



توسعه مدل رتبه کاسته جریان ژئوستروفیک با استفاده از ترکیب روش تجزیه متعامد بهینه و شبکه حافظه کوتاهمدت ماندگار

مینا گلزار^۱، محمد کاظم مؤیدی^{۲*}، فرانک فتوحی قزوینی^۱

^۱ دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات، دانشگاه قم، قم، ایران
^۲ آزمایشگاه پژوهشی توربولانس سیالات محاسباتی و احتراق، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه قم، قم، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۰/۰۴/۲۶
بازنگری: ۱۴۰۱/۰۶/۱۳
پذیرش: ۱۴۰۱/۰۹/۲۱
ارائه آنلاین: ۱۴۰۱/۱۰/۱۵

کلمات کلیدی:

تجزیه متعامد بهینه
شبکه حافظه کوتاهمدت ماندگار
مدل رتبه کاسته
داده‌های ژئوفیزیکی

خلاصه: یکی از روش‌هایی که برای بررسی پدیده‌ها و رفتار سیستم‌ها به کار می‌رود، مدل‌سازی ریاضی می‌باشد. بسیاری از پدیده‌های فیزیکی در زمینه‌های مختلف علوم طبیعی و رشته‌های مهندسی با مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل توصیف می‌شوند که به عنوان مدل ریاضی سیستم فیزیکی ارجاع داده می‌شوند. در بسیاری از کاربردهای دنیای واقعی، مدل‌های ریاضی بسیار پیچیده هستند و شبیه‌سازی عددی در سیستم‌هایی با ابعاد بالا چالش برانگیز است. مسائل فیزیکی بزرگ‌مقیاس با تغییرات مکانی-زمانی زیاد مثل جریان‌های ژئوفیزیکی و اتمسفری نمونه‌ای از این مسائل می‌باشند. بنابراین توسعه الگوریتم‌های مؤثر و قوی که هدفشان دستیابی به حداکثر کیفیت قابل دستیابی از شبیه‌سازی‌های عددی با هزینه محاسباتی بهینه است، یک موضوع تحقیقاتی می‌باشد. از این رو ضرورت استفاده از روش‌هایی برای کاهش ابعاد حس می‌شود. روش‌های مختلفی برای کاهش بعد وجود دارد که در این پژوهش از ترکیب روش تجزیه متعامد بهینه و شبکه حافظه کوتاهمدت ماندگار استفاده شده‌است. در این پژوهش از شبکه حافظه کوتاهمدت ماندگار به منظور یادگیری تحول زمانی و از روش تجزیه متعامد بهینه برای محاسبه مودها و ایجاد مدل رتبه کاسته استفاده شده‌است. در نهایت با مقایسه نمودارهای مربوط به ضرایب اصلی و ضرایب پیش‌بینی شده با استفاده از مدل رتبه کاسته، دقت بالای این روش نشان داده شده‌است. یکی از مواردی که در بررسی الگوریتم‌ها مورد توجه می‌باشد، پیچیدگی زمانی اجرای الگوریتم می‌باشد. مرتبه زمانی روش پیشنهادی در شرایطی که از ۱۵ مود جهت مدل‌سازی استفاده شده نسبت به زمانی که تمام ویژگی‌ها به کار برده شود، ۱۰ مرتبه سریع‌تر می‌باشد. از طرفی تولید ۹۰ درصد داده‌ها به روش دینامیک سیالات محاسباتی زمانی در حدود ۳۲۵ دقیقه نیاز دارد. این در حالی است که آموزش شبکه برای پیش‌بینی رفتار سیستم به کمک روش پیشنهادی به ۱۳۵ دقیقه زمان نیاز دارد که اختلاف زمان محاسباتی قابل توجهی می‌باشد.

۱- مقدمه

و طراحی و کنترل سیستم‌های دینامیکی در ابعاد بزرگ، ارزشمند هستند [۲ و ۳]. بسیاری از الگوریتم‌های مدل‌سازی کاهش مرتبه موجود برای سیستم‌های خطی توسعه یافته‌اند. همه این رویکردها، روش‌های نگاهت هستند که فضای حالت با ابعاد بالای مدل اصلی را به یک زیرفضایی با ابعاد کم تبدیل می‌کنند [۴]. کاهش مرتبه مدل در سیستم‌های خطی و غیرخطی با روش‌های متفاوتی بدست می‌آید. کاهش مرتبه مدل در سیستم‌های غیرخطی مسئله سخت‌تری بوده و در حال حاضر موضوع بسیاری از تحقیقات می‌باشد. برخی از این تحقیقات تکنیک‌هایی شامل تقریب منیفولد درونی^۱، نظریه منیفولد مرکزی^۲، مودهای نرمال غیرخطی^۳ و تجزیه متعامد بهینه را به دست آورده‌اند [۵]. برای سیستم‌های غیرخطی روش تجزیه متعامد

به طور کلی، مسئله کاهش مرتبه، جایگزین کردن مدل ریاضی حاکم بر مسئله با مدلی کوچکتر نسبت به نسخه اصلی می‌باشد؛ به طوری که همچنان ویژگی‌های خاصی از سیستم حفظ شود [۱]. در مدل مطلوب، الگوی کاهش یافته باید ابعادی داشته باشد که به حداقل تعداد پارامترهای لازم برای توضیح رفتار سیستم نزدیک باشد. مدل‌سازی رتبه کاسته در زمینه‌های مختلف برای شبیه‌سازی، طبقه‌بندی، تصویرسازی و فشرده‌سازی داده‌هایی با ابعاد بالا استفاده شده‌است. تکنیک‌های کاهش مرتبه در زمینه‌هایی که نیاز به تلاش محاسباتی بالایی می‌باشد مانند بهینه‌سازی طراحی یک سیستم در مقیاس بزرگ، شبیه‌سازی‌هایی با دقت بالا در مورد جریان‌های پیچیده سیال

1 Inertial manifold approximation
2 Center manifold theory
3 Nonlinear Normal Modes (NNM)

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: moayyedi@qom.ac.ir



X یک بردار دلخواه در فضای \mathbb{R}^n در نظر گرفته شود، اگر $\varphi_{i=1}^n$ مجموعه پایه‌های یکا-متعامد برای این فضا باشند، در این صورت می‌توان بردار X را به صورت ترکیب خطی از این پایه‌ها به صورت رابطه (۱) نوشت [۳۶ و ۳۷].

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \quad (1)$$

۳- شبکه حافظه کوتاه‌مدت ماندگار

یکی از مواردی که می‌توان به عنوان سیستم دینامیکی غیرخطی به آن اشاره کرد، مسائل مربوط به مکانیک سیالات و ژئوفیزیک می‌باشد. در طول سه دهه گذشته از روش‌های یادگیری ماشین مانند شبکه‌های عصبی برای مدل‌سازی چنین سیستم‌هایی استفاده شده‌است. در ابتدا شبکه عصبی برای یادگیری راه حل‌های معادلات دیفرانسیل معمولی و با مشتقات جزئی مورد استفاده قرار گرفت. اما بعدها مشخص شد که می‌توان از این شبکه‌ها برای کشف متغیرهای نهفته و کاهش تعداد پارامترهای مطالعاتی که اغلب با معادلات دیفرانسیل جزئی در ارتباط هستند، استفاده نمود. شبکه‌های عصبی بازگشتی با ظهور شبکه‌های حافظه کوتاه‌مدت ماندگار^۳ دگرگون شده و یکی از موفقیت‌های مهم در هوش مصنوعی محسوب می‌شوند. این روش در حال حاضر برای مدل‌سازی سیستم‌های دینامیکی و توسعه مدل‌های داده‌محور مورد استفاده قرار می‌گیرد [۳۸]. شبکه‌های عصبی حافظه کوتاه‌مدت ماندگار برای توسعه و رفع مشکل شبکه‌های عصبی بازگشتی توسعه داده شده‌است. شبکه‌های عصبی بازگشتی با مشکل وابستگی طولانی‌مدت در اثر ناپدید شدن گرادینان مواجه بودند. این شبکه‌ها برای حل مشکل شبکه‌های عصبی بازگشتی بوجود آمدند و ساختاری شبیه شبکه‌های بازگشتی البته با کمی تفاوت دارند. ساختار درونی این شبکه‌ها در شکل ۱ نشان داده شده‌است. شبکه‌های حافظه کوتاه‌مدت ماندگار نیز همچون شبکه‌های بازگشتی ساختار دنباله‌ای یا زنجیره‌مانندی دارند ولی به جای داشتن تنها یک لایه شبکه عصبی، ۴ لایه دارند. عنصر اصلی شبکه‌های حافظه کوتاه‌مدت ماندگار سلول حالت^۴ است که در حقیقت یک خط افقی است که در بالای شکل قرار دارد. شبکه‌های حافظه کوتاه‌مدت ماندگار این توانایی را دارد که اطلاعات جدیدی را به سلول حالت اضافه یا اطلاعات آن را حذف کند.

بهینه محبوب‌ترین روش برای کاهش بعد به شمار می‌رود [۶]. روش تجزیه متعامد بهینه و انواع آن با موفقیت در زمینه‌های تحقیقاتی و کاربردهای متفاوتی اعمال شده‌است به عنوان مثال توسعه مدل‌های رتبه کاسته [۱۲-۷]، اعتبارسنجی سنسورها [۱۳ و ۱۴]، تحلیل مدل [۱۵ و ۱۶]، تشخیص الگو [۱۷]، مسائل مکانیک سیالات [۱۸ و ۱۹]، آلودگی هوا [۲۰]، بهینه‌سازی هندسی [۲۱]، طراحی و بهینه‌سازی سیستم‌های هوافضایی [۲۲] و معادلات آب کم‌عمق [۲۳-۲۶] نمونه‌هایی از این کاربردها می‌باشد. روش تجزیه متعامد بهینه یک روش کارآمد برای استخراج توابع پایه کاهش‌یافته برای سیستم‌های فیزیکی است [۲۷]. امروزه از ترکیب روش‌های یادگیری ماشین و یادگیری عمیق با روش‌های سنتی به منظور ایجاد مدل رتبه کاسته استفاده می‌شود. هدف اصلی در این پژوهش، توسعه یک مدل رتبه کاسته به عنوان یک الگوی جایگزین برای پیش‌بینی داده‌های ژئوفیزیکی (اقیانوسی) با استفاده از ترکیب روش تجزیه متعامد بهینه و شبکه حافظه کوتاه‌مدت ماندگار می‌باشد.

۲- روش تجزیه متعامد بهینه

روش تجزیه متعامد بهینه^۱ یک دستگاه مختصات n بعدی متعامد ایجاد می‌کند که نسبت به همه دستگاه‌های مختصات متعامد n بعدی دیگری که برای توصیف یک دسته نمایه از میدانی مفروض می‌توانند مورداستفاده قرارگیرند، تقریب بهتری را ارائه می‌کند. کارهون-لوو این روش را در ابتدا به عنوان روشی جهت تحلیل داده‌های آماری مطرح کرد [۲۸]. روش تجزیه متعامد بهینه توسط افراد مختلفی در طول سالین توسعه یافته‌است. کوزامبی [۲۹]، لووی [۳۰]، کارهون [۳۱]، پوگاچف [۳۲] و اوباخف [۳۳] هر یک به طور جداگانه توابع متعامد بهینه را محاسبه کردند. ایده اصلی در روش تجزیه متعامد بهینه، یافتن پایه‌های یکا-متعامد^۲ می‌باشد. هر بردار در فضای نمونه بایستی روی این توابع پایه نگاشت شود و از این رو فرض می‌شود که این توابع متعلق به یک فضای برداری مثل فضای هیلبرت باشند [۳۴]. توابع پایه حاصل در شرایطی مشابه با توابع فوریه بوده که علاوه بر تعامد دارای تقارن نیز می‌باشند [۳۵]. در نهایت میتوان هر بردار در فضای نمونه را به صورت ترکیب خطی از این پایه‌ها بیان کرد. روش‌های مختلفی برای محاسبه این پایه‌ها وجود دارد، با توجه به غیرمربعی بودن ماتریس نمایه‌ها؛ در این پژوهش از روش تجزیه مقادیر تکین استفاده شده‌است. با فرض اینکه

3 Long-Short Term Memory (LSTM)

4 Cell State

1 Proper Orthogonal Decomposition (POD)

2 Orthonormal

سلول حالت ذخیره شود. این تصمیم دو بخش دارد: ابتدا یک لایه سیگموئید به نام دروازه ورودی^۴ وجود دارد که تصمیم می‌گیرد چه مقداری به‌روز خواهند شد. مرحله بعدی یک لایه تانژانت هایپربولیک است که برداری از مقادیر به نام \tilde{C}_t می‌سازد که می‌توان آن‌ها را به سلول حالت اضافه کرد. در مرحله بعد، این دو مرحله با هم ترکیب شده تا مقدار سلول حالت به‌روز شود. معادلات (۳) و (۴) برای به‌روزرسانی سلول حالت مورد نیاز است.

$$i_t = \sigma(W_i \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_i) \quad (3)$$

$$\tilde{C}_t = \tanh(W_c \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_c) \quad (4)$$

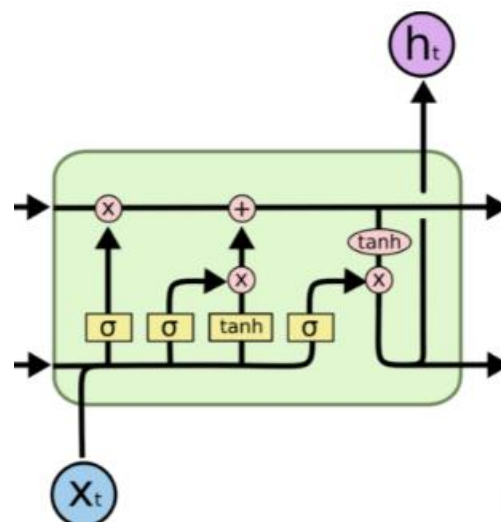
در ادامه باید سلول حالت قدیمی یعنی C_{t-1} با سلول حالت جدید یعنی C_t به‌روزرسانی شود. برای این منظور از رابطه (۵) استفاده می‌شود:

$$C_t = f_t C_{t-1} + i_t \tilde{C}_t \quad (5)$$

در نهایت باید مشخص گردد چه اطلاعاتی به خروجی ارسال شود. این خروجی با در نظر گرفتن مقدار سلول خواهد بود، ولی از فیلتر مشخصی عبور خواهد کرد. در ابتدا، یک لایه سیگموئید وجود دارد که تصمیم می‌گیرد چه بخشی از سلول حالت قرار است به خروجی برده شود. سپس مقدار سلول حالت (پس از به‌روز شدن در مراحل قبلی) به یک لایه تانژانت هایپربولیک (تا مقادیر بین -۱ و +۱ باشند) داده می‌شود و مقدار آن در خروجی لایه سیگموئید قبلی ضرب می‌شود [۳۹ و ۴۰].

$$o_t = \sigma(W_o [h_{t-1}, x_t] + b_o) \quad (6)$$

$$h_t = o_t \tanh(C_t) \quad (7)$$



شکل ۱. ساختار درونی شبکه‌های حافظه کوتاه‌مدت ماندگار [۳۹]

Fig. 1. LSTM internal structure [39]

این کار توسط ساختارهای دقیقی به نام دروازه‌ها^۱ انجام می‌شود. دروازه‌ها راهی برای ورود اختیاری اطلاعات هستند. آن‌ها از یک لایه شبکه عصبی سیگموئید^۲ به همراه یک عملگر ضرب نقطه به نقطه تشکیل شده‌اند. قدم اول در شبکه‌های حافظه کوتاه‌مدت ماندگار تصمیم در مورد اطلاعاتی است که بایستی از سلول حالت پاک شود. این تصمیم توسط یک لایه سیگموئید به نام دروازه فراموشی^۳ انجام می‌شود.

این دروازه با توجه به مقادیر x_t و h_{t-1} ، برای هر عدد، مقدار صفر یا یک را در سلول حالت x به خروجی می‌برد. مقدار یک یعنی به صورت کامل مقدار حال حاضر سلول حالت (C_{t-1}) به C_t منتقل شود و مقدار صفر یعنی به صورت کامل اطلاعات سلول حالت کنونی (C_{t-1}) پاک شود. به این ترتیب معادله محاسبه گیت فراموشی به صورت رابطه (۲) می‌باشد:

$$f_t = \sigma(W_f \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_f) \quad (2)$$

قدم بعدی این است که تصمیم گرفته‌شود چه اطلاعات جدیدی باید در

- 1 Gates
- 2 Sigmoid
- 3 Forget Gate

4 Input Gate

۴- معادله حاکم بر مسئله برای تولید نمایه‌ها

یکی از زمینه‌های مطالعاتی در حوزه ژئوفیزیک، مبحث اقیانوس‌شناسی می‌باشد. در چند دهه گذشته تلاش‌های فراوانی برای توسعه مدل برای دینامیک اقیانوس انجام گرفته‌است. با این حال مدل‌کردن دینامیک اقیانوس به دلیل طیف گسترده‌ای از مقیاس‌های مکانی-زمانی و گذارهای تصادفی پراکنده بین مقدار ورتیسیتی و ساختارهای گردابه‌ای از نظر محاسباتی چالش برانگیز است. با این حال شبیه‌سازی‌های عددی جریان‌های اقیانوسی و اتمسفری، هنوز هم نیاز به تقریب و ساده‌سازی مدل کامل دارد تا بخشی از طیف وسیع مقیاس‌های مکانی-زمانی شکل کامل مدل اقیانوسی حل شود. اگرچه پیشرفت‌های چشمگیر در توسعه مدل‌های ساده‌شده در طول چند دهه گذشته باعث شده نتایج دقیق‌تری تولید شود، چالش محاسباتی اضافی در پیاده‌سازی در بازه طولانی‌مدت مثل مدل‌سازی اقلیم وجود دارد. یکی از این الگوها، مدل جریان شبه‌ژئوستروفیک تک‌لایه بوده که با معادله انتقال ورتیسیتی و فرض باروتروپیک بودن جریان در نظر گرفته می‌شود. این مدل ریاضی شباهت زیادی با معادله ناویر استوکس دوبعدی داشته و سال‌های زیادی برای توصیف جنبه‌های مختلف بزرگ‌ترین مقیاس دینامیک سیال ژئوفیزیکی آشفته استفاده شده‌است [۴۱]. یادگیری ماشین مزایایی نسبت به روش‌های سنتی دیگر دارد زیرا می‌تواند برای داده‌های غیرخطی و با ابعاد بالا با روابط پیچیده و مقادیر از دست‌رفته مدل بسازد. یادگیری ماشین دارای الگوریتم‌ها، تکنیک‌ها و متدولوژی‌های متعددی است که می‌تواند برای ساخت مدل برای حل مسائل دنیای واقعی با استفاده از داده‌های اقیانوس‌شناسی استفاده شود [۴۲]. جریان‌های جوی و مطالعات اقیانوس‌شناسی اغلب در مقیاس‌های طول افقی بسیار بزرگ‌تر از مقیاس طول عمودی، اتفاق می‌افتند. بنابراین، آن‌ها را می‌توان با استفاده از معادلات آب کم‌عمق توصیف کرد. به عبارتی معادله شبه ژئوستروفیک تک‌لایه دوبعدی تقریبی از معادله آب کم‌عمق بوده که امواج اینرسی-گرانشی را با فرضیاتی مثل کوچک بودن عدد راسبی، کوچک بودن تغییرات در عمق سیال در مقایسه با عمق کل آن و کوچک بودن تغییرات در پارامتر کریولیس فیلتر می‌کند [۴۳]. در این پژوهش جهت تولید داده‌های موجود در ماتریس نمایه‌ها از حل عددی معادله انتقال ورتیسیتی باروتروپیک^۱، که به عنوان مدل شبه ژئوستروفیک^۲ تک‌لایه نیز شناخته شده، استفاده شده‌است [۴۴]. روشن است برای حل عددی معادله لازم است شرایط مرزی و اولیه مناسب اعمال شود تا جواب خاص مربوط به مسئله مورد بررسی بدست آید. در پژوهش حاضر

1 Barotropic Vorticity Equation (BVE)

2 Quasigeostrophic

از شرایط مرزی دیریشله (همگن) برای تابع جریان و ورتیسیتی مطابق رابطه (۸) استفاده شده و بدین معنی است که سرعت روی مرزهای میدان از شرط مرزی لغزش بدست می‌آید. در این رابطه، Γ معرف مرزهای میدان است:

$$\psi|_{\Gamma} = 0 \quad \omega|_{\Gamma} = 0 \quad (8)$$

شرایط اولیه با مقدار صفر (حالت سکون) نیز برای این دو کمیت در نظر گرفته شده‌است:

$$\omega(\vec{x}, 0) = \psi(\vec{x}, 0) = 0 \quad (9)$$

معادله به کار رفته برای شبیه‌سازی عددی مطالعه حاضر بر این اساس بکار می‌رود که رفتار جو تقریباً باروتروپیک باشد بدین معنی که جهت و سرعت باد ژئوستروفیک مستقل از ارتفاع و چگالی صرفاً تابعی از تغییرات فشار است. به عبارت دیگر، هیچ برشی عمودی ناشی از باد ژئوستروفیک وجود ندارد. مبتنی بر این فرض، از تغییرات مؤلفه سرعت در راستای محور عرضی صرف‌نظر شده و معادله انتقال ورتیسیتی باروتروپیک برای سیالی با عمق ثابت شامل تغییرات زمانی ورتیسیتی، ترم انتقال ورتیسیتی ناشی از جابجایی متأثر از میدان سرعت، ترم ناشی از شتاب کریولیس، انتقال ورتیسیتی ناشی از فرآیند نفوذ و اثرات نیروهای ناشی از رانش باد متناسب با چرخش زمین بدست خواهد آمد. این معادله یکی از مدل‌های ریاضی است که برای مسائل گردش اقیانوسی مقیاس بزرگ بیشترین استفاده را داشته‌است [۴۲]. معادله حاکم بر جریان باروتروپیک تراکم‌ناپذیر دوبعدی به صورت رابطه (۱۰) در نظر گرفته می‌شود [۴۵]:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J = D + F \quad (10)$$

در رابطه فوق، q ورتیسیتی سینماتیکی^۳ می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

عبارت نفوذ در معادله حاکم بر اساس رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$q = Ro \times \omega + y \quad (11)$$

$$D = Ro \times Re^{-1} \nabla^2 \omega \quad (16)$$

همچنین ترم F ، در سمت راست معادله (۱۰)، نیروی ناشی از اثرات رانش باد متناسب با چرخش زمین بوده و به صورت زیر بدست می‌آید:

$$F = \sin(\pi y) \quad (17)$$

۴-۱- روش حل عددی

برای حل معادله انتقال ورتیسیته، آنرا به دو بخش زمانی و مکانی گسسته‌سازی کرده و در نهایت با یک پیمایش زمانی معادله حل می‌شود. برای معادله تابع جریان از روش‌های متداول جهت حل معادلات بیضوی، که یک فرم تعادلی از معادلات دیفرانسیلی با مشتقات پاره‌ای هستند، استفاده شده‌است. یکی از معروف‌ترین این روش‌ها، الگوی فوق تخفیف پی در پی^۲ به صورت صریح یا ضمنی می‌باشد.

۴-۱-۱- گسسته‌سازی مکانی

برای گسسته‌سازی مکانی معادله انتقال ورتیسیته، ترم‌های موجود غیر از ترم وابسته به زمان، با استفاده از روش گسسته‌سازی مرتبه دوم مدل می‌شوند. برای نقاط موجود در داخل میدان از روش تفاضل مرکزی به صورت رابطه (۱۸) استفاده شده‌است:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2\Delta x} \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{F_{i+1} - 2F_i + F_{i-1}}{\Delta x^2}$$

برای محاسبه مشتق مرتبه اول برای نقاط واقع در مرزهای میدان، فرمول‌بندی تفاضل پیشرو و پسرو مرتبه دوم به صورت زیر به کار می‌رود [۴۳]:

در رابطه بالا، ω مقدار ورتیسیته و Ro عدد راسبی می‌باشد که دوران در سیستم توسط این عدد تعیین می‌شود و با توجه به رابطه (۱۲) محاسبه می‌شود. عدد راسبی متناسب با اینرسی و نیروی کوریولیس می‌باشد. کوچک بودن این عدد نشان دهنده تأثیر زیاد سیستم از نیروی کوریولیس و مقادیر بزرگ آن، نیز نشان‌دهنده اثرات بیشتر نیروهای اینرسی در سیستم می‌باشد. در مورد جریان اقیانوسی که با سرعت چند سانتی‌متر در ثانیه در مسافتی مثلاً هزار کیلومتری حرکت می‌کند، عدد راسبی بسیار کوچک است.

$$Ro = \frac{V}{\beta L^2} \quad (12)$$

در معادله فوق، V سرعت مرجع، کمیت β ، پارامتر مربوط به شتاب کوریولیس و L مقیاس طولی می‌باشد. عبارت انتقال غیرخطی در رابطه (۱۰) ژاکوبین نام داشته و به صورت رابطه (۱۳) تعریف می‌شود:

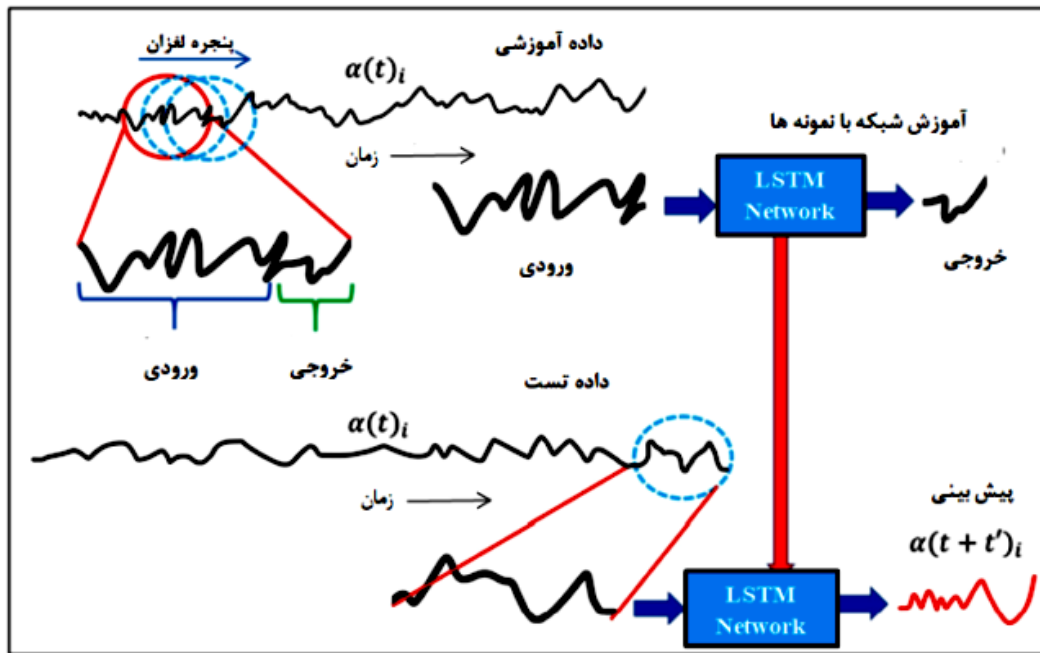
$$J = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (13)$$

در معادله فوق، ψ تابع جریان می‌باشد. برای مدل مورد بحث که فرض می‌شود میدان جریان بدون واگرایی^۱ است، می‌توان از رابطه سینماتیکی بین ورتیسیته و تابع جریان استفاده کرد:

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (14)$$

تابع جریان با مولفه‌های بردار سرعت رابطه زیر را دارد:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \quad (15)$$



شکل ۲. روند آموزش شبکه‌های حافظه کوتاه‌مدت ماندگار با چارچوب ورودی-خروجی

Fig. 2. Training procedure of LSTM networks with input-output framework

استفاده از روش تشریح شده در بخش قبل محاسبه می‌شوند. عبارت وابسته به زمان با استفاده از این الگوریتم انتگرال گیری شده و مقدار متغیر مجهول در گام زمانی بعدی بدست می‌آید.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-3F_i + 4F_{i+1} - F_{i+2}}{2\Delta x} \quad (19)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{3F_i - 4F_{i-1} + F_{i-2}}{2\Delta x}$$

۵- مدل رتبه کاسته مبتنی بر روش تجزیه متعامد بهینه و شبکه حافظه کوتاه‌مدت ماندگار

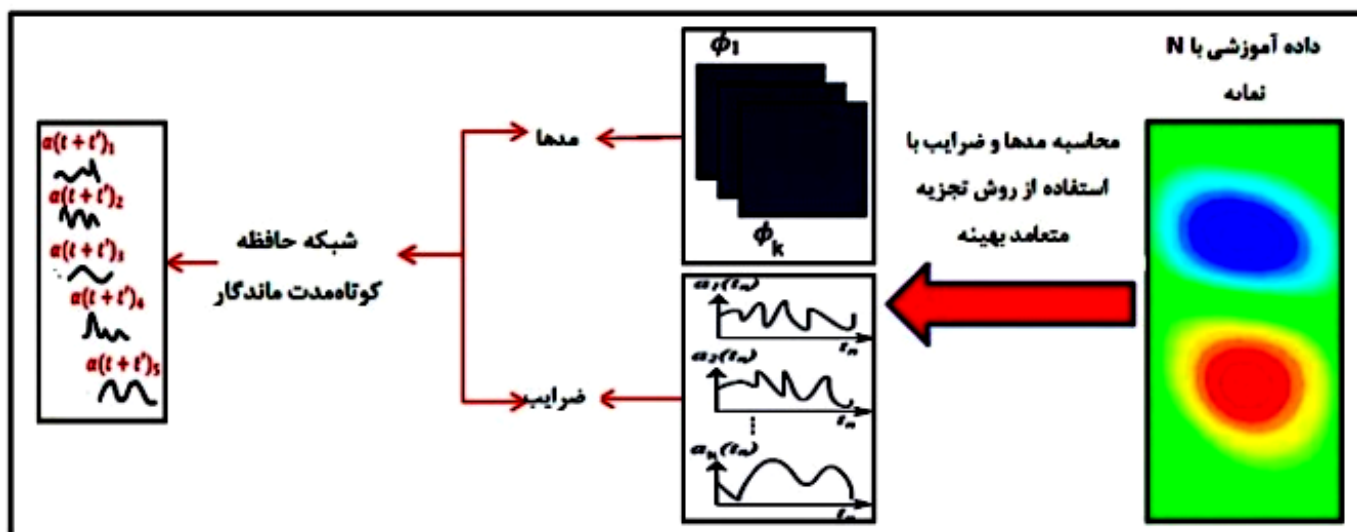
در این پژوهش یک چارچوب ترکیبی با بهره‌گیری از روش تجزیه متعامد بهینه و شبکه حافظه کوتاه‌مدت ماندگار ارائه شده‌است. ابتدا روی نمایه‌های موجود روش تجزیه متعامد بهینه اعمال شده و با توجه به تعداد مود انتخاب‌شده، کاهش مرتبه مدل ایجاد می‌شود. متناسب با هر مود، برداری از ضرایب زمانی وجود دارد که با استفاده از روش پنجره لغزان روی این بردار حرکت کرده و داده ورودی-خروجی لازم برای آموزش شبکه حافظه کوتاه‌مدت ماندگار تولید می‌شود. بخش انتهایی هر بردار، به عنوان داده تست در نظر گرفته شده که در مجموعه داده‌های آموزشی وجود نداشته‌است. روش پیاده‌سازی شده برای تولید داده‌های آموزش به شکل ۲ می‌باشد. شکل ۳ فلوجارت روش ارائه‌شده در این پژوهش را نشان می‌دهد.

۴-۱-۲- گسسته‌سازی زمانی

برای گسسته‌سازی زمانی معادلات انتقال از روش صریح رانگ-کوتای مرتبه چهارم استفاده شده‌است. این روش برای انتگرال گیری زمانی معادلات حاکم بر مسائل ناپایا روشی مناسب و دقیق است. معادله حاکم به صورت رابطه زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\frac{dQ}{dt} = R(Q) \quad (20)$$

سمت راست معادله فوق مربوط به عبارت مشتق مکانی بوده که با



شکل ۳. مراحل آموزش و پیش‌بینی ضرایب با استفاده از روش ارائه‌شده.

Fig. 3. Steps of the training and prediction of modal coefficients using the proposed method

۲۰۰ لحاظ شده‌است. به دلیل پایین بودن مقدار سرعت، مقدار عدد رینولدز کوچک می‌باشد. لازم به ذکر است، L (بعد محدوده در جهت x) معادل مقدار ۲۰۰۰ کیلومتر و ثابت β (پارامتر مرتبط با شتاب کوریولیس) معادل $10^{-11} \times 75 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ در نظر گرفته شده است. تمام شبیه‌سازی‌های عددی در این پژوهش برای حداکثر زمان بدون بعد $3/78$ و زمان با بعد $2/17$ سال انجام شده‌است. همچنین نمایه‌های بکار رفته در بازه زمانی بدون بعد $2/88$ تا زمان $3/78$ ایجاد و به منظور ایجاد پایه‌های تجزیه متعامد بهینه، استفاده شده‌اند. سپس از ضرایب زمانی حاصل از تجزیه ماتریس نمایه‌ها، برای آموزش شبکه حافظه کوتاهمدت ماندگار استفاده شده‌است. بدین منظور، ۷ مود حاصل از داده‌ها استخراج شده سپس شبکه روی هر یک از هفت ضریب مودال وابسته به زمان آموزش داده شده‌است. روشن است در مدل رتبه‌کاسته با افزایش تعداد مودها، الگوی حاصل دقت بالاتری خواهد داشت. برای انتخاب تعداد مودها باید به این نکته توجه داشت که حداقل چه تعداد مود می‌تواند حداکثر مقدار انرژی موجود در میدان را تسخیر کند. در نهایت یک مدل برای مودها بدست می‌آید که به منظور پیش‌بینی ضرایب زمانی روی قسمتی از مجموعه داده، که در آموزش استفاده نشده، به کار گرفته می‌شود. در جدول ۱، خطای بازسازی دو کمیت ورتیستی و تابع جریان توسط مدل ترکیبی مبتنی بر الگوی یادگیری عمیق و روش تجزیه متعامد بهینه با استفاده از ۷، ۱۰ و ۱۵ مود نشان داده شده‌است. همانطور که در جدول ۱

همانطور که در این شکل نیز مشخص شده ابتدا با استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه فرآیند کاهش بعد انجام شده و مودهای موردنیاز بدست می‌آیند، سپس از شبکه حافظه کوتاهمدت ماندگار برای پیش‌بینی تغییرات زمانی ضرایب استفاده شده‌است.

۶- نتایج

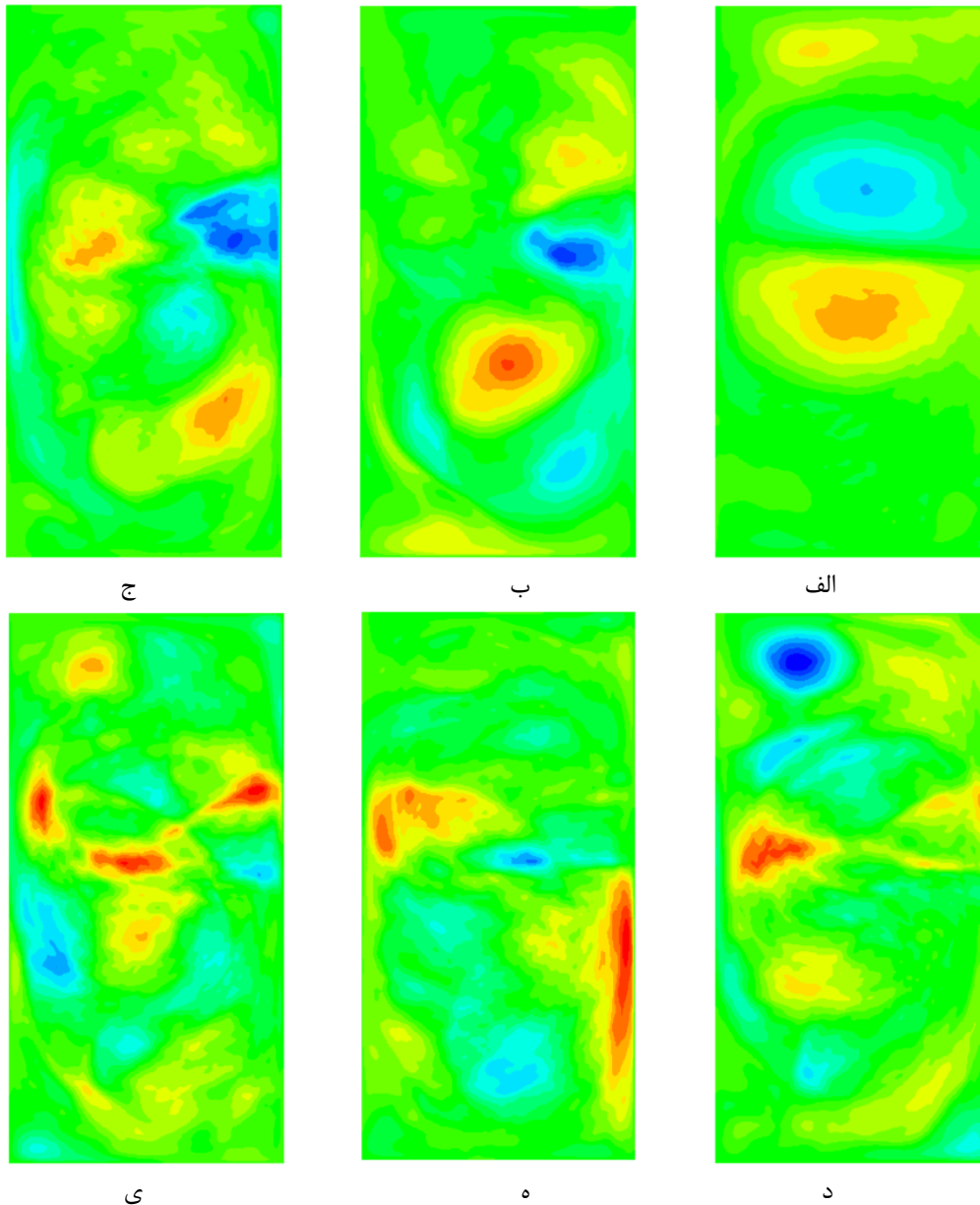
به منظور پیاده‌سازی مدل رتبه‌کاسته از پایتون ورژن $3/7$ در محیط پای‌چارم^۱ بر روی رایانه‌ای با حافظه ۴ گیگابایت و پردازنده سه‌هسته‌ای ۲ گیگاهرتز استفاده شده‌است. مجموعه داده مورد استفاده در این پژوهش شامل ۹۰ تصویر لحظه‌ای روی شبکه‌ای 150×300 و در محدوده‌ای به ابعاد 1×2 می‌باشد که مختصات y به سمت شمال و مختصات x به سمت شرق افزایش می‌یابد. جریان مورد بررسی از نوع جریان‌های نزدیک به سطح^۲ می‌باشد. جریان‌های نزدیک به سطح در اقیانوس‌ها با اثرات بادها هدایت می‌شوند. جریان‌های بادمحور اقیانوسی در عرض جغرافیایی با استفاده از نیروهای باد تک‌چرخشی^۳ و دوچرخشی^۴ بررسی می‌شود. به منظور پیاده‌سازی در این پژوهش عدد راسبی معادل 0.16 و عدد رینولدز

- 1 PyCharm
- 2 Near-surface
- 3 Single gyre
- 4 Double gyre

جدول ۱. میزان خطای حاصل از بازسازی میدان جریان برای کمیت‌های تابع جریان و ورتیسیته

Table 1. Reconstruction error of the stream function and vorticity fields

میت	مود ۷	مود ۱۰	مود ۱۵
ورتیسیته	$1/0.2228 \times 10^{-2}$	$8/126.0 \times 10^{-3}$	$5/916.57 \times 10^{-3}$
تابع جریان	$1/5154 \times 10^{-1}$	$5/97818 \times 10^{-2}$	$2/09345 \times 10^{-2}$



شکل ۴. خطوط هم‌تراز مودهای پر انرژی‌تر ورتیسیته، (الف) مود اول، (ب) مود دوم، (ج) مود سوم، (د) مود چهارم، (ه) مود پنجم و (ی) مود ششم

Fig. 4. Contours of more energetic vorticity modes, (a) the first mode, (b) the second mode, (c) the third mode, (d) fourth mode, (e) fifth mode and (j) sixth mode

جدول ۲. انرژی نسبی هفت مود اول کمیت ورتیسیتی بر حسب درصد

Table 2. The relative energy of the first seven modes of the vorticity field

شماره مود	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
انرژی نسبی	۳۱	۴	۳	۲/۵	۲	۲	۱

این رابطه کمیت e قرار دارد که خطای پیش‌بینی بوده و از تفاضل مقدار پیش‌بینی شده از کمیت اصلی به دست می‌آید. مخرج این کسر نیز تفاضل کمیت موردنظر را در نقاط مختلف نشان می‌دهد [۴۶].

$$MASE = \text{mean} \left(\left| \frac{e_t}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n |Y_i - Y_{i-1}|} \right| \right) \quad (21)$$

شکل ۱۰ تغییرات خطای پیش‌بینی شبکه حافظه کوتاه‌مدت ماندگار برای تمام نمونه‌ها با بهره‌گیری از ۱۰ و ۱۵ مود نشان می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد که خطا به طور کلی پایین بوده و همانطور که در این شکل دیده می‌شود با افزایش تعداد مودها خطای اولیه کمتر نیز شده‌است. در این شکل محور عمودی نشانگر میزان خطا بوده و محور افقی نشان‌دهنده دوره‌های اجرای شبکه حافظه کوتاه مدت ماندگار است.

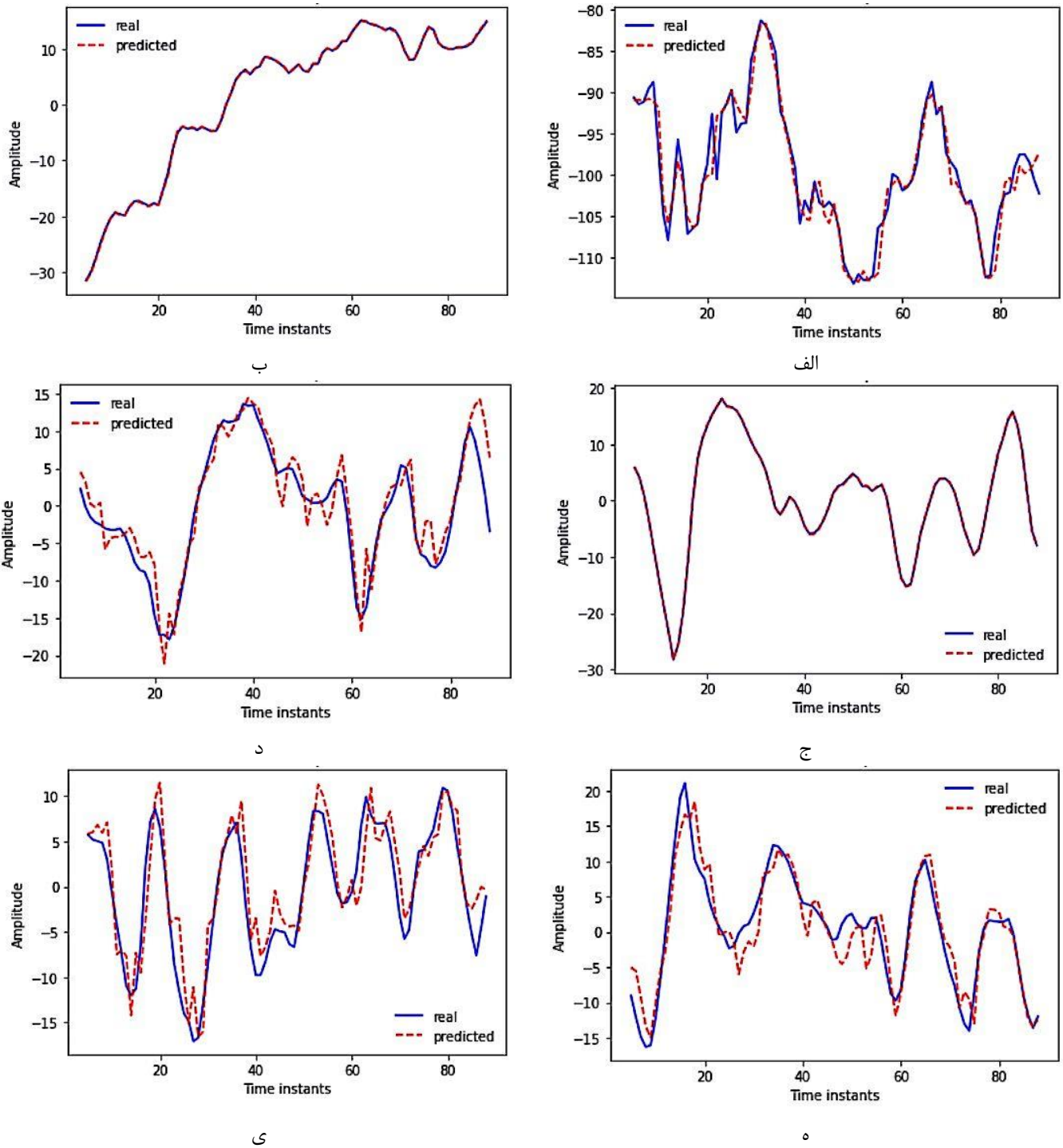
در شکل ۱۱ نیز مقایسه تغییرات خطا به ازای مقادیر مختلف درصد داده آموزش نشان داده شده‌است. همانطور که در شکل دیده می‌شود، در حالتی که از ۹۰ درصد داده‌ها برای آموزش شبکه استفاده شده، حداکثر خطا در شروع تکرارهای مبتنی بر الگوی یادگیری عمیق مقدار کمتری نسبت به حالت‌هایی دارد که به ترتیب از ۵۰ و ۳۰ درصد داده‌ها برای آموزش شبکه استفاده شده‌است.

دیده می‌شود، میزان خطای بین داده اصلی و بازسازی شده کم بوده و با افزایش تعداد مودها این مقدار بیشتر کاهش می‌یابد. در شکل ۴ نیز به طور نمونه خطوط هم‌تراز ۶ مود اول نشان داده شده‌است. مقایسه‌ای بین تغییرات زمانی ضرایب حاصل از تصویرسازی نمایه‌ها و مقادیر پیش‌بینی شده با مدل انجام گرفته و نتایج آن در شکل‌های ۵، ۶ و ۷ نشان داده شده‌است. در شکل ۵ از ۳۰ درصد، در شکل ۶ از ۵۰ درصد و در شکل ۷ از ۹۰ درصد داده‌ها به عنوان داده آموزش، استفاده شده‌است. نتایج پیش‌بینی ضرایب زمانی روی داده تست در هر سه شکل، دقت بالای روش پیشنهادی را نشان می‌دهد. همانطور که در شکل‌ها دیده می‌شود، دقت روش هنگام استفاده از ۱۰ و ۵۰ درصد داده‌ها، بیشتر از حالتی است که از ۷۰ درصد داده‌ها به منظور تست و از ۳۰ درصد به عنوان آموزش استفاده شده‌است.

در شکل ۸ به طور نمونه، مقایسه داده‌های اصلی و بازسازی شده حاصل از روش تجزیه متعامد بهینه در نمایه اول و در شکل ۹ نیز بازسازی نمایه آخر روی کمیت تابع جریان با استفاده از ۷، ۱۰ و ۱۵ مود نشان داده شده‌است. همانطور که در این شکل‌ها نشان داده شده، نتایج حاصل از مدل با استفاده از ۷ مود خطای بیشتری داشته و هرچه تعداد مودها افزایش پیدا می‌کند داده‌ها دارای دقت بیشتری می‌شوند. جدول ۲، سطح انرژی ۷ مود اول برای کمیت ورتیسیتی را نشان می‌دهد. مقادیر مندرج در جدول نشان می‌دهند که سهم عمده‌ای از انرژی نسبی میدان مربوط به دو مود اول می‌باشد.

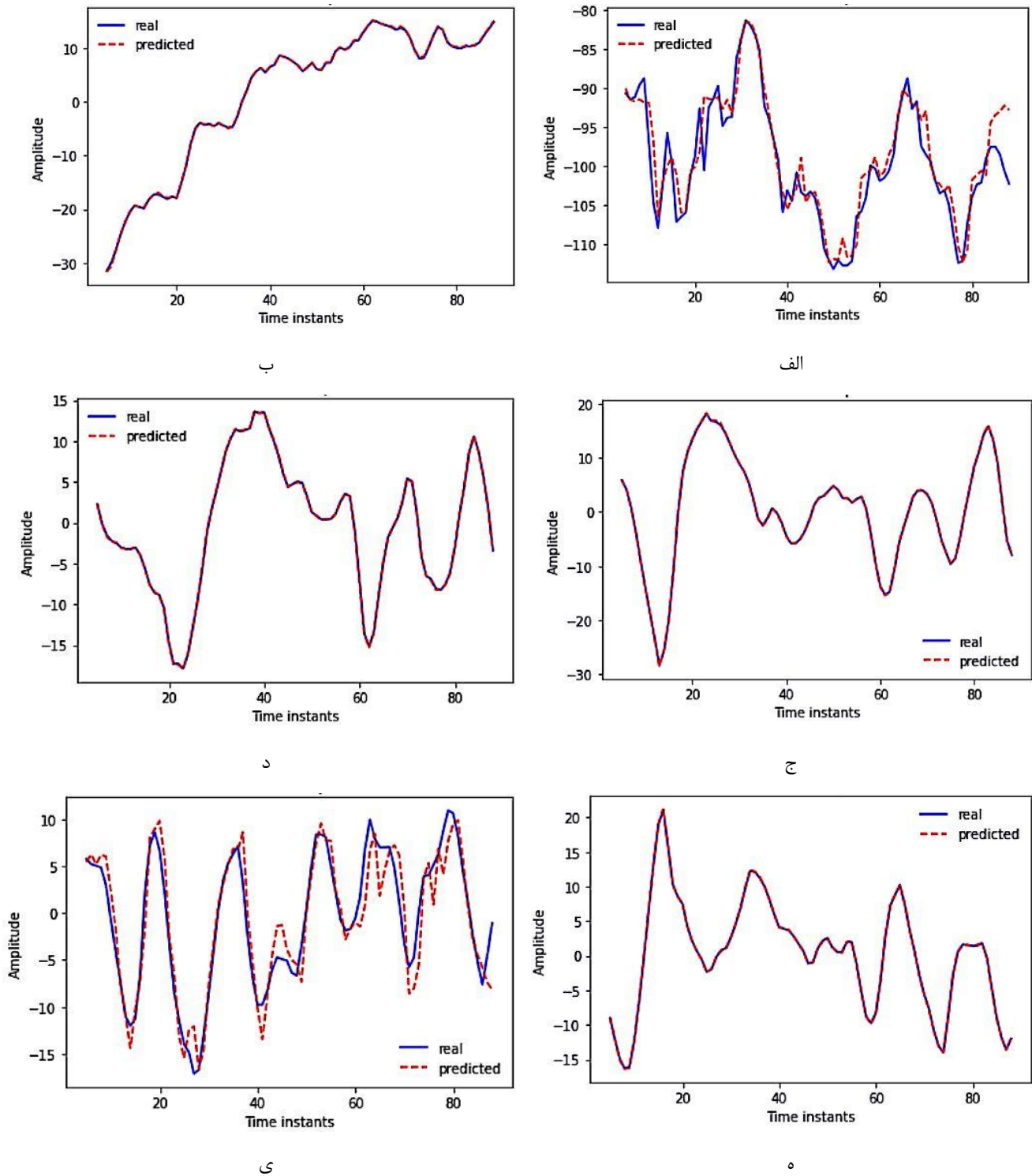
معیار خطای اندازه‌گیری دقت پیش‌بینی^۱ برای تعیین اختلاف مقادیر پیش‌بینی شده از مقادیر مورد انتظار به کار برده شده‌است. این خطا با استفاده از رابطه (۲۱) محاسبه می‌شود، همانطور که مشاهده می‌شود در صورت کسر

1 Mean Absolute Scaled Error (MASE)



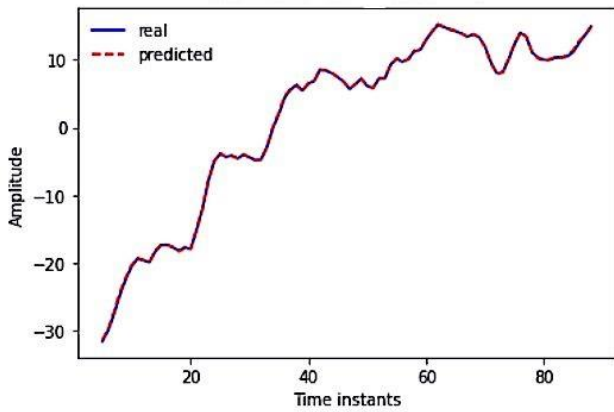
شکل ۵. تغییرات زمانی شش ضریب مودال پر انرژی تر کمیت ورتیسیته، خطوط سیاه رنگ داده اصلی و خطوط قرمز رنگ حاصل از مدل رتبه کاسته با استفاده از ۳۰ درصد داده برای آموزش، (الف) مود اول، (ب) مود دوم، (ج) مود سوم، (د) مود چهارم، (ه) مود پنجم، (ی) مود ششم

Fig. 5. Time evolution of the six more energetic modal coefficients of the vorticity field, The original data (black lines) and the reduced order model using 30% of the data for training (red lines), (a) the first mode, (b) the second mode, (c) the third mode, (d) fourth mode, (e) fifth mode, (j) sixth mode

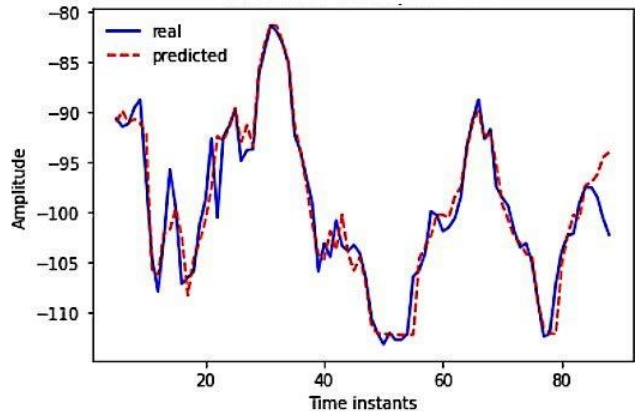


شکل ۶. تغییرات زمانی شش ضریب مودال پر انرژی تر کمیت ورتیسیته، خطوط سیاه رنگ داده اصلی و خطوط قرمز رنگ حاصل از مدل رتبه کاسته با استفاده از ۵۰ درصد داده برای آموزش، (الف) مود اول، (ب) مود دوم، (ج) مود سوم، (د) مود چهارم، (ه) مود پنجم، (ی) مود ششم

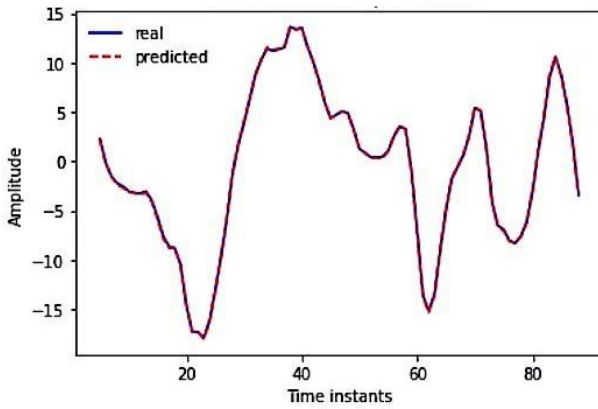
Fig. 6. Time evolution of the six more energetic modal coefficients of the vorticity field, The original data (black lines) and the reduced order model using 50% of the data for training (red lines), (a) the first mode, (b) the second mode, (c) the third mode, (d) fourth mode, (e) fifth mode, (j) sixth mode



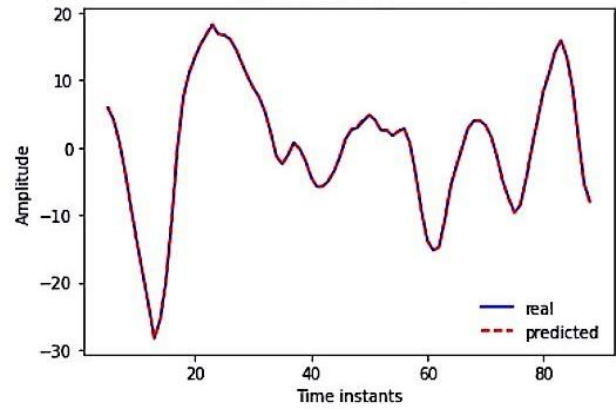
الف



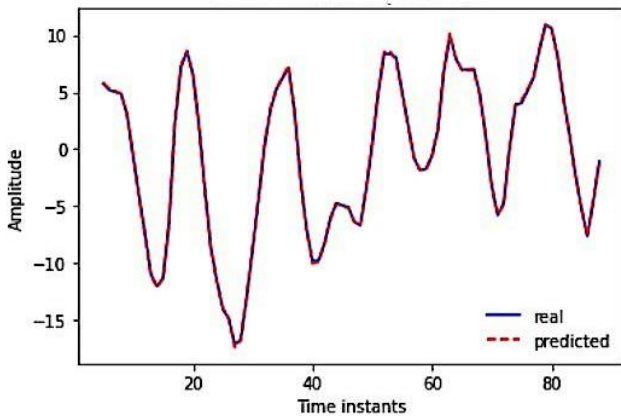
ب



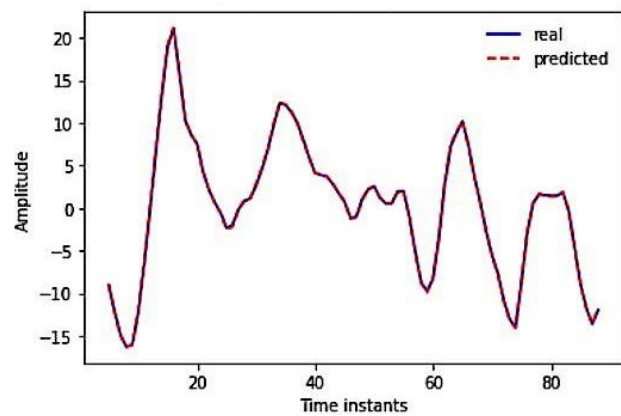
ج



د



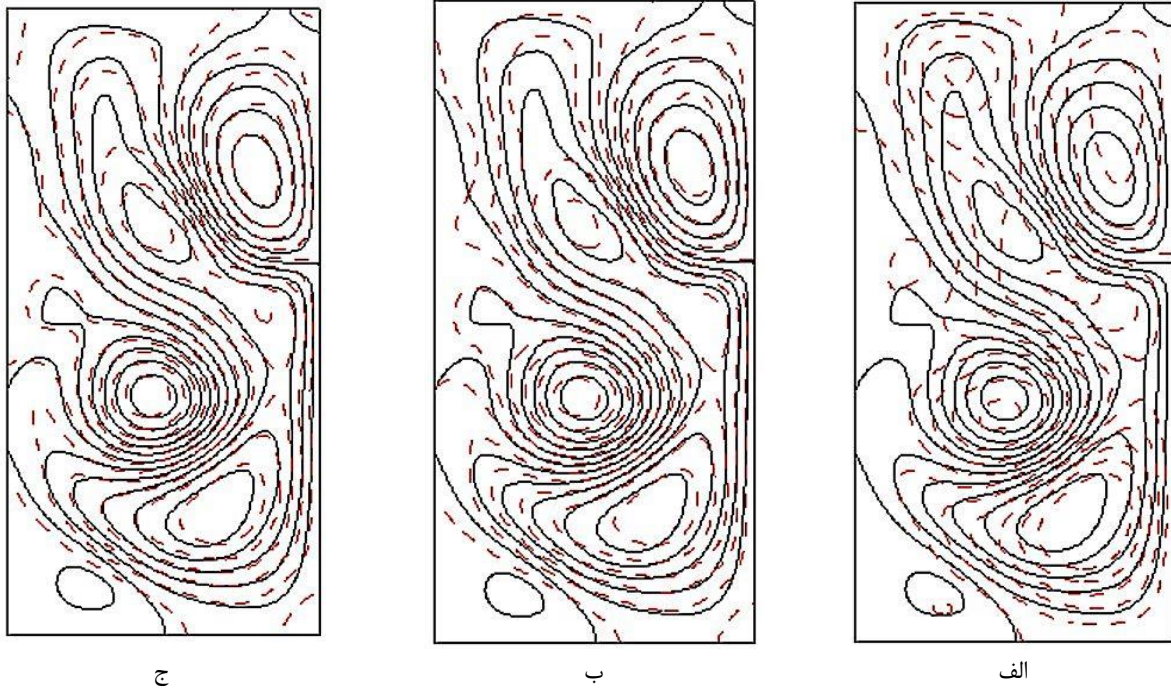
ه



و

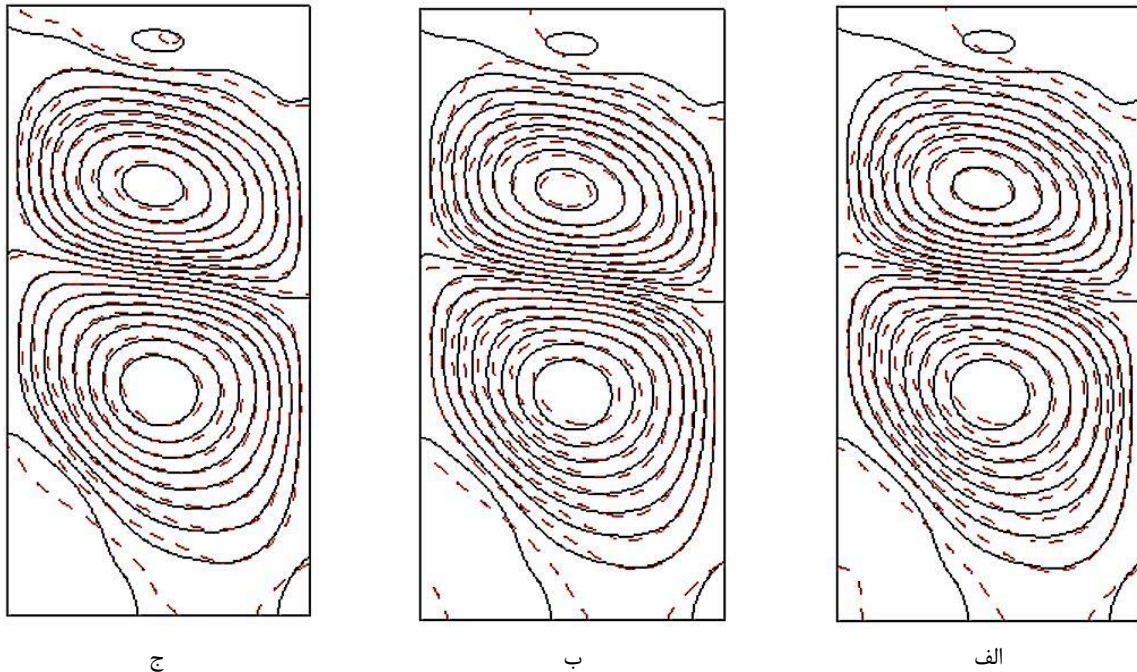
شکل ۷. تغییرات زمانی شش ضریب مودال پر انرژی تر کمیت ورتیسیته، خطوط سیاه رنگ داده اصلی و خطوط قرمز رنگ حاصل از مدل رتبه کاسته با استفاده از ۹۰ درصد داده برای آموزش، (الف) مود اول، (ب) مود دوم، (ج) مود سوم، (د) مود چهارم، (ه) مود پنجم، (و) مود ششم

Fig. 7. Time evolution of the six more energetic modal coefficients of the vorticity field, the original data (black lines) and the reduced order model using 90% of the data for training (red lines), (a) the first mode, (b) the second mode, (c) the third mode, (d) fourth mode, (e) fifth mode, (j) sixth mode



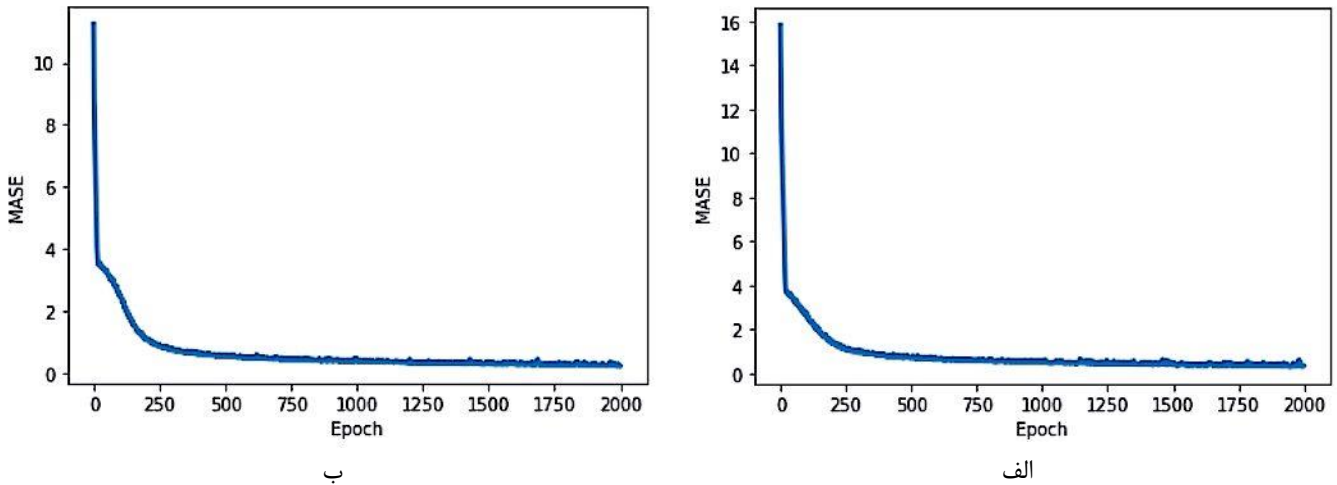
شکل ۸. مقایسه نمایه اول اصلی و نمایه اول بازسازی شده توسط مدل رتبه‌کاسته برای تابع جریان، خطوط سیاه‌رنگ نمایه اصلی، (الف) بازسازی با استفاده از ۷ مود، (ب) با استفاده از ۱۰ مود و (ج) با استفاده از ۱۵ مود

Fig .8. Comparison of the first original data (black lines) and the first snapshot of stream function field reconstructed by the reduced order model, (a) reconstruction using 7 modes and (b) using 10 modes and (c) using 15 modes



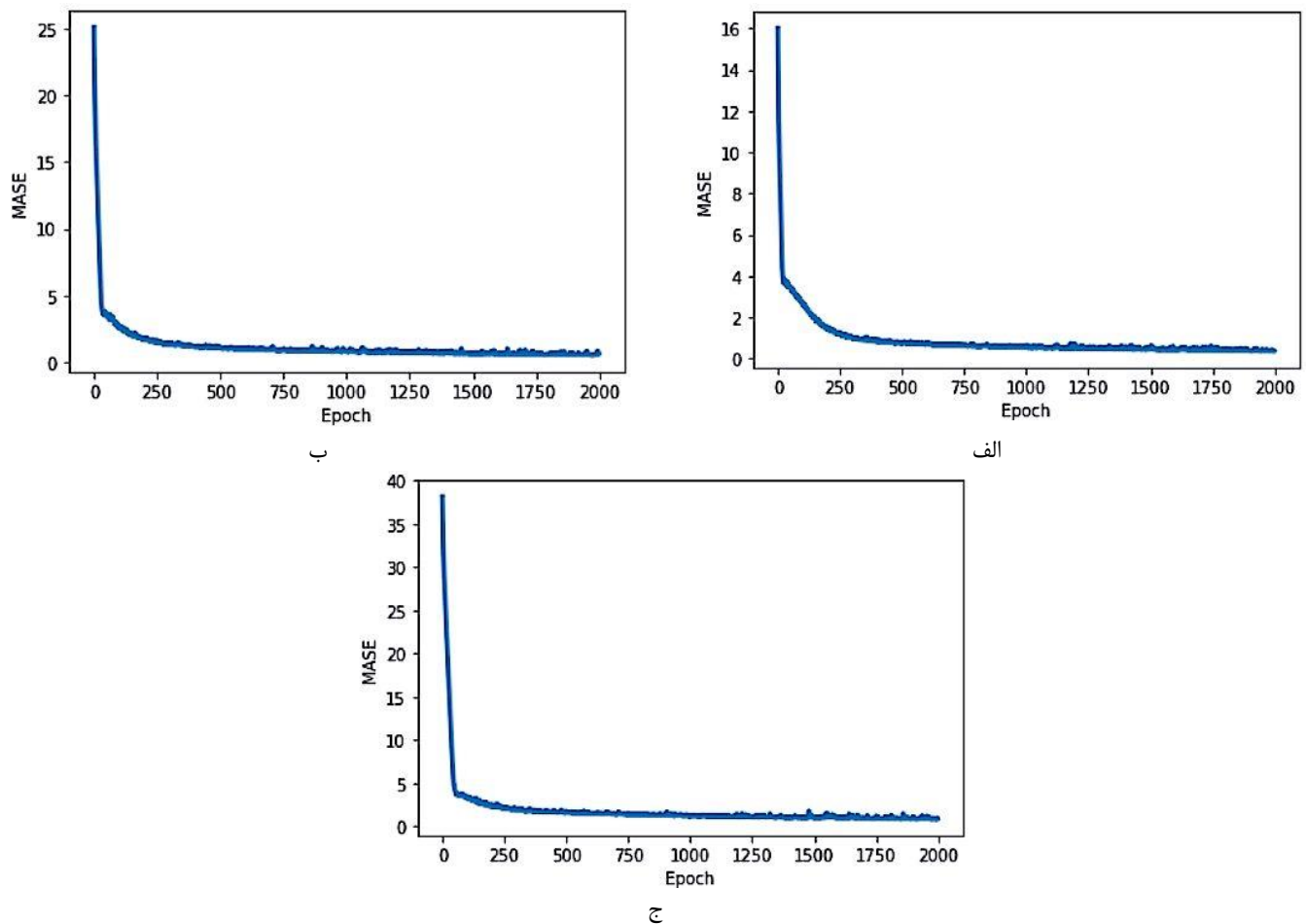
شکل ۹. مقایسه نمایه آخر اصلی و نمایه آخر بازسازی شده توسط مدل رتبه‌کاسته تابع جریان، خطوط سیاه‌رنگ نمایه اصلی، (الف) بازسازی با استفاده از ۷ مود، (ب) با استفاده از ۱۰ مود و (ج) با استفاده از ۱۵ مود

Fig .9. Comparison of the last original data (black lines) and the last snapshot of stream function field reconstructed by the reduced order model (a) reconstruction using 7 modes and (b) using 10 modes and (c) using 15 modes



شکل ۱۰. تغییرات خطای اندازه‌گیری دقت پیش‌بینی برای پیش‌بینی شبکه حافظه کوتاه‌مدت ماندگار با مراحل تکرار روی تمام نمونه‌ها با استفاده از: (الف) ۱۰ مود و (ب) ۱۵ مود

Fig. 10. MASE for the LSTM prediction on all samples by using (a) 10 modes and (b) 15 modes



شکل ۱۱. نمودار خطا با توجه به درصد داده‌های آموزش مختلف. (الف) ۹۰ درصد داده آموزش، (ب) ۵۰ درصد داده آموزش، (ج) ۳۰ درصد داده آموزش

Fig. 11. MASE based on the percentage of different training data (a) 90% training data (b) 50% training data, (c) 30% training data

of Aircraft, 50(4) (2013) 1106-1116.

۷- نتیجه گیری

در سال‌های اخیر روش‌های مختلفی به منظور ایجاد مدل‌های رتبه کاسته توسعه داده شده‌است. روش تجزیه متعامد بهینه یکی از روش‌هایی است که به طور گسترده در حوزه‌های مختلف، مورد استفاده قرار گرفته‌است. این روش یک الگوی ریاضی برای استخراج خصوصیات آماری غالب از سیستم‌های دینامیکی با شناسایی مودهایی با انرژی بیشتر می‌باشد. یکی از رویکردهایی که به منظور بهبود عملکرد مدل‌های رتبه کاسته مبتنی بر روش تجزیه متعامد بهینه ارائه شده مدل‌های ترکیبی می‌باشد. در این پژوهش، یک روش رتبه کاسته مبتنی بر ترکیب تجزیه متعامد بهینه و الگوریتم یادگیری عمیق و به صورت مشخص شبکه حافظه کوتاه‌مدت ماندگار ارائه شده‌است. این روش ابتدا مودهای تجزیه متعامد بهینه و ضرایب زمانی آنها را برای داده‌های شبیه‌سازی شده (نمایه‌ها) محاسبه کرده سپس از یک مدل شبکه حافظه کوتاه‌مدت ماندگار به منظور پیش‌بینی ضرایب زمانی مودها استفاده می‌کند. در واقع تعداد درجات آزادی مدل رتبه کاسته نسبت به مدل اصلی کاهش یافته و برای شبیه‌سازی تغییرات زمانی و پیش‌بینی رفتار سیستم می‌توان از مدل رتبه کاسته استفاده کرد. نتایج بدست آمده برای پیش‌بینی ضرایب زمانی نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی ضمن داشتن دقت بالا و مناسب، می‌تواند زمان محاسبات را نیز تا حد زیادی کاهش دهد. از نظر مرتبه زمانی، تولید نمایه‌ها (حتی با تعداد کم و متوسط) با استفاده از این روش؛ زمان قابل توجهی نیاز دارد. به طور نمونه برای تولید ۹۰ نمایه با یک سیستم محاسباتی شخصی زمانی در حدود ۶ ساعت نیاز می‌باشد. در حالی که استفاده از با استفاده از روش پیشنهاد شده در این پژوهش، با همان سیستم حدود ۱۵ دقیقه زمان نیاز دارد که کاهش قابل توجهی در زمان محاسبات را نشان می‌دهد. همچنین در برآوردهای صورت گرفته زمان مورد نیاز با استفاده از شبیه‌سازی مبتنی بر دینامیک سیالات محاسباتی برای محدوده‌ای که به عنوان تست (پیش‌بینی مدل) لحاظ شده ۳۰۰۰۰ برابر بیشتر از روش پیشنهادی می‌باشد.

منابع

- [3] S.A. Nahvi, M.A. Bazaz, H. Khan, Model order reduction in power electronics: Issues and perspectives, in: 2017 International Conference on Computing, Communication and Automation (ICCCA), IEEE, 2017, pp. 1417-1421.
- [4] M.A. Cardoso, L.J. Durlofsky, P. Sarma, Development and application of reduced-order modeling procedures for subsurface flow simulation, International journal for numerical methods in engineering, 77(9) (2009) 1322-1350.
- [5] D.B. Segala, D. Chelidze, Robust and dynamically consistent model order reduction for nonlinear dynamic systems, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 137(2) (2015) 021011.
- [6] K.T. Carlberg, Model reduction of nonlinear mechanical systems via optimal projection and tensor approximation, Stanford University, 2011.
- [7] M.F.A. Azeez, A.F. Vakakis, Numerical and experimental analysis of a continuous overhung rotor undergoing vibro-impacts, International journal of non-linear mechanics, 34(3) (1999) 415-435.
- [8] R. Kappagantu, B. Feeny, An "optimal" modal reduction of a system with frictional excitation, Journal of Sound and vibration, 224(5) (1999) 863-877.
- [9] Y. Liang, W. Lin, H. Lee, S. Lim, K. Lee, H. Sun, Proper orthogonal decomposition and its applications—part II: Model reduction for MEMS dynamical analysis, Journal of Sound and Vibration, 256(3) (2002) 515-532.
- [10] X. Ma, A.F. Vakakis, L.A. Bergman, Karhunen-Loeve modes of a truss: transient response reconstruction and experimental verification, AIAA journal, 39(4) (2001) 687-696.
- [11] X. Ma, A.F. Vakakis, Karhunen-Lo-ccedil; ve Decomposition of the Transient Dynamics of a Multibay Truss, AIAA journal, 37(8) (1999) 939-946.
- [12] A. Steindl, H. Troger, Methods for dimension reduction and their application in nonlinear dynamics, International Journal of Solids and Structures, 38(10-13) (2001) 2131-2147.
- [13] M.I. Friswell, D.J. Inman, Sensor validation for smart
- [1] Z. Bai, P.M. Dewilde, R.W. Freund, Reduced-order modeling, Handbook of numerical analysis, 13 (2005) 825-895.
- [2] K.H. Park, S.O. Jun, S.M. Baek, M.H. Cho, K.J. Yee, D.H. Lee, Reduced-order model with an artificial neural network for aerostructural design optimization, Journal

- [23] X. Chen, S. Akella, I. Navon, A dual-weighted trust-region adaptive POD 4-D Var applied to a finite-volume shallow water equations model on the sphere, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 68(3) (2012) 377-402.
- [24] R. Ștefănescu, I.M. Navon, POD/DEIM nonlinear model order reduction of an ADI implicit shallow water equations model, *Journal of Computational Physics*, 237 (2013) 95-114.
- [25] R. Ștefănescu, A. Sandu, I.M. Navon, Comparison of POD reduced order strategies for the nonlinear 2D shallow water equations, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 76(8) (2014) 497-521.
- [26] D.A. Bistriian, I.M. Navon, An improved algorithm for the shallow water equations model reduction: Dynamic Mode Decomposition vs POD, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 78(9) (2015) 552-580.
- [27] D. Xiao, C. Heaney, L. Mottet, F. Fang, W. Lin, I. Navon, Y. Guo, O. Matar, A. Robins, C. Pain, A reduced order model for turbulent flows in the urban environment using machine learning, *Building and Environment*, 148 (2019) 323-337.
- [28] M. Moayyedi, Reconstruction of Gappy Unsteady Flow Fields using Improved Reduced Order POD Model based on Temporal Decomposition Procedure, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 49(1) (2017) 101-112. (in persian)
- [29] D. Kosambi, Statistics in function space, in: DD Kosambi, Springer, 2016, pp. 115-123.
- [30] M. Loeve, *Processus stochastique et mouvement Brownien*, (1948) 366-420.
- [31] K. Karhunen, *Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung: akademische Abhandlung*, Sana, 1947.
- [32] V.S. Pugachev, The general theory of correlation of random functions, *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, 17(5) (1953) 401-420.
- [33] A. Obukhov, Statistical description of continuous fields, *Transactions of the Geophysical International Academy structures, Journal of intelligent material systems and structures*, 10(12) (1999) 973-982.
- [14] G. Kerschen, P. De Boe, J.-C. Golinval, K. Worden, Sensor validation using principal component analysis, *Smart materials and structures*, 14(1) (2004) 36.
- [15] B. Feeny, On proper orthogonal co-ordinates as indicators of modal activity, *Journal of Sound and Vibration*, 255(5) (2002) 805-817.
- [16] S. Han, B. Feeny, Application of proper orthogonal decomposition to structural vibration analysis, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17(5) (2003) 989-1001.
- [17] K. Fukunaga, *Introduction to statistical pattern recognition*, Elsevier, 2013.
- [18] D. Xiao, F. Fang, J. Du, C. Pain, I. Navon, A. Buchan, A.H. Elsheikh, G. Hu, Non-linear Petrov–Galerkin methods for reduced order modelling of the Navier–Stokes equations using a mixed finite element pair, *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering*, 255 (2013) 147-157.
- [19] D. Xiao, F. Fang, C. Pain, G. Hu, Non-intrusive reduced-order modelling of the Navier–Stokes equations based on RBF interpolation, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 79(11) (2015) 580-595.
- [20] F. Fang, T. Zhang, D. Pavlidis, C. Pain, A. Buchan, I. Navon, Reduced order modelling of an unstructured mesh air pollution model and application in 2D/3D urban street canyons, *Atmospheric Environment*, 96 (2014) 96-106.
- [21] M. Diez, E.F. Campana, F. Stern, Design-space dimensionality reduction in shape optimization by Karhunen–Loève expansion, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 283 (2015) 1525-1544.
- [22] A. Manzoni, F. Salmoiraghi, L. Heltai, Reduced Basis Isogeometric Methods (RB-IGA) for the real-time simulation of potential flows about parametrized NACA airfoils, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 284 (2015) 1147-1180.

- memory-networks for machine reading, arXiv preprint arXiv:1601.06733, (2016).
- [41] S.M. Rahman, Reduced Order Modeling of Geophysical Flows Using Physics-based and Data-driven Modeling Techniques, PhD diss, Oklahoma State University, 2019.
- [42] H. Ahmad, Machine learning applications in oceanography, Aquatic Research, 2(3) (2019) 161-169.
- [43] G. Batchelor, Turbulence, coherent structures, dynamical system, and symmetry, in, Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2000.
- [44] O. San, T. Iliescu, A stabilized proper orthogonal decomposition reduced-order model for large scale quasigeostrophic ocean circulation, Advances in Computational Mathematics, 41(5) (2015) 1289-1319.
- [45] O. San, A.E. Staples, Z. Wang, T. Iliescu, Approximate deconvolution large eddy simulation of a barotropic ocean circulation model, Ocean Modelling, 40(2) (2011) 120-132.
- [46] R.J. Hyndman, A.B. Koehler, Another look at measures of forecast accuracy, International journal of forecasting, 22(4) (2006) 679-688.
- Nauk USSR, 24(24) (1954) 3-42.
- [34] S.M. Rahman, S.E. Ahmed, O. San, A dynamic closure modeling framework for model order reduction of geophysical flows, Physics of Fluids, 31(4) (2019) 046602.
- [35] M. Moayyedi, M.T.R. , F.S. , Calibrated Reduced Order POD Model for Simulation of Unsteady Incompressible Flows, Fluid Mechanics & Aerodynamics Journal, 1(1) (2012))in persian).
- [36] Y. Liang, H. Lee, S. Lim, W. Lin, K. Lee, C. Wu, Proper orthogonal decomposition and its applications—Part I: Theory, Journal of Sound and vibration, 252(3) (2002) 527-544.
- [37] S. Ravindran, Proper orthogonal decomposition in optimal control of fluids, National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center, 1999.
- [38] S.L. Brunton, B.R. Noack, P. Koumoutsakos, Machine learning for fluid mechanics, Annual Review of Fluid Mechanics, 52 (2020) 477-508.
- [39] C. Olah, Understanding LSTM Networks, in, 2015.
- [40] J. Cheng, L. Dong, M. Lapata, Long short-term

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Golzar, M. K. Moayyedi, F. Fotouhi, Development of a Reduced Order Model of Geostrophic Flow based on a Combination of Proper Orthogonal Decomposition and Long-Short Term Memory Network, Amirkabir J. Mech Eng., 54(11) (2023) 2583-2600.

DOI: 10.22060/mej.2023.20278.7205



