



کمی سازی عدم اطمینان در تخمین ویژگی های مودال طیف امیدانس الکترومکانیکی وصله پیزوالکتریک مستطیلی

محمد احسانی^{۱،۳}، مهناز شمشرساز^{۱*}، ناصرالدین سپهری^۲ و مجتبی صدیقی^۳

۱- پژوهشکده فناوری نو، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران
۲- دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران
۳- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۰۲
بازنگری: ۱۴۰۱/۰۴/۲۶
پذیرش: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹
ارائه آنلاین: ۱۴۰۱/۰۸/۱۶

کلمات کلیدی:

پایش سلامت سازه
وصله پیزوالکتریک
کمی سازی عدم اطمینان
بسط آشوبناک چندجمله‌ای
تحلیل حساسیت سراسری

خلاصه: روش امیدانس الکترومکانیکی از جمله روش های مؤثر جهت شناسایی آسیب در حوزه تعمیر و نگهداری بر خط به شمار می رود. در این روش از قابلیت وصله های پیزوالکتریک جهت عملگری و حسگری همزمان استفاده می شود. تخمین طیف امیدانس الکترومکانیکی به کمک مدل های عددی یا تحلیلی مزایای ویژه ای در فرایند شناسایی آسیب فراهم می آورد. این در حالی است که وجود منابع عدم اطمینان مختلف منجر به اختلاف قابل توجه بین نتایج مدل های عددی و نتایج تجربی می شود. از این رو کمی سازی عدم اطمینان در پاسخ ارتعاشاتی فرکانس بالای وصله پیزوالکتریک ضرورت پیدا می کند. در این تحقیق به بررسی احتمالاتی تخمین طیف امیدانس الکترومکانیکی پرداخته می شود. در این راستا از مدل های جایگزین مبتنی بر بسط آشوبناک چندجمله ای جهت تحلیل احتمالاتی ویژگی های مودال طیف امیدانس استفاده شد. ممان های احتمالاتی و توزیع احتمال کمیت های پاسخ مورد نظر به صورت تحلیلی توسط مدل های جایگزین محاسبه شدند. تحلیل حساسیت سراسری جهت رتبه بندی اهمیت متغیرهای احتمالاتی بر واریانس مقادیر پاسخ از طریق پس پردازش ضرایب مدل های آشوبناک چندجمله ای و با هزینه محاسباتی بسیار کم امکان پذیر است. طبق نتایج، به ازای مقادیر عدم اطمینان رایج در خواص و هندسه وصله پیزوالکتریک، ضریب تغییرات در دامنه فرکانس های قله (۵۰/۷۰٪) بسیار بیشتر از فرکانس های مودال (۴/۲۰٪) است. به علاوه، فرکانس های مودال بیشترین حساسیت را به خواص مکانیکی (مدول نرمی و چگالی) و دامنه های مودال بیشترین حساسیت را به ضریب میرایی مکانیکی، ضریب گذردهی الکتریکی و ثابت پیزوالکتریک دارند.

۱- مقدمه

در سال های اخیر استفاده از مواد هوشمند در شاخه های مختلف مهندسی اعم از حوزه پایش سلامت سازه، گسترش چشمگیری یافته است [۱]. خواص و ویژگی های منحصر به فرد مواد پیزوالکتریک به عنوان گونه ای از مواد هوشمند، آن ها را به گزینه ای مناسب برای به کارگیری در بخش عملگری و حسگری سامانه های پایش سلامت برخط بدل کرده است. با این که اغلب عملگرها و حسگرهای مورد استفاده در روش های مختلف پایش سلامت بر اساس خواص مواد پیزوالکتریک عمل می کنند، استفاده از وصله های مینیاتوری پیزوالکتریک، مزایای ویژه ای در حوزه شناسایی آسیب برخط به ارمغان می آورد. قابلیت عملگری و حسگری همزمان، مقاومت بالا، وزن کم، تأثیر ناچیز بر رفتار دینامیکی سازه تحت پایش و البته قیمت مناسب، جزء ویژگی های منحصر به فرد تراگذارهای ویفری در فرآیندهای شناسایی

آسیب محسوب می شوند.

روش امیدانس الکترومکانیکی از جمله روش های شناسایی آسیب مبتنی بر ارتعاشات بوده که از قابلیت عملگری و حسگری همزمان وصله های پیزوالکتریک بهره می برد [۲ و ۳]. اساس تشخیص آسیب در روش امیدانس الکترومکانیکی، تغییر در امیدانس مکانیکی سازه (جرم، سفتی، میرایی و شرایط مرزی) به واسطه ایجاد آسیب و در نتیجه تغییر در طیف امیدانس الکترومکانیکی وصله پیزوالکتریک متصل به سازه میزبان نسبت به یک حالت دست نخورده است. این تغییرات معمولاً به صورت تغییر در فرکانس و دامنه قله های تشدید و پادتشدید در طیف امیدانس (ادمیتانس) وصله پیزوالکتریک ظاهر می شود. کمی سازی تغییرات این ویژگی های مودال نسبت به حالت سالم توسط شاخص های آسیب امکان تخمین شدت آسیب را فراهم می آورد.

* نویسنده عهده دار مکاتبات: shamshir@aut.ac.ir

به آشوب چندجمله‌ای‌ها) ایده اصلی این روش به شمار می‌رود [۱۳]. دقت این روش خصوصاً در جایگزینی مدل‌های محاسب با تعداد ورودی‌های کم و متوسط بسیار مناسب است. مدل جایگزین مبتنی بر بسط آشوبناک امکان کمی سازی عدم اطمینان، تعیین آمارگان نقطه‌ای و توزیع چگالی احتمال پاسخ را به صورت تحلیلی و با هزینه محاسباتی کم فراهم می‌کند [۱۴]. از این رو بسط آشوبناک چندجمله‌ای‌ها به‌عنوان روشی قدرتمند در حوزه مهندسی قابلیت اطمینان نیز به شمار می‌رود. ایده اولیه بسط آشوبناک توسط وینر^۲ [۱۵] برای مدل‌سازی فرآیندهای تصادفی که متغیرهای ورودی آن منحصرأ دارای توزیع چگالی احتمال گوسی بودند، ارائه شد. بعدها، با معرفی بسط آشوبناک چندجمله‌ای تعمیم‌یافته، مدل‌سازی فرایندهایی با متغیرهای ورودی غیر گوسی اما کلاسیک (به‌عنوان مثال، گاما، بتا و یکنواخت) توسط این روش ممکن شد [۱۶]. با ارائه ایده بسط آشوبناک چندجمله‌ای دلخواه، گستردگی این روش به اوج خود رسید، به طوری که مدل‌سازی هر نوع فرایند تصادفی با هر نوع ورودی تصادفی غیراستاندارد توسط این روش امکان‌پذیر است [۱۷] و [۱۸]. در کاربردهای اولیه روش بسط آشوبناک، از روش‌های مزاحم^۳ برای محاسبه ضرایب بسط استفاده می‌شد [۱۹]. در این شیوه، علاوه بر گسسته‌سازی مسئله در حوزه مکان (روش المان محدود) و در صورت نیاز زمان (مسائل متغیر با زمان مانند مسائل ارتعاشاتی) نیاز به گسسته‌سازی مدل در حوزه فضای احتمال نیز وجود دارد. نیاز به الگوریتم‌های ابتکاری برای حل این‌گونه مسائل منجر به محدود ماندن کاربرد بسط آشوبناک چندجمله‌ای‌ها شده بود. ظهور روش‌های غیرمزاحم [۲۰] که در آن ضرایب بسط تنها توسط خروجی‌های مدل اصلی در تعداد مشخصی نمونه از فضای احتمال مشترک متغیرهای ورودی تعیین می‌شوند، گام بزرگی در عمومی‌سازی بسط آشوبناک چندجمله‌ای‌ها بود. این ایده امکان مدل‌سازی سیستم‌های بسیار پیچیده که اغلب اطلاعات چندانی از ماهیت فیزیکی آن در دسترس نیست (موسوم به مدل‌های جعبه سیاه) را توسط بسط آشوبناک چندجمله‌ای‌ها با هزینه محاسباتی نسبتاً پایین فراهم می‌کند. همین ویژگی‌های منحصربه‌فرد، بسط آشوبناک چندجمله‌ای‌ها را به یکی از کلیدی‌ترین رویکردها در کمی‌سازی عدم قطعیت طیف وسیعی از مسائل مهندسی اعم از دینامیک سازه [۲۱-۲۳]، دینامیک سیالات

امکان مدل‌سازی رفتار وابسته الکترومکانیکی وصله پیزوالکتریک [۴-۶] و تخمین طیف امپدانس (ادمیتانس) الکترومکانیکی توسط مدل‌های تحلیلی یا عددی، مزایای ویژه‌ای در روند شناسایی آسیب ایجاد می‌کند. مکان‌یابی آسیب، تعیین محل مناسب الصاق حسگرها به‌منظور پوشش کامل محدوده تحت پایش و تحلیل پارامتری عوامل مؤثر بر شناسایی آسیب و تقویت پارامترهای با بیشترین تأثیر جهت افزایش قدرت شناسایی آسیب از جمله کاربردهای تخمین طیف امپدانس هستند. تاکنون تلاش‌های متعددی برای مدل‌سازی و تخمین طیف امپدانس الکترومکانیکی به‌صورت تحلیلی [۷ و ۸]، نیمه‌تحلیلی و عددی [۵ و ۹ و ۱۰] انجام گرفته است. هرچند وجود منابع مختلف عدم اطمینان در ارتباط با خواص، هندسه و البته مدل مورد استفاده، امکان صحت سنجی نتایج عددی و تجربی را با مشکل مواجه می‌کند. حتی در اغلب موارد جهت ارائه مدلی صحت سنجی شده که امکان استفاده از آن در فرایند شناسایی آسیب وجود داشته باشد، تنها از طریق تخمین پارامتر و به‌روزرسانی مدل امکان‌پذیر است. فرایند تخمین پارامتر که اغلب به‌صورت احتمالاتی انجام می‌گیرد، فرایندی بسیار زمان‌بر بوده و افزایش منابع عدم اطمینان بر حجم محاسبات مربوطه می‌افزاید [۱۱]. این در حالی است که در صورت وجود دانشی پیرامون نحوه تغییرات ویژگی‌های مودال طیف امپدانس نسبت به پارامترهای مؤثر در سراسر فضای احتمالاتی مشترک آن‌ها، امکان به‌روزرسانی مدل و تخمین پارامتر را در کوتاه‌ترین مسیر فراهم می‌آورد. به‌علاوه، رتبه‌بندی میزان تأثیر پارامترهای ورودی بر واریانس مقادیر پاسخ از طریق تحلیل حساسیت سراسری امکان قطعی فرض کردن پارامترهای کم‌تأثیر، از ابعاد فضای احتمالاتی ورودی و در نتیجه حجم محاسبات می‌کاهد. از نتایج تحلیل حساسیت می‌توان در فرمولاسیون بهینه توابع هزینه جهت تخمین مؤثر پارامترهای ورودی نیز بهره برد [۱۲].

بسط آشوبناک چندجمله‌ای‌ها^۱ از جمله مؤثرترین روش‌ها به‌منظور تولید مدل جایگزین قابل اطمینان با کمترین تعداد داده‌های ورودی محاسبه‌شده توسط مدل اصلی، کمی‌سازی عدم اطمینان در متغیرهای پاسخ و همچنین تحلیل حساسیت سراسری به شمار می‌رود. بسط پاسخ خروجی از مدل اصلی توسط چندجمله‌ای‌های چندمتغیره متعامد به‌عنوان پایه‌های یک فضای احتمالاتی (موسوم

2 Wiener
3 Intrusive

1 Polynomial Chaos Expansion (PCE)

تحلیل همبستگی بین ویژگی‌های مودال طیف امپدانس و متغیرهای تصادفی اشاره شده از جمله چشم‌اندازهای دیگر تحقیق حاضر به شمار می‌رود.

۲- پیش‌زمینه تئوری و روش‌ها

در این بخش ابتدا معادلات مربوط به تخمین طیف امپدانس الکترومکانیکی وصله پیزوالکتریک مستطیلی ارائه و نحوه استخراج فرکانس‌های تشدید و پادتشدید مورد بحث قرار خواهد گرفت. سپس، تئوری بسط آشوبناک چندجمله‌ای جهت کمی‌سازی عدم اطمینان و تحلیل احتمالاتی کمیت‌های موردنظر ارائه می‌شود. در نهایت، نحوه تحلیل حساسیت سراسری به روش تحلیل واریانس توسط پس‌پردازش ضرایب بسط آشوبناک چندجمله‌ای ارائه خواهد شد.

۲-۱- تخمین طیف امپدانس الکترومکانیکی وصله پیزوالکتریک مستطیلی به کمک معادلات تحلیلی

وصله پیزوالکتریک نازک نشان‌داده‌شده در شکل ۱ را که تحت تأثیر اعمال ولتاژ هارمونیک $(V(t) = \hat{V}e^{j\omega t})$ به الکترودهایش (شرایط مرزی الکتریکی) به صورت آزاد (شرایط مرزی مکانیکی) در حال ارتعاش است را در نظر بگیرید. با توجه به ضخامت کم وصله، می‌توان توزیع میدان الکتریکی ناشی از اعمال ولتاژ به وجوه بالایی و پایینی پیزوالکتریک را یکنواخت فرض کرد $(E_p(t) = \hat{E}_p e^{j\omega t})$. تحت شرایط مرزی مذکور، وصله پیزوالکتریک به صورت تشدیدگر در فرکانس تحریک و البته اختلاف فاز $u_1(t) = \hat{u}_1 e^{j\omega t}$ نوسان خواهد کرد.

در صورتی که اندازه ابعاد وصله در سه جهت تفاوت چشمگیری داشته باشند، می‌توان ارتعاشات در سه راستای طولی، عرضی و ضخامت را مستقل فرض نمود. در حالتی که طول پیزوالکتریک نسبت به اندازه دو بعد دیگر آن بسیار بزرگ‌تر باشد $(l_p \gg b_p \gg t_p)$ ، ارتعاشات طولی در پاسخ الکترومکانیکی وصله به تحریک الکتریکی قالب خواهد بود. تحت این شرایط، ادمیتانس و امپدانس الکترومکانیکی وصله مستطیلی از معادلات (۱) و (۲) قابل تخمین خواهند بود [۳۲]:

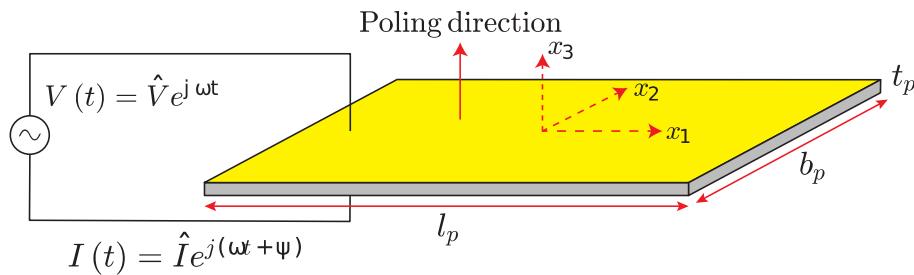
[۱۸]، تعامل سازه و سیال [۲۴] و پایش سلامت سازه [۲۸-۲۵] بدل کرده است.

تحلیل حساسیت با هدف تعیین کمی اهمیت نسبی پارامترهای ورودی به یک مدل ریاضی، به‌عنوان یکی از مراحل مهم در چرخه کمی‌سازی عدم قطعیت نیز به شمار می‌رود. تحلیل حساسیت معمولاً به دو شیوه محلی و سراسری^۱ قابل انجام است [۲۹]. در تحلیل حساسیت محلی، تمرکز بر نحوه تغییرات خروجی مدل در اثر تغییر متغیرهای تصادفی در اطراف مقدار نامی آن‌ها است. از طرفی، هدف از تحلیل حساسیت سراسری محاسبه میزان تغییرات خروجی مدل در اثر تغییر هم‌زمان همه متغیرهای ورودی، روی کل فضای احتمال مشترک آن‌ها است. روش‌های مبتنی بر تحلیل واریانس و روش‌های مبتنی رگرسیون رایج‌ترین شیوه‌های تحلیل حساسیت سراسری به شمار می‌روند. روش‌های مبتنی بر رگرسیون تنها در مورد مدل‌های رگرسیون خطی (بر حسب ضرایب رگرسیون) یا مدل‌هایی با ماهیت یکنوا قابل پیاده‌سازی هستند [۳۰]. از این‌رو، روش‌های مبتنی بر تجزیه واریانس و خصوصاً شاخص‌های حساسیت سبل^۲ از مقبولیت عمومی بیشتری بین محققین برخوردار هستند. روش‌های مبتنی بر شبیه‌سازی مونت‌کارلو از جمله روش‌های تخمین شاخص‌های حساسیت سبل بوده [۳۱] که به‌واسطه تعداد زیاد ارجاعات مورد نیاز به مدل اصلی، در مورد مدل‌های محاسباتی پیچیده قابل پیاده‌سازی نیستند. از طرفی، مدل جایگزین مبتنی بر بسط آشوبناک چندجمله‌ای امکان محاسبه تحلیلی شاخص‌های سبل را ممکن می‌کند [۱۴].

هدف از تحقیق حاضر کمی‌سازی عدم اطمینان در تخمین طیف امپدانس الکترومکانیکی وصله‌های پیزوالکتریک و به‌ویژه مشخصه‌های مودال آن در ارتعاشات فرکانس بالا است. خواص الکتریکی، مکانیکی و همچنین هندسه به عنوان منابع عدم اطمینان در تخمین طیف امپدانس هستند. استفاده از روش بسط آشوبناک چندجمله‌ای جهت تحلیل احتمالاتی طیف امپدانس الکترومکانیکی از جمله نوآوری‌های پژوهش حاضر است. این روش در عین کاهش حجم محاسبات، امکان محاسبه تحلیلی ممان‌های احتمالاتی کمیت‌های موردنظر و همچنین تخمین توزیع چگالی احتمال آن‌ها را فراهم می‌آورد. رتبه‌بندی میزان تأثیر متغیرهای اشاره شده بر ویژگی‌های مودال طیف امپدانس در قالب تحلیل حساسیت از جمله اهداف دیگر پژوهش حاضر است.

1 Global

2 Sobol index



شکل ۱. طرح شماتیک وصله پیزوالکتریک مستطیلی تحت اعمال ولتاژ الکتریکی

Fig. 1. Schematic illustration of a rectangular piezoelectric patch being applied to voltage

اهمیت ویژه‌ای در حوزه شناسایی آسیب برخوردار است. فرکانس‌های تشدید الکترومکانیکی به فرکانس‌هایی که در آن‌ها ادمیتانس و در نتیجه جریان الکتریکی و جابه‌جایی بیشینه بوده اطلاق شده و متناظر با قطب‌های $Y(\omega)$ هستند ($\bar{\varphi} \cot(\bar{\varphi}) = 0$) [۳۳]. فرکانس‌های تشدید متناظر با فرکانس‌های قله در طیف رسانایی^۱ و پذیرندگی^۲ هستند. از طرفی، فرکانس‌های پادتشدید به فرکانس‌هایی که در آن امپدانس بیشینه و در نتیجه جریان عبوری و جابه‌جایی سیستم کمینه می‌شود، اطلاق می‌شود. در نتیجه، فرکانس‌های پادتشدید متناظر با قطب‌های معادله امپدانس (متناظرأً صفرهای معادله ادمیتانس) هستند [۳۳]:

$$\bar{\varphi} \cot(\bar{\varphi}) + \frac{\bar{k}_{31}^2}{1 - \bar{k}_{31}^2} = 0 \quad (3)$$

فرکانس‌های پادتشدید متناظر با فرکانس‌های قله در طیف مقاومت^۳ و واکنایی^۴ هستند. معادله فوق، یک معادله کسری مختلط بوده و ریشه‌های آن توسط روش‌های عددی قابل محاسبه است. برای این منظور ابتدا به کمک جبر مختلط، قسمت‌های حقیقی و موهومی آن از هم جدا می‌گردد. نظر به این که معادله فوق در بازه فرکانسی موردنظر دارای چندین ریشه است، در صورت استفاده از روش نیوتن-

$$Y(\omega) = j\omega \bar{C} \left[1 - \bar{k}_{31}^2 \left(1 - \frac{1}{\bar{\varphi} \cot(\bar{\varphi})} \right) \right]; \quad Z(\omega) = Y^{-1}(\omega) \quad (1)$$

$$\bar{k}_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{\bar{s}_{11}^E \bar{\epsilon}_{33}^T}, \quad \bar{C} = \bar{\epsilon}_{33}^T \frac{b_p l_p}{t_p}, \quad \bar{\varphi} = \frac{1}{2} \frac{\omega l_a}{\bar{c}}, \quad \bar{c} = \sqrt{\frac{1}{\rho \bar{s}_{11}^E}}, \quad (2)$$

$$\bar{s}_{11}^E = s_{11}^E (1 - j\eta), \quad \bar{\epsilon}_{33}^T = \epsilon_{33}^E (1 - j\delta)$$

در روابط فوق Z و Y به ترتیب نماینده ادمیتانس و امپدانس الکترومکانیکی، s_{11}^E نرمی مکانیکی، ρ چگالی، ϵ_{33}^T گذردهی الکتریکی، d_{31} ثابت پیزوالکتریک، η و δ ضرایب اتلاف مکانیکی و الکتریکی، ω فرکانس زاویه‌ای تحریک و $z = \sqrt{-1}$ عدد موهومی یکه هستند. علامت - نشان‌دهنده مختلط بودن کمیت موردنظر است. به علاوه، کمیت‌های ترکیبی به صورت k_{31} ضریب جفت شدگی پیزوالکتریک، C ظرفیت خازنی وصله پیزوالکتریک، φ مقدار فاز موجود در نصف طول پیزوالکتریک در حالت ارتعاش با فرکانس ω و c سرعت موج قابل تعبیر هستند. با تغییر فرکانس ($f = \omega/2\pi$) در روابط (۱) و (۲) طیف‌های امپدانس و ادمیتانس وصله پیزوالکتریک قابل محاسبه و ترسیم خواهند بود. با توجه به مختلط بودن Z و Y ، اغلب اجزاء حقیقی و موهومی آن‌ها به صورت جداگانه ترسیم و از آن‌ها جهت شناسایی آسیب استفاده می‌گردد.

استفاده از ویژگی‌های مودال طیف ادمیتانس (امپدانس) الکترومکانیکی شامل فرکانس و دامنه‌های تشدید (پادتشدید) از

- 1 Conductance
- 2 Susceptance
- 3 Resistance
- 4 Reactance

حالت پادتشدید و n تعداد فرکانس‌های تشدید (پادتشدید) به دست آمده در بازه فرکانسی مدنظر است. لازم به ذکر است که کمیت‌های موردنظر لحاظ شده با شاخص آسیب رایج انتقال به سمت چپ مرتبط هستند. به‌عنوان مثال، Y_2 با میانگین انتقال فرکانس‌های قله در جزء حقیقی طیف امپدانس به شکل زیر مرتبط است:

$$DI_{sl} = \frac{1}{n} \sum_i (f_{antires_0}^{(i)} - f_{antires}^{(i)}) = \quad (5)$$

$$\frac{1}{n} \sum_i f_{antires_0}^{(i)} - \frac{1}{n} \sum_i f_{antires}^{(i)} = \text{const.} - Y_2$$

در رابطه فوق زیروند صفر در $f_{anti-res}^{(i)}$ به فرکانس پادتشدید نظیر در یک حالت مبنا اشاره دارد. علاوه بر فرکانس‌های تشدید و پادتشدید، دامنه قله‌ها در طیف‌های امپدانس و ادیمیتانس الکترومکانیکی از اهمیت ویژه‌ای در شناسایی شدت آسیب (خصوصاً آسیب‌های پیش‌رونده [۳۶]) برخوردار هستند. جهت تعیین دامنه قله‌ها، ابتدا طیف امپدانس (متناظراً ادیمیتانس) به کمک رابطه (۱) ترسیم و از الگوریتم‌های قله‌یابی^۴ برای تعیین دامنه آن‌ها استفاده شد. مشابه فرکانس‌های قله، میانگین دامنه به عنوان کمیت موردنظر لحاظ شد:

$$Y_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_j^{(i)}, \quad f_j^{(i)} \in [f_1, f_2] \quad (6)$$

در رابطه فوق $j=1$ مربوط به جزء حقیقی و $j=2$ مربوط به جزء موهومی طیف امپدانس است. به‌این‌ترتیب جمع کمیت‌های موردنظر مستخرج از طیف‌های امپدانس و ادیمیتانس الکترومکانیکی به چهار کمیت شامل میانگین فرکانس‌های تشدید Y_1 و پادتشدید Y_2 و میانگین دامنه‌های قله در اجزاء حقیقی Y_3 و موهومی طیف امپدانس Y_4 رسید.

رافسون^۱ جهت تعیین تمام ریشه‌ها، نیاز به گسسته‌سازی دامنه فرکانسی و درنظرگرفتن یک حدس اولیه در تمام آن بازه‌ها است. در نهایت با توجه به این که اغلب رزولوشن گسسته‌سازی حوزه فرکانسی تحلیل بیشتر از تعداد ریشه‌های معادله بوده و در نتیجه بسیاری از حدس‌های اولیه به ریشه‌های یکسان همگرا خواهند شد، ریشه‌های تکراری از آرایه ریشه‌های محاسبه شده حذف می‌گردد. ماهیت تکراری روش نیوتن-رافسون و تعداد حدس‌های اولیه زیاد موردنیاز جهت تعیین تمام ریشه‌ها در بازه فرکانسی مدنظر، منجر به افزایش زمان تحلیل می‌گردد. به‌علاوه، معادله فوق در اطراف ریشه‌های معادله $\cot(\bar{\varphi})=0$ (متناظر با فرکانس‌های تشدید الکترومکانیکی) تغییر علامت داده و دارای شیب بسیار بزرگ است و این امر منجر به ناکارآمدی ترکیب روش‌های دونیم‌سازی^۲ و نیوتن-رافسون جهت شناسایی ریشه در اطراف این نقاط می‌گردد. رهیافتی مناسب‌تر جهت تعیین ریشه‌های معادله (۳) نمایش طیفی آن به کمک چندجمله‌ای‌های چیشیف است. با توجه به ماهیت تکه‌ای هموار بودن معادلات مشخصه، ابتدا نقاط ناپیوستگی به کمک الگوریتم‌های تشخیص لبه^۳ خودکار شناسایی شد [۳۴]. سپس تبدیل چیشیف به بخش‌های هموار تابع مورد نظر اعمال شد [۳۵]. در نهایت از روابط تحلیلی موجود جهت محاسبه ریشه‌های معادله چندجمله‌ای برای محاسبه فرکانس‌های تشدید و پادتشدید استفاده شد.

در فرایند شناسایی آسیب عموماً از میانگین تغییرات ویژگی‌های مودال در یک بازه فرکانسی مشخص $([f_1, f_2])$ جهت کمی‌سازی شدت آسیب استفاده می‌شود. در این راستا، میانگین فرکانس‌های تشدید (متناظراً پادتشدید) به دست آمده به عنوان کمیت موردنظر لحاظ شد:

$$\bar{\varphi} \cot(\bar{\varphi}) + \frac{\bar{k}_{31}^2}{1 - \bar{k}_{31}^2} = 0 \quad (4)$$

در رابطه فوق $j=1$ مربوط به حالت تشدید، $j=2$ مربوط به

- 1 Newton-Raphson
- 2 Bisection
- 3 Edge-detection

۲-۲- بسط آشوبناک چندجمله‌ای

پایه‌های بسط آشوبناک در رابطه (۸) از ضرب تانسوری چندجمله‌ای‌های متعامد یک‌تک متغیره $\psi_{\alpha_i}(\Xi_i)$ ساخته می‌شوند:

$$\Psi_{\alpha}(\Xi) := \prod_{i=1}^M \psi_{\alpha_i}(\Xi_i) \quad (10)$$

که در آن $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_M)$ یک چنداندیسه مرتب از اعداد حقیقی نامنفی است. چندجمله‌ای‌های چندمتغیره $\Psi_{\alpha}(\hat{\mathbf{I}})$ نیز متعامد یک‌تک هستند. چندجمله‌ای‌های تک متغیره $\psi_{\alpha_i}(\Xi_i)$ بر اساس توزیع احتمال‌های حاشیه‌ای انتخاب می‌شوند (پیوست ۵). در مورد متغیرهای با توزیع احتمال استاندارد می‌توان از آشوب چندجمله‌ای‌های وینر-اسکی استفاده کرد [۱۶]. برای متغیرهای با توزیع غیر استاندارد، روش بسط آشوبناک چندجمله‌ای با توزیع دلخواه قابل پیاده‌سازی است [۱۷ و ۱۸].

در صورت ادامه جملات بسط آشوبناک چندجمله‌ای تا بی‌نهایت در رابطه (۸) مدل جایگزین به طور دقیق به تابع پاسخ میل خواهد کرد. هرچند در عمل تنها محاسبه تعداد محدودی از جمله‌ها امکان‌پذیر بوده و ناگزیر از روش‌های برش استفاده می‌شود. برش هایپربولیک کلی‌ترین حالت برش مجموعه چنداندیسه‌ها بوده که بیان ریاضی آن عبارت است از [۳۹]:

$$\mathcal{A}^{M,p,q} = \left\{ \alpha \in \mathbb{N}_0^M : \|\alpha\|_q \triangleq \left(\sum_{i=1}^M \alpha_i^q \right)^{1/q} \leq p \right\} \quad (11)$$

در این رابطه $\|\alpha\|_q$ نرم q ($0 < q \leq 1$) چنداندیسه مرتب α است. بیان رابطه فوق عبارت از انتخاب چنداندیسه‌هایی با شبه‌نرم q کمتر یا مساوی p از مجموعه بی‌نهایت چنداندیسه M تایی است. انتخاب $q = 1$ در این رابطه به طرح برش استاندارد موسوم است. در این طرح تعداد پایه‌ها و در نتیجه تعداد متغیرهای مجهول عبارت است از [۴۰]:

طبق رابطه (۱) بردار متغیرهای پاسخ \mathbf{Y} را می‌توان به صورت تابعی از بردار متغیرهای ورودی \mathbf{X} شامل خواص مکانیکی، الکتریکی و هندسه وصله پیزوالکتریک فرض کرد:

$$\mathbf{Y} = \mathcal{M}(\mathbf{X}); \quad \mathbf{X} = (X_1, \dots, X_M)^T \in \mathbb{R}^M \quad (7)$$

در این رابطه \mathcal{M} نگاشتی قطعی بین متغیرهای ورودی (X_1, \dots, X_M) و کمیت‌های پاسخ موردنظر (\mathbf{Y}) و M تعداد متغیرهای تصادفی ورودی است. متغیرهای ورودی دارای ماهیت تصادفی و توزیع چگالی احتمال مشخص بوده و از یکدیگر مستقل فرض می‌شوند. متغیرهای پاسخ خروجی \mathbf{Y} نیز به واسطه وجود مقادیر مشخصی از منابع عدم قطعیت در متغیرهای ورودی \mathbf{X} دارای ماهیت تصادفی هستند. در صورتی که متغیر پاسخ دارای واریانس محدود باشد، امکان بازسازی آن توسط نمایش طیفی ذیل امکان‌پذیر است [۳۷]:

$$\mathbf{Y} = \mathcal{M}(\mathbf{X}); \quad \mathbf{X} = (X_1, \dots, X_M)^T \in \mathbb{R}^M \quad (8)$$

در این رابطه $\hat{\mathbf{Y}}$ یکی از مؤلفه‌های بردار پاسخ (برای هر یک از مؤلفه‌های بردار پاسخ این مراحل باید تکرار شود)، Ψ_j توابع پایه چندجمله‌ای چندمتغیره و a_j ضرایب بردار پاسخ در فضای هیلبرت توابع پایه هستند [۱۹]. به علاوه، $\hat{\mathbf{I}}$ متغیرهای تصادفی کاهش‌یافته، دارای توزیع چگالی احتمال استاندارد و حاصل از اعمال تبدیل هم‌احتمالی^۱ T به متغیرهای تصادفی اصلی \mathbf{X} هستند:

$$\mathbf{X} = T(\Xi) \quad (9)$$

در صورت هم‌بسته بودن متغیرهای ورودی، می‌توان از تبدیل‌هایی مانند نتف^۲ [۳۸] یا تبدیل مؤلفه‌های مستقل [۲۷] استفاده کرد.

1 Isoprobabalistic
2 Nataf

در این رابطه d_i مؤلفه i ام از قطر اصلی ماتریس $T(n, p)$ موسوم به ماتریس تصویر، $\mathbf{I}_n - \Psi(\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T$ ضرب تصحیح مربوط به تعداد نقاط محدود جهت تخمین خطا^۳، $\mathbf{C}_{\text{emp}} = \Psi^T \Psi$ ماتریس همبستگی عملی پایه‌ها و $tr(\cdot)$ نشان‌دهنده رد^۳ ماتریس است. در عمل خطای یک داده به کنار اصلاح شده توسط واریانس تجربی مقادیر پاسخ بی‌بعد شده ε_{mLOO} و ضرب تعیین R^2 از روی خطای بی‌بعد محاسبه می‌شود:

$$\varepsilon_{mLOO} = \frac{E_{mLOO}}{\hat{\mathcal{V}}[\mathcal{Y}]}; \hat{\mathcal{V}}[\mathcal{Y}] = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{\mathcal{Y}})^2; \bar{\mathcal{Y}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad (۱۵)$$

$$R^2 \triangleq 1 - \varepsilon_{mLOO} \quad (۱۶)$$

۲-۳- محاسبه تحلیلی مشخصه‌های آماری و تخمین توزیع احتمال کمیت‌های موردنظر

در صورت در دسترس بودن بسط آشوبناک چندجمله‌ای کمیت‌های موردنظر، تخمین توزیع احتمال و آمارگان احتمالاتی با هزینه محاسباتی بسیار کم ممکن خواهد بود. با توجه به خاصیت تعامد پایه‌ها در بسط (۸) مقدار میانگین و واریانس $\hat{\mathcal{Y}}$ از روابط ذیل قابل محاسبه هستند^۴:

$$\mu_{\hat{\mathcal{Y}}} = \mathbb{E}[\hat{\mathcal{Y}}] = \mathbb{E}\left[\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \hat{\beta}_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\Xi)\right] = \hat{\beta}_0 \quad (۱۷)$$

$$\sigma_{\hat{\mathcal{Y}}}^2 = \mathbb{E}\left[\left(\hat{\mathcal{Y}} - \mu_{\hat{\mathcal{Y}}}\right)^2\right] = \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ \alpha \neq 0}} \hat{\beta}_{\alpha}^2 \quad (۱۸)$$

جهت تخمین توزیع احتمال $\hat{\mathcal{Y}}$ ابتدا متغیر پاسخ در مجموعه نقاط نمونه‌برداری شده به شیوه مونت‌کارلو از متغیرهای ورودی ارزیابی شده و هیستوگرام نتایج ترسیم می‌شود. در صورتی که توزیع

$$P = \text{card} \mathcal{A} = \binom{M+p}{p} = \frac{(M+p)!}{M!p!} \quad (۱۲)$$

در عمل جهت اجتناب از بدوضع شدن دستگاه معادلات خطی و مشکلات عددی، تعداد معلومات باید حدوداً دو تا سه برابر P باشد [۴۱]. کاهش q منجر به کاهش جملات مرتبه بالا و جملات تعاملی در بسط آشوبناک و در نتیجه تعداد مجهولات می‌گردد. این موضوع خصوصاً در مسائل با تعداد متغیرهای ورودی زیاد از بار محاسباتی تعیین ضرایب می‌کاهد [۳۹].

جهت محاسبه ضرایب در بسط آشوبناک رابطه (۸) به شیوه غیرمزمحم^۱، می‌توان از ایده رگرسیون استفاده کرد [۲۰]. در این روش ضرایب به گونه‌ای محاسبه می‌شوند تا میانگین مربعات خطا بین خروجی‌های مدل اصلی و مدل جایگزین کمینه گردد:

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^{\text{card} \mathcal{A}}} \mathbb{E}\left[\left(\mathcal{M}(\Xi) - \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \beta_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\Xi)\right)^2\right] \quad (۱۳)$$

به‌منظور ارزیابی عملکرد روش ارائه شده، تعیین دقت مدل تقریبی بسط آشوبناک چندجمله‌ای در تخمین پاسخ مدل اصلی ضروری است. استفاده از شیوه اعتبارسنجی متقابل جهت تخمین، از احتمال بیش برآزش مدل جایگزین را می‌کاهد [۴۲]. با انجام برخی محاسبات جبری می‌توان نشان داد خطای تخمین یک داده به کنار^۲ تنها از روی یک مدل بسط آشوبناک چندجمله‌ای‌ها که توسط تمامی نقاط مجموعه طراحی آزمایش $\mathcal{V} = \{\hat{\mathbf{1}}^{(1)}, \dots, \hat{\mathbf{1}}^{(n)}\}$ تعلیم داده شده است، به شکل ذیل قابل محاسبه است [۴۱]:

$$E_{mLOO} = T(n, p) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\mathcal{M}(\xi^{(i)}) - \hat{\mathcal{M}}(\xi^{(i)})}{1 - d_i} \right)^2, \quad \xi^{(i)} \in \mathcal{V} \quad (۱۴)$$

$$T(n, p) = \frac{n}{n-p} \left(1 + \frac{1}{n} \text{tr}(\mathbf{C}_{\text{emp}}^{-1}) \right)$$

1 Non-intrusive

2 Leave-One-Out (LOO) error

3 Trace

تصادفی حاضر در مجموعه اندیس‌ها \mathbf{u} است. شاخص‌های حساسیت سبل به صورت نسبت واریانس‌های جزئی به واریانس کل تعریف می‌شوند. به عنوان مثال، شاخص سبل مرتبه اول و شاخص سبل کل که از اهمیت بیشتری در کاربردهای عملی برخوردار هستند، برای متغیر تصادفی \hat{Y} به صورت ذیل تعریف می‌شوند:

$$S_i = \frac{\mathbb{V}[\mathcal{M}_i(\Xi_i)]}{\mathbb{V}[\mathcal{M}(\Xi)]} \quad (21)$$

$$S_i^T = 1 - \frac{\mathbb{V}[\mathcal{M}_{-i}(\Xi_{-i})]}{\mathbb{V}[\mathcal{M}(\Xi)]}; \quad \Xi_{-i} = \{\Xi_1, \dots, \Xi_{i-1}, \Xi_{i+1}, \dots, \Xi_M\} \quad (22)$$

که در آن Ξ_{-i} زیربرداری از Ξ شامل تمام متغیرهای تصادفی به جز Ξ_i است. S_i نماینده تأثیر جداگانه متغیر Ξ_i بر واریانس پاسخ و S_i^T نماینده تأثیر جداگانه و تعاملی Ξ_i در واریانس پاسخ هستند. در عمل شاخص‌های سبل که شامل انتگرال‌های شرطی چندگانه هستند، به روش مونت کارلو محاسبه می‌شوند [۴۵ و ۴۶]. هرچند هزینه محاسباتی این روش خصوصاً در مسائل با ابعاد احتمالاتی ورودی بزرگ، بسیار زیاد خواهد بود. این در حالی است که در صورت در دسترس بودن مدل بسط آشوبناک چندجمله‌ای متغیر پاسخ، محاسبه شاخص‌های سبل به تنها پس پردازش ضرایب بسط تقلیل می‌یابد [۴۷]:

$$\hat{S}_i = \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}_i} a_{\mathbf{a}}^2 / \sigma_{\hat{Y}}^2 \quad \mathcal{A}_i = \{\mathbf{a} \in \mathcal{A} : \alpha_i > 0, \alpha_{j \neq i} = 0\} \quad (23)$$

$$\hat{S}_i^T = \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}_i^T} a_{\mathbf{a}}^2 / \sigma_{\hat{Y}}^2 \quad \mathcal{A}_i^T = \{\mathbf{a} \in \mathcal{A} : \alpha_i > 0\} \quad (24)$$

هیستوگرام نتایج به توابع توزیع چگالی احتمال استاندارد نزدیک باشد، می‌توان از روش پارامتریک برای تخمین تابع چگالی احتمال استفاده کرد. در این شیوه پارامترهای توزیع چگالی احتمال مورد نظر از روش تخمین به شیوه راستی‌نمایی بیشینه^۱ قابل محاسبه هستند. از طرفی اگر هیستوگرام نتایج دارای ماهیت چندماده بوده و قابل تخمین با توابع چگالی احتمال استاندارد نباشد، از روش غیرپارامتریک و از تابع هسته هموارساز برای تخمین توزیع چگالی احتمال استفاده می‌شود^۲:

$$\hat{f}_{\hat{Y}}(y) = \frac{1}{n_{MCS} h} \sum_{i=1}^{n_{MCS}} k \left(\frac{y - \hat{M}(\mathbf{x}_i)}{h} \right) \quad (19)$$

در این رابطه k یک تابع نامنفی و دارای انتگرال برابر ۱ موسوم به تابع هسته، h پارامتر هموارساز موسوم به پهنای باند پنجره پارزن^۲ و n_{MCS} تعداد نقاط نمونه برداری شده (\mathbf{x}_i) از فضای احتمال ورودی (حدوداً^۳ ۱۰^{۵-۶}) است.

۲-۴- تحلیل حساسیت سراسری کمیت‌های مورد نظر به متغیرهای ورودی
در تحلیل حساسیت سراسری تأثیر تغییرات انفرادی و وابسته متغیرهای ورودی به‌ازای هر نگاشت ممکن حاصل از $\mathcal{M}(\mathbf{X})$ بر متغیر پاسخ کمی‌سازی می‌شود. روش تحلیل واریانس از جمله اصلی‌ترین ابزارهای تحلیل حساسیت سراسری است. اساس این روش بر پایه تجزیه واریانس متغیر پاسخ و تعیین سهم جداگانه و تعاملی هر یک از متغیرها در واریانس کل است:

$$\mathbb{V}[Y] = \mathbb{V}[\mathcal{M}(\Xi)] = \mathbb{V} \left[\sum_{\substack{\mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, M\} \\ \mathbf{u} \neq \emptyset}} \mathcal{M}_{\mathbf{u}}(\Xi_{\mathbf{u}}) \right] = \sum_{\substack{\mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, M\} \\ \mathbf{u} \neq \emptyset}} \mathbb{V}[\mathcal{M}_{\mathbf{u}}(\Xi_{\mathbf{u}})] \quad (20)$$

در این رابطه $\mathcal{M}_{\mathbf{u}}(\Xi_{\mathbf{u}})$ توابع سبل حاصل از تجزیه تابع محاسباتی اصلی $\mathcal{M}(\hat{\mathbf{I}})$ ، $\mathbf{u} = \{i_1, \dots, i_s\}$ ، $1 \leq s \leq M$ ، زیرمجموعه‌ای از اندیس‌ها و $\Xi_{\mathbf{u}}$ زیربرداری از Ξ و شامل متغیرهای

1 Maximum Likelihood Estimation (MLE)
2 Parzen

جدول ۱. خواص مکانیکی، الکتریکی و الکترومکانیکی نامی وصله پیزوالکتریک مدل‌سازی شده

Table 1. The nominal mechanical, electrical, and electromechanical properties of the modeled piezoelectric patch

δ	η	ε_{33}^T	d_{31}	ρ	S_{11}^E	خاصیت
۰/۰۱	۰/۰۱	$۱۷۵ \times ۸ / ۸۶ \times ۱۰^{-۱۲}$	۱۷۵×۱۰^{-۱۲}	۷۷۰۰	$۱ / ۵۳ \times ۱۰^{-۱۱}$	APC850
[-]	[-]	[F.m ^{-۱}]	[m.V ^{-۱}]	[kg.m ^{-۳}]	[Pa ^{-۱}]	واحد

جدول ۲. صحت‌سنجی فرکانس‌های تشدید نامی با نتایج تجربی [۳۲]

Table 2. Validation of nominal resonance frequencies using reference [33] experiment results

فرکانس‌های تشدید در ارتعاشات طولی [Hz]				
۱۴۹۶۰۰۰	۱۰۲۰۰۰۰	۵۹۷۰۰۰	۲۱۲۰۰۰	نتایج تجربی
۱۴۵۸۷۵۹	۱۰۴۱۹۷۱	۶۲۵۱۸۲/۴	۲۰۸۳۹۴/۱	نتایج تئوری ارائه شده
۲/۴۹	-۲/۱۵	-۴/۷۲	۱/۷۰	درصد خطا [%]

۳- نتایج و بحث

موهومی طیف امپدانس (دایره زرد) علامت‌گذاری شده‌اند. در این شکل همچنین قله‌های شناسایی شده توسط الگوریتم‌های قله‌یابی علامت‌گذاری شده‌اند (مثلاً قرمز). در جدول ۲ مقادیر فرکانس‌های تشدید در ارتعاشات طولی وصله پیزوالکتریک با مقادیر ارائه شده در مرجع [۳۲] مقایسه شده است. اختلاف کمتر از ۵ درصد مابین نتایج تئوری و تجربی بر دقت مناسب مدل استفاده شده تأکید دارد.

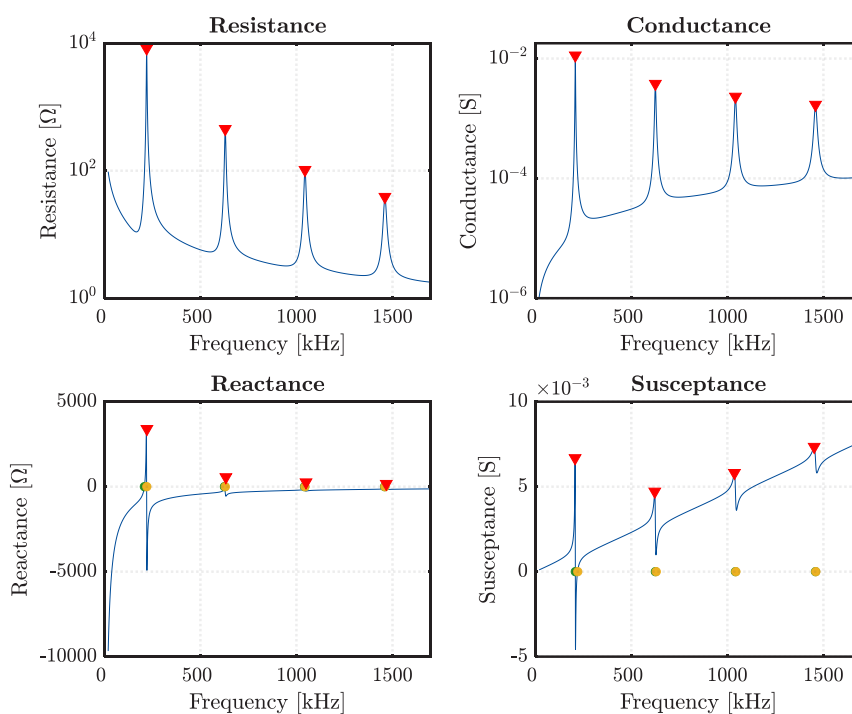
شکل مود و ترازه جابه‌جایی مربوط به فرکانس‌های تشدید و پادتشدید محاسبه و علامت‌گذاری شده با دایره‌های سبز و زرد در شکل ۲، برای وصله موردنظر در شکل ۳ و شکل ۴ ترسیم شده است. طبق نتایج، شکل مود در حالت تشدید کاملاً پادمتقارن و مقادیر جابجایی بسیار بزرگ و تحت کنترل مقدار η (جدول ۱) است. در فرکانس‌های پادتشدید نیز ترازه جابجایی تقریباً پادمتقارن بوده، هرچند مطابق انتظار مقادیر بسیار کوچک جابجایی در ترازه‌های ترسیم شده نشان از تقریباً ایستا بودن وصله پیزوالکتریک در این فرکانس‌ها دارد.

در این بخش، پس از ارائه نتایج مربوط به مدل نامی^۱ وصله پیزوالکتریک و صحت‌سنجی آن‌ها با نتایج مربوط به تحلیل احتمالاتی و به‌ویژه توزیع احتمال کمیت‌های پاسخ موردنظر، نتایج تحلیل حساسیت ارائه و مورد بحث قرار خواهد گرفت. در ادامه به کمک مدل جایگزین توسعه داده شده، تحلیل همبستگی به شیوه هر بار یک عامل انجام شده و نحوه تغییرات ویژگی‌های مودال طیف امپدانس (ادمیتانس) با تغییر متغیرهای تصادفی به طور جداگانه بررسی خواهد شد.

۳-۱- تحلیل نامی ویژگی‌های مودال وصله پیزوالکتریک

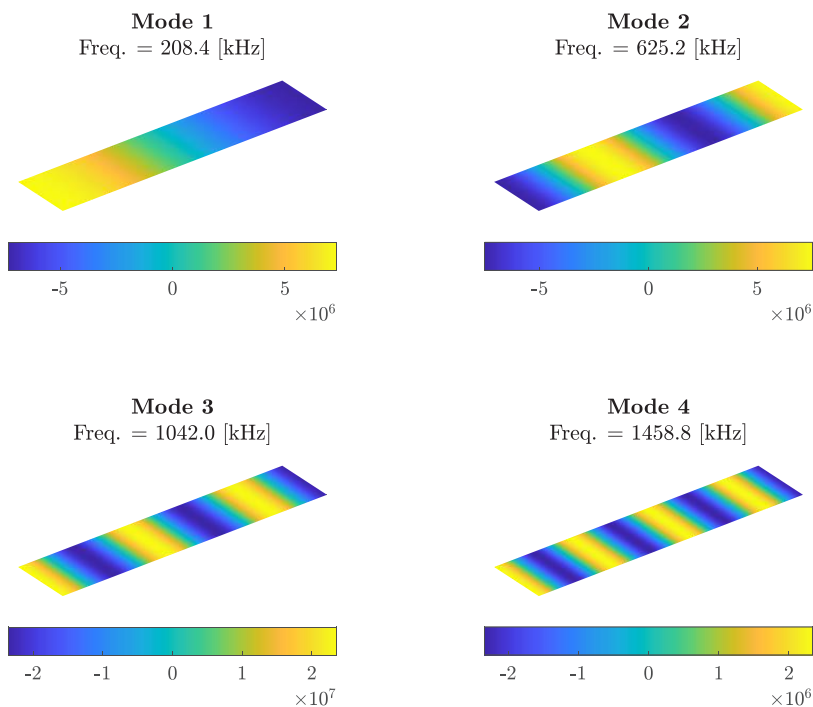
در جدول ۱ خواص نامی مربوط به پیزوالکتریک مدل‌سازی شده ارائه شده است. اجزاء حقیقی و موهومی طیف امپدانس (ادمیتانس) شبیه‌سازی شده به کمک رابطه (۱) در شکل ۲ ارائه شده است. فرکانس‌های تشدید و پادتشدید محاسبه شده به ترتیب در نمودار مربوط به جزء موهومی طیف ادمیتانس (دایره سبز) و جزء

1 Nominal



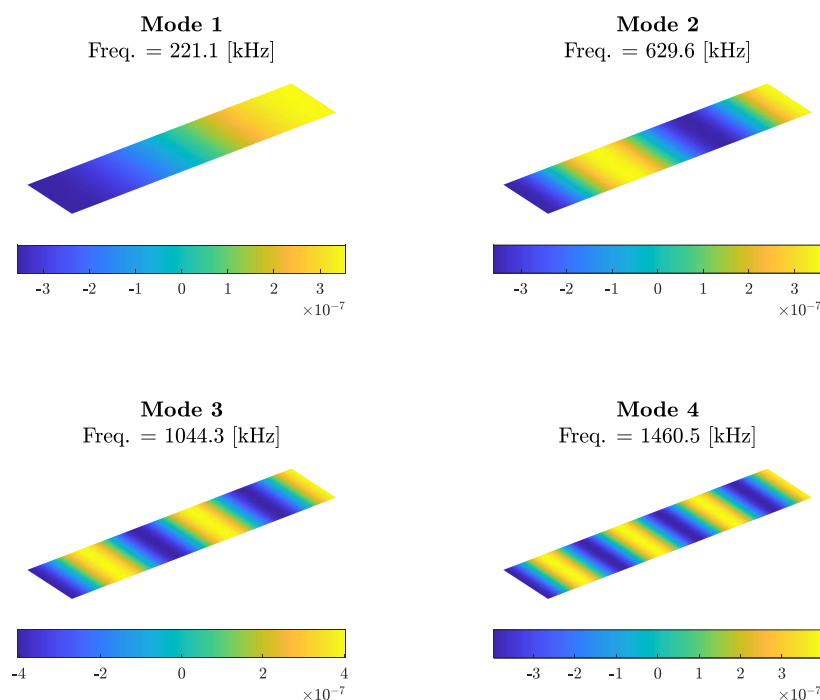
شکل ۲. اجزاء حقیقی و موهومی طیف‌های ادمیتانس (رسانایی و پذیرندگی) و امپدانس (مقاومت و واکنایی) الکترومکانیکی وصله پیزوالکتریک مستطیلی با هندسه و خواص نامی

Fig. 2. Real and imaginary parts of the electromechanical admittance and impedance spectra of the rectangular piezoelectric patch obtained using the nominal geometry and material properties



شکل ۳. شکل مدهای تشدید الکترومکانیکی وصله پیزوالکتریک مستطیلی نامی

Fig. 3. The E/M resonance mode shapes of the nominal rectangular PZT patch



شکل ۴. کانتور جابجایی در حالت پادتشدید الکترومکانیکی وصله پیزوالکتریک مستطیلی نامی

Fig. 4. The E/M mode-resonance mode shapes of the nominal rectangular PZT patch

۳-۲- تحلیل احتمالاتی ویژگی‌های مودال وصله پیزوالکتریک
 خواص نامی ارائه شده در جدول ۱ که عموماً از کاتالوگ ماده پیزوالکتریک موردنظر استخراج می‌گردند، دارای مقادیر مشخصی از عدم قطعیت هستند. این مقادیر اغلب به صورت تلورانس برای خواص الکتریکی و مکانیکی ماده پیزوالکتریک از سوی شرکت سازنده ارائه می‌شوند. به منظور لحاظ کردن منابع عدم قطعیت در متغیرهای ورودی، توابع توزیع چگالی احتمال یکنواخت در محدوده تلورانس ارائه شده به آن‌ها تخصیص داده شد. فضای احتمالاتی متغیرهای تصادفی ورودی شامل تلورانس، توابع توزیع احتمال تخصیص داده شده به آن‌ها به همراه پارامترهای توزیع در جدول ۳ ارائه شده است [۴۸]. در مورد متغیر تصادفی طول وصله l_p ، میزان عدم قطعیت به نحوه برش وصله وابسته بوده، هرچند در اکثر کاربردها خصوصاً برش توسط دستگاه، میزان تلورانس آن کمتر از ۱ درصد خواهد بود. همچنین مقادیر میرایی‌های مکانیکی η و الکتریکی δ اغلب به صورت عامل کیفیت مکانیکی Q_m و عامل میرایی الکتریکی

$\tan(\delta)$ از سوی شرکت سازنده ارائه می‌شوند. پیچیدگی و منابع عدم اطمینان متعدد در روش‌های اندازه‌گیری این پارامترها، منجر به مقادیر تلورانس بزرگ در اندازه آن‌ها می‌شود. در این تحقیق، مقادیر δ و η در تحلیل احتمالاتی بین ۰/۰۱ تا ۰/۰۵ لحاظ شد [۳۲]. از روش ابرمکعب لاتین^۱ [۴۹] برای نمونه‌برداری از فضای احتمالاتی ورودی هفت بعدی ارائه شده در جدول ۳ و آماده‌سازی ماتریس طراحی استفاده شد. از معیار کمینه بیشینه^۲ فاصله اقلیدسی بین نقاط نمونه جهت پوشش بهینه فضای ورودی استفاده شد [۵۰]. تعداد تکرارهای نمونه‌برداری تا دستیابی به معیار موردنظر ۵ لحاظ شد. نمونه‌برداری به این شیوه منجر به افزایش نرخ همگرایی نتایج در شبیه‌سازی مونت‌کارلو و بسط آشوبناک چندجمله‌ای می‌شود [۴۶]. تعداد نقاط نمونه‌برداری شده برای تحلیل بسط آشوبناک چندجمله‌ای دوبرابر تعداد مجهولات رابطه (۱۲) و برای شبیه‌سازی مونت‌کارلو 10^5 لحاظ شد.

1 Latin Hypercube
 2 Minimax

جدول ۳. فضای احتمالاتی متغیرهای تصادفی ورودی در مدل پیش‌بینی طیف امیدانس الکترومکانیکی وصله پیزوالکتریک

Table 3. Input Probability space in the prediction of the EMI spectrum of the piezoelectric patch

واحد	ضریب تغییرات	پارامترهای توزیع	تلورانس	نوع توزیع	نماد	متغیر تصادفی
[mm]	۰/۵۸٪	$a_1 = ۶/۹۳$ $b_1 = ۷/۰۷$	۱٪	$U(a,b)$	X_1	طول (l_p)
[Pa ⁻¹]	۵/۷۷٪	$a_2 = ۱/۳۸ \times ۱۰^{-۱۱}$ $b_2 = ۱/۶۸ \times ۱۰^{-۱۱}$	۱۰٪	$U(a,b)$	X_2	نرمی (s_{11}^E)
[kg.m ^{-۳}]	۵/۷۷٪	$a_3 = ۶۹۳۰$ $b_3 = ۸۴۷۰$	۱۰٪	$U(a,b)$	X_3	چگالی (ρ)
[F.m ⁻¹]	۱۱/۵۵٪	$a_4 = ۱/۲۴ \times ۱۰^{-۸}$ $b_4 = ۱/۸۶ \times ۱۰^{-۸}$	۲۰٪	$U(a,b)$	X_4	ضریب گذردهی الکتریکی (ϵ_{33}^T)
[m.V ⁻¹]	۱۱/۵۵٪	$a_5 = ۱۴۰ \times ۱۰^{-۱۲}$ $b_5 = ۲۱۰ \times ۱۰^{-۱۲}$	۲۰٪	$U(a,b)$	X_5	ثابت پیزوالکتریک (d_{31})
[-]	۳۸/۴۹٪	$a_6 = ۰/۰۱$ $b_6 = ۰/۰۵$	-	$U(a,b)$	X_6	ضریب اتلاف مکانیکی (η)
[-]	۳۸/۴۹٪	$a_7 = ۰/۰۱$ $b_7 = ۰/۰۵$	-	$U(a,b)$	X_7	ضریب اتلاف مکانیکی (δ)

توسط روابط (۱) تا (۳)، ضرایب مدل بسط آشوبناک چندجمله‌ای‌ها توسط رابطه رابطه (۱۳) برای هر یک از چهار کمیت موردنظر محاسبه شد. درجه بیشینه چندجمله‌ای‌ها p و شبه نرم q به صورت تطبیقی محاسبه شدند. در این شیوه به جای محدود کردن p و q به اعدادی مشخص، محدوده‌ای برای آن‌ها تعیین شده و مدل‌های بسط آشوبناک چندجمله‌ای‌ها به‌ازای تمام مقادیر در محدوده موردنظر محاسبه می‌شوند. در نهایت، از بین مدل‌های بسط آشوبناک چندجمله‌ای‌ها بدست آمده، مدل با کمترین خطای تخمین ϵ_{mLOO} (رابطه (۱۵)) به عنوان مدل جایگزین نهایی معرفی می‌شود. جزئیات مربوط به مدل‌های جایگزین بدست آمده به همراه خطای تقریب، کیفیت برازش و مقادیر میانگین برای هر یک از مقادیر پاسخ

جهت استانداردسازی توابع توزیع احتمال ورودی، از تبدیل هم‌احتمالاتی ذیل جهت نگاشت متغیرهای تصادفی (همچنین نقاط نمونه‌برداری شده از فضای احتمالاتی اصلی) به متغیرهای تصادفی استاندارد (همچنین نقاط نمونه‌برداری شده از فضای احتمالاتی استاندارد) استفاده شد (رابطه (۹)):

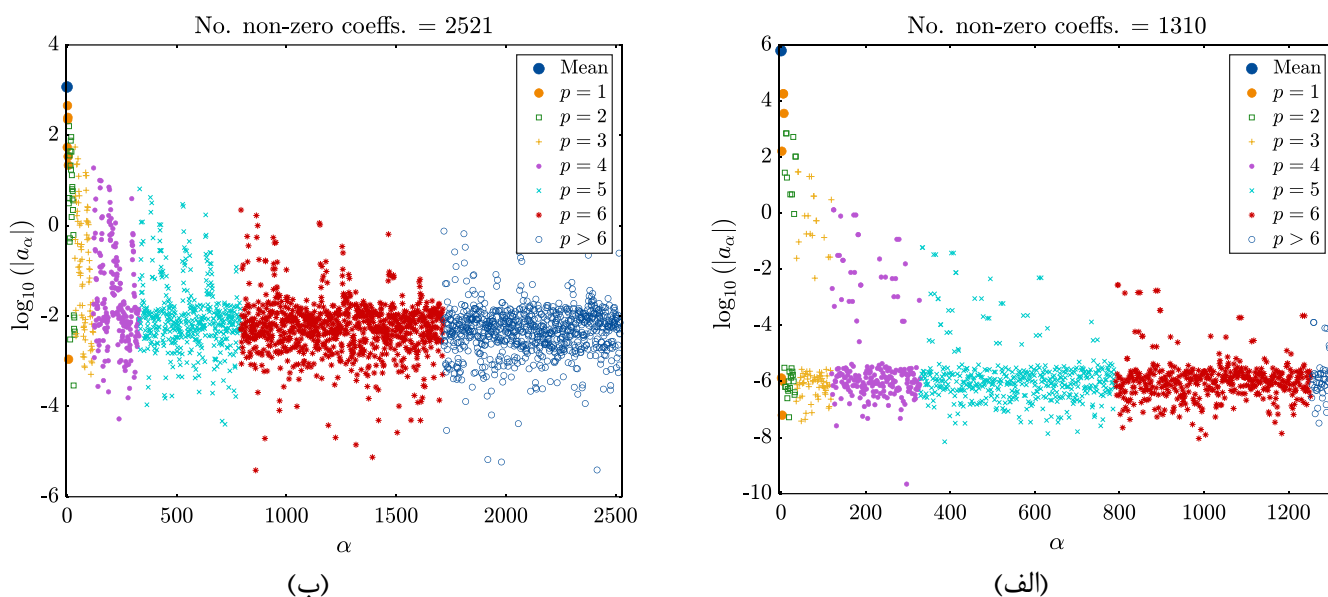
$$\Xi_i = \frac{2}{b_i - a_i} \left(X_i - \frac{a_i + b_i}{2} \right), \quad i \in \{1, \dots, 7\} \quad (۲۵)$$

پس از محاسبه کمیت‌های پاسخ در نقاط نمونه‌برداری شده

جدول ۴. مشخصات، میزان خطای تقریب و کیفیت برازش مدل‌های بسط آشوبناک چندجمله‌ای‌ها بدست آمده برای کمیت‌های موردنظر

Table 4. Specifications, prediction error and goodness of fit of the obtained PCE models for the quantities of interest

کمیت مورد نظر	فرکانس تشدید	فرکانس پاد تشدید	دامنه متوسط طیف مقاومت	دامنه متوسط طیف واکنایی
بیشینه درجه چندجمله‌ای تک متغیره (p)	۸	۸	۸	۸
نرم q	۰/۸	۰/۸	۰/۹	۰/۷
تعداد کل پایه‌ها	۱۳۱۰	۱۳۱۰	۲۵۲۱	۷۳۶
خطای یکی را کنار بگذار اصلاح و نرمال شده (ε_{mLOO})	$۴/۰۰ \times ۱۰^{-۱۷}$	$۴/۰۲ \times ۱۰^{-۱۷}$	$۲/۲۱ \times ۱۰^{-۶}$	$۰/۰۰۷۹۸۴$
کیفیت برازش (Q^2) [%]	۱۰۰	۱۰۰	۹۹/۹۹۹۷۸	۹۹/۲۰۱۶۲

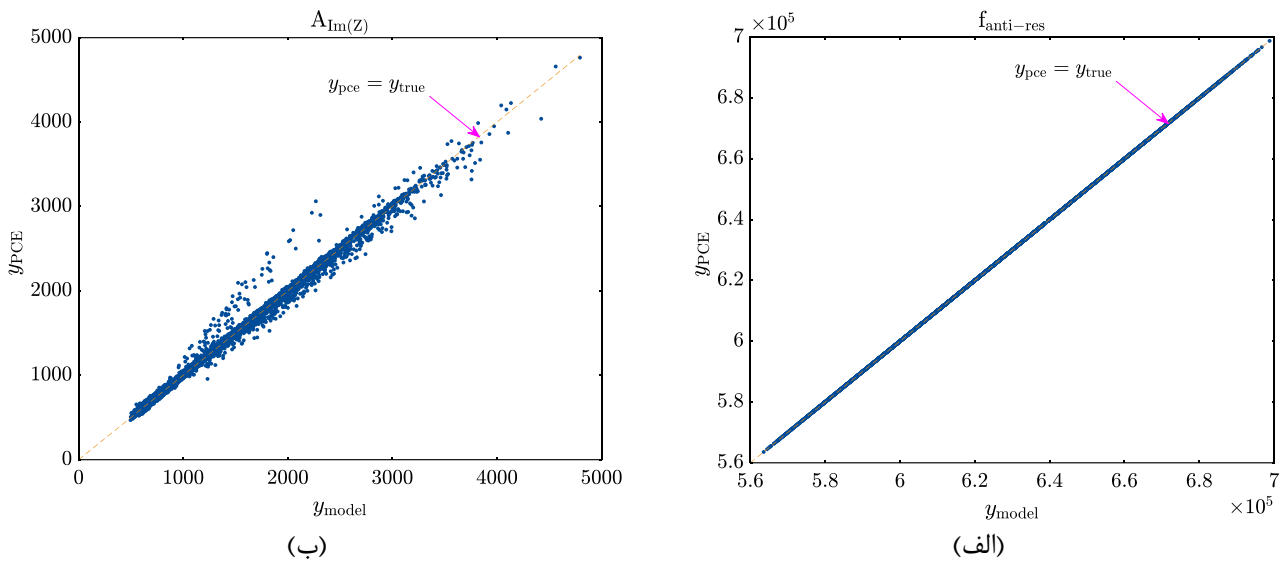


شکل ۵. طیف ضرایب چندجمله‌ای‌های چندمتغیره در مدل‌های جایگزین مربوط به کمیت موردنظر نسبت به اندیس پایه موردنظر (الف) فرکانس تشدید؛ (ب) دامنه متوسط طیف واکنایی

Fig. 5. The spectrum of multivariable polynomial coefficients in PCE-derived surrogate models versus basis indices for a) resonance frequency; b) reactance spectrum mean amplitude

موارد، نشان از قابلیت اطمینان مدل‌های جایگزین بدست آمده در تخمین کمیت‌های موردنظر و امکان به کارگیری آن‌ها در تحلیل‌های احتمالاتی بعدی و همچنین تحلیل حساسیت دارد.

موردنظر در در جدول ۴ ارائه شده است. همچنین، طیف مربوط به ضرایب پایه‌ها در مدل‌های بسط آشوبناک چندجمله‌ای‌ها منتخب در شکل ۵ ارائه شده است. کیفیت برازش بیش از ۹۹ درصد در همه

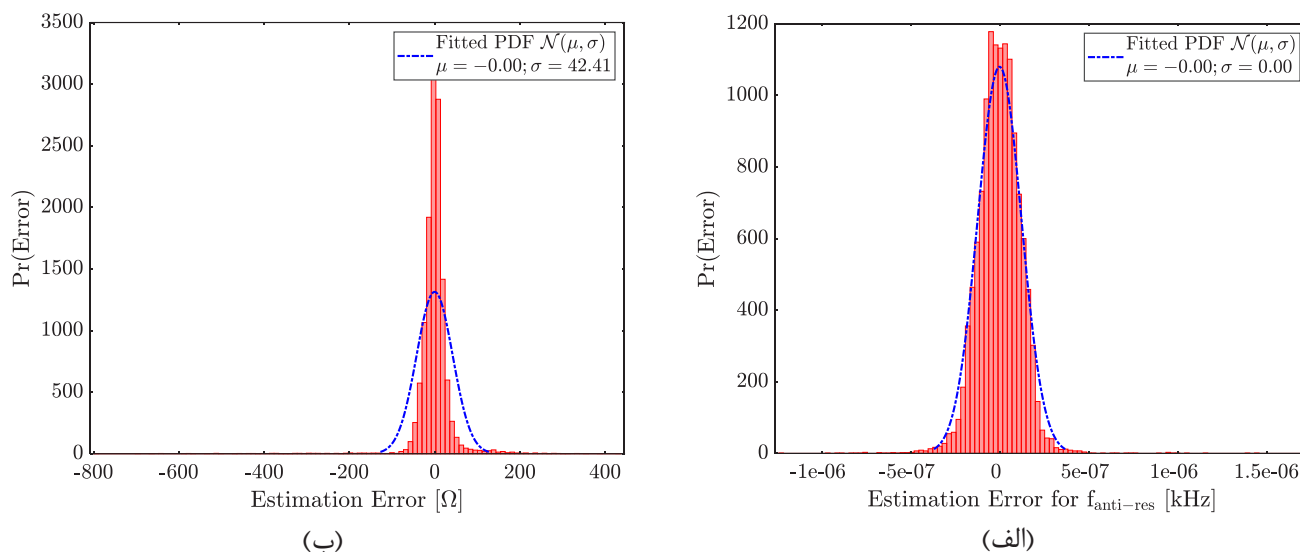


شکل ۶. ارزیابی مدل‌های جایگزین بدست آمده برای کمیت موردنظر الف) فرکانس پادتشدید (ب) دامنه متوسط در طیف واکنشی؛ از طریق مقایسه مقادیر حاصل از مدل اصلی (محور افقی) و مدل جایگزین (محور قائم)

Fig. 6. Evaluation of PCE-derived surrogate models by comparing the prediction of the original (horizontal axis) and surrogate (vertical axis) models; a) anti-resonance frequency, b) mean amplitude of the reactance spectrum

توزیع احتمال کمیت‌های پاسخ مورد نظر در اثر تغییرات متغیرهای ورودی در شکل ۸ ترسیم شده است. در هر مورد ابتدا مقادیر پاسخ در 10^5 نقطه نمونه برداری شده به روش مونت کارلو توسط مدل‌های جایگزین محاسبه و هیستوگرام نتایج ترسیم شد. سپس توابع توزیع چگالی احتمال به شیوه پارامتریک (در صورت شباهت هیستوگرام توزیع نتایج به توابع توزیع احتمال کلاسیک) یا غیرپارامتریک (رابطه ۱۹)) به نتایج برازش شد. در هر مورد مقدار میانگین و ضریب تغییرات در شکل ذکر شده است. مقادیر به نسبت بزرگ ضریب تغییرات در مورد دامنه اجزاء حقیقی (۵۰/۷۰٪) و موهومی (۴۶/۷۳٪) طیف امپدانس، نشان از تأثیرپذیری بیشتر این کمیت‌ها از مقادیر عدم اطمینان کمیت‌های ورودی دارد. همین امر اغلب صحت‌سنجی مقادیر دامنه قله‌ها و شیب نمودار با نتایج تجربی را دشوار می‌کند. این در حالی است که ضریب تغییرات برای فرکانس‌های مودال طیف امپدانس به نسبت دامنه کمتر بوده (۴/۲۰٪) که نشان از قابلیت اطمینان بیشتر مدل‌های تخمین امپدانس برای این کمیت‌ها دارد. تحلیل حساسیت سراسری به‌منظور رتبه‌بندی تأثیر پارامترهای ورودی بر واریانس مقادیر پاسخ و ارائه مسیر مناسب جهت تغییر پارامترها در روش‌های به‌روزرسانی مدل انجام گرفت که در ادامه به نتایج آن اشاره خواهد شد.

جهت ارزیابی بصری کیفیت تخمین مدل‌های بسط آشوبناک چندجمله‌ای‌ها، مقادیر پاسخ بدست آمده از مدل اصلی در نقاط نمونه برداری شده نسبت به مقادیر تخمین زده شده توسط مدل بسط آشوبناک چندجمله‌ای‌ها در همان نقاط ترسیم شدند (شکل ۱). تجمع نقاط پراکنش در تمامی موارد به خط $y = x$ نشان از دقت مناسب مدل‌های جایگزین در تقریب مدل‌های اصلی دارد. علی‌رغم دقت بسیار زیاد تخمین در مورد مدل‌های جایگزین مربوط به فرکانس تشدید و دامنه طیف مقاومت (تجمع تمامی نقاط روی خط $y = x$) اطمینان از عدم بیش‌برازش آن‌ها به‌واسطه استفاده از خطای ε_{mLOO} وجود دارد. این موضوع در ارتباط با پیش‌بینی نقاط دیده‌نشده در حین تعلیم مدل‌های جایگزین حائز اهمیت است. با توجه به اینکه، ضرایب بسط آشوبناک از روش کمینه مربعات معمولی محاسبه شده‌اند در صورتی که ماتریس اطلاعات خوش وضع باشد، تخمین مدل‌های جایگزین از مدل‌های اصلی غیر اریب^۱ خواهد بود. جهت حصول اطمینان از غیر اریب بودن تخمین، خطای تخمین در نقاط نمونه برداری شده ترسیم و توابع توزیع احتمال نرمال به شیوه پارامتری به آن‌ها برازش شد (شکل ۷). مطابقت مقادیر خطا از توزیع نرمال با میانگین صفر در تمامی موارد، نشان از غیراریب بودن توابع جایگزین بدست آمده دارد.



شکل ۷. توزیع احتمال خطای مدل جایگزین تخصیص داده شده به کمیت موردنظر (الف) فرکانس پادتشدید؛ (ب) دامنه متوسط طیف واکنشی؛ در تخمین پاسخ مدل اصلی (در هر مورد توزیع نرمال برازش شده به همراه پارامترهای آن آورده شده است)

Fig. 7. The error probability distribution of the PCE-derived surrogate models in estimating the response of the original model: a) anti-resonance frequency (b) mean amplitude of the reactance spectrum; (in each case, the fitted normal distribution and its parameters are given)

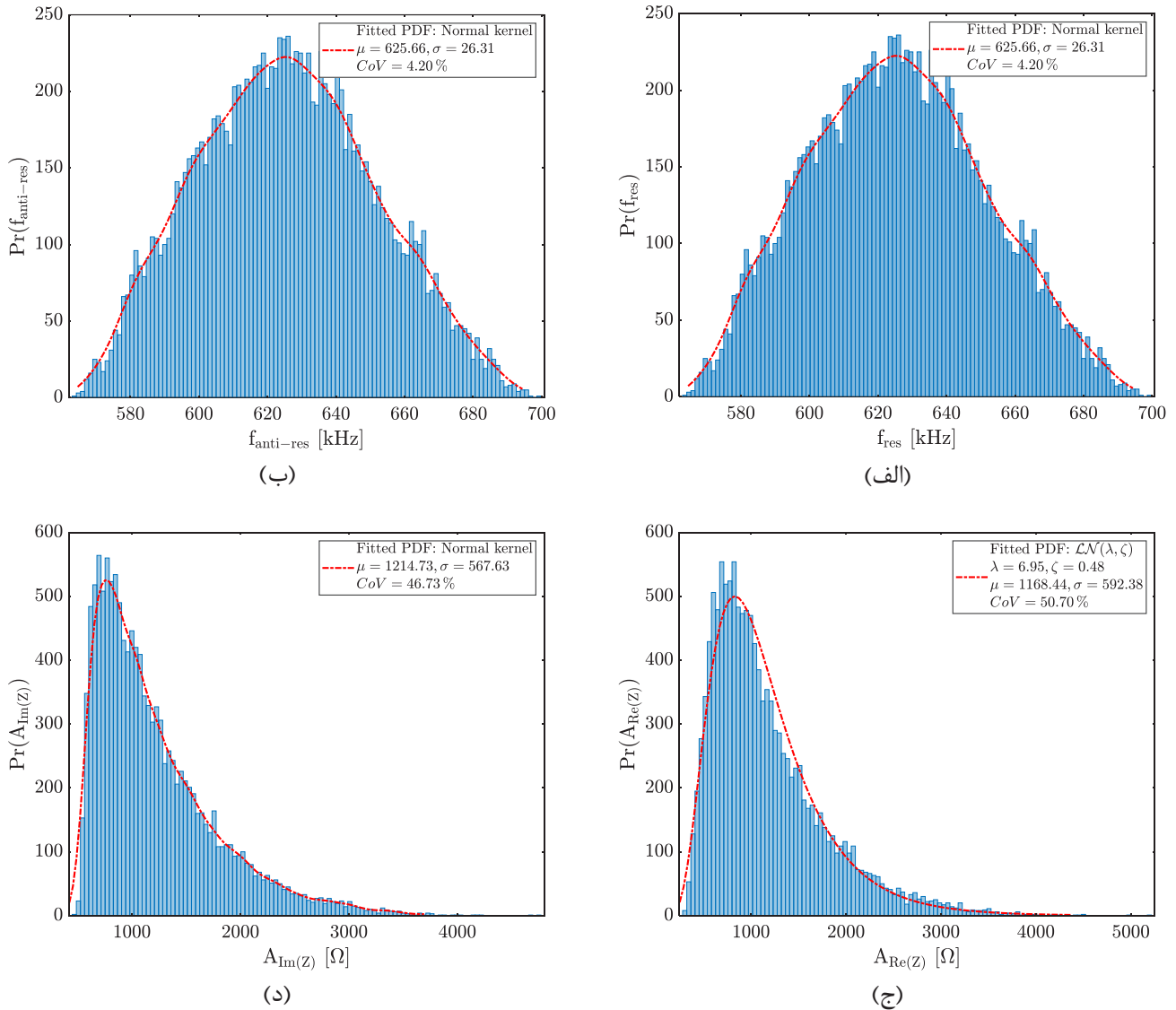
پاسخ موردنظر در شکل ۱۰ نشان داده شده‌اند. طبق نتایج، کمیت‌های فرکانس تشدید و پادتشدید بیشترین حساسیت را به خواص مکانیکی وصله پیزوالکتریک اعم از پارامترهای مدول نرمی و چگالی دارند. از طرفی، وابستگی این کمیت‌ها به خواص الکتریکی، الکترومکانیکی و میرایی وصله پیزوالکتریک بسیار ناچیز است. در نتیجه، در تحلیل‌های به‌روزرسانی مدل با تابع هدف فرکانس‌های قله در طیف امپدانس (ادمیتانس) می‌توان پارامترهای d_{31} ، ϵ_{33}^T ، η و δ را در مقدار نامی آن‌ها ثابت در نظر گرفت و تنها با تغییر s_{11}^E و ρ سعی در کمینه‌سازی تابع خطا داشت. نزدیکی نتایج مربوط به شاخص‌های سبل مرتبه اول به شاخص‌های سبل اول، نشان از تأثیر ناچیز عوامل تعاملی بر تغییرات کمیت‌های پاسخ دارد.

از طرفی، تغییرات در کمیت‌های دامنه میانگین در طیف‌های مربوط به اجزاء حقیقی و موهومی امپدانس الکترومکانیکی، بیشترین تأثیر را به ترتیب از استهلاک مکانیکی، ضریب گذردهی الکتریکی، و ثابت پیزوالکتریک می‌پذیرند. به‌این ترتیب، در تحلیل‌های احتمالاتی مربوط به دامنه طیف امپدانس می‌توان سایر کمیت‌ها به جز سه کمیت فوق را قطعی فرض کرد. این امر موجب کاهش چشم‌گیر ابعاد فضای احتمالاتی و در نتیجه حجم محاسبات خواهد شد.

۳-۳- تحلیل حساسیت سراسری ویژگی‌های مودال طیف امپدانس الکترومکانیکی

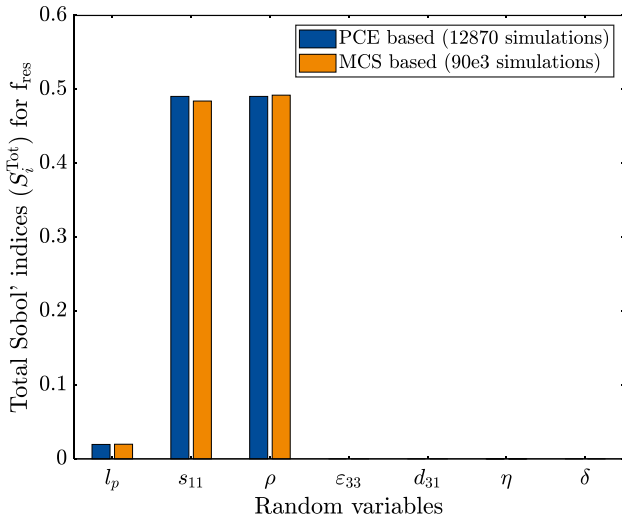
در شکل ۹ نتایج تحلیل حساسیت حاصل از پس‌پردازش ضرایب بسط آشوبناک چندجمله‌ای (روابط (۳۲) و (۴۲)) و همچنین روش مونت‌کارلو مورد مقایسه قرار گرفته است. تطابق موجود مابین مقادیر شاخص‌های سبل مرتبه اول و کل حاصل از مدل‌های آشوبناک چندجمله‌ای با نتایج روش مونت‌کارلو طبقه‌بندی شده نشان از دقت مدل‌های جایگزین در تخمین شاخص‌های حساسیت دارد. نتایج مربوط به روش مونت‌کارلو توسط پاسخ‌های خروجی در ۹۰ هزار نمونه محاسبه و تحلیل همگرایی برای آن‌ها انجام گرفت. این در حالی است که نتایج مربوط به بسط آشوبناک چندجمله‌ای تنها با ۱۲۸۷۰ ارجاع به مدل اصلی بدست آمده‌اند. این موضوع بر نقش مدل‌های جایگزین مبتنی بر بسط آشوبناک چندجمله‌ای در کاهش هزینه محاسباتی تحلیل واریانس و تحلیل حساسیت، خصوصاً در مدل‌های شبیه‌ساز با هزینه محاسباتی بالا تأکید دارد. لازم به ذکر است در برخی موارد دقت شاخص‌های محاسبه شده به کمک مدل بسط آشوبناک از نتایج روش مونت‌کارلو نیز بیشتر است [۱۴].

شاخص‌های حساسیت سبل مرتبه اول و کلی برای کمیت‌های

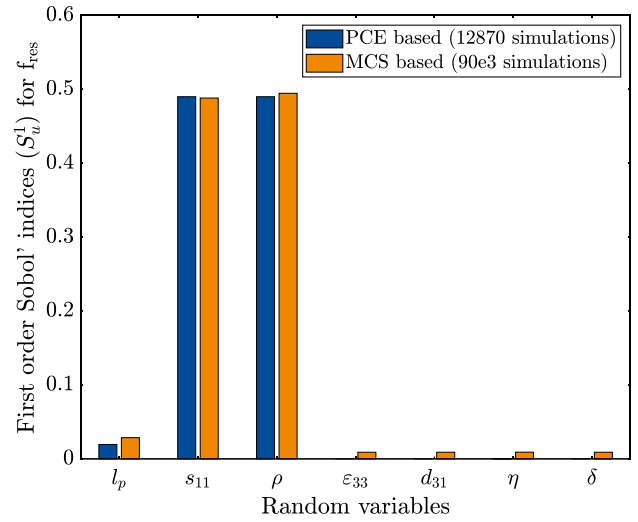


شکل ۸. توزیع احتمال کمیت‌های پاسخ ناشی از ماهیت احتمالاتی متغیرهای تصادفی ورودی (الف) فرکانس تشدید؛ (ب) فرکانس پادتشدید؛ (ج) دامنه متوسط طیف مقاومت؛ (د) دامنه متوسط طیف واکنایی؛ (در هر مورد تابع توزیع احتمال برازش شده نیز ترسیم و میانگین، انحراف از معیار و ضریب تغییرات پاسخ احتمالاتی نیز ذکر شده است)

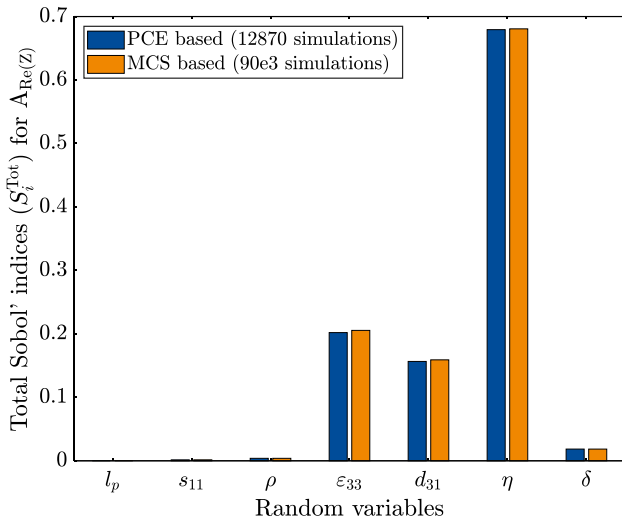
Fig. 8. The probability distribution of response quantities due to the probabilistic nature of input random variables a) resonant frequency; b) anti-resonant frequency; c) resistance spectrum mean amplitude; d) reactance spectrum mean amplitude (The fitted probability distribution function is also plotted in each case, along with annotations of the response's mean, standard deviation, and coefficient of variation)



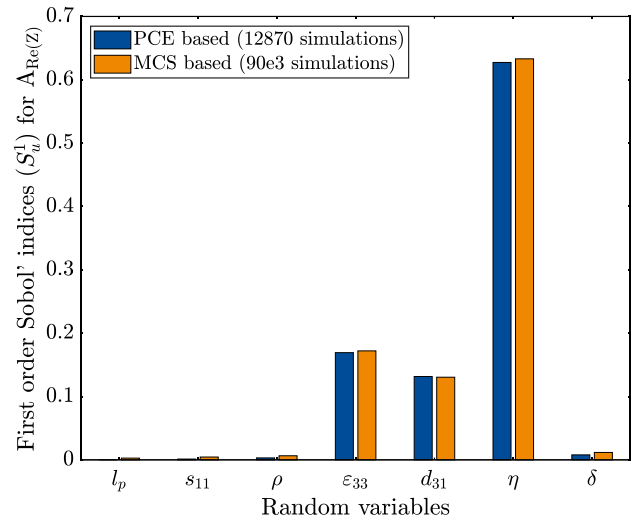
(ب)



(الف)



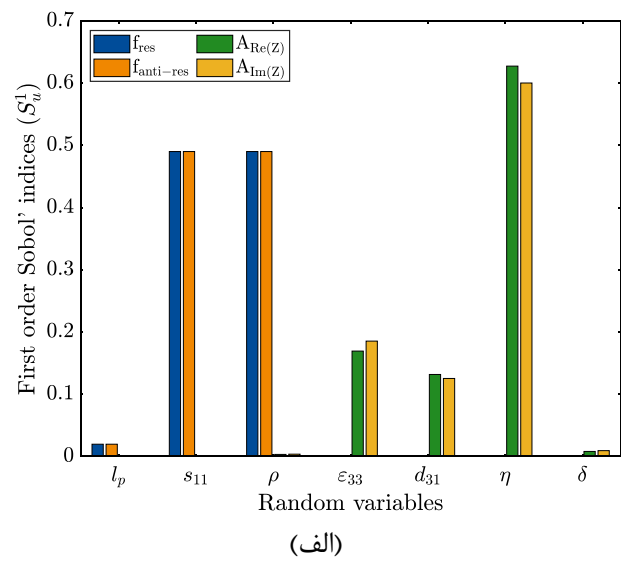
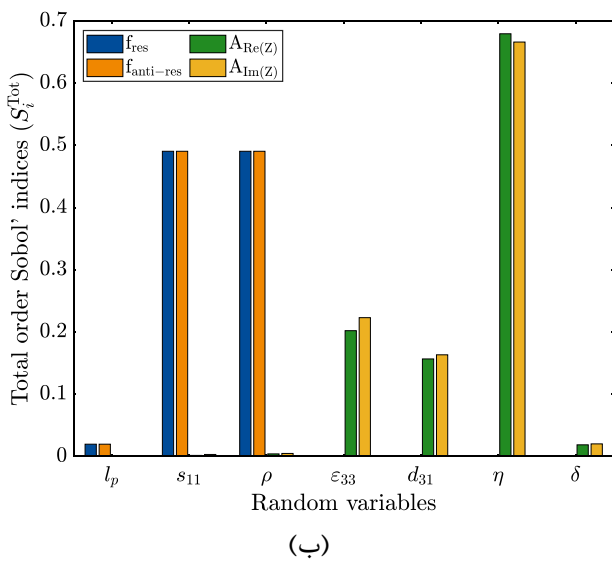
(د)



(ج)

شکل ۹. مقایسه شاخص‌های حساسیت سبیل مرتبه اول و کلی محاسبه شده به کمک مدل‌های جایگزین حاصل از اعمال روش بسط آشوناک چندجمله‌ای (برای الف) و (ب) فرکانس تشدید؛ (ج) و (د) دامنه متوسط طیف مقاومت؛ با نتایج حاصل از روش مونت کارلو طبقه‌بندی شده

Fig. 9. Comparison of the results from the stratified Monte Carlo method and the first-order and total Sobol' sensitivity indices calculated using the PCE generated surrogate models for (a) and (b) resonance frequency; (c) and (d) the resistance spectrum mean amplitude



شکل ۱۰. شاخص‌های حساسیت سبل به متغیرهای تصادفی (الف) مرتبه اول (ب) کل

Fig. 10. Sobol' sensitivity indices for random variables (a) first order (b) total

تجربی به ازای همه مقادیر ورودی ممکن نیست. از طرفی، هزینه محاسباتی زیاد مدل‌های تخمین طیف امپدانس، انجام چنین تحلیل‌هایی را حتی به صورت عددی نیز بسیار دشوار می‌کند. این در حالی است که در صورت جایگزینی مدل‌های محاسبه طیف امپدانس با مدل‌های جایگزین مبتنی بر بسط آشوناک چندجمله‌ای، این امر با کمترین هزینه محاسباتی میسر خواهد بود.

در این تحقیق جهت تحلیل همبستگی کمیت‌های موردنظر با متغیرهای ورودی از روش هر بار یک عامل^۲ استفاده شد [۵۱]. به طور دقیق، در هر سری از تحلیل‌ها، مقادیر همه متغیرها در ماتریس طراحی به جز یکی در مقدار نامی ثابت نگه داشته شد و مقادیر پارامتر متغیر در ۱۰۰۰ نقطه نمونه برداری شد. سپس طیف امپدانس (ادمیتانس) و ویژگی‌های مودال آن در تمام نقاط نمونه برداری شده محاسبه شد. نتایج چنین تحلیلی باتوجه به نتایج بدست آمده در بخش قبل مبنی بر کوچک بودن آثار تعاملی مابین متغیرها در تغییر ویژگی‌های مودال طیف امپدانس معنادار خواهد بود. نحوه تغییرات طیف واکنشی به ازای تغییر مقادیر پارامترهای تصادفی در تحلیل هر بار یک عامل در گستره فرکانسی ۰ تا ۱۷۰۰ کیلوهرتز در شکل ۱۱ ترسیم شده است. طبق نتایج، فرکانس‌های پادتشدید که متناظر با فرکانس‌های قله در طیف امپدانس هستند، تمامی عوامل به جز ضرایب میرایی مؤثر هستند

نتایج عددی مربوط به شاخص‌های سبل مرتبه اول و شاخص‌های سبل کل برای کمیت‌های فرکانس تشدید و پادتشدید در جدول ۵ و برای کمیت‌های میانگین دامنه طیف امپدانس در جدول ۶ ارائه شده است. استفاده از مقادیر ارائه شده در این جداول در حین فرمولاسیون تابع هزینه مورد استفاده در روش‌های به‌روزرسانی مدل، علاوه بر افزایش دقت نتایج تخمین پارامتر، مسیر محاسبه مقدار دقیق پارامترها را بسیار کوتاه خواهد کرد.

۳-۴- تحلیل همبستگی بین ویژگی‌های مودال وصله پیزوالکتریک و پارامترهای ورودی

وجود شمای از نحوه تغییرات ویژگی‌های مودال طیف امپدانس با افزایش یا کاهش متغیرهای ورودی اطلاعات ارزشمندی را در ارتباط پاسخ ارتعاشاتی کوپل الکترومکانیکی وصله پیزوالکتریک فراهم می‌آورد. این اطلاعات نه تنها در هنگام صحت‌سنجی مدل‌های عددی ارزشمند هستند، بلکه در هنگام انجام آزمایش‌های غربالگری^۱ وصله‌ها که عموماً قبل از انجام آزمون‌های تجربی انجام می‌گیرند، مفید خواهند بود [۳۲]. دستیابی به چنین نتایجی توسط آزمون‌های تجربی غیرممکن است؛ زیرا امکان تغییر پارامترها و انجام آزمون

2 One-Factor-at-a-Time (OFAT)

1 Screening

جدول ۵. مقایسه شاخص‌های حساسیت سبل مرتبه ۱ و کلی محاسبه شده توسط بسط آشوبناک چندجمله‌ای و روش مونت کارلو طبقه‌بندی شده برای شاخص‌های فرکانسی طیف امیدانس الکترومکانیکی

Table 5. Comparison of the first order and total Sobol' indices calculated by the PCE models and the stratified Monte Carlo method for the frequency indices of the EMI spectrum

فرکانس پادتشدید		فرکانس تشدید		کمیت مورد نظر	
مونت کارلو	بسط آشوبناک چندجمله‌ای	مونت کارلو	بسط آشوبناک چندجمله‌ای	روش محاسبه اندیس‌ها	
۰/۰۰۳۱۹۳	۰/۰۱۹۴۷۵	۰/۰۲۸۶۵۶	۰/۰۱۹۴۷۵	S_1	شاخص‌های حساسیت سبل مرتبه ۱
۰/۱۲۲۱۵۶	۰/۴۹۰۰۲	۰/۴۸۸۲۲۳	۰/۴۹۰۰۲	S_2	
۰/۱۲۵۹۷	۰/۴۹۰۰۲	۰/۴۹۴۶۷۵	۰/۴۹۰۰۲	S_3	
۰/۰۰۲۳۳۵	$1/65 \times 10^{-20}$	۰/۰۰۸۹۷۶	$1/60 \times 10^{-20}$	S_4	
۰/۰۰۷۰۷۸	$9/43 \times 10^{-21}$	۰/۰۰۸۹۷۶	$8/07 \times 10^{-21}$	S_5	
۰/۰۱۲۶۰۷	$4/05 \times 10^{-5}$	۰/۰۰۹۰۵۳	$4/05 \times 10^{-5}$	S_6	
۰/۰۰۲۷۰۸	$2/11 \times 10^{-20}$	۰/۰۰۸۹۷۶	$2/40 \times 10^{-20}$	S_7	
۰/۷۴۴۴۲۷	۰/۰۱۹۵۰۸	۰/۰۱۹۷۹۷	۰/۰۱۹۵۰۸	S_1^T	شاخص‌های حساسیت سبل کل
۰/۸۸۰۲۰۸	۰/۴۹۰۴۴۸	۰/۴۸۴۱۹۱	۰/۴۹۰۴۴۸	S_2^T	
۰/۸۶۷۴۲۵	۰/۴۹۰۴۴۸	۰/۴۹۲۱۳۵	۰/۴۹۰۴۴۸	S_3^T	
۰/۰۳۱۷۷۳	$1/81 \times 10^{-18}$.	$1/80 \times 10^{-18}$	S_4^T	
۰/۰۳۸۹۸	$1/68 \times 10^{-18}$.	$1/65 \times 10^{-18}$	S_5^T	
۰/۵۱۱۳۹۳	$4/06 \times 10^{-5}$	$4/02 \times 10^{-5}$	$4/06 \times 10^{-5}$	S_6^T	
۸/۷۱۵۰۵-	$1/75 \times 10^{-18}$.	$1/74 \times 10^{-18}$	S_7^T	

مربوط به شناسایی آسیب به صورت افزایش قابلیت تشخیص آسیب خصوصاً در محیط‌های نوفه‌ای قابل تعبیر است، استفاده از نتایج بدست آمده در هنگام طراحی وصله‌های پیزوالکتریک و همچنین انتخاب از بین چندین ماده پیزوالکتریک موجود جهت شناسایی بهینه آسیب مفید خواهد بود. به علاوه، تغییرات دامنه طیف امیدانس با ابعاد هندسی وصله پیزوالکتریک به صورت اتفاقی است. مقادیر کوچک شاخص همبستگی اسپیرمن r^s در این موارد تأییدی بر همین رفتار است. این بدان معنا است که تأثیر ابعاد بر دامنه در فرکانس‌های مختلف متفاوت بوده و در نتیجه میانگین تغییرات رفتاری پراکنده خواهند داشت.

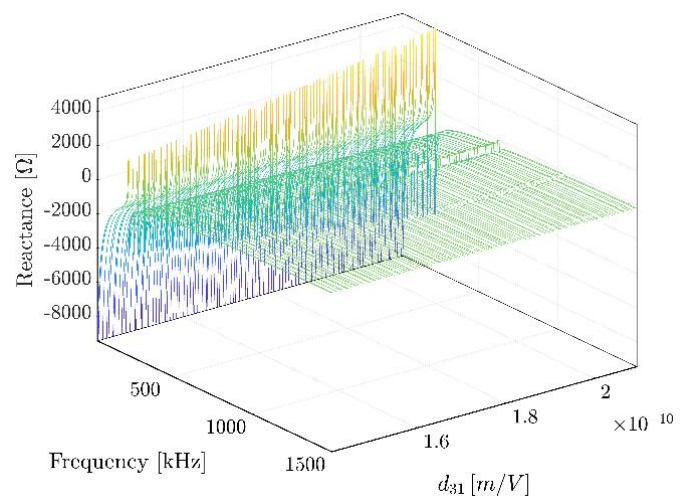
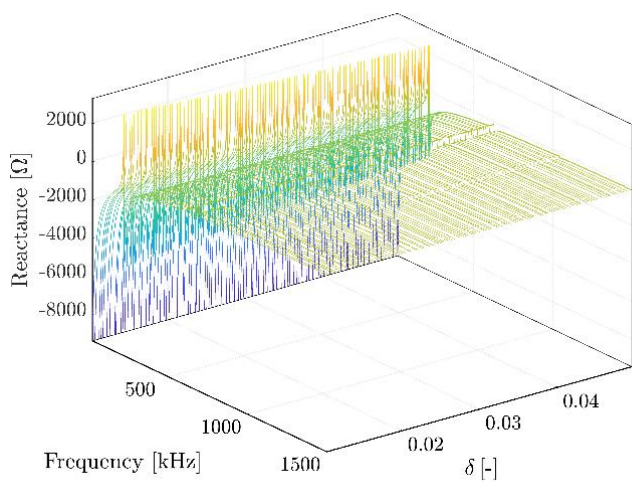
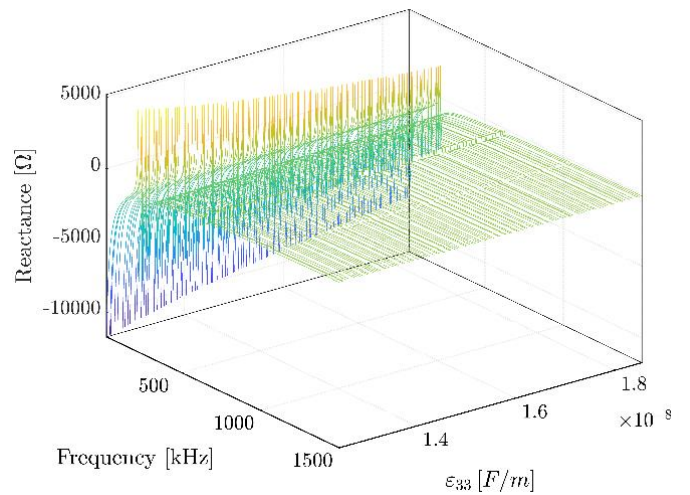
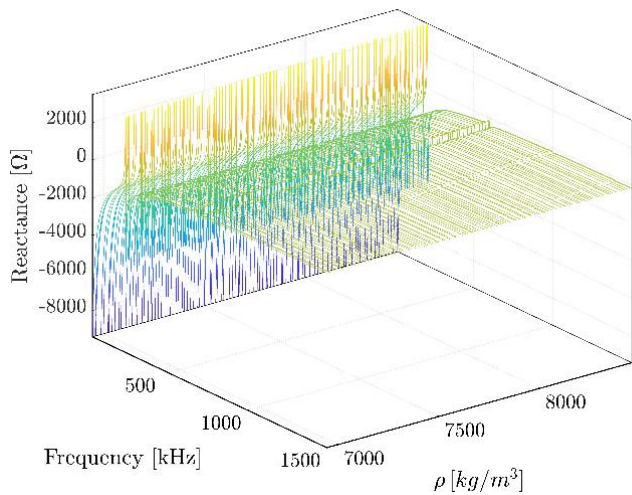
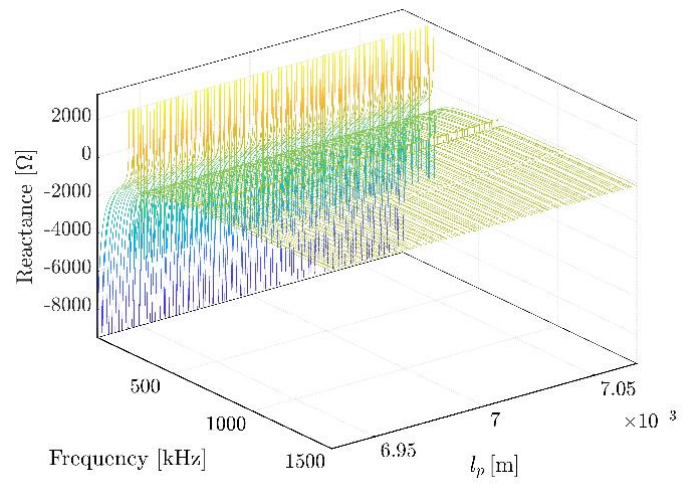
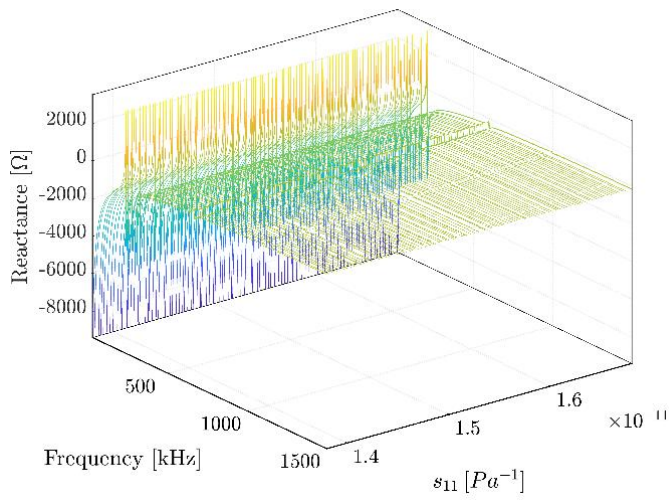
(معادله (۳)). فرکانس پادتشدید با افزایش طول وصله پیزوالکتریک، ضریب نرمی، چگالی و ضریب گذردهی الکتریکی وصله پیزوالکتریک کاهش و با افزایش ثابت پیزوالکتریک افزایش می‌یابد. شدت وابستگی فرکانس پادتشدید به کمیت‌های اشاره شده در تمامی موارد تقریباً یکسان است. عدم وابستگی فرکانس‌های پادتشدید به ضرایب میرایی از عدم اطمینان‌های مربوط به مقادیر بدست آمده از مدل‌های عددی در مورد این کمیت کاسته و امکان صحت‌سنجی دقیق آن را فراهم می‌کند.

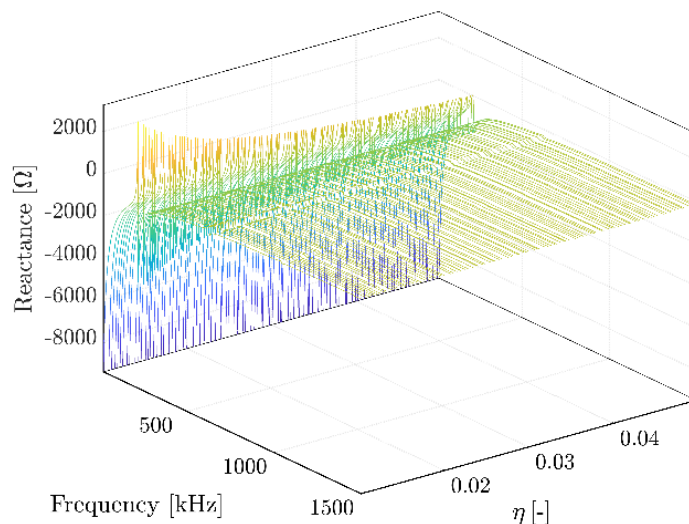
نحوه تغییرات دامنه در اجزاء حقیقی و موهومی طیف امیدانس تقریباً مشابه هستند. مقادیر دامنه با افزایش چگالی و ثابت پیزوالکتریک افزایش و با افزایش نرمی، ضریب گذردهی الکتریکی و ضرایب میرایی کاهش می‌یابد. باتوجه به اینکه افزایش دامنه در مباحث

جدول ۶. مقایسه شاخص‌های حساسیت سبل مرتبه ۱ و کلی محاسبه شده توسط بسط آشوبناک چندجمله‌ای و روش مونت کارلو طبقه‌بندی شده برای شاخص‌های دامنه طیف امیدانس الکترومکانیکی

Table 6. Comparison of the first order and total Sobol' indices calculated by the PCE models and the stratified Monte Carlo method for the amplitude indices of the EMI spectrum

دامنه متوسط طیف واکنایی		دامنه متوسط طیف مقاومت		کمیت مورد نظر	
مونت کارلو	بسط آشوبناک چندجمله‌ای	مونت کارلو	بسط آشوبناک چندجمله‌ای	روش محاسبه اندیس‌ها	
۰/۰۰۴۶۰۱	$1/85 \times 10^{-6}$	۰/۰۰۲۷۵۳	$5/70 \times 10^{-10}$	S_1	شاخص‌های حساسیت سبل مرتبه ۱
۰/۰۰۴۲۹۸	۰/۰۰۰۹۵۱	۰/۰۰۴۴۶۲	۰/۰۰۱۲۶	S_2	
۰/۰۰۹۹۰۹	۰/۰۰۳۴۶۲۵	۰/۰۰۶۴۵۳	۰/۰۰۳۰۷۴	S_3	
۰/۱۸۷۹۷۲	۰/۱۸۵۲۳۶۸	۰/۱۷۲۰۲۶	۰/۱۶۹۲۱۴	S_4	
۰/۱۲۲۵۲۵	۰/۱۲۵۱۸۸۳	۰/۱۳۰۴۶۷	۰/۱۳۱۶۰۴	S_5	
۰/۵۹۸۴۸۴	۰/۶۰۰۲۱۹۷	۰/۶۳۳۰۸۶	۰/۶۲۷۳۵۸	S_6	
۰/۰۱۳۳۶۵	۰/۰۰۹۱۴۱۲	۰/۰۱۱۶۸۵	۰/۰۰۷۸۵۵	S_7	
۰/۰۰۱۳۱۴	۰/۰۰۰۲۲۵	$8/11 \times 10^{-8}$	$1/80 \times 10^{-7}$	S_1^T	شاخص‌های حساسیت سبل کل
۰/۰۰۵۵۷۸	۰/۰۰۲۹۹۵۱	۰/۰۰۱۵۰۹	۰/۰۰۱۴۷۹	S_2^T	
۰/۰۰۷۶۵۸	۰/۰۰۴۶۳۱	۰/۰۰۳۸۹۹	۰/۰۰۳۹۰۳	S_3^T	
۰/۲۲۹۸۱۵	۰/۲۲۲۹۴۶	۰/۲۰۵۴۷۹	۰/۲۰۲۰۰۳	S_4^T	
۰/۱۶۹۴۵۴	۰/۱۶۳۲۰۵	۰/۱۵۹۰۶۵	۰/۱۵۶۵۷۱	S_5^T	
۰/۶۶۷۴۷۸	۰/۶۶۶۰۶۵	۰/۶۸۰۶۱۹	۰/۶۷۹۳۴	S_6^T	
۰/۰۲۴۵۱۵	۰/۰۱۹۹۹۷	۰/۰۱۸۴۵۱	۰/۰۱۸۴۸	S_7^T	





شکل ۱۱. نحوه تغییرات طیف واکنایی (جزء موهومی طیف امپدانس الکترومکانیکی) در گستره فرکانسی موردنظر نسبت به تغییر پارامترهای تصادفی در تحلیل احتمالاتی هر مرتبه یک عامل

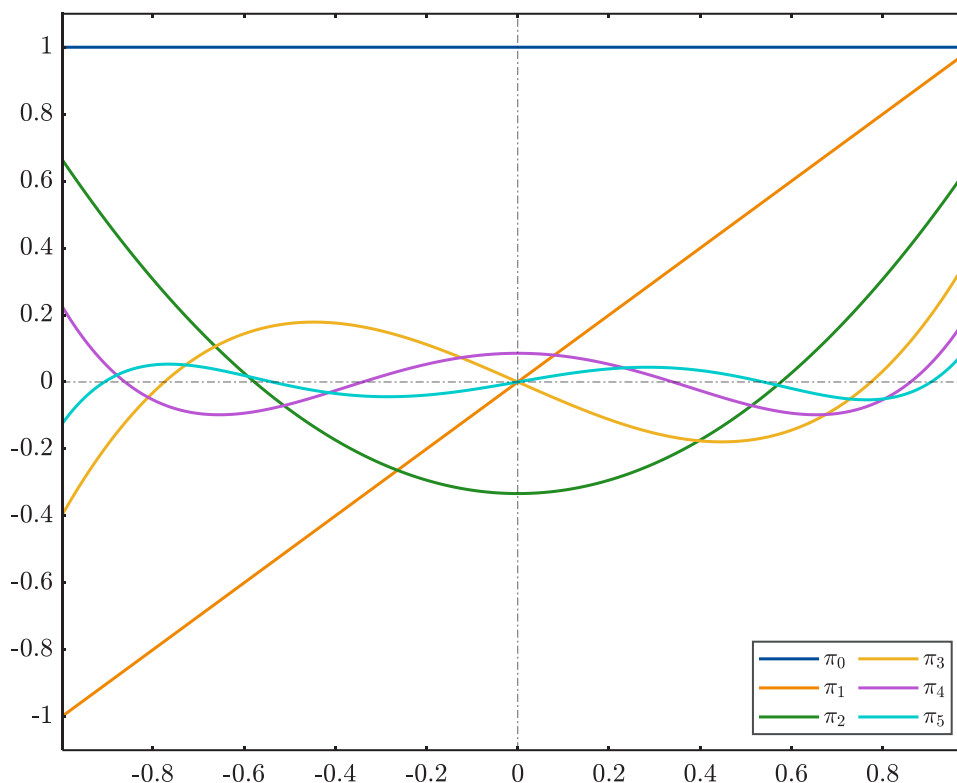
Fig. 11. The variation of the reactance spectrum (the EMI's imaginary part) versus the variation of random variables in the desired frequency range, as determined by the one-factor at a time analysis

۴- نتیجه گیری

در این تحقیق پاسخ ارتعاشات هم‌بسته الکترومکانیکی وصله پیزوالکتریک مستطیلی شکل در قالب ویژگی‌های مودال طیف امپدانس الکترومکانیکی به شیوه احتمالاتی مورد بررسی قرار گرفت. از روش بسط آشوبناک چندجمله‌ای جهت جایگزینی مدل اصلی و کمی‌سازی عدم اطمینان استفاده شد. گشتاورهای احتمالاتی و توابع توزیع احتمال کمیت‌های پاسخ موردنظر از طریق پس‌پردازش ضرایب مدل‌های آشوب چندجمله‌ای به صورت تحلیلی محاسبه شدند. تحلیل حساسیت سراسری به منظور رتبه‌بندی میزان تأثیر متغیرهای ورودی بر کمیت‌های پاسخ به شیوه مونت‌کارلو طبقه‌بندی شده و مبتنی بر بسط آشوبناک چندجمله‌ای انجام گرفت و نتایج مقایسه شد. در نهایت تحلیل همبستگی کمیت‌های پاسخ موردنظر و متغیرهای

ورودی توسط تحلیل هر بار یک عامل انجام گرفت.

طبق نتایج، به‌ازای ضریب تغییرات رایج برای کمیت‌های ورودی، ضریب تغییرات دامنه طیف امپدانس بسیار بزرگ‌تر از فرکانس‌های مودال است. فرکانس‌های مودال بیشترین حساسیت را نسبت به پارامترهای مکانیکی (مدول نرمی و چگالی) وصله موردنظر دارند. این در حالی است که دامنه مودال بیشترین حساسیت را به ترتیب به ضریب میرایی مکانیکی، ضریب گذردهی الکتریکی و ثابت پیزوالکتریک نشان داد. به‌علاوه، آثار تعاملی تأثیر ناچیزی بر کمیت‌های مودال طیف امپدانس اعمال می‌کنند. استفاده از نتایج تحقیق حاضر در فرایند شناسایی آسیب و تخمین پارامتر مبتنی بر روش امپدانس الکترومکانیکی ارزشمند خواهد بود.



شکل پ-۱: چندجمله‌ای‌های لژاندر تا مرتبه ۵

Fig. A1. Legendre polynomials up to order 5

در این روابط نماینده ضرب داخلی نسبت به تابع وزن مورد نظر $\langle \bullet, \bullet \rangle$ است. در مورد توابع وزن متناظر با توابع توزیع احتمال کلاسیک، امکان محاسبه تحلیلی ضرایب فوق وجود دارد. به طور خاص، در مورد توابع توزیع احتمال یکنواخت که در این تحقیق مورد استفاده قرار گرفت، ضرایب بازگشتی از روابط ذیل محاسبه شد [۵۳]:

(پ-۳)

$$\alpha_k = 0, \quad k \geq 0$$

$$\beta_k = \frac{1}{4 - k^2}, \quad k \geq 1$$

در شکل پ-۱: چندجمله‌ای‌های لژاندر تا مرتبه ۵ ترسیم شده است.

۵- پیوست

چندجمله‌ای‌های تک‌متغیره مورد نیاز در بسط آشوناک از رابطه بازگشتی سه‌عبارته ذیل قابل محاسبه هستند [۵۲]:

$$\psi_{k+1}(\xi) = (\xi - \alpha_k)\psi_k(\xi) - \beta_k\psi_{k-1}(\xi) \quad (\text{پ-۱})$$

$$\psi_{-1}(\xi) = 0, \quad \psi_0(\xi) = 1$$

که در آن و ضرایب بازگشتی و مقادیر حقیقی بوده و توسط فرمول داربو قابل محاسبه هستند:

$$\alpha_k = \frac{\langle \xi \psi_k, \psi_k \rangle}{\langle \psi_k, \psi_k \rangle}, \quad k \geq 0$$

$$\beta_k = \begin{cases} \langle \psi_0, \psi_0 \rangle, & k = 0 \\ \frac{\langle \psi_k, \psi_k \rangle}{\langle \psi_{k-1}, \psi_{k-1} \rangle}, & k \geq 1 \end{cases} \quad (\text{پ-۲})$$

- 035017.
- [10] N. Sepehry, M. Ehsani, M. Shamshirsaz, M. Sadighi, Online health monitoring of marine structures using electromechanical impedance spectroscopy: A simulation approach, in: *Journal of Solid and Fluid Mechanics*, Shahrood University of Technology, 10 (2020) 67-76.
- [11] S. Asadi, M. Shamshirsaz, Y.A. Vaghasloo, Bayesian in-situ parameter estimation of metallic plates using piezoelectric transducers, *Smart Structures and Systems*, An International Journal, 26(6) (2020) 735-751.
- [12] J.E. Mottershead, M. Link, M.I. Friswell, The sensitivity method in finite element model updating: A tutorial, *Mechanical systems and signal processing*, 25(7) (2011) 2275-2296.
- [13] R. Ghanem, H. Owhadi, D. Higdon, *Handbook of uncertainty quantification*, 2017.
- [14] B. Sudret, Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions, *Reliability Engineering and System Safety*, 93(7) (2008) 964-979.
- [15] N. Wiener, The homogeneous chaos, *American Journal of Mathematics*, 60(4) (1938) 897-936.
- [16] D. Xiu, G.E. Karniadakis, The Wiener--Askey polynomial chaos for stochastic differential equations, *SIAM journal on scientific computing*, 24(2) (2002) 619-644.
- [17] S. Oladyshkin, W. Nowak, Data-driven uncertainty quantification using the arbitrary polynomial chaos expansion, *Reliability Engineering & System Safety*, 106 (2012) 179-190.
- [18] X. Wan, G.E. Karniadakis, Beyond wiener-askey expansions: Handling arbitrary PDFs, *Journal of Scientific Computing*, 27(1-3) (2006) 455-464.
- [19] R.G. Ghanem, P.D. Spanos, *Stochastic finite elements: a spectral approach*, 2003.
- [20] M. Berveiller, B. Sudret, M. Lemaire, Stochastic finite element: A non intrusive approach by regression, *European Journal of Computational Mechanics*, 15(1-3) (2006) 81-92.
- [21] M.D. Spiridonakos, E.N. Chatzi, *Metamodeling of*
- [1] H. Mei, M.F. Haider, R. Joseph, A. Migot, V. Giurgiutiu, Recent advances in piezoelectric wafer active sensors for structural health monitoring applications, *Sensors*, 19(2) (2019) 383.
- [2] A.F.G. Tenreiro, A.M. Lopes, L.F.M. da Silva, A review of structural health monitoring of bonded structures using electromechanical impedance spectroscopy, *Structural Health Monitoring*, 21(2) (2022) 228-249.
- [3] N. Sepehry, F. Bakhtiari-Nejad, M. Shamshirsaz, Thermo-Electro Mechanical Impedance based Structural Health Monitoring: Euler-Bernoulli Beam Modeling, *AUT Journal of Modeling and Simulation*, 49(2) (2017) 143-152.
- [4] N. Sepehry, M. Ehsani, W. Zhu, F. Bakhtiari-Nejad, Application of scaled boundary finite element method for vibration-based structural health monitoring of breathing cracks, *Journal of Vibration and Control*, 27(23-24) (2021) 2870-2886.
- [5] N. Sepehry, M. Ehsani, M. Shamshirsaz, Free and forced vibration analysis of piezoelectric patches based on semi-analytic method of scaled boundary finite element method, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 52(12) (2019) 3463-3484.
- [6] N. Sepehry, M. Ehsani, M. Shamshirsaz, M. Sadighi, Contact acoustic nonlinearity identification via online vibro-acoustic modulation technique, *Modares Mechanical Engineering*, 20(7) (2020) 1719-1730
- [7] D. Ai, H. Luo, H. Zhu, Diagnosis and validation of damaged piezoelectric sensor in electromechanical impedance technique, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 28(7) (2017) 837-850.
- [8] C. Liang, F.P. Sun, C.A. Rogers, Coupled electro-mechanical analysis of adaptive material systems-determination of the actuator power consumption and system energy transfer, *Journal of intelligent material systems and structures*, 8(4) (1997) 335-343.
- [9] Y.Y. Lim, C.K. Soh, Towards more accurate numerical modeling of impedance based high frequency harmonic vibration, *Smart Materials and Structures*, 23(3) (2014)

- System Safety, 142 (2015) 399-432.
- [31] I.M. Sobol, Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates, *Mathematics and Computers in Simulation*, 55(1-3) (2001) 271-280.
- [32] V. Giurgiutiu, A.N. Zagrai, Characterization of Piezoelectric Wafer Active Sensors, *Journal of Intelligent Materials Systems and Structures*, 11(12) (2000) 959-976.
- [33] V. Giurgiutiu, *Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors: with Piezoelectric Wafer Active Sensors*, 2007.
- [34] J.L. Aurentz, L.N. Trefethen, Chopping a chebyshev series, *ACM Transactions on Mathematical Software*, 43(4) (2017) 1-25.
- [35] R. Pachon, R.B. Platte, L.N. Trefethen, Piecewise-smooth chebfuns, *IMA Journal of Numerical Analysis*, 30(4) (2009) 898-916.
- [36] R. Loendersloot, M. Ehsani, M. Shamshirsaz, Fatigue damage identification and remaining useful life estimation of composite structures using piezo wafer active transducers, in: *Advances in Asset Management and Condition Monitoring*, 2020, pp. 485-497.
- [37] C. Soize, R. Ghanem, Physical Systems With Random Uncertainties : Chaos Representations With Arbitrary Probability, 26(2) (2004) 395-410.
- [38] O. Ditlevsen, H.O. Madsen, *Structural reliability methods*, Wiley New York, 1996.
- [39] G. Blatman, B. Sudret, Adaptive sparse polynomial chaos expansion based on least angle regression, *Journal of Computational Physics*, 230(6) (2011) 2345-2367.
- [40] B. Sudret, A. Der-Kiureghian, Stochastic finite element methods and reliability, Rep. No. UCB/SEMM-2000, 8 (2000).
- [41] B. Sudret, Polynomial chaos expansions and stochastic finite element methods, *Risk and reliability in geotechnical engineering*, (2014) 265-300.
- [42] R. Kohavi, A study of cross-validation and bootstrap for accuracy estimation and model selection, in: *Ijcai*, (1995), 1137-1145.
- dynamic nonlinear structural systems through polynomial chaos NARX models, *Computers and Structures*, 157 (2015) 99-113.
- [22] H.-p. Wan, W.-x. Ren, M.D. Todd, Arbitrary polynomial chaos expansion method for uncertainty quantification and global sensitivity analysis in structural dynamics, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 142 (2020) 106732.
- [23] X. Wei, H.-P. Wan, J. Russell, S. Živanović, X. He, Influence of mechanical uncertainties on dynamic responses of a full-scale all-FRP footbridge, *Composite Structures*, 223 (2019) 110964.
- [24] J.A.S. Witteveen, S. Sarkar, H. Bijl, Modeling physical uncertainties in dynamic stall induced fluid–structure interaction of turbine blades using arbitrary polynomial chaos, *Computers & structures*, 85(11-14) (2007) 866-878.
- [25] R. Loendersloot, M. Ehsani, N. Sepehry, M. Shamshirsaz, Numerical Modelling of Stochastic Fatigue Damage Accumulation in Thick Composites, in: *European Workshop on Structural Health Monitoring*, 2020, pp. 776-787.
- [26] F. Bakhtiari-Nejad, N. Sepehry, M. Shamshirsaz, Polynomial chaos expansion sensitivity analysis for electromechanical impedance of plate, in: *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference*, 2016, pp. 1-8.
- [27] M.D. Spiridonakos, E.N. Chatzi, B. Sudret, Polynomial Chaos Expansion Models for the Monitoring of Structures under Operational Variability, *ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part A: Civil Engineering*, 2(3) (2016) 1-13.
- [28] G. Capellari, E. Chatzi, S. Mariani, Cost–benefit optimization of structural health monitoring sensor networks, *Sensors (Switzerland)*, 18(7) (2018) 1-22.
- [29] S.S. Kucherenko, Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models, *Review, Wilmott Mag*, 1 (2005) 56-61.
- [30] P. Wei, Z. Lu, J. Song, Variable importance analysis: A comprehensive review, *Reliability Engineering and*

- [49] M.D. McKay, R.J. Beckman, W.J. Conover, A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code, *Technometrics*, 42(1) (2000) 55-61.
- [50] B.G.M. Husslage, G. Rennen, E.R. van Dam, D. den Hertog, Space-filling Latin hypercube designs for computer experiments, *Optimization and Engineering*, 12(4) (2010) 611-630.
- [51] N. Pérez, M.A.B. Andrade, F. Buiocchi, J.C. Adamowski, Identification of elastic, dielectric, and piezoelectric constants in piezoceramic disks, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 57(12) (2010) 2772-2783.
- [52] W. Gautschi, Orthogonal polynomials (in Matlab), *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 178(1-2 SPEC. ISS.) (2005) 215-234.
- [53] S. Rahman, Extended Polynomial Dimensional Decomposition for Arbitrary Probability Distributions, *Journal of Engineering Mechanics*, 135(12) (2009) 1439-1451.
- [43] O. Chapelle, V. Vapnik, Y. Bengio, Model selection for small sample regression, *Machine Learning*, 48(1-3) (2002) 9-23.
- [44] D.W. Scott, Multivariate density estimation and visualization, in: *Handbook of computational statistics*, Springer, 2012, pp. 549-569.
- [45] A. Janon, T. Klein, A. Lagnoux, M. Nodet, C. Prieur, Asymptotic normality and efficiency of two Sobol index estimators, *ESAIM - Probability and Statistics*, 18 (2014) 342-364.
- [46] A. Saltelli, T. Homma, Importance measures in global sensitivity analysis of model output, *Reliab. Eng. Sys. Safety*, 52 (1996) 1-17.
- [47] K. Konakli, B. Sudret, Global sensitivity analysis using low-rank tensor approximations, *Reliability Engineering and System Safety*, 156 (2016) 64-83.
- [48] C.M.R. BDV, Numerical simulation for health monitoring of thin simply supported plate using PZT transducers, *Materials Today: Proceedings*, 45 (2021) 3492-3498.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Ehsani, M. Shamshirsaz, N. Sepehry, M. Sadighi, *Uncertainty Quantification in the Assessment of the Characteristics of the Electromechanical Impedance Spectrum of a Rectangular Piezoelectric Patch*, *Amirkabir J. Mech Eng.*, 54(10) (2023) 2351-2376.

DOI: [10.22060/mej.2022.20894.7359](https://doi.org/10.22060/mej.2022.20894.7359)

