

Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 54(10) (2023) 475-478 DOI: 10.22060/mej.2022.20894.7359

Uncertainty Quantification in the Assessment of the Characteristics of the Electromechanical Impedance Spectrum of a Rectangular Piezoelectric Patch

M. Ehsani^{1,3}, M. Shamshirsaz^{1*}, N. Sepehry², M. Sadighi³

¹New Technologies Research Center, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

² Department of Mechanical and Mechatronic Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

³ Department of Mechanical Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

ABSTRACT: Electromechanical impedance spectroscopy can be used for damage localization by estimating the electromechanical impedance spectrum with numerical or analytical models. The existence of several sources of uncertainty, however, leads to a significant mismatch between the numerical and experimental results. Therefore, uncertainty quantification for high-frequency coupled electromechanical vibration response of the piezoelectric patch is necessary. Polynomial chaos expansion is an efficient method for assessing uncertainty when dealing with time-consuming models. For the probabilistic analysis of modal features of the impedance spectrum, surrogate models derived by polynomial chaos expansion were used. The statistical moments and probability distributions of the quantity of interest were computed analytically using surrogate models. By post-processing the coefficients of polynomial chaos expansion models with relatively minimal computing cost, global sensitivity analysis was performed to rank the relevance of input variable variation on response variance. According to the results, due to the common uncertainties in the material properties and geometry of the piezoelectric patch, the coefficient of variation in the peak amplitudes is substantially higher than the peak frequencies. In addition, modal frequencies are most sensitive to mechanical properties (compliance and density), whereas modal amplitudes are most sensitive to mechanical damping, electrical permittivity, and the piezoelectric constant.

Review History:

Received: Jan. 22, 2022 Revised: Jul. 17, 2022 Accepted: Sep. 10, 2022 Available Online: Nov. 07, 2022

Keywords:

Structural health monitoring Piezoelectric patch Uncertainty quantification Polynomial chaos expansion Global sensitivity analysis

1-Introduction

The use of smart materials in various fields of engineering, including structural health monitoring, has grown significantly in recent years. Wafer piezoelectric patches, as a type of intelligent material, have unique characteristics that make them appropriate for real-time health monitoring applications. Electromechanical Impedance Spectroscopy (EMIS) is a vibration-based damage detection method that takes advantage of the simultaneous actuation and sensing capabilities of (PZTs) [1]. Modeling the EMI technique to estimate the PZT response spectrum analytically or numerically is highly beneficial in the damage detection process. However, the presence of various sources of uncertainty regarding material properties and geometry makes experimental validation difficult. Therefore, having knowledge about the impact of the influencing parameters on the EMI in the form of sensitivity indices can guide the model updating process to be handled with the least amount of computational cost.

Polynomial Chaos Expansion (PCE) is one of the most effective techniques for uncertainty quantification by surrogate modeling. The idea is to represent the output response of the original model in a random space spanned

by polynomial chaos [2, 3]. The probability distribution of the response [4], statistical moments, and Sobol' sensitivity indices [5] can all be computed by mere post-processing the PCE models.

The present study aims to quantify the uncertainty in the estimation of the piezoelectric patches' EMI spectrum and, in particular, its modal characteristics in high-frequency vibrations. Electrical and mechanical properties, as well as a dimension of a rectangular PZT, are taken as sources of uncertainty in the impedance spectrum estimation. The application of the PCE approach to the probabilistic analysis of the EMI spectrum is one of the study's innovative features. A sensitivity analysis is used to rank the effects of the influencing factors on the modal characteristics of the impedance spectrum.

2- Methodology

For a rectangular patch, the electromechanical (E/M) admittance/impedance can be calculated as follows [6]:

$$Y(\omega) = j\omega \,\overline{C} \left(1 - \overline{k}_{31}^2 \left(1 - \frac{1}{\overline{\varphi} \cot(\overline{\varphi})} \right) \right); \, Z(\omega) = Y^{-1}(\omega) \quad (1)$$

*Corresponding author's email: shamshir@aut.ac.ir



Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.

Table 1.	The resonance frequency of a rectangular PZT
	patch with nominal input parameters

	Resonant frequencies of longitudinal vibration [Hz]					
Experiment	212000	597000	1020000	1496000		
Theory	208394	625182	1041971	1458759		
Error [%]	1.70	-4.72	-2.15	2.49		

$$\overline{k}_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{\overline{s}_{11}^E \overline{\varepsilon}_{33}^T}, \quad \overline{C} = \overline{\varepsilon}_{33}^T \frac{b_p l_p}{t_p}, \quad \overline{\varphi} = \frac{1}{2} \frac{\omega l_a}{\overline{c}}, \quad \overline{c} = \sqrt{\frac{1}{\rho \overline{s}_{11}^E}}, \quad (2)$$
$$\overline{s}_{11}^E = s_{11}^E (1 - j\eta), \quad \overline{\varepsilon}_{33}^T = \varepsilon_{11}^E (1 - j\delta)$$

The primary characteristics of the admittance and impedance spectra, which are often used for damage detection, are the modal characteristics. The E/M resonant and anti-resonant frequencies are calculated as the admittance and impedance poles, respectively. Using these spectral characteristics, four Quantities of Interest (QoI) are defined including the mean of the resonant (Y_1) and anti-resonant (Y_2) frequencies, as well as the mean of the peak amplitudes in the real (Y_3) and imaginary (Y_4) parts of the impedance spectrum.

Assuming that QoIs have finite variance, each can be represented by the following expansion:

$$\mathbf{Y} = \mathcal{M}(\mathbf{X}(\mathbf{\Xi})) = \sum_{j=0}^{+\infty} \beta_j \Psi_j(\mathbf{\Xi})$$
(3)

When multivariate polynomials are used as the basis for the expansion, Eq. (3) represents the PCE expansion of the original computational model (\mathcal{M}). In practice, the expansion of Eq. (3) is truncated using truncation schemes. Regression analysis allows for the non-intrusive computation of the PCE coefficients [7]. Leave-one-out error is used to assess the accuracy of the PCE model in predicting the original model outcomes [8].

With the PCE surrogate model, the 1st order and total Sobol' indices can be calculated as follows [5]:

$$\hat{S}_{i} = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}_{i}} a_{\boldsymbol{\alpha}}^{2} / \sigma_{\hat{Y}}^{2} \quad \mathcal{A}_{i} = \left\{ \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}^{M, p, q} : \alpha_{i} > 0, \alpha_{j \neq i} = 0 \right\}$$
(4)

$$\hat{S}_{i}^{\mathrm{T}} = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}_{i}^{\mathrm{T}}} a_{\boldsymbol{\alpha}}^{2} / \sigma_{\hat{Y}}^{2} \qquad \mathcal{A}_{i}^{\mathrm{T}} = \left\{ \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}^{M, p, q} : \alpha_{i} > 0 \right\}$$
(5)



Fig. 1. First order Sobol's sensitivity indices for Random Variables (RVs)

3- Results and Discussion

The EMI spectra for a rectangular PZT are first estimated using the nominal material properties and dimensions. Table 1 compares the model's E/M resonant frequencies for longitudinal vibrations with the experimental data from reference [6].

In the next step, the EMI spectral characteristics are investigated probabilistically using PCE. The seven random variables, which include patch length, longitudinal compliance, density, permittivity, piezoelectric constant, and mechanical and electrical dissipation coefficients, are assumed to have a uniform distribution with mean values and coefficients of variation supplied by the manufacturer. For Sobol's sensitivity indices and QoIs probability distribution, the PCE models surrogate the original computational models to lower the computational costs compared to the Monte Carlo method (12870 calls to the original model relative to 90 calls by the Monte Carlo method).

Figs. 1 and 2 show the first order and total Sobol' indices for the QoIs. The findings show that the resonant and anti-resonant frequencies are particularly sensitive to the mechanical properties of the piezoelectric patch, including its compliance and density. On the other hand, there is almost no correlation between these QoIs and the piezoelectric patch's electrical, E/M, and damping properties. In terms of the amplitude of the EMI spectrum, mechanical dissipation, electrical permittivity, and piezoelectric constant are the most influential factors.

4- Conclusions

A probabilistic analysis of the vibration response of a rectangular piezoelectric patch in terms of EMI was performed. The PCE was used to surrogate the original model and quantify uncertainty. According to the results,



Fig. 2. Total Sobol's sensitivity indices for RVs

for a common coefficient of variation for the input random variables, the coefficient of variation of the amplitude of the impedance spectrum is much larger than that of the modal frequencies. Modal frequencies are most significantly influenced by the mechanical properties of the patch (compliance and density). Meanwhile, the modal amplitudes showed the most sensitivity to the piezoelectric constant, electrical permittivity coefficient, and mechanical dissipation coefficient. The modal quantities of the impedance spectrum are also barely impacted by the RVs' interaction effects.

References

- A.F.G. Tenreiro, A.M. Lopes, L.F.M. da Silva, A review of structural health monitoring of bonded structures using electromechanical impedance spectroscopy, Structural Health Monitoring, 21(2) (2022) 228-249.
- [2] D. Xiu, G.E. Karniadakis, The Wiener--Askey polynomial chaos for stochastic differential equations, SIAM journal on scientific computing, 24(2) (2002) 619-644
- [3] R.G. Ghanem, P.D. Spanos, Stochastic finite elements: a spectral approach, 2003.
- [4] B. Sudret, A. Der-Kiureghian, Stochastic finite element methods and reliability, Rep. No. UCB/SEMM-2000, 8 (2000).
- [5] B. Sudret, Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions, Reliability Engineering and System Safety, 93(7) (2008) 964-979.
- [6] V. Giurgiutiu, A.N. Zagrai, Characterization of Piezoelectric Wafer Active Sensors, Journal of Intelligent Materials Systems and Structures, 11(12) (2000) 959-976.
- [7] M. Berveiller, B. Sudret, M. Lemaire, Stochastic finite element: A non intrusive approach by regression, European Journal of Computational Mechanics, 15(1-3) (2006) 81-92.
- [8] G. Blatman, B. Sudret, Adaptive sparse polynomial chaos expansion based on least angle regression, Journal of Computational Physics, 230(6) (2011) 2345-2367.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

M. Ehsani, M. Shamshirsaz, N. Sepehry, M. Sadighi, Uncertainty Quantification in the Assessment of the Characteristics of the Electromechanical Impedance Spectrum of a Rectangular Piezoelectric Patch, Amirkabir J. Mech Eng., 54(10) (2023) 475-478.



DOI: 10.22060/mej.2022.20894.7359

This page intentionally left blank

نشريه مهندسي مكانيك اميركبير

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۴، شماره ۱۰، سال ۱۴۰۱، صفحات ۲۳۵۱ تا ۲۳۷۶ DOI: 10.22060/mej.2022.20894.7359

کمیسازی عدم اطمینان در تخمین ویژگیهای مودال طیف امپدانس الکترومکانیکی وصله پیزوالکتریک مستطیلی

محمد احسانی^{۱٬}، مهناز شمشیرساز ^۹٬ ناصرالدین سپهری^۲ و مجتبی صدیقی^۳ ۱- پژوهشکده فناوری نو، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران ۲- دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران ۳- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

خلاصه: روش امپدانس الکترومکانیکی از جمله روشهای مؤثر جهت شناسایی آسیب در حوزه تعمیر و نگهداری بر خط به شمار میرود. در این روش از قابلیت وصلههای پیزوالکتریک جهت عملگری و حسگری همزمان استفاده می شود. تخمین طیف امپدانس الکترومکانیکی به کمک مدلهای عددی یا تحلیلی مزایای ویژهای در فرایند شناسایی آسیب فراهم می آورد. این در حالی است که وجود منابع عدم اطمینان مختلف منجر به اختلاف قابل توجه بین نتایج مدلهای عددی و نتایج تجربی می شود. از این رو کمی سازی عدم اطمینان در پاسخ ارتعاشاتی فرکانس بالای وصله پیزوالکتریک ضرورت پیدا می کند. در این تحقیق به بررسی احتمالاتی تخمین طیف امپدانس الکترومکانیکی پرداخته می شود. در این راستا از مدلهای جایگزین مبتنی بر بسط آشوبناک چندجملهای جهت تحلیل احتمالاتی ویژگیهای مودال طیف امپدانس استفاده شد. ممانهای احتمالاتی و توزیع احتمال کمیتهای پاسخ مورد نظر به صورت تحلیلی توسط مدل های جایگزین محاسبه شدند. تحلیل حساسیت سراسری جهت رتبهبندی اهمیت متغیرهای احتمالاتی بر واریانس مقادیر پاسخ از طریق پس پردازش ضرایب مدل های آشوبناک چندجملهای و با هزینه محاسباتی بسیار کم امکان پذیر است. طبق نایج، مقادیر پاسخ از طریق پس پردازش ضرایب مدل های آشوبناک چندجملهای و با هزینه محاسباتی بسیار کم امکان پذیر است. طبق نتایج، مقادیر پاسخ از فرکانسهای مودال (٪ ۴/۲۰) است. به علاوه، فرکانسهای مودال بیشترین حساستی را به خواص مکانیکی (مدول نرمی و بیشتر از فرکانسهای مودال (٪ ۴/۲۰) است. به علاوه، فرکانسهای مودال بیشترین حساسیت را به خواص مکانیکی (مدول نرمی و چگالی) و دامنههای مودال بیشترین حساسیت را به ضریب میرایی مکانیکی، ضریب گذردهی الکتریکی و ثابت پیزوالکتریک دارند.

تاریخچه داوری: دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۰۲ بازنگری: ۱۴۰۱/۰۴/۲۶ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹ ارائه آنلاین: ۱۴۰۱/۰۸/۱۶

کلمات کلیدی: پایش سلامت سازه وصله پیزوالکتریک کمّیسازی عدم اطمینان بسط آشوبناک چندجملهای تحلیل حساسیت سراسری

۱ – مقدمه

در سالهای اخیر استفاده از مواد هوشمند در شاخههای مختلف مهندسی اعم از حوزه پایش سلامت سازه، گسترش چشمگیری یافته است[۱]. خواص و ویژگیهای منحصربه فرد مواد پیزوالکتریک به عنوان گونه ای از مواد هوشمند، آن ها را به گزینه ای مناسب برای به کارگیری در بخش عملگری و حسگری سامانه های پایش سلامت برخط بدل کرده است. با این که اغلب عملگرها و حسگرهای مورد استفاده در روشهای مختلف پایش سلامت بر اساس خواص مواد پیزوالکتریک ویژه ای در حوزه شناسایی آسیب برخط به ارمغان می آورد. قابلیت عملگری و حسگری هم زمان، مقاومت بالا، وزن کم، تأثیر ناچیز بر رفتار دینامیکی سازه تحت پایش و البته قیمت مناسب، جزء ویژگی های منحصربه فرد تراگذارهای ویفری در فرآیندهای شناسایی

آسيب محسوب مىشوند.

روش امپدانس الکترومکانیکی از جمله روشهای شناسایی آسیب مبتنی بر ارتعاشات بوده که از قابلیت عملگری و حسگری همزمان وصلههای پیزوالکتریک بهره میبرد [۲ و ۳]. اساس تشخیص آسیب در روش امپدانس الکترومکانیکی، تغییر در امپدانس مکانیکی سازه (جرم، سفتی، میرایی و شرایط مرزی) بهواسطه ایجاد آسیب و درنتیجه تغییر در طیف امپدانس الکترومکانیکی وصله پیزوالکتریک متصل به سازه میزبان نسبت به یک حالت دست نخورده است. این تغییرات معمولاً بهصورت تغییر در فرکانس و دامنه قلههای تشدید و پادتشدید در طیف امپدانس (ادمیتانس) وصله پیزوالکتریک ظاهر میشود. کمّیسازی تغییرات این ویژگیهای مودال نسبت به حالت سالم توسط شاخصهای آسیب امکان تخمین شدت آسیب را فراهم میآورد.

* نویسنده عهدهدار مکاتبات: : shamshir@aut.ac.ir

ر المعنوب (Creative Commons License) حقوق مؤلفين به نويسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه اميركبير داده شده است. اين مقاله تحت ليسانس أفرينندگی مردمی (Creative Commons License) المعنوب الم المعنوب ا

امكان مدلسازي رفتار وابسته الكترومكانيكي وصله پيزوالكتريك [۶-۴] و تخمین طیف امپدانس (ادمیتانس) الکترومکانیکی توسط مدلهای تحلیلی یا عددی، مزایای ویژهای در روند شناسایی آسیب ايجاد مي كند. مكان يابي آسيب، تعيين محل مناسب الصاق حسگرها بهمنظور پوشش کامل محدوده تحت پایش و تحلیل پارامتری عوامل مؤثر بر شناسایی آسیب و تقویت پارامترهای با بیشترین تأثیر جهت افزایش قدرت شناسایی آسیب از جمله کاربردهای تخمین طيف امپدانس هستند. تاكنون تلاشهای متعددی برای مدلسازی و تخمین طیف امپدانس الکترومکانیکی به صورت تحلیلی [۷ و ۸]، نیمه تحلیلی و عددی [۵ و ۹ و ۱۰] انجام گرفته است. هرچند وجود منابع مختلف عدم اطمينان در ارتباط با خواص، هندسه و البته مدل مورد استفاده، امکان صحت سنجی نتایج عددی و تجربی را با مشکل مواجه می کند. حتی در اغلب موارد جهت ارائه مدلی صحت سنجی شده که امکان استفاده از آن در فرایند شناسایی آسیب وجود داشته باشد، تنها از طريق تخمين پارامتر و بهروزرساني مدل امكان پذير است. فرايند تخمين يارامتر كه اغلب بهصورت احتمالاتي انجام مي گيرد، فرایندی بسیار زمانبر بوده و افزایش منابع عدم اطمینان بر حجم محاسبات مربوطه می افزایند [۱۱]. این در حالی است که در صورت وجود دانشى پيرامون نحوه تغييرات ويژگىهاى مودال طيف امپدانس نسبت به پارامترهای مؤثر در سراسر فضای احتمالاتی مشترک آنها، امکان بهروزرسانی مدل و تخمین پارامتر را در کوتاهترین مسیر فراهم می آورد. به علاوه، رتبه بندی میزان تأثیر پارامترهای ورودی بر واریانس مقادیر پاسخ از طریق تحلیل حساسیت سراسری امکان قطعی فرض کردن پارامترهای کمتأثیر، از ابعاد فضای احتمالاتی ورودی و در نتيجه حجم محاسبات مي كاهد. از نتايج تحليل حساسيت مي توان در فرمولاسيون بهينه توابع هزينه جهت تخمين مؤثر پارامترهاي ورودي نيز بهره برد [۱۲].

بسط آشوبناک چندجملهایها^۱ ازجمله مؤثرترین روشها بهمنظور تولید مدل جایگزین قابل اطمینان با کمترین تعداد دادههای ورودی محاسبهشده توسط مدل اصلی، کمیسازی عدم اطمینان در متغیرهای پاسخ و همچنین تحلیل حساسیت سراسری به شمار میرود. بسط پاسخ خروجی از مدل اصلی توسط چندجملهایهای چندمتغیره متعامد بهعنوان پایههای یک فضای احتمالاتی (موسوم

به آشوب چندجملهایها) ایده اصلی این روش به شمار میرود [۱۳]. دقت این روش خصوصاً در جایگزینی مدل های محاسب با تعداد ورودی های کم و متوسط بسیار مناسب است. مدل جایگزین مبتنی بر بسط آشوبناک امکان کمی سازی عدم اطمینان، تعیین آمارگان نقطهای و توزیع چگالی احتمال پاسخ را به صورت تحلیلی و با هزينه محاسباتي كم فراهم مي كند [١۴]. از اينرو بسط آشوبناك چندجملهایها بهعنوان روشی قدرتمند در حوزه مهندسی قابلیت اطمينان نيز به شمار ميرود. ايده اوليه بسط آشوبناک توسط وينر [۱۵] برای مدلسازی فرآیندهای تصادفی که متغیرهای ورودی آن منحصراً دارای توزیع چگالی احتمال گوسی بودند، ارائه شد. بعدها، با معرفي بسط آشوبناک چندجملهاي تعميميافته ، مدلسازي فرایندهایی با متغیرهای ورودی غیر گوسی اما کلاسیک (بهعنوان مثال، گاما، بتا و یکنواخت) توسط این روش ممکن شد [۱۶]. با ارائه ایده بسط آشوبناک چندجملهای دلخواه، گستردگی این روش به اوج خود رسید، بهطوری که مدلسازی هر نوع فرایند تصادفی با هر نوع ورودی تصادفی غیراستاندارد توسط این روش امکان پذیر است [۱۷ و ۱۸]. در کاربردهای اولیه روش بسط آشوبناک، از روشهای مزاحم^۳ برای محاسبه ضرایب بسط استفاده می شد [۱۹]. در این شیوه، علاوه بر گسستهسازی مسئله در حوزه مکان (روش المان محدود) و در صورت نیاز زمان (مسائل متغیر با زمان مانند مسائل ارتعاشاتی) نیاز به گسستهسازی مدل در حوزه فضای احتمال نیز وجود دارد. نیاز به الگوریتمهای ابتکاری برای حل این گونه مسائل منجر به محدود ماندن کاربرد بسط آشوبناک چندجملهایها شده بود. ظهور روشهای غیرمزاحم [۲۰] که در آن ضرایب بسط تنها توسط خروجیهای مدل اصلی در تعداد مشخصی نمونه از فضای احتمال مشترک متغیرهای ورودی تعیین میشوند، گام بزرگی در عمومیسازی بسط آشوبناک چندجملهایها بود. این ایده امکان مدلسازی سیستمهای بسیار پیچیده که اغلب اطلاعات چندانی از ماهیت فیزیکی آن در دسترس نیست (موسوم به مدلهای جعبه سیاه) را توسط بسط آشوبناک چندجملهایها با هزینه محاسباتی نسبتاً پایین فراهم میکند. همین ویژگیهای منحصربهفرد، بسط آشوبناک چندجملهایها را به یکی از کلیدیترین رویکردها در کمّیسازی عدم قطعیت طیف وسیعی از مسائل مهندسی اعم از دینامیک سازه [۲۳-۲۱]، دینامیک سیالات

¹ Polynomial Chaos Expansion (PCE)

² Wiener

³ Intrusive

[۱۸]، تعامل سازه و سیال [۲۴] و پایش سلامت سازه [۲۸–۲۵] بدل کرده است.

تحلیل حساسیت با هدف تعیین کمی اهمیت نسبی پارامترهای ورودی به یک مدل ریاضی، بهعنوان یکی از مراحل مهم در چرخه کمّیسازی عدم قطعیت نیز به شمار میرود. تحلیل حساسیت معمولاً به دو شیوه محلی و سراسری' قابل انجام است [۲۹]. در تحلیل حساسیت محلی، تمرکز بر نحوه تغییرات خروجی مدل در اثر تغییر متغیرهای تصادفی در اطراف مقدار نامی آنها است. از طرفی، هدف از تحليل حساسيت سراسري محاسبه ميزان تغييرات خروجي مدل در اثر تغییر همزمان همه متغیرهای ورودی، روی کل فضای احتمال مشترک آنها است. روشهای مبتنی بر تحلیل واریانس و روشهای مبتنی رگرسیون رایجترین شیوههای تحلیل حساسیت سراسری به شمار میروند. روشهای مبتنی بر رگرسیون تنها در مورد مدلهای رگرسیون خطی (بر حسب ضرایب رگرسیون) یا مدل هایی با ماهیت یکنوا قابل پیادهسازی هستند [۳۰]. ازاینرو، روشهای مبتنی بر تجزیه واریانس و خصوصاً شاخصهای حساسیت سبل ٔ از مقبولیت عمومی بیشتری بین محققین برخوردار هستند. روشهای مبتنی بر شبیهسازی مونتکارلو ازجمله روشهای تخمین شاخصهای حساسيت سبل بوده [٣١] كه بهواسطه تعداد زياد ارجاعات مورد نياز به مدل اصلی، در مورد مدلهای محاسباتی پیچیده قابل پیادهسازی نیستند. از طرفی، مدل جایگزین مبتنی بر بسط آشوبناک چندجملهای امكان محاسبه تحليلي شاخصهاي سبل را ممكن مي كند [١۴].

هدف از تحقیق حاضر کمّیسازی عدم اطمینان در تخمین طیف هدف از تحقیق حاضر کمّیسازی عدم اطمینان در تخمین طیف امپدانس الکترومکانیکی وصلههای پیزوالکتریک و بهویژه مشخصههای مودال آن در ارتعاشات فرکانس بالا است. خواص الکتریکی، مکانیکی و همچنین هندسه به عنوان منابع عدم اطمینان در تخمین طیف امپدانس هستند. استفاده از روش بسط آشوبناک چندجملهای جهت تحلیل احتمالاتی طیف امپدانس الکترومکانیکی از جمله نوآوریهای پژوهش حاضر است. این روش در عین کاهش حجم محاسبات، امکان محاسبه تحلیلی ممانهای احتمالاتی کمیتهای موردنظر و همچنین تخمین توزیع چگالی احتمال آنها را فراهم میآورد. رتبهبندی میزان تأثیر متغیرهای اشاره شده بر ویژگیهای مودال طیف امپدانس در قالب تحلیل حساسیت از جمله اهداف دیگر پژوهش حاضر است.

تحلیل همبستگی بین ویژگیهای مودال طیف امپدانس و متغیرهای تصادفی اشاره شده از جمله چشماندازهای دیگر تحقیق حاضر به شمار میرود.

۲- پیشزمینه تئوری و روشها

در این بخش ابتدا معادلات مربوط به تخمین طیف امپدانس الکترومکانیکی وصله پیزوالکتریک مستطیلی ارائه و نحوه استخراج فرکانسهای تشدید و پادتشدید مورد بحث قرار خواهد گرفت. سپس، تئوری بسط آشوبناک چندجملهای جهت کمّیسازی عدم اطمینان و تحلیل احتمالاتی کمیتهای موردنظر ارائه میشود. در نهایت، نحوه تحلیل حساسیت سراسری به روش تحلیل واریانس توسط پس پردازش ضرایب بسط آشوبناک چندجملهای ارائه خواهد شد.

۲- ۱- تخمین طیف امپدانس الکترومکانیکی وصله پیزوالکتریک مستطیلی به کمک معادلات تحلیلی

وصله پیزوالکتریک نازک نشانداده شده در شکل ۱ را که تحت تأثیر اعمال ولتاژ هارمونیک ($\hat{V}(t) = \hat{V}e^{j\omega t}$) به الکترودهایش (شرایط مرزی الکتریکی) به صورت آزاد (شرایط مرزی مکانیکی) در حال ارتعاش است را در نظر بگیرید. با توجه به ضخامت کم وصله، میتوان توزیع میدان الکتریکی ناشی از اعمال ولتاژ به وجوه بالایی و پایینی پیزوالکتریک را یکنواخت فرض کرد ($\hat{E}_r(t) = \hat{E}_r e^{j\omega t})$). تحت شرایط مرزی مذکور، وصله پیزوالکتریک به صورت تشدیدگر در فرکانس تحریک و البته اختلاف فاز $u_1(t) = \hat{u}_1 e^{j\omega t}$ نوسان خواهد

درصورتی که اندازه ابعاد وصله در سه جهت تفاوت چشمگیری داشته باشند، می توان ار تعاشات در سه راستای طولی، عرضی و ضخامت را مستقل فرض نمود. در حالتی که طول پیزوالکتریک نسبت به اندازه دو بعد دیگر آن بسیار بزرگ تر باشد ($_p > b_p > t_p$)، ار تعاشات طولی در پاسخ الکترومکانیکی وصله به تحریک الکتریکی قالب خواهد بود. تحت این شرایط، ادمیتانس و امپدانس الکترومکانیکی وصله مستطیلی از معادلات (۱) و(۲) قابل تخمین خواهند بود [۳۲]:

Global

² Sobol index



شکل ۱. طرح شماتیک وصله پیزوالکتریک مستطیلی تحت اعمال ولتاژ الکتریکی

Fig. 1. Schematic illustration of a rectangular piezoelectric patch being applied to voltage

اهمیت ویژهای در حوزه شناسایی آسیب برخوردار است. فرکانسهای تشدید الکترومکانیکی به فرکانسهایی که در آنها ادمیتانس و در نتیجه جریان الکتریکی و جابهجایی بیشینه بوده اطلاق شده و متناظر با قطبهای $(\omega) Y$ هستند $(-=(\overline{\varphi}) \cos \phi)$ [۳۳]. فرکانسهای تشدید متناظر با فرکانسهای قله در طیف رسانایی^۱ و پذیرندگی^۲ مستند. از طرفی، فرکانسهای پادتشدید به فرکانسهایی که در آن امپدانس بیشینه و در نتیجه جریان عبوری و جابهجایی سیستم کمینه می شود، اطلاق می معادله امپدانس (متناظر آ صفرهای معادله امپدانس) با قطبهای معادله امپدانس (متناظر آ صفرهای معادله ادمیتانس) با قطبهای معادله امپدانس (متناظر آ صفرهای معادله ادمیتانس) با قطبهای معادله امپدانس (متناظر آ صفرهای معادله ادمیتانس) با قطبهای معادله امپدانس (متناظر آ

$$\overline{\varphi}\cot\left(\overline{\varphi}\right) + \frac{\overline{k}_{31}^2}{1 - \overline{k}_{31}^2} = 0 \tag{(7)}$$

فرکانسهای پادتشدید متناظر با فرکانسهای قله در طیف مقاومت^۳ و واکنایی^۴ هستند. معادله فوق، یک معادله کسری مختلط بوده و ریشههای آن توسط روشهای عددی قابل محاسبه است. برای این منظور ابتدا به کمک جبر مختلط، قسمتهای حقیقی و موهومی آن از هم جدا می گردد. نظر به این که معادله فوق در بازه فرکانسی موردنظر دارای چندین ریشه است، در صورت استفاده از روش نیوتن-

$$Y(\omega) = j\omega \,\overline{C} \left[1 - \overline{k}_{31}^2 \left(1 - \frac{1}{\overline{\varphi} \cot(\overline{\varphi})} \right) \right]; \quad Z(\omega) = Y^{-1}(\omega) \, (1)$$

$$\overline{k}_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{\overline{s}_{11}^E \overline{s}_{33}^T}, \quad \overline{C} = \overline{\varepsilon}_{33}^T \frac{b_p l_p}{t_p}, \quad \overline{\varphi} = \frac{1}{2} \frac{\omega l_a}{\overline{c}}, \quad \overline{c} = \sqrt{\frac{1}{\rho \overline{s}_{11}^E}}, \quad (\Upsilon)$$
$$\overline{s}_{11}^E = s_{11}^E (1 - j\eta), \quad \overline{\varepsilon}_{33}^T = \varepsilon_{11}^E (1 - j\delta)$$

در روابط فوق Y و Z به ترتیب نماینده ادمیتانس و امپدانس الکترومکانیکی، F_{rr}^{T} نرمی مکانیکی، ρ چگالی، F_{rr}^{T} گذردهی الکتریکی، d_{rr} ثابت پیزوالکتریک، η و δ ضرایب اتلاف مکانیکی و الکتریکی، ω فرکانس زاویهای تحریک و $(-\sqrt{-}) = i$ عدد موهومی یکه هستند. علامت – نشاندهنده مختلط بودن کمیت موردنظر است. به علاوه، کمیتهای ترکیبی به صورت k_{rr} ضریب جفت شدگی پیزوالکتریک، C ظرفیت خازنی وصله پیزوالکتریک، φ مقدار فاز موجود در نصف طول پیزوالکتریک در حالت ارتعاش با فرکانس ω و c سرعت موج قابل تعبیر هستند. با تغییر فرکانس (

(1) در روابط (۱) و (۲) طیفهای امپدانس و ادمیتانس وصله $(f = \omega/\tau\pi)$ پیزوالکتریک قابل محاسبه و ترسیم خواهند بود. با توجه به مختلط بودن Y و Z، اغلب اجزاء حقیقی و موهومی آنها به صورت جداگانه ترسیم و از آنها جهت شناسایی آسیب استفاده می گردد.

استفاده از ویژگیهای مودال طیف ادمیتانس (امپدانس) الکترومکانیکی شامل فرکانس و دامنههای تشدید (پادتشدید) از

¹ Conductance

² Susceptance

³ Resistance

⁴ Reactance

حالت پادتشدید و n تعداد فرکانسهای تشدید (پادتشدید) به دست آمده در بازه فرکانسی مدنظر است. لازم به ذکر است که کمیتهای موردنظر لحاظ شده با شاخص آسیب رایج انتقال به سمت چپ مرتبط هستند. به عنوان مثال، Y_{τ} با میانگین انتقال فرکانسهای قله در جزء حقیقی طیف امپدانس به شکل زیر مرتبط است:

$$DI_{sl} = \frac{1}{n} \sum_{i} \left(f_{antires_0}^{(i)} - f_{antires}^{(i)} \right) =$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i} f_{antires_0}^{(i)} - \frac{1}{n} \sum_{i} f_{antires}^{(i)} = \text{const.} - Y_2$$

$$(\Delta)$$

در رابطه فوق زیروند صفر در $f_{anti-res}^{(i)}$ به فرکانس پادتشدید نظیر در یک حالت مبنا اشاره دارد. علاوه بر فرکانسهای تشدید و پادتشدید، دامنه قلهها در طیفهای امپدانس و ادمیتانس الکترومکانیکی از اهمیت ویژهای در شناسایی شدت آسیب (خصوصاً آسیبهای پیشرونده [۳۶]) برخوردار هستند. جهت تعیین دامنه قلهها، ابتدا طیف امپدانس (متناظرا ادمیتانس) به کمک رابطه (۱) ترسیم و از الگوریتمهای قلهیابی[†] برای تعیین دامنه آنها استفاده شد. مشابه فرکانسهای قله، میانگین دامنه به عنوان کمیت موردنظر لحاظ شد:

$$Y_{j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} A_{j}^{(i)}, \ f_{j}^{(i)} \in [f_{1}, f_{2}]$$
(8)

در رابطه فوق i = i مربوط به جزء حقیقی و j = i مربوط به جزء مقیقی و j = j مربوط به جزء موهومی طیف امپدانس است. به این تر تیب جمع کمیتهای مور دنظر مستخرج از طیفهای امپدانس و ادمیتانس الکترومکانیکی به چهار کمیت شامل میانگین فرکانسهای تشدید Y_1 و پادتشدید Y_2 و میانگین دامنههای قله در اجزاء حقیقی Y_3 و موهومی طیف امپدانس Y_4 رسید.

4 Peak finding

رافسون جهت تعیین تمام ریشهها، نیاز به گسستهسازی دامنه فرکانسی و درنظر گرفتن یک حدس اولیه در تمام آن بازهها است. در نهایت با توجه به این که اغلب رزولوشن گسستهسازی حوزه فرکانسی تحلیل بیشتر از تعداد ریشههای معادله بوده و در نتیجه بسیاری از حدسهای اولیه به ریشههای یکسان همگرا خواهند شد، ریشههای تکراری از آرایه ریشههای محاسبه شده حذف میگردد. ماهیت تکراری روش نیوتن-رافسون و تعداد حدسهای اولیه زیاد موردنیاز جهت تعیین تمام ریشهها در بازه فرکانسی مدنظر، منجر به افزایش زمان تحلیل می گردد. به علاوه، معادله فوق در اطراف ریشههای معادله $\cot(\overline{\varphi}) = \cdot$ (متناظر با فرکانسهای تشدید الکترومکانیکی) تغییر علامت داده و دارای شیب بسیار بزرگ است و این امر منجر به ناکارامدی ترکیب روشهای دونیمسازی^۲ و نیوتن-رافسون جهت شناسایی ریشه در اطراف این نقاط می گردد. رهیافتی مناسبتر جهت تعیین ریشههای معادله (۳) نمایش طیفی آن به کمک چندجملهایهای چبیشف است. با توجه به ماهیت تکهای هموار بودن معادلات مشخصه، ابتدا نقاط ناییوستگی به کمک الگوریتمهای تشخیص لبه ۳ خودکار شناسایی شد [۳۴]. سپس تبدیل چبیشف به بخشهای هموار تابع مورد نظر اعمال شد [۳۵]. در نهایت از روابط تحلیلی موجود جهت محاسبه ریشههای معادله چندجملهای برای محاسبه فرکانس های تشدید و پادتشدید استفاده شد.

در فرایند شناسایی آسیب عموماً از میانگین تغییرات ویژگیهای مودال در یک بازه فرکانسی مشخص $([f_1, f_2])$ جهت کمیسازی شدت آسیب استفاده میشود. در این راستا، میانگین فرکانسهای تشدید (متناظراً پادتشدید) به دست آمده به عنوان کمیت موردنظر لحاظ شد:

$$\overline{\varphi}\cot\left(\overline{\varphi}\right) + \frac{\overline{k}_{31}^2}{1 - \overline{k}_{31}^2} = 0 \tag{(f)}$$

در رابطه فوقj = i مربوط به حالت تشدید، j = j مربوط به

¹ Newton-Raphson

² Bisection

³ Edge-detection

۲- ۲- بسط آشوبناک چندجملهای

طبق رابطه (۱) بردار متغیرهای پاسخ Y را میتوان به صورت تابعی از بردار متغیرهای ورودی X شامل خواص مکانیکی، الکتریکی و هندسه وصله پیزوالکتریک فرض کرد:

$$\mathbf{Y} = \mathcal{M}(\mathbf{X}); \quad \mathbf{X} = (X_1, \dots, X_M)^T \in \mathbb{R}^M$$
(Y)

در این رابطه \mathcal{M} نگاشتی قطعی بین متغیرهای ورودی (X_1, \dots, X_M) و کمیتهای پاسخ موردنظر (\mathbf{Y}) و \mathcal{M} تعداد متغیرهای تصادفی ورودی است. متغیرهای ورودی دارای ماهیت تصادفی و توزیع چگالی احتمال مشخص بوده و از یکدیگر مستقل فرض میشوند. متغیرهای پاسخ خروجی \mathbf{Y} نیز بهواسطه وجود مقادیر مشخصی از منابع عدم قطعیت در متغیرهای ورودی \mathbf{X} دارای ماهیت تصادفی هستند. در صورتی که متغیر پاسخ دارای واریانس محدود باشد، امکان بازسازی آن توسط نمایش طیفی ذیل امکان پذیر است [۳۷]:

$$\mathbf{Y} = \mathcal{M}(\mathbf{X}); \quad \mathbf{X} = (X_1, \dots, X_M)^T \in \mathbb{R}^M$$
(A)

در این رابطه $\hat{\mathbf{Y}}$ یکی از مؤلفههای بردار پاسخ (برای هر یک از مؤلفههای بردار پاسخ این مراحل باید تکرار شود)، Ψ_{j} توابع پایه چندجملهای چندمتغیره و a_{j} ضرایب بردار پاسخ در فضای هیلبرت توابع پایه هستند [۱۹]. به علاوه، $\hat{\mathbf{1}}$ متغیرهای تصادفی کاهشیافته، دارای توزیع چگالی احتمال استاندارد و حاصل از اعمال تبدیل هماحتمالی \mathcal{T} به متغیرهای تصادفی اصلی **X** هستند:

$$\mathbf{X} = \mathcal{T}\left(\boldsymbol{\Xi}\right) \tag{9}$$

در صورت همبسته بودن متغیرهای ورودی، میتوان از تبدیلهایی مانند نتف^۲ [۳۸] یا تبدیل مؤلفههای مستقل [۲۷] استفاده کرد.

پایههای بسط آشوبناک در رابطه (۸) از ضرب تانسوری چندجملهای متعامد یکه تک متغیره (Ξ_i) ساخته می شوند:

$$\Psi_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\Xi}) \coloneqq \prod_{i=1}^{M} \psi_{\alpha_i}(\boldsymbol{\Xi}_i) \tag{(1)}$$

که در آن $(\alpha_{i},...,\alpha_{M}) = \alpha$ یک چنداندیسه مرتب از اعداد حقیقی نامنفی است. چندجملهایهای چندمتغیره $(\hat{\mathbf{I}})_{i}\Psi_{ij}$ بر متعامد یکه هستند. چندجملهایهای تک متغیره $(\Xi_{i})_{\alpha_{i}}$ بر اساس توزیع احتمالهای حاشیهای انتخاب میشوند (پیوست ۵). در مورد متغیرهای با توزیع احتمال استاندارد میتوان از آشوب چندجملهایهای وینر-اسکی استفاده کرد [۱۶]. برای متغیرهای با توزیع غیر استاندارد، روش بسط آشوبناک چندجملهای با توزیع دلخواه قابل پیادهسازی است [۱۷ و ۱۸].

در صورت ادامه جملات بسط آشوبناک چندجملهای تا بینهایت در رابطه (۸) مدل جایگزین به طور دقیق به تابع پاسخ میل خواهد کرد. هرچند در عمل تنها محاسبه تعداد محدودی از جملهها امکانپذیر بوده و ناگزیر از روشهای برش استفاده میشود. برش هایپربولیک کلی ترین حالت برش مجموعه چنداندیسهها بوده که بیان ریاضی آن عبارت است از [۳۹]:

$$\mathcal{A}^{M,p,q} = \left\{ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_{0}^{M} : \quad \left\| \boldsymbol{\alpha} \right\|_{q} \triangleq \left(\sum_{i=1}^{M} \alpha_{i}^{q} \right)^{1/q} \leq p \right\}$$
(11)

در این رابطه $\| \alpha \|_{q}$ نرم $p(1 \ge q < 0)$ چنداندیسه مرتب α است. بیان رابطه فوق عبارت از انتخاب چنداندیسه هایی با شبه نرم p کمتر یا مساوی q از مجموعه بینهایت چنداندیسه M تایی است. انتخاب q = 1 در این رابطه به طرح برش استاندارد موسوم است. در این طرح تعداد پایه ها و در نتیجه تعداد متغیرهای مجهول عبارت است از [47]:

¹ Isoprobabalistic

² Nataf

$$P = \operatorname{card} \mathcal{A} = \binom{M+p}{p} = \frac{(M+p)!}{M!p!}$$
(17)

در عمل جهت اجتناب از بدوضع شدن دستگاه معادلات خطی و مشکلات عددی، تعداد معلومات باید حدوداً دو تا سه برابر P باشد [۴1]. کاهش p منجر به کاهش جملات مرتبه بالا و جملات تعاملی در بسط آشوبناک و در نتیجه تعداد مجهولات می گردد. این موضوع خصوصاً در مسائل با تعداد متغیرهای ورودی زیاد از بار محاسباتی تعیین ضرایب می کاهد [۳۹].

جهت محاسبه ضرایب در بسط آشوبناک رابطه (۸) به شیوه غیرمزاحم^۱، میتوان از ایده رگرسیون استفاده کرد [۲۰]. در این روش ضرایب به گونهای محاسبه میشوند تا میانگین مربعات خطا بین خروجیهای مدل اصلی و مدل جایگزین کمینه گردد:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{\operatorname{cord}_{\mathcal{A}}}} \mathbb{E}\left[\left(\mathcal{M}(\boldsymbol{\Xi}) - \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}} \beta_{\boldsymbol{\alpha}} \Psi_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\Xi}) \right)^{2} \right] \quad (1\%)$$

به منظور ارزیابی عملکرد روش ارائه شده، تعیین دقت مدل تقریبی بسط آشوبناک چندجملهای در تخمین پاسخ مدل اصلی ضروری است. استفاده از شیوه اعتبارسنجی متقابل جهت خطای تخمین، از احتمال بیش برازش مدل جایگزین را میکاهد [۲۲]. با انجام برخی محاسبات جبری میتوان نشان داد خطای تخمین یک داده به کنار ^۲ تنها از روی یک مدل بسط آشوبناک چندجملهایها که توسط تمامی نقاط مجموعه طراحی آزمایش ${n \choose i} = \mathcal{V}$ تعلیم داده شده است، به شکل ذیل قابل محاسبه است [۴۱]:

$$E_{nLOO} = T(n,p) \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\mathcal{M}\left(\boldsymbol{\xi}^{(i)}\right) - \hat{\mathcal{M}}\left(\boldsymbol{\xi}^{(i)}\right)}{1 - d_{i}} \right)^{2}, \quad \boldsymbol{\xi}^{(i)} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$$

$$T(n,p) = \frac{n}{n - P} \left(1 + \frac{1}{n} tr\left(\mathbf{C}_{emp}^{-1}\right) \right)$$
(14)

1 Non-intrusive

2 Leave-One-Out (LOO) error

در این رابطه d_i مؤلفه iام از قطر اصلی ماتریس T(n,p) در این رابطه $\mathbf{I}_n - \Psi (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T$ موسوم به ماتریس تصویر، $\mathbf{I}_n - \Psi (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T$ ضریب تصحیح مربوط به تعداد نقاط محدود جهت تخمین خطا 17 , 17 نشان دهنده $\mathbf{C}_{emp} = \Psi^T \Psi$ ماتریس همبستگی عملی پایهها و () tr نشان دهنده رد⁷ ماتریس است. در عمل خطای یک داده به کنار اصلاح شده توسط واریانس تجربی مقادیر پاسخ بی بعد شده می شود: \mathcal{E}_{mLOO} و ضریب تعیین 17 از روی خطای بی بعد محاسبه می شود:

$$\varepsilon_{mLOO} = \frac{E_{mLOO}}{\hat{\mathbb{V}}[\mathcal{Y}]}; \quad \hat{\mathbb{V}}[\mathcal{Y}] = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (y_i - \overline{\mathcal{Y}})^2; \quad \overline{\mathcal{Y}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i \quad (\lambda \Delta)$$

$$R^2 \triangleq 1 - \varepsilon_{mLOO} \tag{18}$$

۲-۳- محاسبه تحلیلی مشخصههای آماری و تخمین توزیع احتمال کمیتهای موردنظر

در صورت در دسترس بودن بسط آشوبناک چندجملهای کمیتهای موردنظر، تخمین توزیع احتمال و آمارگان احتمالاتی با هزینه محاسباتی بسیار کم ممکن خواهد بود. باتوجه به خاصیت تعامد پایهها در بسط (Λ) مقدار میانگین و واریانس \hat{Y} از روابط ذیل قابل محاسبه هستند ¹³:</sup>

$$\mu_{\bar{Y}} = \mathbb{E}\Big[\hat{Y}\Big] = \mathbb{E}\Big[\sum_{a \in \mathcal{A}} \hat{\beta}_{a} \Psi_{a}(\Xi)\Big] = \hat{\beta}_{0} \tag{1V}$$

$$\sigma_{\hat{Y}}^{2} = \mathbb{E}\left[\left(\hat{Y} - \mu_{\hat{Y}}\right)^{2}\right] = \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A} \\ \boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}}} \hat{\beta}_{\boldsymbol{\alpha}}^{2}$$
(1A)

جهت تخمین توزیع احتمال \hat{Y} ابتدا متغیر پاسخ در مجموعه نقاط نمونهبرداری شده به شیوه مونت کارلو از متغیرهای ورودی ارزیابی شده و هیستو گرام نتایج ترسیم می شود. در صورتی که توزیع

3 Trace

هیستوگرام نتایج به توابع توزیع چگالی احتمال استاندارد نزدیک باشد، می توان از روش پارامتریک برای تخمین تابع چگالی احتمال استفاده کرد. در این شیوه پارامترهای توزیع چگالی احتمال موردنظر از روش تخمین به شیوه راستی نمایی بیشینه ^۱ قابل محاسبه هستند. از طرفی اگر هیستوگرام نتایج دارای ماهیت چندموده بوده و قابل تخمین با توابع چگالی احتمال استاندارد نباشد، از روش غیرپارامتریک و از تابع هسته هموارساز برای تخمین توزیع چگالی احتمال استفاده می شود^{۴۴}:

$$\hat{f}_{\hat{Y}}(y) = \frac{1}{n_{\text{MCS}}h} \sum_{i=1}^{n_{\text{MCS}}} k\left(\frac{y - \hat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_i)}{h}\right)$$
(19)

در این رابطه k یک تابع نامنفی و دارای انتگرال برابر ۱ موسوم به تابع هسته، h پارامتر هموارساز موسوم به پهنای باند پنجره پارزن^۲ و n_{MCS} تعداد نقاط نمونهبرداری شده (\mathbf{x}_i) از فضای احتمال ورودی (حدوداً ۲۰۵۰) است.

Y - Y - Y - T تحلیل حساسیت سراسری کمیتهای موردنظر به متغیرهای ورودی در تحلیل حساسیت سراسری تأثیر تغییرات انفرادی و وابسته متغیرهای ورودی بهازای هر نگاشت ممکن حاصل از $\mathcal{M}(\mathbf{X})$ بر متغیر پاسخ کمیسازی میشود. روش تحلیل واریانس از جمله اصلیترین ابزارهای تحلیل حساسیت سراسری است. اساس این روش بر پایه تجزیه واریانس متغیر پاسخ و تعیین سهم جداگانه و تعاملی هر یک از متغیرها در واریانس کل است:

$$\mathbb{V}[Y] = \mathbb{V}\left[\mathcal{M}(\Xi)\right] = \mathbb{V}\left[\sum_{\substack{\mathbf{u} \subset \{1,\dots,M\}\\ \mathbf{u}\neq\emptyset}} \mathcal{M}_{\mathbf{u}}(\Xi_{\mathbf{u}})\right] = \sum_{\substack{\mathbf{u} \subset \{1,\dots,M\}\\ \mathbf{u}\neq\emptyset}} \mathbb{V}\left[\mathcal{M}_{\mathbf{u}}(\Xi_{\mathbf{u}})\right] \quad (\Upsilon \bullet)$$

در این رابطه $\mathcal{M}_{u}(\Xi_{u})$ توابع سبل حاصل از تجزیه تابع $\mathbf{u} = \{i_{1},...,i_{s}\}, \ 1 \le s \le M$ ، $\mathcal{M}(\mathbf{\hat{I}})$ محاسباتی اصلی از اندیسها و Ξ_{u} زیربرداری از Ξ و شامل متغیرهای

تصادفی حاضر در مجموعه اندیسها **u** است. شاخصهای حساسیت سبل بهصورت نسبت واریانسهای جزئی به واریانس کل تعریف میشوند. بهعنوانمثال، شاخص سبل مرتبه اول و شاخص سبل کل که از اهمیت بیشتری در کاربردهای عملی برخوردار هستند، برای متغیر تصادفی *آ*ام بهصورت ذیل تعریف میشوند:

$$S_{i} = \frac{\mathbb{V}\left[\mathcal{M}_{i}(\Xi_{i})\right]}{\mathbb{V}\left[\mathcal{M}(\Xi)\right]}$$
(71)

$$S_{i}^{T} = 1 - \frac{\mathbb{V}\left[\mathcal{M}_{i}\left(\Xi_{i}\right)\right]}{\mathbb{V}\left[\mathcal{M}(\Xi)\right]}; \quad \Xi_{i} = \left\{\Xi_{1}, \dots, \Xi_{i-1}, \Xi_{i+1}, \dots, \Xi_{M}\right\}$$
(YY)

که در آن $\mathbf{i} = \mathbf{E}$ زیربرداری از \mathbf{E} شامل تمام متغیرهای تصادفی به جز \mathbf{E}_i است. S_i نماینده تأثیر جداگانه متغیر \mathbf{E}_i بر واریانس پاسخ و T_i^T نماینده تأثیر جداگانه و تعاملی \mathbf{E}_i در واریانس پاسخ هستند. در عمل شاخصهای سبل که شامل انتگرالهای شرطی چندگانه هستند، به روش مونتکارلو محاسبه میشوند [۴۵ و ۴۶]. هرچند هزینه محاسباتی این روش خصوصاً در مسائل با ابعاد احتمالاتی ورودی بزرگ، بسیار زیاد خواهد بود. این در حالی است که در صورت در دسترس بودن مدل بسط آشوبناک چندجملهای متغیر پاسخ، محاسبه شاخصهای سبل به تنها پسپردازش ضرایب بسط تقلیل

$$\hat{S}_{i} = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}_{i}} \alpha_{\boldsymbol{\alpha}}^{2} / \sigma_{\hat{Y}}^{2} \qquad \mathcal{A}_{i} = \left\{ \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A} : \alpha_{i} > 0, \alpha_{j \neq i} = 0 \right\}$$
(YY)

$$\hat{S}_{i}^{\mathrm{T}} = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}_{i}^{\mathrm{T}}} a_{\boldsymbol{\alpha}}^{2} / \sigma_{\hat{Y}}^{2} \qquad \mathcal{A}_{i}^{\mathrm{T}} = \left\{ \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A} : \alpha_{i} > 0 \right\}$$
(Yf)

¹ Maximum Liklihood Estimation (MLE)

² Parzen

جدول ۱. خواص مکانیکی، الکتریکی و الکترومکانیکی نامی وصله پیزوالکتریک مدلسازی شده

 Table 1. The nominal mechanical, electrical, and electromechanical properties of the modeled piezoelectric patch

δ	η	$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathtt{rr}}^{T}$	d_{r_1}	ρ	S_{11}^E	خاصيت
• / •)	•/• \	$1V\Delta \cdot \times \Lambda / \Lambda F \times 1 \cdot^{-17}$	$1 V \Delta \times 1 \cdot^{-17}$	٧٧	$1/\Delta T \times 1 \cdot^{-11}$	APC850
[_]	[_]	[F.m ⁻)]	$[m.V^{-1}]$	[kg.m ⁻ "]	[Pa ⁻ ']	واحد

جدول ۲. صحت سنجی فرکانسهای تشدید نامی با نتایج تجربی[۳۲]

Table 2. Validation of nominal resonance frequencies using refrence [33] experiment results

[Hz]	ر ار تعاشات طولی			
1498	1.7	۵۹۷۰۰۰	717	نتايج تجربي
1407209	1.41911	820182/6	2.7446/1	نتایج تئوری ارائه شده
7/49	$-\Upsilon/1\Delta$	-۴/۷۲	١/٧٠	درصد خطا [٪]

۳- نتایج و بحث

در این بخش، پس از ارائه نتایج مربوط به مدل نامی وصله پیزوالکتریک و صحتسنجی آنها با نتایج مربوط به تحلیل احتمالاتی و بهویژه توزیع احتمال کمیتهای پاسخ موردنظر، نتایج تحلیل حساسیت ارائه و مورد بحث قرار خواهد گرفت. در ادامه به کمک مدل جایگزین توسعه داده شده، تحلیل همبستگی به شیوه هر بار یک عامل انجام شده و نحوه تغییرات ویژگیهای مودال طیف امپدانس (ادمیتانس) با تغییر متغیرهای تصادفی به طور جداگانه بررسی خواهد شد.

۳- ۱- تحلیل نامی ویژگیهای مودال وصله پیزوالکتریک

در جدول ۱ خواص نامی مربوط به پیزوالکتریک مدل سازی شده ارائه شده است. اجزاء حقیقی و موهومی طیف امپدانس (ادمیتانس) شبیه سازی شده به کمک رابطه (۱) در شکل ۲ ارائه شده است. فرکانس های تشدید و پادتشدید محاسبه شده به ترتیب در نمودار مربوط به جزء موهومی طیف ادمیتانس (دایره سبز) و جزء

موهومی طیف امپدانس (دایره زرد) علامت گذاری شدهاند. در این شکل همچنین قلههای شناسایی شده توسط الگوریتمهای قلهیابی علامت گذاری شدهاند (مثلث قرمز). در جدول ۲ مقادیر فرکانسهای تشدید در ارتعاشات طولی وصله پیزوالکتریک با مقادیر ارائه شده در مرجع [۳۲] مقایسه شده است. اختلاف کمتر از ۵ درصد مابین نتایج تئوری و تجربی بر دقت مناسب مدل استفاده شده تأکید دارد.

شکل مود و ترازه جابهجایی مربوط به فرکانسهای تشدید و پادتشدید محاسبه و علامتگذاری شده با دایرههای سبز و زرد در شکل ۲، برای وصله موردنظر در شکل ۳ و شکل ۴ ترسیم شده است. طبق نتایج، شکل مود در حالت تشدید کاملاً پادمتقارن و مقادیر جابجایی بسیار بزرگ و تحت کنترل مقدار η (جدول ۱) است. در فرکانسهای پادتشدید نیز ترازه جابجایی تقریباً پادمتقارن بوده، هرچند مطابق انتظار مقادیر بسیار کوچک جابجایی در ترازههای ترسیم شده نشان از تقریباً ایستا بودن وصله پیزوالکتریک در این فرکانسها دارد.

¹ Nominal



شکل ۲. اجزاء حقیقی و موهومی طیفهای ادمیتانس (رسانایی و پذیرندگی) و امپدانس (مقاومت و واکنایی) الکترومکانیکی وصله پیزوالکتریک مستطیلی با هندسه و خواص نامی

Fig. 2. Real and imaginary parts of the electromechanical admittance and impedance spectra of the rectangular piezoelectric patch obtained using the nominal geometry and material properties



Fig. 3. The E/M resonance mode shapes of the nominal rectangular PZT patch



شکل ۴. کانتور جابجایی در حالت پادتشدید الکترومکانیکی وصله پیزوالکتریک مستطیلی نامی Fig. 4. The E/M mode-resonance mode shapes of the nominal rectangular PZT patch

 (δ) tan (δ) از سوی شرکت سازنده ارائه میشوند. پیچیدگی و منابع عدم اطمینان متعدد در روشهای اندازه گیری این پارمترها، منجر به مقادیر تلورانس بزرگ در اندازه آنها میشود. در این تحقیق، مقادیر η و δ در تحلیل احتمالاتی بین ۲۰/۱ تا ۲۰/۵ لحاظ شد [۳۲]. از روش ابرمکعب لاتین [۴۹] برای نمونهبرداری از فضای از روش ابرمکعب لاتین آمه شده در جدول η و آمادهسازی ماتریس طراحی استفاده شد. از معیار کمینه بیشنه^۲ فاصله اقلیدسی ماتریس نقاط نمونه جهت پوشش بهینه فضای ورودی استفاده شد [۴۸]. بین نقاط نمونه جهت پوشش بهینه فضای ورودی استفاده شد [۴۸]. شد. نمونهبرداری به این شیوه منجر به افزایش نرخ همگرایی نتایج در شبیهسازی مونتکارلو و بسط آشوبناک چندجملهای میشود [۴۶]. تعداد نقاط نمونهبرداری شده برای تحلیل بسط آشوبناک چندجملهای ای میشود از ۲۶]. -7 - 7 - 7 - 7 تحلیل احتمالاتی ویژگیهای مودال وصله پیزوالکتریک خواص نامی ارائه شده در جدول ۲ که عموماً از کاتالوگ ماده پیزوالکتریک موردنظر استخراج می گردند، دارای مقادیر مشخصی از عدم قطعیت هستند. این مقادیر اغلب به صورت تلورانس برای خواص می شوند. به منظور لحاظ کردن منابع عدم قطعیت در متغیرهای ورودی، توابع توزیع چگالی احتمال یکنواخت در محدوده تلورانس می ورودی، توابع توزیع چگالی احتمال یکنواخت در محدوده تلورانس مارائه شده ارائه شده به مورت تلورانس برای خواص می شوند. به منظور لحاظ کردن منابع عدم قطعیت در متغیرهای ورودی، توابع توزیع چگالی احتمال یکنواخت در محدوده تلورانس می شوند. به آنها تخصیص داده شد. فضای احتمالاتی متغیرهای شده به آنها به همراه پارامترهای توزیع در جدول ۳ ارائه شده است معده به آنها به همراه پارامترهای توزیع در جدول ۳ ارائه شده است به نحوه برش وصله وابسته بوده، هرچند در اکثر کاربردها خصوصا به نحوه برش وصله وابسته بوده، هرچند در اکثر کاربردها خصوصا برش توسط دستگاه، میزان تلورانس آن کمتر از ۲ درصد خواهد به نحوه می مقادیر میراییهای مکانیکی η و الکتریکی δ اغلب به صورت عامل کیفیت مکانیکی η و عامل میرایی الکتریکی ای به صورت عامل کیفیت مکانیکی m و عامل میرایی الکتریکی ای به صورت عامل کیفیت مکانیکی m و عامل میرایی الکتریکی ای به صورت عامل کیفیت مکانیکی m و عامل میرایی الکتریکی ای به صورت عامل کیفیت مکانیکی m

¹ Latin Hypercube

² Minimax

واحد	ضريب	رهای	پارامت	تلور انس	نوع	نماد	متغب تصادفي	
1	تغييرات	توزيع		0 77	توزيع	-		
[mm]	/ N I ·/	۶/۹۳	a_1	1 1/	$\mathcal{U}(a, b)$	X,	(l) $ _{l}$	
[11111]	•/WA /.	¥/•¥	b_{1}	1 /.	$\mathcal{U}(a,b)$		طول (_p)	
$[\mathbf{p}_{\mathbf{q}}^{-1}]$	A/NN */	1/ TA×1.''	a_r	\. '/	$\mathcal{U}(a b)$	X,	(\mathbf{s}^E) .	
	ω/ γ γ /.	1/8A×111	b_{r}	· /·	$\mathcal{U}(u, b)$		ترمی (s ₁₁)	
[lea m ^{-r}]	A /M/ ·/	۶۹۳۰	a_r	\. '/	$\mathcal{U}(a,b)$	X _r	چگالی (م)	
[Kg.m]	ω/ΥΥ /.	761.	b_r	1 * 7.				
[r -)]		۱/ ۲۴×۱۰ ^{-۸}	a_{ϵ}	۲۰ ٪.	$\mathcal{U}(a,b)$	X,	ضريب گذردهي	
[F.m]	11/ωω /.	۱/ KF×۱・ ^{-۸}	b_{ϵ}				(\mathcal{E}_{rr}^{T}) الکتریکی	
$\begin{bmatrix} m V^{-1} \end{bmatrix}$	\ \ \ \ \ \ \ \ \ \	14.×111	$a_{\scriptscriptstyle a}$	۲. ٪	$\mathcal{U}(a,b)$	X _۵	ثابت پيزوالكتريك	
[111. V]	11/ωω /.	۲۱·×۱· ^{-۱۲}	$b_{\scriptscriptstyle \Delta}$	1 - 7.			(d_{r_1})	
[]	wi/sea ·/	• / • ١	a_{ς}		$\mathcal{U}(a, b)$	X,	ضريب اتلاف	
[-]	۲۸/۲۹ /.	•/•۵	b_{ς}	_	$\mathcal{U}(a,b)$		$(\eta$) مکانیکی (
[]	wijea -/	• / • \	$a_{_{Y}}$		$\mathcal{U}(a,b)$	V	ضريب اتلاف	
[-]	۳۸/۴۹ ٪.	•/•۵	$b_{_{Y}}$	-		Λ _γ	$(\delta$) مکانیکی	

جدول ۳. فضای احتمالاتی متغیرهای تصادفی ورودی در مدل پیش بینی طیف امپدانس الکترومکانیکی وصله پیزوالکتریک

Table 3. Input Probability space in the prediction of the EMI spectrum of the piezoelectric patch

جهت استانداردسازی توابع توزیع احتمال ورودی، از تبدیل هماحتمالاتی ذیل جهت نگاشت متغیرهای تصادفی (همچنین نقاط نمونهبرداری شده از فضای احتمالاتی اصلی) به متغیرهای تصادفی استاندارد (همچنین نقاط نمونهبرداری شده از فضای احتمالاتی استاندارد) استفاده شد (رابطه (۹)):

$$\mathbf{\Xi}_{i} = \frac{2}{b_{i} - a_{i}} \left(\mathbf{X}_{i} - \frac{a_{i} + b_{i}}{2} \right), \quad i \in \{1, \dots, 7\}$$

$$(\texttt{YD})$$

پس از محاسبه کمیتهای پاسخ در نقاط نمونهبرداری شده

توسط روابط (۱) تا (۳)، ضرایب مدل بسط آشوبناک چندجملهایها توسط رابطه رابطه (۱۳) برای هر یک از چهار کمیت موردنظر محاسبه شد. درجه بیشینه چندجملهایها q و شبه نرم p به صورت تطبیقی محاسبه شدند. در این شیوه بهجای محدودکردن q و p به اعدادی مشخص، محدودهای برای آنها تعیین شده و مدلهای بسط آشوبناک چندجملهایها بهازای تمام مقادیر در محدوده موردنظر محاسبه می شوند. در نهایت، از بین مدلهای بسط آشوبناک چندجملهایها بدست آمده، مدل با کمترین خطای تخمین \mathcal{F}_{mLOO} (رابطه (۱۵)) به عنوان مدل جایگزین نهایی معرفی می شود. جزئیات مربوط به مدلهای جایگزین بدست آمده به همراه خطای تقریب، کیفیت برازش و مقادیر میانگین برای هر یک از مقادیر پاسخ جدول ۴. مشخصات، میزان خطای تقریب و کیفیت برازش مدلهای بسط آشوبناک چندجملهایها بدست آمده برای کمیتهای موردنظر

دامنه متوسط طیف واکنایی	دامنه متوسط طيف مقاومت	فرکانس پادتشدید	فرکانس تشدید	كميت مورد نظر
٨	٨	٨	٨	بیشینه درجه چندجملهای تک متغیره (p)
• /Y	• /٩	• /٨	• / ٨	نرم q
۷۳۶	2021	171.	181.	تعداد كل پايەھا
•/••٧٩٨۴	۲/۲۱×۱۰ ⁻⁺	۴/•۲×۱• ^{-۱۷}	$f / \cdots \times 1 \cdot ^{-1}$	خطای یکی را کنار بگذار $\left(arepsilon_{mLOO} ight)$ اصلاح و نرمال شده
99/70187	१९/१९१४	١٠٠	۱	$\left[ilde{\mathcal{A}} ight] \left(Q^{^{\mathrm{r}}} ight) \left[ilde{\mathcal{A}} ight] \left[ilde{\mathcal{A}} ight] $

Table 4. Specifications, prediction error and goodness of fit of the obtained PCE models for the quantities of interest



شکل ۵. طیف ضرایب چندجملهایهای چندمتغیره در مدلهای جایگزین مربوط به کمیت موردنظر نسبت به اندیس پایه موردنظر الف) فرکانس تشدید؛ ب) دامنه متوسط طیف واکنایی

Fig. 5. The spectrum of multivariable polynomial coefficients in PCE-derived surrogate models versus basis indices for a) resonance frequency; b) reactance spectrum mean amplitude

موارد، نشان از قابلیت اطمینان مدل های جایگزین بدست آمده در ضرایب پایه ها در مدل های بسط آشوبناک چندجمله ای ها منتخب در تخمین کمیت های موردنظر و امکان به کار گیری آن ها در تحلیل های

موردنظر در در جدول ۴ ارائه شده است. همچنین، طیف مربوط به شکل ۵ ارائه شده است. کیفیت برازش بیش از ۹۹ درصد در همه احتمالاتی بعدی و همچنین تحلیل حساسیت دارد.



شکل ۶. ارزیابی مدلهای جایگزین بدست آمده برای کمیت موردنظر الف) فرکانس پادتشدید (ب) دامنه متوسط در طیف واکنایی؛ از طریق مقایسه مقادیر حاصل از مدل اصلی (محور افقی) و مدل جایگزین (محور قائم)



جهت ارزیابی بصری کیفیت تخمین مدلهای بسط آشوبناک چندجملهایها، مقادیر پاسخ بدست آمده از مدل اصلی در نقاط نمونهبرداری شده نسبت به مقادیر تخمین زده شده توسط مدل بسط آشوبناک چندجملهایها در همان نقاط ترسیم شدند (شکل ۱). تجمع نقاط پراکنش در تمامی موارد به خط x = y نشان از دقت مناسب مدلهای جایگزین در تقریب مدلهای اصلی دارد. علی رغم مناسب مدلهای جایگزین در مورد مدلهای جایگزین مربوط به فرکانس تشدید و دامنه طیف مقاومت (تجمع تمامی نقاط روی خط x = yاطمینان از عدم بیشبرازش آنها به واسطه استفاده از خطای \mathcal{E}_{mLOO} وجود دارد. این موضوع در ارتباط با پیش بینی نقاط دیده نشده در حین تعلیم مدلهای جایگزین حائز اهمیت است.

باتوجهبه اینکه، ضرایب بسط آشوبناک از روش کمینه مربعات معمولی محاسبه شدهاند در صورتی که ماتریس اطلاعات خوش وضع باشد، تخمین مدلهای جایگزین از مدلهای اصلی غیر اریب^۱ خواهد بود. جهت حصول اطمینان از غیر اریب بودن تخمین، خطای تخمین در نقاط نمونهبرداری شده ترسیم و توابع توزیع احتمال نرمال به شیوه پارامتری به آنها برازش شد (شکل ۷). مطابقت مقادیر خطا از توزیع نرمال با میانگین صفر در تمامی موارد، نشان از غیراریب بودن توابع جایگزین بدست آمده دارد.

توزيع احتمال كميتهاى پاسخ مورد نظر در اثر تغييرات متغیرهای ورودی در شکل ۸ ترسیم شده است. در هر مورد ابتدا مقادیر پاسخ در ۱۰^۵ نقطه نمونهبرداری شده به روش مونتکارلو توسط مدلهای جایگزین محاسبه و هیستوگرام نتایج ترسیم شد. سپس توابع توزیع چگالی احتمال به شیوه پارامتریک (در صورت شباهت هیستوگرام توزیع نتایج به توابع توزیع احتمال کلاسیک) یا غیرپارامتریک (رابطه (۱۹)) به نتایج برازش شد. در هر مورد مقدار میانگین و ضریب تغییرات در شکل ذکر شده است. مقادیر به نسبت بزرگ ضریب تغییرات در مورد دامنه اجزاء حقیقی (٪۵۰/۷۰) و موهومی (٪۴۶/۷۳) طیف امپدانس، نشان از تأثیرپذیری بیشتر این كميتها از مقادير عدم اطمينان كميتهاى ورودى دارد. همين امر اغلب صحتسنجى مقادير دامنه قلهها و شيب نمودار با نتايج تجربی را دشوار می کند. این در حالی است که ضریب تغییرات برای فرکانس های مودال طیف امپدانس به نسبت دامنه کمتر بوده (٪۴/۲۰) که نشان از قابلیت اطمینان بیشتر مدلهای تخمین امیدانس برای این کمیتها دارد. تحلیل حساسیت سراسری بهمنظور رتبهبندی تأثیر پارامترهای ورودی بر واریانس مقادیر پاسخ و ارائه مسیر مناسب جهت تغییر پارامترها در روشهای بهروزرسانی مدل انجام گرفت که در ادامه به نتایج آن اشاره خواهد شد.

¹ Unbiased



شکل ۷. توزیع احتمال خطای مدل جایگزین تخصیص داده شده به کمیت موردنظر الف) فرکانس پادتشدید؛ (ب) دامنه متوسط طیف واکنایی؛ در تخمین پاسخ مدل اصلی (در هر مورد توزیع نرمال برازش شده به همراه پارامترهای آن آورده شده است)

Fig. 7. The error probability distribution of the PCE-derived surrogate models in estimating the response of the original model: a) anti-resonance frequency (b) mean amplitude of the reactance spectrum; (in each case, the fitted normal distribution and its parameters are given)

۳-۳-تحلیل حساسیت سراسری ویژگیهای مودال طیف امپدانس الکترومکانیکی

در شکل ۹ نتایج تحلیل حساسیت حاصل از پسپردازش ضرایب بسط آشوبناک چندجملهای (روابط (۳۲) و (۴۲)) و همچنین روش مونتکارلو مورد مقایسه قرار گرفته است. تطابق موجود مابین مقادیر شاخصهای سبل مرتبه اول و کل حاصل از مدلهای آشوبناک چندجملهای با نتایج روش مونتکارلو طبقهبندی شده نشان از دقت مدلهای جایگزین در تخمین شاخصهای حساسیت دارد. نتایج مربوط به روش مونتکارلو توسط پاسخهای خروجی در ۹۰ هزار نمونه محاسبه و تحلیل همگرایی برای آنها انجام گرفت. این در حالی است که نتایج مربوط به بسط آشوبناک چندجملهای تنها با ۱۲۸۷۰ ارجاع به مدل اصلی بدست آمدهاند. این موضوع بر نقش مدلهای جایگزین مبتنی بر بسط آشوبناک چندجملهای در کاهش هزینه محاسباتی با هزینه محاسباتی بالا تاکید دارد. لازم به ذکر است در برخی موارد دقت شاخصهای محاسبه شده به کمک مدل بسط آشوبناک از نتایج روش مونتکارلو نیز بیشتر است [۱۴].

شاخصهای حساسیت سبل مرتبه اول و کلی برای کمیتهای

پاسخ موردنظر در شکل ۱۰ نشان داده شدهاند. طبق نتایج، کمیتهای فرکانس تشدید و پادتشدید بیشترین حساسیت را به خواص مکانیکی وصله پیزوالکتریک اعم از پارامترهای مدول نرمی و چگالی دارند. از طرفی، وابستگی این کمیتها به خواص الکتریکی، الکترومکانیکی و میرایی وصله پیزوالکتریک بسیار ناچیز است. در نتیجه، در تحلیلهای میرایی وصله پیزوالکتریک بسیار ناچیز است. در نتیجه، در تحلیلهای بهروزرسانی مدل با تابع هدف فرکانسهای قله در طیف امپدانس (ادمیتانس) میتوان پارامترهای \mathcal{T}_{rr}^{T} ، \mathcal{I}_{rn} و δ را در مقدار نامی آنها ثابت در نظر گرفت و تنها با تغییر \mathcal{I}_{ris}^{T} و β سعی در کمینه سازی تابع خطا داشت. نزدیکی نتایج مربوط به شاخصهای سبل مرتبه اول به شاخصهای سبل کل، نشان از تأثیر ناچیز عوامل

از طرفی، تغییرات در کمیتهای دامنه میانگین در طیفهای مربوط به اجزاء حقیقی و موهومی امپدانس الکترومکانیکی، بیشترین تأثیر را به ترتیب از استهلاک مکانیکی، ضریب گذردهی الکتریکی، و ثابت پیزوالکتریک میپذیرند. بهاینترتیب، در تحلیلهای احتمالاتی مربوط به دامنه طیف امپدانس میتوان سایر کمیتها به جز سه کمیت فوق را قطعی فرض کرد. این امر موجب کاهش چشم گیر ابعاد فضای احتمالاتی و در نتیجه حجم محاسبات خواهد شد.



شکل ۸. توزیع احتمال کمیتهای پاسخ ناشی از ماهیت احتمالاتی متغیرهای تصادفی ورودی الف) فرکانس تشدید؛ ب) فرکانس پادتشدید؛ (ج) دامنه متوسط طیف مقاومت؛ (د) دامنه متوسط طیف واکنایی؛ (در هر مورد تابع توزیع احتمال برازش شده نیز ترسیم و میانگین، انحراف از معیار و ضریب تغییرات پاسخ احتمالاتی نیز ذکر شده است)

Fig. 8. The probability distribution of response quantities due to the probabilistic nature of input random variables a) resonant frequency; b) anti-resonant frequency; c) resistance spectrum mean amplitude; d) reactance spectrum mean amplitude (The fitted probability distribution function is also plotted in each case, along with annotations of the response's mean, standard deviation, and coefficient of variation



شکل ۹. مقایسه شاخصهای حساسیت سبل مرتبه اول و کلی محاسبه شده به کمک مدلهای جایگزین حاصل از اعمال روش بسط آشوبناک چندجملهای برای الف) و ب) فرکانس تشدید؛ ج) و د) دامنه متوسط طیف مقاومت؛ با نتایج حاصل از روش مونت کارلو طبقهبندی شده

Fig. 9. Comparison of the results from the stratified Monte Carlo method and the first-order and total Sobol' sensitivity indices calculated using the PCE generated surrogate models for (a) and (b) resonance frequency; (c) and (d) the resistance spectrum mean amplitude



شکل ۱۰. شاخصهای حساسیت سبل به متغیرهای تصادفی (الف) مرتبه اول (ب) کل



نتایج عددی مربوط به شاخصهای سبل مرتبه اول و شاخصهای سبل کل برای کمیتهای فرکانس تشدید و پادتشدید در جدول ۵ و برای کمیتهای میانگین دامنه طیف امپدانس در جدول ۶ ارائه شده است. استفاده از مقادیر ارائه شده در این جداول در حین فرمولاسیون تابع هزینه مورد استفاده در روشهای بهروزرسانی مدل، علاوه بر افزایش دقت نتایج تخمین پارامتر، مسیر محاسبه مقدار دقیق پارامترها را بسیار کوتاه خواهد کرد.

۳- ۴- تحلیل همبستگی بین ویژگیهای مودال وصله پیزوالکتریک و پارامترهای ورودی

وجود شمایی از نحوه تغییرات ویژگیهای مودال طیف امپدانس با افزایش یا کاهش متغیرهای ورودی اطلاعات ارزشمندی را در ارتباط پاسخ ارتعاشاتی کوپل الکترومکانیکی وصله پیزوالکتریک فراهم میآورد. این اطلاعات نهتنها در هنگام صحتسنجی مدلهای عددی ارزشمند هستند، بلکه در هنگام انجام آزمایشهای غربالگری^۱ وصلهها که عموماً قبل از انجام آزمونهای تجربی انجام میگیرند، مفید خواهند بود [۳۲]. دستیابی به چنین نتایجی توسط آزمونهای تجربی غیرممکن است؛ زیرا امکان تغییر پارامترها و انجام آزمون

تجربی به ازای همه مقادیر ورودی ممکن نیست. از طرفی، هزینه محاسباتی زیاد مدلهای تخمین طیف امپدانس، انجام چنین تحلیلهایی را حتی بهصورت عددی نیز بسیار دشوار می کند. این در حالی است که در صورت جایگزینی مدلهای محاسبه طیف امپدانس با مدلهای جایگزین مبتنی بر بسط آشوبناک چندجملهای، این امر با کمترین هزینه محاسباتی میسر خواهد بود.

در این تحقیق جهت تحلیل همبستگی کمیتهای موردنظر با متغیرهای ورودی از روش هر بار یک عامل^۲ استفاده شد [۵۱]. به طور دقیق، در هر سری از تحلیلها، مقادیر همه متغیرها در ماتریس طراحی به جز یکی در مقدار نامی ثابت نگه داشته شد و مقادیر پارامتر متغیر در ۱۰۰۰ نقطه نمونهبرداری شد. سپس طیف امپدانس (ادمیتانس) و ویژگیهای مودال آن در تمام نقاط نمونهبرداری شده محاسبه شد. نتایج چنین تحلیلی باتوجهبه نتایج بدست آمده در بخش قبل مبنیبر کوچک بودن آثار تعاملی مابین متغیرها در تغییر ویژگیهای مودال طیف امپدانس معنادار خواهد بود. نحوه تنییرات طیف واکنایی به ازای تغییر مقادیر پارامترهای تصادفی در تحلیل هر بار یک عامل در گستره فرکانسی ۰ تا ۱۷۰۰ کیلوهرتز در شکل ۱۱ ترسیم شده است. طبق نتایج، فرکانسهای پادتشدید که متناظر با فرکانسهای قله در طیف امپدانس هستند، تمامی عوامل به جز ضرایب میرایی مؤثر هستند

¹ Screening

² One-Factor-at-a-Time (OFAT)

جدول ۵. مقایسه شاخصهای حساسیت سبل مرتبه ۱ و کلی محاسبه شده توسط بسط آشوبناک چندجملهای و روش مونتکارلو طبقهبندی شده برای شاخصهای فرکانسی طیف امپدانس الکترومکانیکی

 Table 5. Comparison of the first order and total Sobol' indices calculated by the PCE models and the stratified

 Monte Carlo method for the frequency indices of the EMI spectrum

فركانس پادتشديد		تشديد	فركانس	كميت مورد نظر	
115	بسط أشوبناك	t 15 ·	بسط آشوبناک	روش محاسبه	
مونت تار نو	چندجملەاى	مونت کارلو	چندجملەاى	اندیسها	
•/••٣١٩٣	•/•19470	•/•7888	•/• 19470	S	ې
•/177108	۰/۴٩٠٠۲	•/۴٨٨٢٢٣	•/49••4	\mathbf{S}_{r}	نعى
•/١٢۵٩٧	۰/۴٩٠٠۲	•/494970	•/49••7	$\mathbf{S}_{\mathbf{r}}$	ا کی م هر
•/••٢٣٣۵	۱/۶۵×۱۰ ^{-۲.}	•/•• • • • • • • • • • • • • • • • • •	$1/8.\times1.^{-r}$	$\mathbf{S}_{\mathfrak{f}}$	كسرتبغ
•/••Y•YA	9/FT×1.	۰/۰۰ ۸۹ ۷۶	$A / \cdot Y \times I \cdot^{-r_1}$	\mathbf{S}_{Δ}] ستب (
•/• 188• 8	$(\cdot) \cdot \Delta \times (\cdot)$	•/••٩•۵٣	$(\cdot) \cdot \Delta \times (\cdot)$	$\mathbf{S}_{\mathbf{F}}$:) 3
•/••٢٧•٨	$r/11 \times 1 \cdot r$	•/••٨٩٧۶	$r/r \cdot \times 1 \cdot^{-r}$	S_{γ}	ئ ب
•/٧۴۴۴٢٧	۰/۰۱۹۵۰۸	•/• \9Y9Y	•/•190•1	$\mathbf{S}_{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathrm{T}}$	\$3
•/ \ \	•/49•441	•/۴۸۴۱۹۱	•/49•441	$\mathbf{S}_{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}$	اخط
•/184420	•/49•441	•/492120	•/49•441	$\mathbf{S}_{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}$	ں ه ا ی
•/•٣١٧٧٣	۱/ ۸ ۱× ۱ ۰ ^{-۱۸}	•	1/1.1	$\mathbf{S}_{\mathfrak{f}}^{\mathrm{T}}$	حس کل
•/•٣٨٩٨	۱/۶۸×۱۰ ^{-۱۸}	•	۱/۶۵×۱۰ ^{-۱۸}	$\mathbf{S}_{\boldsymbol{\Delta}}^{\mathrm{T}}$	اسين
•/۵۱۱۳۹۳	۴/•۶×۱۰ ^{-۵}	$\mathbf{F} / \mathbf{V} \times \mathbf{V}^{-\Delta}$	۴/•۶×۱۰ ^{-۵}	$\mathbf{S}_{\boldsymbol{arsigma}}^{\mathrm{T}}$	3.
λ/Υ۱e•۵-	$1/Y\Delta \times 1 \cdot^{-1A}$	•	۱/ ۲۴×۱۰ ^{-۱۸}	$\mathbf{S}_{\mathbf{Y}}^{\mathrm{T}}$	<u>ل</u>

(معادله (۳)). فرکانس پادتشدید با افزایش طول وصله پیزوالکتریک، ضریب نرمی، چگالی و ضریب گذردهی الکتریکی وصله پیزوالکتریک کاهش و با افزایش ثابت پیزوالکتریک افزایش میابد. شدت وابستگی فرکانس پادتشدید به کمیتهای اشاره شده در تمامی موارد تقریباً یکسان است. عدم وابستگی فرکانسهای پادتشدید به ضرایب میرایی از عدماطمینانهای مربوط به مقادیر بدست آمده از مدلهای عددی در مورد این کمیت کاسته و امکان صحتسنجی دقیق آن را فراهم میکند.

نحوه تغییرات دامنه در اجزاء حقیقی و موهومی طیف امپدانس تقریباً مشابه هستند. مقادیر دامنه با افزایش چگالی و ثابت پیزوالکتریک افزایش و با افزایش نرمی، ضریب گذردهی الکتریکی و ضرایب میرایی کاهش میابد. باتوجهبه اینکه افزایش دامنه در مباحث

مربوط به شناسایی آسیب به صورت افزایش قابلیت تشخیص آسیب خصوصاً در محیطهای نوفهای قابل تعبیر است، استفاده از نتایج بدست آمده در هنگام طراحی وصلههای پیزوالکتریک و همچنین انتخاب از بین چندین ماده پیزوالکتریک موجود جهت شناسایی بهینه آسیب مفید خواهد بود. بهعلاوه، تغییرات دامنه طیف امپدانس با ابعاد هندسی وصله پیزوالکتریک بهصورت اتفاقی است. مقادیر کوچک شاخص همبستگی اسپیرمن r^{3} در این موارد تأییدی بر همین رفتار است. این بدان معنا است که تأثیر ابعاد بر دامنه در فرکانسهای مختلف متفاوت بوده و در نتیجه میانگین تغییرات رفتاری پراکنده خواهند داشت.

جدول ۶. مقایسه شاخصهای حساسیت سبل مرتبه ۱ و کلی محاسبه شده توسط بسط آشوبناک چندجملهای و روش مونتکارلو طبقهبندی شده برای شاخصهای دامنه طیف امپدانس الکترومکانیکی

طيف واكنايي	دامنه متوسط ه	دامنه متوسط طيف مقاومت		کمیت مورد نظر	
t 16	بسط آشوبناک	t 15	بسط آشوبناک	روش محاسبه	
مونت تار نو	چندجملهای	مونت کارلو	چندجملەاى	اندیسها	
•/••48•1	۱/ LO×۱۰ ^{-۶}	•/••7٧۵٣	$\Delta / \gamma \cdot \times \gamma \cdot^{-\gamma}$	S_{i}	ु
•/••۴۲۹٨	۰/۰۰۰۹۵۱	•/••***	•/••١٢۶	Sr	
•/••٩٩•٩	•/••٣4870	•/••۶۴۵۳	•/••٣•٧۴	S_r	ا م م
•/\.\\\\	•/1867388	•/177•78	•/189714	S_F	حس ر تبه
•/١٢٢۵٢۵	•/\۲۵\۸۸۳	•/18•481	•/1818•4	S_{a}	mī
•/۵٩٨۴٨۴	•/&••८१९४	۰/۶۳۳۰۸۶	·/۶۲۷۳۵λ	$S_{arepsilon}$:) 3
•/• ١٣٣۶۵	•/••91417	•/•11880	•/••٧٨۵۵	S_{Y}	_ب ب
•/••١٣١۴	•/••• ٢٢۵	۸/۱۱×۱۰ ^{-۸}	۱/ ۸·×۱· ^{-۷}	S_{1}^{T}	43
•/•• ۵۵ ۷۸	•/••۲٩٩۵١	۰/۰۰۱۵۰۹	•/••1479	S^T_r	اخم
•/••٧۶۵٨	•/•• 4931	•/••٣٨٩٩	•/••٣٩•٣	S_r^T	ں ه ا ئ
•/229810	•/777945	•/7•0479	•/٢•٢••٣	S^T_F	میں کار
•/189404	۰/۱۶۳۲۰۵	•/۱۵٩•۶۵	•/\&&&V\	S^T_{a}	است
•/۶۶۷۴۷λ	• 1888•80	•/&***	•/87934	$S^T_{arepsilon}$	ະ) 3.
•/•74010	•/• ١٩٩٩٧	•/•11401	•/• ١٨۴٨	S_{Y}^{T}	ر

 Table 6. Comparison of the first order and total Sobol' indices calculated by the PCE models and the stratified Monte Carlo method for the amplitude indices of the EMI spectrum





شکل ۱۱. نحوه تغییرات طیف واکنایی (جزء موهومی طیف امپدانس الکترومکانیکی) در گستره فرکانسی موردنظر نسبت به تغییر پارامترهای تصادفی در تحلیل احتمالاتی هرمرتبه یک عامل

Fig. 11. The variation of the reactance spectrum (the EMI's imaginary part) versus the variation of random variables in the desired frequency range, as determined by the one-factor at a time analysis

۴- نتیجه گیری

در این تحقیق پاسخ ارتعاشات هم بسته الکترومکانیکی وصله پیزوالکتریک مستطیلی شکل در قالب ویژگیهای مودال طیف امپدانس الکترومکانیکی به شیوه احتمالاتی مورد بررسی قرار گرفت. از روش بسط آشوبناک چندجملهای جهت جایگزینی مدل اصلی و کمیسازی عدم اطمینان استفاده شد. گشتاورهای احتمالاتی و توابع توزیع احتمال کمیتهای پاسخ موردنظر از طریق پس پردازش ضرایب مدلهای آشوب چندجملهای به صورت تحلیلی محاسبه شدند. تحلیل حساسیت سراسری به منظور رتبه بندی میزان تأثیر متغیرهای ورودی بر کمیتهای پاسخ به شیوه مونت کارلو طبقه بندی شده و مبتنی بر بسط آشوبناک چندجملهای انجام گرفت و نتایج مقایسه شد. در نهایت تحلیل همبستگی کمیتهای پاسخ موردنظر و متغیرهای

طبق نتایج، بهازای ضریب تغییرات رایج برای کمیتهای ورودی، ضریب تغییرات دامنه طیف امپدانس بسیار بزرگتر از فرکانسهای مودال است. فرکانسهای مودال بیشترین حساسیت را نسبت به پارامترهای مکانیکی (مدول نرمی و چگالی) وصله موردنظر دارند. این در حالی است که دامنه مودال بیشترین حساسیت را به ترتیب به ضریب میرایی مکانیکی، ضریب گذردهی الکتریکی و ثابت پیزوالکتریک نشان داد. بهعلاوه، آثار تعاملی تأثیر ناچیزی بر کمیتهای مودال طیف امپدانس اعمال میکنند. استفاده از نتایج تحقیق حاضر در فرایند شناسایی آسیب و تخمین پارامتر مبتنی بر روش امپدانس الکترومکانیکی ارزشمند خواهد بود.

ورودی توسط تحلیل هر بار یک عامل انجام گرفت.



شکل پ-۱: چندجملهایهای لژاندر تا مرتبه ۵



۵- پيوست

چندجملهایهای تکمتغیره موردنیاز در بسط آشوبناک از رابطه بازگشتی سهعبارته ذیل قابل محاسبه هستند[۵۲]:

$$\psi_{k+1}(\xi) = (\xi - \alpha_k) \psi_k(\xi) - \beta_k \psi_{k-1}(\xi)$$

$$\psi_{-1}(\xi) = 0, \quad \psi_0(\xi) = 1$$
(\-\nu)

$$\begin{split} \alpha_{k} = & \frac{\left\langle \xi \psi_{k}, \psi_{k} \right\rangle}{\left\langle \psi_{k}, \psi_{k} \right\rangle}, \qquad k \ge 0 \\ \beta_{k} = & \begin{cases} \left\langle \psi_{0}, \psi_{0} \right\rangle, \qquad k = 0 \\ \frac{\left\langle \psi_{k}, \psi_{k} \right\rangle}{\left\langle \psi_{k-1}, \psi_{k-1} \right\rangle}, \qquad k \ge 1 \end{cases} \end{split}$$

در شکل پ-۱: چندجملهایهای لژاندر تا مرتبه ۵ ترسیم شده است.

 $\alpha_k = 0,$

 $\beta_k = \frac{1}{4 - k^{-2}}, \quad k \ge 1$

 $k \ge 0$

فر این روابط نماینده ضرب داخلی نسبت به تابع وزن مورد نظر $\langle ullet, ullet
angle$

است. در مورد توابع وزن متناظر با توابع توزيع احتمال كلاسيك، امكان

محاسبه تحلیلی ضرایب فوق وجود دارد. به طور خاص، در مورد توابع

توزیع احتمال یکنواخت که در این تحقیق مورد استفاده قرار گرفت، ضرایب

بازگشتی از روابط ذیل محاسبه شد [۵۳]:

(پ-۳)

Darboux 1

035017.

- [10] N. Sepehry, M. Ehsani, M. Shamshirsaz, M. Sadighi, Online health monitoring of marine structures using electromechanical impedance spectroscopy: A simulation approach, in: Journal of Solid and Fluid Mechanics, Shahrood University of Technology, 10 (2020) 67-76.
- [11] S. Asadi, M. Shamshirsaz, Y.A. Vaghasloo, Bayesian in-situ parameter estimation of metallic plates using piezoelectric transducers, Smart Structures and Systems, An International Journal, 26(6) (2020) 735-751.
- [12] J.E. Mottershead, M. Link, M.I. Friswell, The sensitivity method in finite element model updating: A tutorial, Mechanical systems and signal processing, 25(7) (2011) 2275-2296.
- [13] R. Ghanem, H. Owhadi, D. Higdon, Handbook of uncertainty quantification, 2017.
- [14] B. Sudret, Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions, Reliability Engineering and System Safety, 93(7) (2008) 964-979.
- [15] N. Wiener, The homogeneous chaos, American Journal of Mathematics, 60(4) (1938) 897-936.
- [16] D. Xiu, G.E. Karniadakis, The Wiener--Askey polynomial chaos for stochastic differential equations, SIAM journal on scientific computing, 24(2) (2002) 619-644.
- [17] S. Oladyshkin, W. Nowak, Data-driven uncertainty quantification using the arbitrary polynomial chaos expansion, Reliability Engineering & System Safety, 106 (2012) 179-190.
- [18] X. Wan, G.E. Karniadakis, Beyond wiener-askey expansions: Handling arbitrary PDFs, Journal of Scientific Computing, 27(1-3) (2006) 455-464.
- [19] R.G. Ghanem, P.D. Spanos, Stochastic finite elements: a spectral approach, 2003.
- [20] M. Berveiller, B. Sudret, M. Lemaire, Stochastic finite element: A non intrusive approach by regression, European Journal of Computational Mechanics, 15(1-3) (2006) 81-92.
- [21] M.D. Spiridonakos, E.N. Chatzi, Metamodeling of

 H. Mei, M.F. Haider, R. Joseph, A. Migot, V. Giurgiutiu, Recent advances in piezoelectric wafer active sensors for structural health monitoring applications, Sensors, 19(2) (2019) 383.

منابع

- [2] A.F.G. Tenreiro, A.M. Lopes, L.F.M. da Silva, A review of structural health monitoring of bonded structures using electromechanical impedance spectroscopy, Structural Health Monitoring, 21(2) (2022) 228-249.
- [3] N. Sepehry, F. Bakhtiari-Nejad, M. Shamshirsaz, Thermo-Electro Mechanical Impedance based Structural Health Monitoring: Euler-Bernoulli Beam Modeling, AUT Journal of Modeling and Simulation, 49(2) (2017) 143-152.
- [4] N. Sepehry, M. Ehsani, W. Zhu, F. Bakhtiari-Nejad, Application of scaled boundary finite element method for vibration-based structural health monitoring of breathing cracks, Journal of Vibration and Control, 27(23-24) (2021) 2870-2886.
- [5] N. Sepehry, M. Ehsani, M. Shamshirsaz, Free and forced vibration analysis of piezoelectric patches based on semi-analytic method of scaled boundary finite element method, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, 52(12) (2019) 3463-3484.
- [6] N. Sepehry, M. Ehsani, M. Shamshirsaz, M. Sadighi, Contact acoustic nonlinearity identification via online vibro-acoustic modulation technique, Modares Mechanical Engineering, 20(7) (2020) 1719-1730
- [7] D. Ai, H. Luo, H. Zhu, Diagnosis and validation of damaged piezoelectric sensor in electromechanical impedance technique, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 28(7) (2017) 837-850.
- [8] C. Liang, F.P. Sun, C.A. Rogers, Coupled electromechanical analysis of adaptive material systemsdetermination of the actuator power consumption and system energy transfer, Journal of intelligent material systems and structures, 8(4) (1997) 335-343.
- [9] Y.Y. Lim, C.K. Soh, Towards more accurate numerical modeling of impedance based high frequency harmonic vibration, Smart Materials and Structures, 23(3) (2014)

System Safety, 142 (2015) 399-432.

- [31] I.M. Sobol, Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates, Mathematics and Computers in Simulation, 55(1-3) (2001) 271-280.
- [32] V. Giurgiutiu, A.N. Zagrai, Characterization of Piezoelectric Wafer Active Sensors, Journal of Intelligent Materials Systems and Structures, 11(12) (2000) 959-976.
- [33] V. Giurgiutiu, Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors: with Piezoelectric Wafer Active Sensors, 2007.
- [34] J.L. Aurentz, L.N. Trefethen, Chopping a chebyshev series, ACM Transactions on Mathematical Software, 43(4) (2017) 1-25.
- [35] R. Pachon, R.B. Platte, L.N. Trefethen, Piecewisesmooth chebfuns, IMA Journal of Numerical Analysis, 30(4) (2009) 898-916.
- [36] R. Loendersloot, M. Ehsani, M. Shamshirsaz, Fatigue damage identification and remaining useful life estimation of composite structures using piezo wafer active transducers, in: Advances in Asset Management and Condition Monitoring, 2020, pp. 485-497.
- [37] C. Soize, R. Ghanem, Physical Systems With Random Uncertainties : Chaos Representations With Arbitrary Probability, 26(2) (2004) 395-410.
- [38] O. Ditlevsen, H.O. Madsen, Structural reliability methods, Wiley New York, 1996.
- [39] G. Blatman, B. Sudret, Adaptive sparse polynomial chaos expansion based on least angle regression, Journal of Computational Physics, 230(6) (2011) 2345-2367.
- [40] B. Sudret, A. Der-Kiureghian, Stochastic finite element methods and reliability, Rep. No. UCB/SEMM-2000, 8 (2000).
- [41] B. Sudret, Polynomial chaos expansions and stochastic finite element methods, Risk and reliability in geotechnical engineering, (2014) 265-300.
- [42] R. Kohavi, A study of cross-validation and bootstrap for accuracy estimation and model selection, in: Ijcai, (1995), 1137-1145.

dynamic nonlinear structural systems through polynomial chaos NARX models, Computers and Structures, 157 (2015) 99-113.

- [22] H.-p. Wan, W.-x. Ren, M.D. Todd, Arbitrary polynomial chaos expansion method for uncertainty quantification and global sensitivity analysis in structural dynamics, Mechanical Systems and Signal Processing, 142 (2020) 106732.
- [23] X. Wei, H.-P. Wan, J. Russell, S. Živanović, X. He, Influence of mechanical uncertainties on dynamic responses of a full-scale all-FRP footbridge, Composite Structures, 223 (2019) 110964.
- [24] J.A.S. Witteveen, S. Sarkar, H. Bijl, Modeling physical uncertainties in dynamic stall induced fluid–structure interaction of turbine blades using arbitrary polynomial chaos, Computers & structures, 85(11-14) (2007) 866-878.
- [25] R. Loendersloot, M. Ehsani, N. Sepehry, M. Shamshirsaz, Numerical Modelling of Stochastic Fatigue Damage Accumulation in Thick Composites, in: European Workshop on Structural Health Monitoring, 2020, pp. 776-787.
- [26] F. Bakhtiari-Nejad, N. Sepehry, M. Shamshirsaz, Polynomial chaos expansion sensitivity analysis for electromechanical impedance of plate, in: Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference, 2016, pp. 1-8.
- [27] M.D. Spiridonakos, E.N. Chatzi, B. Sudret, Polynomial Chaos Expansion Models for the Monitoring of Structures under Operational Variability, ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part A: Civil Engineering, 2(3) (2016) 1-13.
- [28] G. Capellari, E. Chatzi, S. Mariani, Cost-benefit optimization of structural health monitoring sensor networks, Sensors (Switzerland), 18(7) (2018) 1-22.
- [29] S.S. Kucherenko, Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models, Review, Wilmott Mag, 1 (2005) 56-61.
- [30] P. Wei, Z. Lu, J. Song, Variable importance analysis: A comprehensive review, Reliability Engineering and

- [49] M.D. McKay, R.J. Beckman, W.J. Conover, A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code, Technometrics, 42(1) (2000) 55-61.
- [50] B.G.M. Husslage, G. Rennen, E.R. van Dam, D. den Hertog, Space-filling Latin hypercube designs for computer experiments, Optimization and Engineering, 12(4) (2010) 611-630.
- [51] N. Pérez, M.A.B. Andrade, F. Buiochi, J.C. Adamowski, Identification of elastic, dielectric, and piezoelectric constants in piezoceramic disks, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 57(12) (2010) 2772-2783.
- [52] W. Gautschi, Orthogonal polynomials (in Matlab), Journal of Computational and Applied Mathematics, 178(1-2 SPEC. ISS.) (2005) 215-234.
- [53] S. Rahman, Extended Polynomial Dimensional Decomposition for Arbitrary Probability Distributions, Journal of Engineering Mechanics, 135(12) (2009) 1439-1451.

- [43] O. Chapelle, V. Vapnik, Y. Bengio, Model selection for small sample regression, Machine Learning, 48(1-3) (2002) 9-23.
- [44] D.W. Scott, Multivariate density estimation and visualization, in: Handbook of computational statistics, Springer, 2012, pp. 549-569.
- [45] A. Janon, T. Klein, A. Lagnoux, M. Nodet, C. Prieur, Asymptotic normality and efficiency of two Sobol index estimators, ESAIM - Probability and Statistics, 18 (2014) 342-364.
- [46] A. Saltelli, T. Homma, Importance measures in global sensitivity analysis of model output, Reliab. Eng. Sys. Safety, 52 (1996) 1-17.
- [47] K. Konakli, B. Sudret, Global sensitivity analysis using low-rank tensor approximations, Reliability Engineering and System Safety, 156 (2016) 64-83.
- [48] C.M.R. BDV, Numerical simulation for health monitoring of thin simply supported plate using PZT transducers, Materials Today: Proceedings, 45 (2021) 3492-3498.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم M. Ehsani, M. Shamshirsaz, N. Sepehry, M. Sadighi, Uncertainty Quantification in the Assessment of the Characteristics of the Electromechanical Impedance Spectrum of a Rectangular Piezoelectric Patch, Amirkabir J. Mech Eng., 54(10) (2023) 2351-2376.



DOI: 10.22060/mej.2022.20894.7359