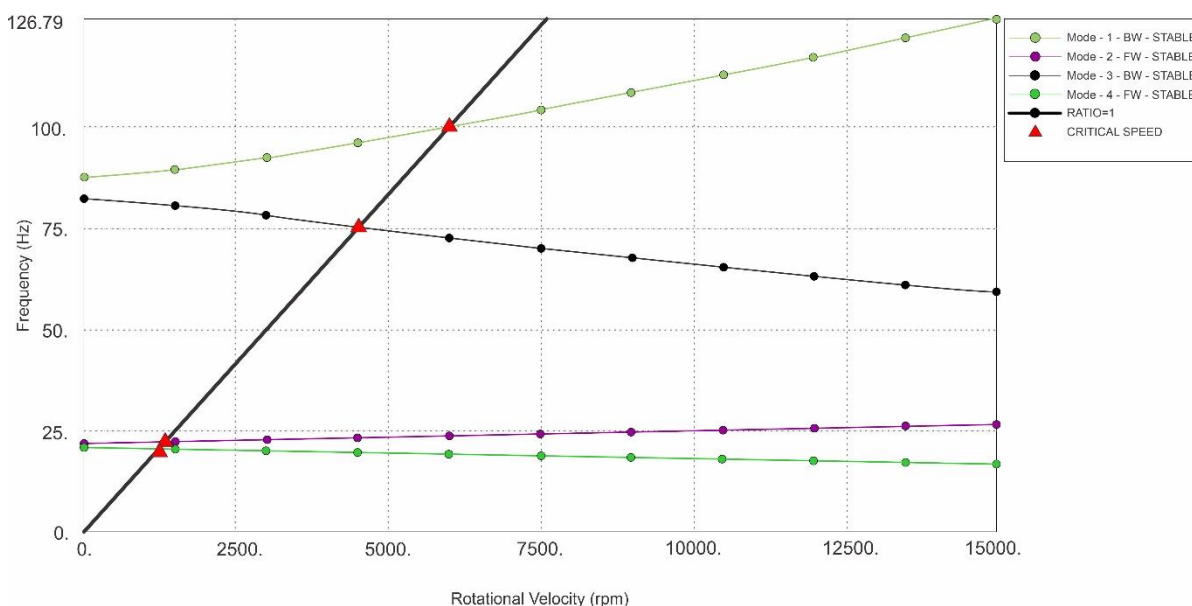
مورد قبول بوده و خطا در تمام سرعت‌های دوران کمتر از ۹ درصد می‌باشد. با توجه به شکل ۷، در مطالعه حاضر سرعت‌های بحرانی $1358/2$ دور بر دقیقه و $1398/9$ دور بر دقیقه به ترتیب از برخورد خط با نسبت $1 (\Omega=\omega)$ با فرکانس‌های مود اول پسر و پیشرو بدست می‌آید. همچنین سرعت‌های بحرانی $4306/3$ دور بر دقیقه و $5027/4$ دور بر دقیقه به ترتیب از برخورد خط $\Omega = \omega$ با فرکانس‌های مود دوم پسر و پیشرو حاصل می‌شود که محور کامپوزیتی غیرهیبریدی در این دوره‌های بحرانی بیشترین دامنه را خواهد شد و تشدید رخ می‌دهد.

دیاگرام کمبل محور کامپوزیتی هیبریدی توخالی دوار با لایه چینی $[45G/-45G/0G/90G/45C/-45C/0G/90G]$ و تکیه‌گاه‌های ارتجاعی در شکل ۸ مشاهده می‌شود. در شکل ۸، سرعت‌های بحرانی $1442/2$ دور بر دقیقه و $1521/4$ دور بر دقیقه به ترتیب از برخورد خط با نسبت $1 (\Omega=\omega)$ با فرکانس‌های مود اول پسر و پیشروی محور کامپوزیتی هیبریدی توخالی بدست می‌آید. همچنین سرعت‌های بحرانی $5102/7$ دور بر دقیقه و $6570/7$ دور بر دقیقه به ترتیب از برخورد خط $\Omega = \omega$ با فرکانس‌های مود دوم پسر و پیشرو حاصل می‌شود که محور کامپوزیتی هیبریدی در این دوره‌های

کربن/اپوکسی و ۶ لایه آن شیشه/اپوکسی استفاده می‌شود. برای تحلیل المان محدود، تمامی خواص مکانیکی و ابعاد هندسی مطابق جدول‌های ۱ تا ۳ می‌باشد. شرایط مرزی محور کامپوزیتی هیبریدی به صورت فنر با سفتی‌های غیر مساوی $K_{yy} = 10^8 \text{ N/m}$ و $K_{zz} = 10^9 \text{ N/m}$ برای یاتاقان‌ها تعریف می‌شوند. میرایی یاتاقان‌ها نیز صفر است.

۴- ارائه نتایج و صحنه‌گذاری

به منظور صحنه‌گذاری تحلیل المان محدود، نتایج شبیه‌سازی محور کامپوزیتی ۸ لایه با نتایج عددی پژوهش مندونسا و همکاران [۷] مقایسه می‌شود. شکل ۷ دیاگرام کمبل محور کامپوزیتی توخالی دوار با ۸ لایه از جنس کربن/اپوکسی با لایه چینی متقارن $[45/-45/45/-45]_S$ در حالت دو دیسک فولادی با شعاع خارجی مختلف که روی یاتاقان‌های ارتجاعی در دو انتها قرار دارد، به روش المان محدود را نشان می‌دهد که با دیاگرام کمبل مرجع [۷] مقایسه شده و صحنه‌گذاری نتایج تأیید می‌گردد. با توجه به این شکل، فرکانس‌های پیشرو و پسر در مودهای اول و دوم فقط به دلیل اثرات ژيروسکوپی مشاهده می‌شود. دقت نتایج در مود اول و دوم پیشرو و پسر



شکل ۸. دیاگرام کمبل محور کامپوزیتی هیبریدی با لایه چینی $[45_G/-45_G/0_G/90_G/45_C/-45_C/0_G/90_G]$ و دو دیسک فولادی و تکیه‌گاه‌های ارتجاعی

Fig. 8. Campbell diagram of the hybrid composite shaft with $[45_G/-45_G/0_G/90_G/45_C/-45_C/0_G/90_G]$ stacking sequence and two steel discs and elastic support

فرکانس‌های پیشرو و پسرو در مدهای مختلف تابعی از سرعت دوران محور است. در حالت خاص، زمانی که سرعت دوران محور صفر باشد ($\Omega = 0$)، فرکانس‌های پیشرو و پسرو با هم برابر هستند و در مود اول و دوم به ترتیب برابر $24/71$ هرتز و $94/87$ هرتز می‌باشد. فرکانس‌های پیشرو و پسرو محور کامپوزیتی هیبریدی در سرعت‌های مختلف دوران مختلف در جدول ۴ مشاهده می‌شود.

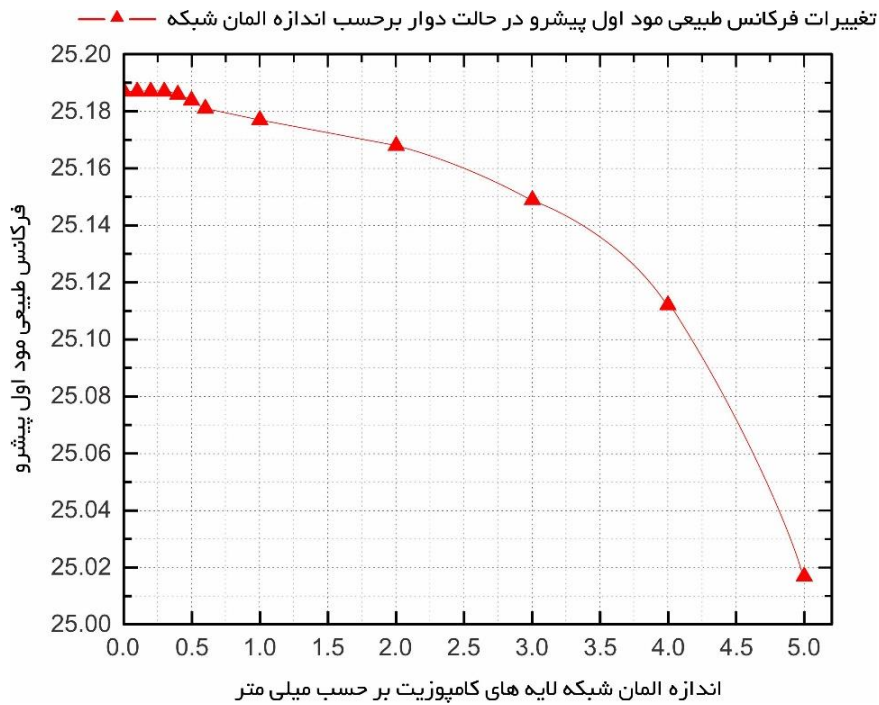
در حالتی که سرعت دوران محور 1500 دور بر دقیقه باشد، نمودار دامنه بر حسب فرکانس‌های پیشرو در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود. اگر قله‌های نمودار را که دو فرکانس پیشروی مود اول و دوم محور کامپوزیتی هیبریدی است و به ترتیب برابر $27/24$ هرتز و $103/17$ هرتز می‌باشد، با نتایج المان محدود شکل ۸ که فرکانس‌های پیشروی مود اول و دوم محور کامپوزیتی هیبریدی در سرعت دوران 1500 دور بر دقیقه که به ترتیب $25/352$ هرتز و $99/851$ هرتز است مقایسه کنیم، مشاهده می‌شود درصد خطا کمتر از 0.7% می‌باشد و صحت نتایج تأیید می‌شود.

همچنین شکل ۱۱، نمودار دامنه بر حسب فرکانس‌های پسروی مود اول و دوم در سرعت دوران محور 1500 دور بر دقیقه را نشان می‌دهد. قله‌های

بحرانی بیشترین دامنه را خواهد شد و تشدید رخ می‌دهد. در نتیجه باید محور کامپوزیتی هیبریدی دور از این دورهای بحرانی باشد. از مقایسه شکل‌های ۷ و ۸ مشاهده می‌شود که با وجود سفتی بالای کربن/اپوکسی، با هیبریدی کردن محور کامپوزیتی فرکانس‌های مود اول و دوم پیشرو و پسرو در تمام سرعت‌های دوران، بیشتر می‌شود و همچنین دورهای بحرانی نیز افزایش می‌یابد.

شکل ۹ نمودار حساسیت به اندازه شبکه را نشان می‌دهد که تغییرات فرکانس طبیعی مود اول پیشروی محور کامپوزیتی هیبریدی در حالت دوار با لایه چینی $[45_G/-45_G/0_G/90_G/45_C/-45_C/0_G/90_G]$ را بر حسب اندازه المان شبکه برای لایه‌های کامپوزیت را نشان می‌دهد.

با کدنویسی معادله (۱۸) در نرم‌افزار متلب، فرکانس‌های مود اول و دوم محور کامپوزیتی هیبریدی با لایه چینی $[45_G/-45_G/0_G/90_G/45_C/-45_C/0_G/90_G]$ در سرعت دوران 1500 دور بر دقیقه استخراج می‌شوند. ویرلینگ محور و ظهور فرکانس‌های پیشرو و پسرو فقط به دلیل اثرات ژيروسکوپی می‌باشد که در معادلات حرکت محور کامپوزیتی به دلیل گشتاورهای ژيروسکوپی است. به همین دلیل



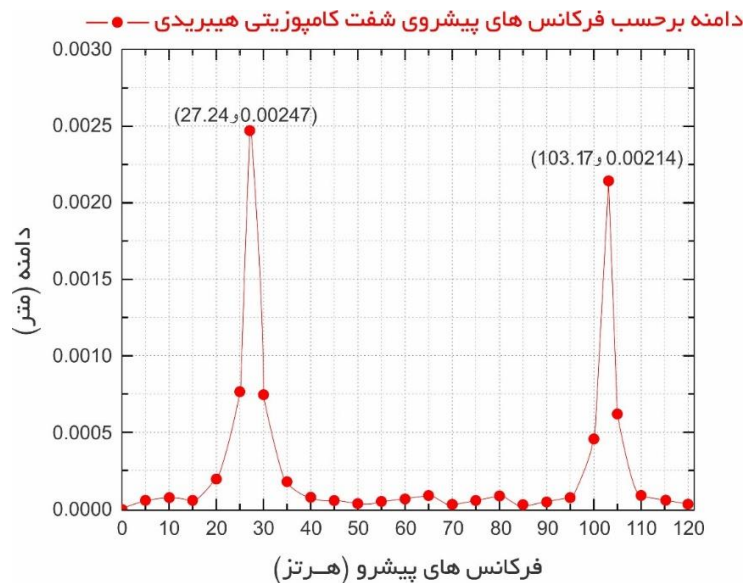
شکل ۹. آنالیز حساسیت شبکه محور کامپوزیتی هیبریدی با لایه چینی $[45_G/-45_G/0_G/90_G/45_C/-45_C/0_G/90_G]$ و دو دیسک فولادی و تکیه گاه های ارتجاعی

Fig. 9. Sensitivity analysis of the hybrid composite shaft meshing with $[45_G/-45_G/0_G/90_G/45_C/-45_C/0_G/90_G]$ stacking sequence and two steel discs and elastic supports

جدول ۴. فرکانس های مود اول و دوم پیشرو و پسروی محور کامپوزیتی هیبریدی در حالت دو دیسک فولادی و تکیه گاه های ارتجاعی در حالت دوار با لایه چینی $[45_G/-45_G/0_G/90_G/45_C/-45_C/0_G/90_G]$ در سرعت های مختلف دوران

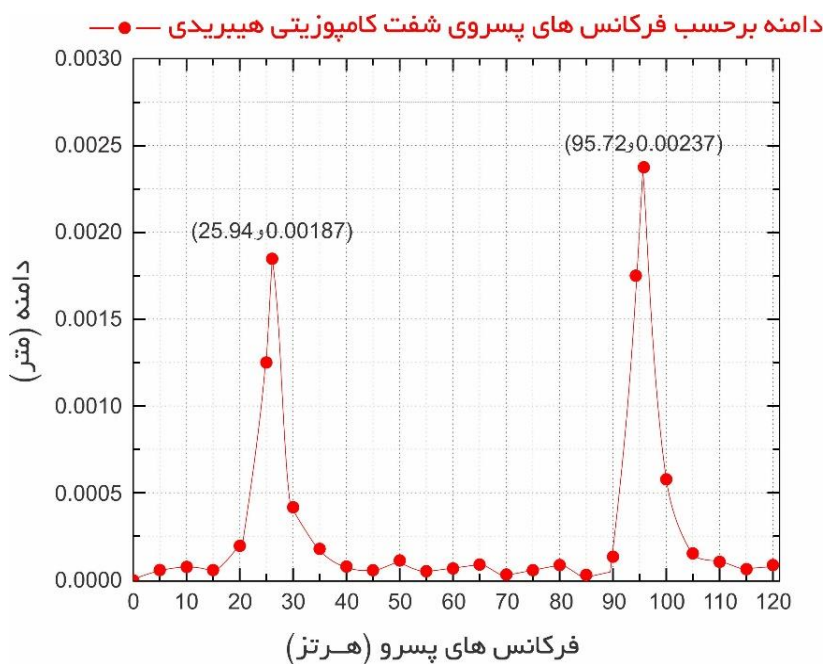
Table 4. Frequencies of the first and second forward and backward modes of the rotating hybrid composite shaft in the state of two steel discs and elastic supports with $[45_G/-45_G/0_G/90_G/45_C/-45_C/0_G/90_G]$ stacking sequence at different rotational speeds

سرعت دوران (دور بر دقیقه)	فرکانس مود اول پیشرو (هرتز)	فرکانس مود اول پسرو (هرتز)	فرکانس مود دوم پیشرو (هرتز)	فرکانس مود دوم پسرو (هرتز)
۰	۲۴/۷۱	۲۴/۷۱	۹۴/۸۷	۹۴/۸۷
۱۵۰۰	۲۴/۹۵	۲۴/۴۹	۹۵/۶۸	۹۳/۷۲
۳۰۰۰	۲۵/۲۲	۲۴/۲۳	۹۷/۵۹	۹۲/۳۹
۴۵۰۰	۲۵/۵	۲۳/۹۴	۱۰۰/۴۷	۹۰/۷۵
۶۰۰۰	۲۵/۸۱	۲۳/۵۷	۱۰۳/۳۴	۸۸/۷۲
۷۵۰۰	۲۶/۱۵	۲۳/۱۵	۱۰۶/۴۶	۸۶/۵۴
۹۰۰۰	۲۶/۵۱	۲۲/۶۸	۱۰۹/۸۹	۸۳/۹۷
۱۰۵۰۰	۲۶/۹۲	۲۲/۱۷	۱۱۳/۷۳	۸۱/۵۹
۱۲۰۰۰	۲۷/۳۶	۲۱/۶۲	۱۱۷/۸۶	۷۸/۷۸



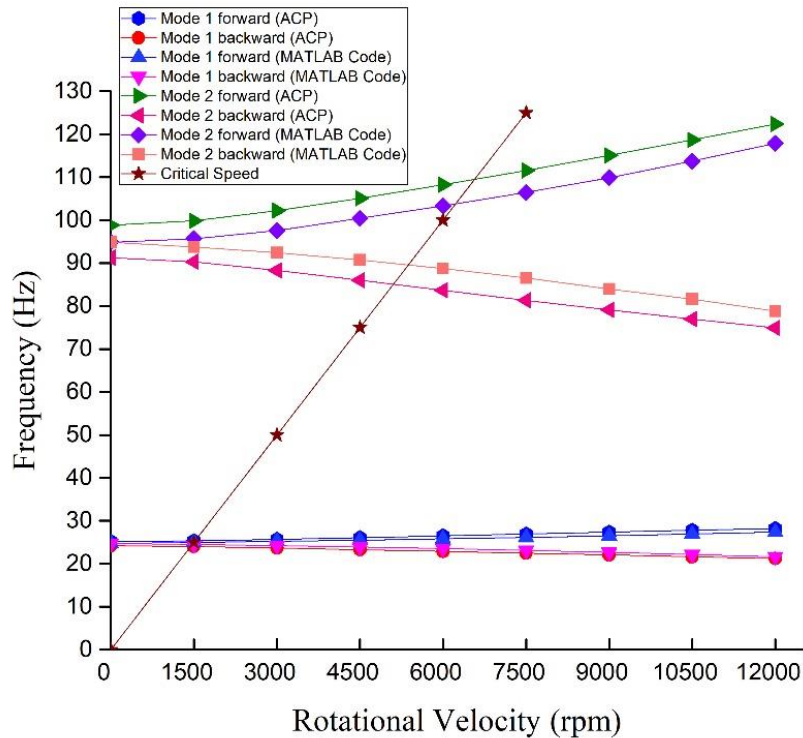
شکل ۱۰. نمودار دامنه بر حسب فرکانس های پیشروی محور کامپوزیتی هیبریدی با لایه چینی $[45_G/-45_G/0_G/90_G/45_C/-45_C/0_G/90_G]$ و دو دیسک فولادی و تکیه گاه های ارتجاعی در حالت دوار ($\Omega=1500$ rpm)

Fig. 10. Amplitude versus forward frequencies diagram of the rotating hybrid composite shaft with $[45_G/-45_G/0_G/90_G/45_C/-45_C/0_G/90_G]$ stacking sequence and two steel discs and elastic supports ($\Omega=1500$ rpm)



شکل ۱۱. نمودار دامنه بر حسب فرکانس های پسروی محور کامپوزیتی هیبریدی با لایه چینی $[45_G/-45_G/0_G/90_G/45_C/-45_C/0_G/90_G]$ و دو دیسک فولادی و تکیه گاه های ارتجاعی در حالت دوار ($\Omega=1500$ rpm)

Fig. 11. Amplitude versus backward frequencies diagram of the rotating hybrid composite shaft with $[45_G/-45_G/0_G/90_G/45_C/-45_C/0_G/90_G]$ stacking sequence and two steel discs and elastic supports ($\Omega=1500$ rpm)



شکل ۱۲. دیاگرام کمبل محور کامپوزیتی هیبریدی با لایه چینی $[45_G/-45_G/0_G/90_G/45_C/-45_C/0_G/90_G]$ و دو دیسک فولادی و تکیه‌گاه‌های ارتجاعی در حالت دوار حاصل از کدنویسی متلب و المان محدود

Fig. 12. Campbell diagram of the rotating hybrid composite shaft with $[45_G/-45_G/0_G/90_G/45_C/-45_C/0_G/90_G]$ stacking sequence and two steel discs and elastic supports resulting from MATLAB coding and finite element

دوم پیشرو و پس‌رو، به دلیل سفتی بالای کربن / اپوکسی، فرکانس طبیعی محور کامپوزیتی غیرهیبریدی کربن / اپوکسی بالاتر از فرکانس طبیعی محور کامپوزیتی هیبریدی است. همچنین فرکانس طبیعی محور کامپوزیتی غیرهیبریدی بالاتر از فرکانس طبیعی محور کامپوزیتی غیر هیبریدی شیشه / اپوکسی می‌باشد. در نتیجه با هیبرید کردن محور و استفاده از ۲ لایه کربن / اپوکسی و ۶ لایه شیشه / اپوکسی در مقایسه با ۸ لایه کربن / اپوکسی می‌توان فرکانس طبیعی را با کاهش هزینه، افزایش داد. همچنین با تغییر آرایش و ترتیب استفاده از کربن / اپوکسی و شیشه / اپوکسی و زاویه لایه چینی می‌توان به فرکانس طبیعی بالاتری دست یافت و از وضعیت تشدید محور کامپوزیت هیبریدی جلوگیری کرد.

نتایج عددی فرکانس‌های محور کامپوزیتی هیبریدی در حالت دو دیسک فولادی و تکیه‌گاه‌های ارتجاعی در حالت دوار با سرعت دوران ۱۵۰۰ دور بر دقیقه با لایه‌چینی‌های مختلف و آرایش متفاوت لایه‌های کربن و شیشه در جدول ۶ مشاهده می‌شود. می‌توان نتیجه گرفت در حالتی که دو لایه کربن /

نمودار دو فرکانس پس‌روی مود اول و دوم محور کامپوزیتی هیبریدی است و به ترتیب برابر ۲۵/۹۴ هرتز و ۹۵/۷۲ هرتز می‌باشد. اگر با نتایج المان محدود شکل ۸ که فرکانس‌های پس‌روی مود اول و دوم محور کامپوزیتی هیبریدی در سرعت دوران ۱۵۰۰ دور بر دقیقه که به ترتیب ۲۴/۰۳ هرتز و ۹۰/۳۱۴ هرتز است مقایسه کنیم، مشاهده می‌شود درصد خطا کمتر از ۶٪ می‌باشد و لذا صحت‌گذاری نتایج انجام می‌شود.

شکل ۱۲، مقایسه دیاگرام کمبل محور کامپوزیتی هیبریدی با دو دیسک فولادی و تکیه‌گاه‌های ارتجاعی در حالت لایه چینی $[45_G/-45_G/0_G/90_G/45_C/-45_C/0_G/90_G]$ حاصل از کدنویسی متلب و المان محدود را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، صحت نتایج تأیید می‌شود.

در جدول ۵ مقایسه فرکانس‌های طبیعی محور کامپوزیتی هیبریدی را با محور کامپوزیتی غیرهیبریدی از جنس شیشه / اپوکسی و کربن / اپوکسی را در سرعت دوران ۱۵۰۰ دور بر دقیقه خواهیم داشت. در فرکانس‌های اول و

جدول ۵. مقایسه فرکانس‌های طبیعی محور کامپوزیتی هیبریدی با محور کامپوزیتی غیرهیبریدی در حالت دو دیسک فولادی و تکیه‌گاه‌های ارتجاعی در حالت دوار ($\Omega=1500$ rpm)

Table 5. Comparison of the natural frequencies of the rotating hybrid composite shaft with the rotating non-hybrid composite shaft in the state of two steel discs and elastic supports ($\Omega=1500$ rpm)

فرکانس مود دوم پسرو (هرتز)	فرکانس مود دوم پیشرو (هرتز)	فرکانس مود اول پسرو (هرتز)	فرکانس مود اول پیشرو (هرتز)	لایه چینی
۹۰/۳۱۴	۹۹/۸۵۱	۲۴/۰۳	۲۵/۳۵۲	$[45_G/-45_G/0_G/90_G/45_C/-45_C/0_G/90_G]$
۸۱/۶۸۵	۸۸/۰۳۲	۲۱/۷۸۷	۲۲/۹۲۱	$[45_G/-45_G/0_G/90_G/45_G/-45_G/0_G/90_G]$
۱۳۳/۵۲	۱۶۱/۵۸	۳۸/۵۳۷	۴۳/۰۰۶	$[45_C/-45_C/0_C/90_C/45_C/-45_C/0_C/90_C]$

جدول ۶. مقایسه فرکانس‌های مود اول و دوم محور کامپوزیتی هیبریدی در حالت دو دیسک فولادی و تکیه‌گاه‌های ارتجاعی در حالت دوار با لایه‌چینی‌های مختلف و ترتیب قرارگیری کربن/اپوکسی و شیشه/اپوکسی متفاوت ($\Omega=1500$ rpm)

Table 6. Comparison of the first and second mode frequencies of the rotating hybrid composite shaft in the state of two steel discs and elastic supports with different stacking sequences and distinct arrangement of carbon/epoxy and glass/epoxy ($\Omega=1500$ rpm)

فرکانس مود دوم پسرو (هرتز)	فرکانس مود دوم پیشرو (هرتز)	فرکانس مود اول پسرو (هرتز)	فرکانس مود اول پیشرو (هرتز)	لایه چینی
۹۰/۳۱۴	۹۹/۸۵۱	۲۴/۰۳	۲۵/۳۵۲	$[45_G/-45_G/0_G/90_G/45_C/-45_C/0_G/90_G]$
۹۲/۶۹۳	۱۰۶/۷۶	۳۰/۸۰۴	۳۳/۰۷۳	$[45_G/-45_G/0_G/90_G/45_G/-45_G/0_C/90_C]$
۹۲/۸۸۹	۱۰۰/۸۲	۲۸/۷۹۷	۳۰/۶۸۸	$[45_G/-45_G/0_C/90_C/45_G/-45_G/0_G/90_G]$
۸۸/۶۱۲	۹۷/۸۰۵	۲۳/۵۳۴	۲۴/۸۱۵	$[45_C/-45_C/0_G/90_G/45_G/-45_G/0_G/90_G]$
۱۰۸/۷۹	۱۱۰/۷	۳۱/۲۴۴	۳۳/۶۱۷	$[45_C/-45_G/0_G/90_G/45_G/-45_G/0_G/90_C]$
۸۶/۳۸۹	۹۴/۸۹۲	۲۳/۱۹۲	۲۴/۴۳۳	$[45_G/-45_C/0_G/90_G/45_G/-45_G/0_C/90_G]$
۹۲/۷۶۸	۱۱۵/۶۲	۳۴/۷۲۲	۳۷/۹۵۹	$[45_G/-45_G/0_G/90_C/45_G/-45_G/0_G/90_C]$
۱۰۵/۱۱	۱۱۴/۱۵	۲۹/۴۳۹	۳۱/۴۵۳	$[45_G/-45_G/0_G/90_C/45_C/-45_G/0_G/90_G]$
۱۱۷/۷۲۱	۱۴۶/۶۷	۳۶/۸۶۴	۴۱/۳۸۴	$[0_G/0_G/45_G/-45_G/45_G/-45_G/90_C/90_C]$
۹۴/۰۳۵	۱۱۶/۸۹	۳۵/۴۴۶	۳۸/۸۹۹	$[90_C/90_G/45_G/-45_G]_S$
۹۴/۴۹۴	۱۱۴/۹۱	۳۴/۸۷۷	۳۸/۱۵۸	$[45_G/-45_G/90_G/90_C]_S$
۹۴/۴۹۲	۱۱۵/۱۸	۳۴/۹۵۲	۳۸/۲۵۵	$[45_G/-45_G/90_C/90_G]_S$
۹۴/۰۴۹	۱۱۶/۰۲	۳۵/۱۹۷	۳۸/۵۷۴	$[90_G/90_C/45_G/-45_G]_S$
۸۲/۹۹	۱۱۷/۱۹	۳۶/۶۰۶	۴۰/۴۳	$[0_G/0_G/45_G/-45_G/90_G/90_G/90_C/90_C]$
۸۴/۵۳۲	۱۱۶/۷۲	۳۶/۴۳۷	۴۰/۲۰۴	$[0_G/0_G/90_G/90_G/45_G/-45_G/90_C/90_C]$
۸۱/۶	۱۱۶/۸۱	۳۶/۳۸۱	۴۰/۱۳	$[45_G/-45_G/90_G/90_G/0_G/0_G/90_C/90_C]$

اپوکسی، در لایه‌های خارجی‌تر محور باشند، فرکانس طبیعی بیشتر بوده و زمانی که در لایه‌های داخلی‌تر محور باشند، فرکانس طبیعی کمتر است. با توجه به جدول ۶، نتیجه گرفته می‌شود که لایه با زاویه ۹۰ درجه کربن/ اپوکسی، بیشترین سفتی را دارد و زمانی که ۲ لایه ۹۰ درجه کربن/ اپوکسی، خارجی‌ترین لایه‌های محور کامپوزیتی هستند، بیشترین فرکانس طبیعی مشاهده می‌شود. البته با افزایش زاویه لایه‌چینی نیز سفتی افزایش می‌یابد. بنابراین در شرایطی که زاویه‌های الیاف ۰، ۴۵، ۴۵- و ۹۰ درجه باشد و ۲ لایه کربن/ اپوکسی و ۶ لایه شیشه/ اپوکسی داشته باشیم، بیشترین فرکانس طبیعی را در حالتی که ۲ لایه کربن/ اپوکسی ۹۰ درجه، خارجی‌ترین لایه، ۲ لایه شیشه/ اپوکسی با زاویه صفر درجه داخلی‌ترین لایه و ۴ لایه وسط نیز، شیشه/ اپوکسی با زاویه ۴۵ و ۴۵- درجه باشند، خواهیم داشت. البته با بررسی حالت‌های بیشتر مشاهده می‌شود که در حالتی که ۲ لایه بیرونی محور کامپوزیتی هیبریدی از جنس کربن/ اپوکسی با زاویه ۹۰ و ۶ لایه زیرین آن همگی از جنس شیشه/ اپوکسی با زاویه ۹۰ باشند، فرکانس مود اول پیشرو و پسرو بیشترین مقدار و فرکانس مود دوم پسرو کمترین مقدار را در بین حالت‌های مورد بررسی دارد. همچنین از جدول ۵ مشاهده می‌شود که لایه‌چینی متقارن نسبت به لایه‌چینی غیرمتقارن به جزء حالتی که ۲ لایه کربن/ اپوکسی خارجی‌ترین لایه هستند، فرکانس طبیعی محور کامپوزیتی هیبریدی بیشتر خواهد بود، زیرا تقارن لایه‌چینی باعث سفتی بیشتر می‌شود.

از جدول ۶ نتیجه گرفته می‌شود که زاویه لایه‌چینی کربن/ اپوکسی نسبت به ترتیب قرارگیری آن از نظر نزدیک بودن به لایه‌های خارجی محور تأثیر بیشتری در فرکانس طبیعی خواهد داشت. همچنین مقایسه جدول ۵ و ۶ نشان می‌دهد که با هیبریدی کردن محور کامپوزیتی و بهبود خواص، می‌توان با کاهش هزینه از نظر استفاده کمتر از کربن/ اپوکسی، با تغییر لایه‌چینی، مقدار فرکانس طبیعی را افزایش داد و این امر باعث افزایش مقدار سرعت بحرانی و در نهایت جلوگیری از پدیده تشدید خواهد شد.

۵- جمع‌بندی

در این پژوهش، رفتار دینامیکی یک محور کامپوزیتی هیبریدی با یاتاقان‌های ارتجاعی مورد بررسی قرار گرفت. ابتدا یک محور کامپوزیتی

۸ لایه از جنس کربن/ اپوکسی در حالت دو دیسک فولادی با قطرهای مختلف در وسط به صورت متقارن که روی تکیه‌گاه‌های ارتجاعی قرار دارد، مدل‌سازی می‌شود. نتایج المان محدود آن با نتایج پژوهش مرجع [۷] مقایسه می‌شود و صحت نتایج تأیید می‌شود. در ادامه، محور کامپوزیتی در حالت هیبریدی توسعه داده می‌شود و معادلات حاکم بر محور کامپوزیتی هیبریدی به صورت ماتریسی، با استفاده از معادلات لاگرانژ استخراج می‌شود. سپس با کدنویسی در نرم‌افزار متلب و حل عددی، فرکانس‌های پیشرو و پسرو در مودهای اول و دوم در سرعت‌های دوران مختلف از طریق نمودار دامنه بر حسب فرکانس بدست می‌آید و با نتایج المان محدود مقایسه نموده و صحت‌گذاری نتایج انجام می‌شود. در انتها تأثیر پارامترهای لایه‌چینی بر روی فرکانس‌های پیشرو و پسرو و دوره‌های بحرانی بررسی می‌شود.

نتایج نشان داد که پارامترهای لایه‌چینی بر روی رفتار ارتعاشی محور کامپوزیتی هیبریدی تأثیر قابل ملاحظه‌ای دارند که خلاصه آن به شرح زیر است:

۱- هر چه زاویه لایه‌چینی بیشتر باشد، فرکانس طبیعی محور کامپوزیتی هیبریدی بیشتر است.

۲- در صورتی که لایه کربن/ اپوکسی لایه خارجی‌تر باشد یا به لایه‌های خارجی نزدیک‌تر باشد، فرکانس طبیعی محور کامپوزیتی هیبریدی نیز افزایش می‌یابد.

۳- زاویه لایه‌چینی بیشتر کربن/ اپوکسی نسبت به آرایش قرارگیری لایه کربن/ اپوکسی در لایه‌های خارجی‌تر، در محور کامپوزیتی هیبریدی، اثر بیشتری خواهد داشت.

۴- برای محور کامپوزیتی هیبریدی ۸ لایه، بیشترین مقدار فرکانس طبیعی را در حالتی خواهیم داشت که ۲ لایه خارجی محور، کربن/ اپوکسی با زاویه ۹۰ درجه، ۲ لایه داخلی آن شیشه/ اپوکسی با زاویه صفر و ۴ لایه میانی آن نیز شیشه/ اپوکسی با زاویه ۴۵ و ۴۵- درجه باشند.

۵- به منظور صرفه‌جویی اقتصادی می‌توان با هیبریدی نمودن محور کامپوزیتی و استفاده کمتر از کربن/ اپوکسی به وسیله لایه‌چینی و ترتیب قرارگیری کربن/ اپوکسی و شیشه/ اپوکسی مناسب، مقدار فرکانس‌های طبیعی و سرعت‌های بحرانی را افزایش داد و نتایج را به محور کامپوزیتی غیرهیبریدی کربن/ اپوکسی نزدیک نمود.

۶- فهرست علائم

		علائم انگلیسی	
ماتریس سفتی یک ماده غیرهمسانگرد	$[Q]$	سطح مقطع محور کامپوزیتی، m^2	A
شعاع داخلی لایه کامپوزیتی، m	r_i	تعداد لایه‌های کربن / اپوکسی	c
شعاع خارجی لایه کامپوزیتی، m	r_o	ضریب سفتی خمشی محور کامپوزیتی هیبریدی	C_{HB}
انرژی جنبشی محور کامپوزیتی هیبریدی، $\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$	T_{shaft}	ضریب سفتی پیچشی محور کامپوزیتی هیبریدی	C_{HT}
انرژی جنبشی دیسک، $\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$	T_{disk}	ضریب سفتی برشی محور کامپوزیتی هیبریدی	C_{HS}
انرژی پتانسیل کرنشی محور کامپوزیتی هیبریدی، $\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$	U	ضریب سفتی خمشی-پیچشی محور کامپوزیتی هیبریدی	C_{HB}
جابجایی محور کامپوزیتی در امتداد محور x	$u(x, t)$	تعداد لایه‌های شیشه / اپوکسی	d
جابجایی محور کامپوزیتی در امتداد محور y	$v(x, t)$	ماتریس مربوط به اثرات ژبروسکویی $[D]$	
جابجایی محور کامپوزیتی در امتداد محور z	$w(x, t)$	مدول یانگ در جهت ۱، $\frac{N}{m^2}$	E_1
بردار ویژه	X	مدول یانگ در جهت ۲، $\frac{N}{m^2}$	E_2
موقعیت مکانی دیسک i ام	x_i	نیروی اعمال شده روی یاتاقان روتور به ترتیب در جهت y ، N	F_y
		نیروی اعمال شده روی یاتاقان روتور به ترتیب در جهت z ، N	F_z
		مدول برشی روی صفحه ۱-۲، $\frac{N}{m^2}$	G_{12}
		مدول برشی روی صفحه ۱-۳، $\frac{N}{m^2}$	G_{13}
		مدول برشی روی صفحه ۲-۳، $\frac{N}{m^2}$	G_{23}
		شماره دیسک	i
		ممان اینرسی جرمی عرضی محور کامپوزیتی هیبریدی، $kg \cdot m^2$	I
		ممان اینرسی جرمی قطبی محور کامپوزیتی هیبریدی، $kg \cdot m^2$	I_p
		ممان اینرسی جرمی عرضی دیسک i ام	I_{D_i}
		ممان اینرسی جرمی قطبی دیسک i ام	$I_{D_{P_i}}$
		شماره لایه کامپوزیتی	k
		ماتریس سفتی $[K]$	
		ضریب تصحیح برشی	k'
		طول محور کامپوزیتی هیبریدی، m	l
		لاگرانژین	L
		ماتریس جرم $[M]$	
		تعداد کل لایه‌های محور کامپوزیتی	n
		تعداد دیسک	N

علائم یونانی	
تنش قائم، $\frac{N}{m^2}$	σ
تنش برشی، $\frac{N}{m^2}$	τ
کرنش قائم	ε
کرنش برشی	γ
زاویه لایه چینی، rad	η
ضریب پواسون	ν_{12}
شیب خمش در صفحه xz ، rad	θ
شیب خمش در صفحه xy ، rad	φ
زاویه پیچش، rad	β
سرعت دوران محور کامپوزیتی، $\frac{rad}{s}$	Ω
چگالی محور کامپوزیتی هیبریدی، $\frac{kg}{m^3}$	ρ
چگالی کربن / اپوکسی، $\frac{kg}{m^3}$	ρ_C
چگالی شیشه / اپوکسی، $\frac{kg}{m^3}$	ρ_G

- Combination resonances of spinning composite shafts considering geometric nonlinearity, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 41(11) (2019) 1-21.
- [10] S.B. Arab, J.D. Rodrigues, S. Bouaziz, M. Haddar, Stability analysis of internally damped rotating composite shafts using a finite element formulation, *Comptes Rendus Mécanique*, 346(4) (2018) 291-307.
- [11] K. Ri, K. Choe, P. Han, Q. Wang, The effects of coupling mechanisms on the dynamic analysis of composite shaft, *Composite Structures*, 224 (2019) 111040.
- [12] H. Gubran, K. Gupta, The effect of stacking sequence and coupling mechanisms on the natural frequencies of composite shafts, *Journal of sound and vibration*, 282(1-2) (2005) 231-248.
- [13] R.M. Shinde, S.M. Sawant, Investigation on glass-epoxy composite drive shaft for light motor vehicle, *International Journal of Design Engineering*, 9(1) (2019) 22-35.
- [14] S. Ghoneam, A. Hamada, M. EL-Elamy, The Effect of Stacking Sequence and Coupling Mechanisms on Eigen-Nature of Composite Shafts, in: *International Conference on Aerospace Sciences and Aviation Technology*, The Military Technical College, 2013, pp. 1-21.
- [15] B. Ravishankar, S.K. Nayak, M.A. Kader, Hybrid composites for automotive applications—A review, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 38(18) (2019) 835-845.
- [16] P. Udatha, A. Sekhar, R. Velmurugan, The effect of CNT to enhance the dynamic properties of hybrid composite tube shafts, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 26(1) (2019) 88-92.
- [17] G. Aklilu, S. Adali, G. Bright, Failure analysis of rotating hybrid laminated composite beams, *Engineering Failure Analysis*, 101 (2019) 274-282.
- [18] M.I. Yusuff, Mechanical properties of woven carbon Fiber/Kenaf Fabric reinforced epoxy matrix hybrid composites, *Malaysian Journal of Microscopy*, 15(1) (2019).
- [19] O. Montagnier, C. Hochard, Optimisation of hybrid
- [1] L. Qi, C. Li, X. Yu, W. Min, H. Shi, L. Tao, H. Wang, M. Yu, L. Ni, Z. Sun, Effect of reinforced fibers on the vibration characteristics of fibers reinforced composite shaft tubes with metal flanges, *Composite Structures*, 275 (2021) 114460.
- [2] R. Bavi, A. Hajnayeb, H.M. Sedighi, M. Shishesaz, Simultaneous resonance and stability analysis of unbalanced asymmetric thin-walled composite shafts, *International Journal of Mechanical Sciences*, 217 (2022) 107047.
- [3] P.C. Barbosa, V.T. Del Claro, M.S. Sousa Jr, A.A. Cavalini Jr, V. Steffen Jr, Experimental analysis of the SHBT approach for the dynamic modeling of a composite hollow shaft, *Composite Structures*, 236 (2020) 111892.
- [4] H. Kafi, S. Hosseini, Dynamic analysis of nonlinear rotating composite shafts excited by non-ideal energy source, *ZAMM—Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 99(5) (2019) e201800279.
- [5] A.C. Dixit, B. Sridhara, M. Achutha, Evaluation of Critical Speed for Aluminum–Boron Carbide Metal Matrix Composite Shaft, in: *Innovative Design, Analysis and Development Practices in Aerospace and Automotive Engineering (I-DAD 2018)*, Springer, 2019, pp. 527-534.
- [6] V. Jagadale, S.N. Padhi, Fabrication and torsional strength evaluation of a glass fiber epoxy composite shaft, *Indian Journal of Engineering and Materials Sciences*, 28 (2021) 282-285.
- [7] W.R.D.P. Mendonça, E.C. De Medeiros, A.L.R. Pereira, M.H. Mathias, The dynamic analysis of rotors mounted on composite shafts with internal damping, *Composite Structures*, 167 (2017) 50-62.
- [8] Z. Sun, J. Xiao, X. Yu, R. Tusiime, H. Gao, W. Min, L. Tao, L. Qi, H. Zhang, M. Yu, Vibration characteristics of carbon-fiber reinforced composite drive shafts fabricated using filament winding technology, *Composite Structures*, 241 (2020) 111725.
- [9] H. Shaban Ali Nezhad, S. Hosseini, M. Moradi Tiaki,

- and Exploring Engineering, 2 (2013) 157-165.
- [21] H. Shaban Ali Nezhad, S. Hosseini, M. Zamanian, Flexural–flexural–extensional–torsional vibration analysis of composite spinning shafts with geometrical nonlinearity, *Nonlinear Dynamics*, 89(1) (2017) 651-690.
- high-modulus/high-strength carbon fibre reinforced plastic composite drive shafts, *Materials & Design*, 46 (2013) 88-100.
- [20] M. Arun, K.S. Vinoth, Design and development of laminated aluminum glass fiber drive shaft for light duty vehicles, *International Journal of Innovative Technology*

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. M. Nazari, A. Rahi, R. Sarfaraz, The Effect of Stacking Sequence Parameters on the Vibration Behavior of Rotating Hybrid Composite Shaft, Amirkabir J. Mech Eng., 54(10) (2023) 2277-2296.

DOI: 10.22060/mej.2022.21101.7378



