



دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
(پلی تکنیک تهران)

دوره ۴۸، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۵، صفحه ۳۳۱ تا ۳۴۶  
Vol. 48, No. 4, Winter 2017, pp. 331-346



نشریه علمی پژوهشی امیرکبیر - مهندسی مکانیک  
AmirKabir Journal of Science & Research  
Mechanical Engineering  
ASJR-ME

## پاسخ تحلیلی ارتعاش آزاد غیرخطی نانو ورق مستطیلی با شرایط مرزی مختلف با استفاده از تئوری غیرمحل

غلامعلی ورزندیان<sup>۱\*</sup>، سیما ضیایی<sup>۲</sup>

۱- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه یاسوج

۲- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه یاسوج

(دریافت: ۱۳۹۴/۲/۳۱ پذیرش: ۱۳۹۴/۶/۲۲)

### چکیده

در این مقاله، با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحل اثر مقیاس کوچک بر روی ارتعاش آزاد غیرخطی نانو ورق نازک همگن مورد بررسی قرار گرفته است. فرمول‌بندی براساس تئوری ورق کلاسیک (مدل کیرشهف) انجام شده و مدل غیرخطی فون کارمن در روابط جابجایی کرنشی استفاده شده است. برای در نظر گرفتن مقیاس کوچک و اثر غیرخطی هندسی، معادلات دیفرانسیل حاکم بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحل به همراه مدل هندسی فون کارمن استخراج و از اثر اینرسی چرخشی و تنش برشی چشم‌پوشی شده است. با وجود مرتبه سه غیرخطی، معادله دافینگ به کمک انتگرال بیضوی برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی حل شده است. همچنین بعضی پاسخ‌های تحلیلی جابجایی عمودی به کمک توابع بیضوی ژاکوبی ارائه شده است. راندمان و دقت روش با مقایسه نتایج به دست آمده با مقالات در دسترس مورد بررسی قرار گرفته است. اثرات پارامترهای مختلف بر روی ارتعاشات غیرخطی نانو ورق استخراج شده و همچنین احتمال وقوع پدیده تشدید داخلی در نانو ورق مستطیلی مورد بررسی قرار گرفته است.

### کلمات کلیدی:

ارتعاش آزاد غیرخطی، تئوری غیرمحل ورق، انتگرال بیضوی، تابع بیضوی ژاکوبی، تشدید داخلی.

Please cite this article using:

Varzandian, G. A., Ziaei, S., 2017. "Analytical Solution of Non-Linear Free Vibration of Thin Rectangular Plates with Various Boundary Conditions Based on Non-Local Theory". *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 48(4), pp. 331-346.

نویسنده مسئول و عهده‌دار مکاتبات: Email: varzandian@gmail.com

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:



## ۱- مقدمه

مورد بررسی قرار داده‌اند [۱۳]. بررسی رفتار پس از کماتش نانوتیر با در نظر گرفتن همزمان دو اثر کشش سطحی و اثرات غیرمحل توسط مایترا و بوز انجام گرفته و نتایج نشان می‌دهند که اثرات سطحی فرایند کماتش را به تاخیر می‌اندازد؛ در حالی که، اثرات غیرمحل ناپایداری را بیشتر می‌کند [۱۴]. رفتار پس از کماتش ورق‌های گرافن چندلایه تحت فشار دومیحوره غیریکنواخت توسط فرج‌پور و همکاران ارائه شده و اثر پارامترهای مختلف بر رفتار ورق گرافن چندلایه بر اساس تئوری غیرمحل بررسی شده است [۱۵]. لستاری و هاناگود با استفاده از توابع بیضوی ژاکوبی برخی حل‌های تحلیلی ارتعاشات تیر کماتش کرده را با شرایط مرزی مختلف ارائه کرده‌اند [۱۶]. رفتار تشدید غیرخطی میکروتیر در حالت کماتش و بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده توسط فرخی و همکاران مورد بررسی قرار گرفته و با استفاده از روش گالرکین معادلات حرکت با مشتقات جزئی به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده است [۱۷]. برخلاف نانو لوله‌ها و نانو تیرها، حل تحلیلی و فرم بسته ارتعاشات نانو ورق‌ها کمتر دیده شده است. در این مقاله با استفاده از معادلات تعادل ورق و بکارگیری تئوری غیرمحل ارینگن، معادلات استخراج و با کمک انتگرال بیضوی نوع اول فرکانس طبیعی ورق مستطیلی محاسبه شده است.

## ۲- فرمول‌بندی مساله نانو ورق غیرمحل

طبق تئوری غیر محل ارینگن، تنش در یک نقطه مرجع داخل جسم مانند  $x$  نه تنها به کرنش نقطه  $x$  بلکه به کرنش‌های تمام نقاط داخل جسم وابسته است. این تئوری با پیش‌بینی‌های ناشی از تئوری اتمی دینامیک شبکه‌ای مولکولی و مشاهدات مربوط به پراکندگی مولکولی منطبق است. در حد، هنگامی که اثرات کرنش در دیگر نقاط به جز نقطه  $x$  نادیده گرفته شود، تئوری الاستیسیته کلاسیک (محل) استخراج خواهد شد. برای اجسام همگن و ایزوتروپیک، تئوری خطی الاستیسیته غیرمحل<sup>۲</sup> به یک مجموعه معادلات انتگرال دیفرانسیل جزئی برای میدان جابجایی منجر می‌شود که به‌طور عمومی حل آن دشوار است. برای دسته‌های خاصی از هسته انتگرال، این معادلات به یک مجموعه معادلات دیفرانسیل جزئی منفرد کاهش می‌یابد. برای جامد الاستیک همگن و ایزوتروپیک، تئوری خطی با مجموعه معادلات (۱) تا (۴) بیان می‌شود [۳]:

$$t_{kl,k} + \rho(f_l - \ddot{u}_l) = 0, \quad (1)$$

$$t_{kl}(x) = \int_V \alpha(|x' - x|, \tau) \sigma_{kl}(x') dv(x'), \quad (\tau = e_0 a / l) \quad (2)$$

$$\sigma_{kl}(x') = \lambda e_{rr}(x') \delta_{kl} + 2\mu e_{kl}(x'), \quad (3)$$

$$e_{kl}(x') = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k(x')}{\partial x'_l} + \frac{\partial u_l(x')}{\partial x'_k} \right) \quad (4)$$

خواص استثنایی مکانیکی، حرارتی و الکتریکی نانو سازه‌ها مانند نانو لوله‌ها، نانو سیم‌ها و نانو ورق‌ها نویدبخش کاربردهای متعدد سامانه‌های میکرو/نانو مکانیکی است [۱، ۲]. نانو ورق‌های ساخته‌شده از مواد نانو دارای کاربردهای فراوان در ادوات تجاری و نظامی<sup>۱</sup> NEMS و<sup>۲</sup> MEMS است. در عصر امروز تحلیل دقیق رفتار مکانیکی به منظور طراحی و افزایش قابلیت اعتماد نانو ابزارها امری ضروری است. ارتعاشات نانو سازه‌ها مانند نانو ورق‌ها اهمیت زیادی دارد و تئوری‌ها و روش‌های متعددی برای توضیح پارامتر مقیاس بر رفتار ارتعاشی نانو ورق‌ها توسعه داده شده است. ارینگن رفتار ارتعاشی نانو ورق را با استفاده از مدل‌های محیط پیوسته غیرمحل بررسی نموده است [۳، ۴]. وی اثر مقیاس کوچک را با معرفی یک پارامتر جدید که آن را پارامتر مقیاس نام‌گذاری کرد، لحاظ نمود. تئوری تنش کوپل که در دهه ۱۹۶۰ توسط کوپتر [۵] پایه‌گذاری شد، دارای ۴ ثابت ماده (۲ ثابت کلاسیک و ۲ ثابت اضافی) بود. در این حالت تانسور تنش الزاما متقارن نیست. در تئوری گرادیان کرنشی که در سال ۱۹۶۸ توسط میندین و اشل پایه‌گذاری شد [۶]، چگالی انرژی پتانسیل علاوه بر کرنش به گرادیان کرنش نیز وابسته بوده که این موضوع باعث می‌شود انرژی پتانسیل تغییر شکل تابعی از ۶ مولفه کرنش و ۱۸ مولفه گرادیان کرنش باشد. به دلیل پدید آمدن دستگاهی متشکل از ۶۳ معادله و مجهول، استفاده از این روش با مشکلات فراوانی همراه بود. با الهام گرفتن از تئوری گرادیان کرنشی، تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده در سال ۲۰۰۲ توسط یانگ و همکاران ارائه شد [۷]. در این مدل چگالی انرژی کرنشی تابعی از تانسورهای کرنش (مزدوج با تانسور تنش) و انحنای (مزدوج با تانسور تنش کوپل) است. ردی و کیم این تئوری را برای تحلیل ورق‌های مدرج تابعی و با در نظر گرفتن تئوری مرتبه سه ورق توسعه داده‌اند [۸]. برادان و فادیکار تئوری الاستیسیته غیرمحل را بر پایه تئوری غیرمحل ارینگن برای ارتعاشات نانو ورق ارائه کرده‌اند [۹]. علی بیگلو ارتعاشات آزاد نانو ورق را با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی توسعه داده و با استفاده از مکانیک محیط پیوسته غیرمحل و روش فضا-حالت و بسط سری فوریه، یک فرم حل بسته برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی نانو ورق مستطیلی با تکیه‌گاه‌های ساده ارائه نموده است [۱۰]. ستوده و همکاران ارتعاشات آزاد غیرخطی ورق گرافن ارتوتروپیک را با استفاده از تئوری ورق غیرمحل میندین بررسی نموده و با استفاده از روش مربع‌سازی دیفرانسیل، معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی را به دستگاه معادلات مقدار ویژه جبری غیرخطی کاهش داده و برای حالات مختلف شرایط مرزی پاسخ خود را ارائه کرده‌اند [۱۱]. اثر انرژی سطحی بر رفتار غیرخطی پس از کماتش نانو ورق توسط برادران وانگ ارائه شده و تاثیر پارامتر مقیاس مورد مطالعه قرار گرفته است [۱۲]. اصغری فرد شریانی و حائری یزدی ارتعاشات آزاد نانو تیر مدرج تابعی را با در نظر گرفتن اثرات سطحی و مدل تیر اولر - برنولی و فرضیات غیرخطی هندسی فون کارمن

1 Nano Electro Mechanical System

2 Micro Electro Mechanical System

راستای  $z$  و با صرف نظر از اینرسی چرخشی، معادلات حاکم بر ورق نازک مستطیلی با تکیه بر تئوری تغییرشکل‌های بزرگ فون کارمن را به صورت رابطه (۹) بیان کرده است [۱۸]:

$$\frac{1}{E} [\nabla^4 \phi] = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$D \nabla^4 w + h \left[ \frac{\rho}{h} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{P}{h} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (9)$$

که در روابط فوق  $\Phi = \phi h$  است. گفتنی است که معادله اول ناشی از معادله سازگاری ورق بوده و معادله دوم از معادله حرکت در راستای عمودی  $z$  حاصل شده است. برای اعمال تئوری غیرمحملی ارینگن با جایگذاری تنش محلی با تنش غیرمحملی (رابطه (۵))، معادلات نهایی استخراج خواهد شد. با تعریف تنش‌های منتهجه غیرمحملی به صورت:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{nl} \\ \sigma_{yy}^{nl} \\ \tau_{xy}^{nl} \end{Bmatrix} dz, \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{nl} \\ \sigma_{yy}^{nl} \\ \tau_{xy}^{nl} \end{Bmatrix} z dz \quad (10)$$

کرنش‌ها بر حسب نیروهای داخلی خواهد شد:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{h} (1 - \mu^2 \nabla^2) \begin{Bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

که  $\nu$  ضریب پواسون و  $E$  مدول یانگ است. بنابراین:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{1}{h} (1 - \mu^2 \nabla^2) \left( \frac{1}{E} \frac{\partial^2 N_x}{\partial y^2} - \frac{\nu}{E} \frac{\partial^2 N_y}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{1}{h} (1 - \mu^2 \nabla^2) \left( \frac{-\nu}{E} \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} + \frac{1}{E} \frac{\partial^2 N_y}{\partial x^2} \right), \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{h} (1 - \mu^2 \nabla^2) \left( \frac{1}{G} \frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial x \partial y} \right)$$

در نتیجه معادله سازگاری تغییرشکل‌ها با در نظر گرفتن تئوری غیرمحملی عبارت است از:

$$\frac{1}{E} (1 - \mu^2 \nabla^2) [\nabla^4 \phi] = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (13)$$

همچنین با اعمال معادله حرکت در جهت  $z$  و با طی کردن روندی که برای معادله دوم (۹) در حل کلاسیک مرجع [۱۸] گفته شده و جایگذاری کمیت‌های غیرمحملی و صرف نظر از جمله‌های مرتبه بالا هنگام گشتاورگیری در راستاهای  $x$  و  $y$ ، می‌توان نوشت:

که در آنها  $t_{kl}$  تانسور تنش،  $\rho$  چگالی،  $f_l$  چگالی نیروی بدنه،  $u_l$  بردار جابجایی،  $\sigma_{kl}(x')$  تانسور تنش ماکروسکوپی (کلاسیک) و  $\lambda$  و  $\mu$  ثابت‌های لامی هستند. همچنین  $\alpha(|x'-x|)$  ضریب غیرمحملی (یا تابع کرنل غیرمحملی) خوانده می‌شود؛  $e_0$  یک ثابت ماده،  $a$  طول مشخصه داخلی و  $l$  طول مشخصه خارجی نام دارد. تفاوت تئوری غیرمحملی و تئوری محلی در رابطه (۲) مشخص می‌شود که در آن برای محاسبه تانسور تنش، انتگرال‌گیری بر روی کل حجم انجام می‌شود. فرم انتگرالی روابط متشکله، فرمول‌بندی مساله الاستیسیته غیرمحملی را با دشواری مواجه می‌سازد. یک فرم دیفرانسیل معادل به صورت زیر بیان می‌شود:

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) t = \sigma, \quad \mu = e_0 a \quad (5)$$

که  $\mu$  پارامتر غیرمحملی،  $\sigma$  تنش محاسبه شده از تئوری کلاسیک و  $t$  تانسور تنش ناشی از تئوری غیرمحملی است [۳]. بر این اساس و با توجه به مولفه‌های کرنش غیرخطی در صفحه میانی ورق:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (6)$$

معادله حاکم بر یک ورق مستطیلی نانو مقیاس با رابطه (۷) بیان می‌شود [۹]:

$$-D \nabla^4 w + \mu \nabla^2 [-P - \frac{\partial}{\partial x} (N_x \frac{\partial w}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y} (N_y \frac{\partial w}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial x} (N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial y} (N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x}) + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m_2 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} \right)] + P + \frac{\partial}{\partial x} (N_x \frac{\partial w}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (N_y \frac{\partial w}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial x} (N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x}) = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m_2 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \quad (7)$$

که در آن  $P$  بار خارجی عمودی،  $N_x$ ،  $N_y$ ،  $N_{xy}$  مولفه‌های نیروی داخلی ورق،  $w$  جابجایی عمودی،  $m_0$  و  $m_2$  ممان‌های جرمی اینرسی هستند و عبارتند از:  $m_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz$  و  $m_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho h^2 dz$ . همچنین  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  سفتی خمشی خوانده می‌شود. و نتسل [۱۸] برای در

نظر گرفتن کمانش ورق با تعریف تابع تنش ابری به صورت:

$$N_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (8)$$

و با در نظر گرفتن معادله سازگاری تغییر شکل‌ها در صفحه میانی ورق، اعمال معادله تعادل  $\vec{\Sigma F} = 0$  در راستاهای  $x$  و  $y$ ، معادله حرکت در

اما اگر پارامتر  $\mu$  مخالف صفر باشد، دو رابطه دوم (۱۶) به صورت زیر ساده خواهد شد:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\mu^2}{D} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \Big|_{x=a} \quad \text{or} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{\mu^2}{D} \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \Big|_{y=b} \quad (19)$$

و حل مساله دچار ابهام خواهد بود چرا که برای حل به فرم کلاسیک لازم است که سمت راست معادله برابر با صفر باشد. لازم به ذکر است که برای مساله تیر در این حالت (و همچنین حالت شرایط مرزی آزاد) این مشکل وجود نداشته و حل مساله برای کلیه شرایط مرزی امکان پذیر خواهد بود. به منظور رفع ابهام باید به دنبال رابطه کمکی دیگری بود که ارتباط ممان خمشی را با مولفه‌های جابجایی نانو ورق معین کند. بدین منظور با ممان‌گیری حول محورهای  $x$  و  $y$  می‌توان نوشت [۱۹]:

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + m_2 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2}, \quad (20)$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + m_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}$$

که  $Q_y$  و  $Q_x$  تنش‌های برشی منتجه هستند. هنگام ممان‌گیری باید توجه داشت که نیروهای داخلی در روابط ممان ظاهر نخواهند شد؛ زیرا، یا با محور ممان‌گیری موازی بوده و یا بر آن عمودند. با در نظر گرفتن رابطه دوم و مشتق‌گیری از طرفین:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - m_2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} \quad (21)$$

در صورتی که سمت راست معادله (۲۱) برابر با صفر باشد، تبدیل شرط مرزی تنش به شرط مرزی جابجایی و در نتیجه توسعه حل به روش کلاسیک امکان‌پذیر خواهد بود. حال باید دید در چه شرایطی این امر محقق می‌شود. بدین منظور جملات سمت راست معادله (۲۱) یک‌به‌یک مورد بررسی قرار خواهند گرفت. در ادامه از سه فرض ساده‌سازی به شرح زیر استفاده می‌شود:

(i) بنا به تعریف کرنش‌های گرین-لاگرانژ در گوشه‌های نانو ورق می‌توان نوشت [۲۰]:

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (22)$$

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = -\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y}$$

در صورتی که جابجایی نانو ورق در راستای محورهای  $x$  و  $y$  ناچیز در نظر گرفته شود، کرنش‌های مذکور و در نتیجه جمله اول سمت راست معادله (۲۱) قابل صرف‌نظر خواهد بود.

(ii) برای محاسبه جمله دوم باید توجه داشت که در حل کلاسیک

$$D\nabla^4 w + h(1 - \mu^2 \nabla^2) \left[ \frac{\rho}{h} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{P}{h} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (14)$$

در نهایت یک دستگاه دو معادله‌ای به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{E} (1 - \mu^2 \nabla^2) \left[ \nabla^4 \phi \right] = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$D\nabla^4 w + h(1 - \mu^2 \nabla^2) \left[ \frac{\rho}{h} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{P}{h} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (15)$$

ملاحظه می‌شود که با قرار دادن  $\mu=0$  در روابط (۱۵)، حل کلاسیک محلی روابط (۹) حاصل می‌شود.

### ۳- مدل‌سازی شرایط مرزی

در کتاب‌های مرجع، معمولاً شرایط مرزی به سه دسته اصلی تکیه‌گاه ساده، گیردار و آزاد تقسیم می‌شوند [۱۸]. در ادامه پس از توضیح هر یک، نحوه فرمول‌بندی بر اساس تئوری غیرمحلی در هر حالت توضیح داده شده است:  
الف) مرز با تکیه‌گاه ساده که با حرف مخفف S بیان می‌شود. در این نوع تکیه‌گاه جابجایی عمودی و ممان خمشی هر دو صفر است به عبارت دیگر:

$$W = M_x \Big|_{x=a} = 0 \quad \text{or} \quad W = M_y \Big|_{y=b} = 0 \quad (16)$$

که تعریف ممان‌های غیرمحلی بر حسب جابجایی‌ها برای نانو ورق ایزوتروپ عبارت است از [۹]:

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) M_x = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)$$

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) M_y = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \quad (17)$$

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) M_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

باید توجه داشت که در این حالت ترکیبی از شرایط مرزی جابجایی و تنش وجود دارد. در حالتی که پارامتر غیرمحلی  $\mu$  صفر باشد، شرایط مرزی به حالت کلاسیک کاهش یافته و شرایط مرزی کلا از جنس جابجایی خواهد شد. در این حالت شرایط مرزی معادل رابطه (۱۶) عبارت است از:

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \Big|_{x=a} = 0 \quad \text{or} \quad W = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \Big|_{y=b} = 0 \quad (18)$$

مشکل دیگری که در اینجا ملاحظه می‌شود، دشواری تبدیل شرایط مرزی به شرایط مرزی از نوع جابجایی است. در این قسمت با توجه به پیچیدگی روابط حاصل و عدم امکان ساده سازی، به فرمول‌بندی شرایط مرزی بر اساس جابجایی‌ها بسنده شده و در ادامه حل عددی فقط برای ترکیبی از شرایط مرزی ساده و گیردار ارائه خواهد شد. اگر گوشه  $x=a$  به عنوان گوشه آزاد در نظر گرفته شود، از صفر بودن نیروی برشی موثر نتیجه می‌شود:

$$Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (27)$$

و با توجه به تعریف تنش برشی منتجه و ممان خمشی می‌توان نوشت:

$$\int_{-h/2}^{h/2} G \gamma_{xz} dz + \frac{\partial}{\partial y} (\mu^2 \nabla^2 M_{xy}) - \frac{Gh^3}{6} \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (28)$$

که با استفاده از رابطه ممان حول محور  $y$  (رابطه دوم (20)) و ساده‌سازی چنین به دست می‌آید:

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) \int_{-h/2}^{h/2} G \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dz - \frac{Gh^3}{6} \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (29)$$

بدین ترتیب این شرط مرزی کلا از جنس جابجایی‌ها نوشته شد؛ به طور مشابه برای شرط مرزی ممان خمشی با استفاده از روابط (19) و (20) و ساده‌سازی می‌توان نوشت:

$$2\mu^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h/2}^{h/2} G \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dz - D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \nu D \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - m_2 \mu^2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (30)$$

بنابراین شرط مرزی دوم نیز کلا بر حسب جابجایی‌ها نوشته شد. برای حل مساله اکنون باید به دنبال توابع مجازی بود که روابط مرزی را ارضاء نمایند؛ اما، بر خلاف حالت تکیه‌گاه ساده ملاحظه می‌شود که در این حالت، ساده سازی شرایط مرزی و در نتیجه ارائه توابع مجاز به راحتی امکان‌پذیر نیست.

گفتنی است که فرمول‌بندی برای گوشه  $y=b$  به روش مشابه به دست می‌آید.

در ادامه با استفاده از یک سری توابع مجاز، ترکیبی از شرایط مرزی مختلف برای نانو ورق مستطیلی بررسی می‌شود.

انواع ترکیب شرایط مرزی قابل بررسی عبارت است از:  
SSSS: کلیه گوشه‌ها تکیه‌گاه ساده

اگر مرکز مختصات در گوشه ورق در نظر گرفته شود، یک تابع مجاز برای جابجایی عمودی نانو ورق به طول  $a$  و عرض  $b$  عبارت است از:

در حالت تکیه‌گاه ساده برای ممان پیچشی  $M_{xy}$  شرایط مرزی در گوشه‌ها در نظر گرفته نمی‌شود. در واقع با توجه به سومین معادله رابطه (17) در لبه‌های نانو ورق با تکیه‌گاه ساده می‌توان نوشت:

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) M_{xy} = 0 \quad (23)$$

که یک معادله لاپلاس غیرهمگن و بدون شرایط مرزی است و در حالت کلی جواب خصوصی نداشته و فقط دارای جوابی عمومی است. اما در اینجا به دلیل معین نمودن ممان خمشی و ارتباط آن با جابجایی‌ها تعریف شرطی اضافی اجتناب‌ناپذیر است در اینجا مشابه حالت تکیه‌گاه آزاد در حل کلاسیک عمل شده و شرایط مرزی به گونه‌ای تعدیل می‌شود که حل مساله دچار مشکل نشود. به عنوان مثال در اینجا با در نظر گرفتن  $M_{xy} = cte$  در گوشه سمت راست ورق جمله دوم سمت راست معادله (21) حذف می‌شود.

(iii) و بالاخره برای صفر نمودن آخرین جمله سمت راست معادله (21) کافی است از اینرسی چرخشی صرف‌نظر شود.

استدلال برای محاسبات مربوط به  $M_y$  به طور مشابه انجام می‌گیرد. (ب) مرز با تکیه‌گاه گیردار که با حرف مخفف C مشخص می‌شود. در این نوع تکیه‌گاه، جابجایی و شیب هر دو صفر هستند؛ به عبارت دیگر:

$$W = \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0 \quad \text{or} \quad W = \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0 \quad (24)$$

خوشبختانه در این حالت کلیه شرایط مرزی از نوع جابجایی بوده و بر خلاف حالت قبل (و حالت شرایط مرزی آزاد) متکی بر روابط ساختاری نیست؛ بنابراین، مانند حالت تئوری کلاسیک، جابجایی و شیب ورق قابل محاسبه است.

(ج) مرز با تکیه‌گاه آزاد که با حرف F معرفی می‌گردد. برای گوشه با تکیه‌گاه آزاد همانطور که از نام آن مشخص است، هیچ‌گونه تنشی بر روی آن اعمال نمی‌شود؛ بنابراین همه تنش‌های منتجه و ممانها باید صفر باشند، به عبارت دیگر:

$$M_x = M_{xy} = Q_x \Big|_{x=a} = 0 \quad \text{or} \quad M_y = M_{yx} = Q_y \Big|_{y=b} = 0 \quad (25)$$

در اینجا شرایط نسبت به حالت تکیه‌گاه ساده پیچیده‌تر است. برای هر وجه 3 شرط مرزی تعریف شده در حالی که تنها به دو شرط مرزی نیاز است؛ چرا که در غیر این صورت معادله حاکم شرط مرزی اضافی پیدا کرده و حل آن دچار مشکل می‌شود. برای حل این مشکل با تعریف نیروی برشی موثر  $V_x$  و  $V_y$ ، شرایط مرزی به 2 شرط مرزی به صورت زیر تقلیل می‌یابد [18]:

$$M_x = V_x \Big|_{x=a} = 0 \quad \text{or} \quad M_y = V_y \Big|_{y=b} = 0, \quad (26)$$

$$V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad V_y = Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}$$

SCCS: تکیه‌گاه ساده در طول  $x=-a/2$  و  $y=-b/2$  در سایر گوشه‌ها تکیه‌گاه گیردار

یک تابع مجاز در این حالت عبارت است از:

$$W = W_{mn}(t) \cos^3 \frac{(2m-1)\pi x}{a} \cos^3 \frac{(2n-1)\pi y}{b} \quad (40)$$

#### ۴- روش حل

در این قسمت روش حل با در نظر گرفتن تکیه‌گاه ساده ارائه شده است. محاسبات برای سایر حالت‌های شرایط مرزی مشابه خواهد بود.

الف) محاسبه  $\phi$

با در نظر گرفتن جابجایی عمودی به فرم سری فوریه دوگانه برای ورقی به طول  $a$  و عرض  $b$  (حل ناوبر):

$$W = W_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (41)$$

و در نظر گرفتن شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در گوشه‌ها و بار فشاری یکنواخت  $q_x$  در دو انتهای نانو ورق، با جایگذاری  $w$  در اولین رابطه معادلات (۱۵) پاسخ تابع تنش ایری عبارت است از:

$$\phi = \frac{EW_{mn}^2(t)}{32} \left[ \left( \frac{a}{b} \right)^2 \left( \frac{n}{m} \right)^2 \cos \frac{2m\pi x}{a} + \left( \frac{b}{a} \right)^2 \left( \frac{m}{n} \right)^2 \cos \frac{2n\pi y}{b} \right] - \frac{q_x y^2}{2h} W_{mn}^2(t) \quad (42)$$

در نتیجه نیروهای درون صفحه میانی ورق به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$N_x = - \frac{W_{mn}^2(t) \left( Ehm^2 \pi^2 \cos \frac{2n\pi y}{b} + 8a^2 q_x \right)}{8a^2}, \quad (43)$$

$$N_y = - \frac{W_{mn}^2(t) Ehn^2 \pi^2 \cos \frac{2m\pi x}{a}}{8b^2},$$

$$N_{xy} = 0$$

ب) محاسبه

در این بخش به منظور محاسبه جابجایی عمودی ورق، از روش گالرکین استفاده شده است. روش مذکور یک روش ساده، موثر و مناسب برای حل عددی معادلات دیفرانسیل و همچنین مسایل مقدار مرزی می‌باشد. از این روش به طور گسترده در شاخه‌های مختلف مکانیک جامدات مانند استاتیک، دینامیک و همچنین مسایل پایداری استفاده می‌شود.

فرمول عمومی روش گالرکین عبارت است از:

$$\int_0^b \int_0^a \Gamma_{mn} [\psi(x,y)] \psi(x,y) dx dy = 0 \quad (44)$$

که اپراتور  $\Gamma_{mn}$  عبارت سمت چپ معادله حرکت غیرخطی است.

$$W = W_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (31)$$

و اگر مرکز مختصات در مرکز ورق قرار گیرد:

$$W = W_{mn}(t) \cos \frac{(2m-1)\pi x}{a} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{b} \quad (32)$$

در ادامه به منظور ساده‌تر شدن توابع مجاز، برای سایر حالت‌ها مرکز ورق به عنوان مرکز مختصات در نظر گرفته می‌شود.

SCSC: تکیه‌گاه ساده در طول  $x=-a/2$ ,  $a/2$  و در سایر گوشه‌ها تکیه‌گاه گیردار

تابع مجاز در این حالت عبارت است از:

$$W = W_{mn}(t) \cos \frac{(2m-1)\pi x}{a} \cos^2 \frac{(2n-1)\pi y}{b} \quad (33)$$

SCSC: تکیه‌گاه ساده در طول  $b/2$ ,  $b/2$  و در سایر گوشه‌ها تکیه‌گاه گیردار

تابع مجاز در این حالت عبارت است از:

$$W = W_{mn}(t) \cos^2 \frac{(2m-1)\pi x}{a} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{b} \quad (34)$$

CCCC: کلیه گوشه‌ها تکیه‌گاه گیردار

در این حالت تابع مجاز عبارت است از:

$$W = W_{mn}(t) \cos^2 \frac{(2m-1)\pi x}{a} \cos^2 \frac{(2n-1)\pi y}{b} \quad (35)$$

CSSS: تکیه‌گاه گیردار در طول  $y=-b/2$  و در سایر گوشه‌ها تکیه‌گاه ساده

یک تابع مجاز در این حالت عبارت است از:

$$W = W_{mn}(t) \cos \frac{(2m-1)\pi x}{a} \cos^3 \frac{(2n-1)\pi y}{b} \quad (36)$$

SSSC: تکیه‌گاه گیردار در طول  $x=-a/2$  و در سایر گوشه‌ها تکیه‌گاه ساده

یک تابع مجاز در این حالت عبارت است از:

$$W = W_{mn}(t) \cos^3 \frac{(2m-1)\pi x}{a} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{b} \quad (37)$$

SCCC: تکیه‌گاه ساده در طول  $y=-b/2$  و در سایر گوشه‌ها تکیه‌گاه گیردار

یک تابع مجاز در این حالت عبارت است از:

$$W = W_{mn}(t) \cos^2 \frac{(2m-1)\pi x}{a} \cos^3 \frac{(2n-1)\pi y}{b} \quad (38)$$

CCCS: تکیه‌گاه ساده در طول  $x=-a/2$  و در سایر گوشه‌ها تکیه‌گاه گیردار

در این حالت یک تابع مجاز عبارت است از:

$$W = W_{mn}(t) \cos^3 \frac{(2m-1)\pi x}{a} \cos^2 \frac{(2n-1)\pi y}{b} \quad (39)$$

$$T = \frac{4}{\sqrt{2}} \int_{x_0}^0 \frac{d\lambda}{\left[ \int_{\lambda}^{x_0} f(\eta) d\eta \right]^{1/2}} \quad (49)$$

که با تغییر متغیر  $\lambda = x_0 \phi$  و جانشانی از معادله دافینگ نتیجه می‌شود:

$$T = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2A_1 + A_2 x_0^2}} \int_0^1 \frac{d\phi}{\sqrt{(1-\phi^2) \left( 1 + \frac{A_2 x_0^2}{2A_1 + A_2 x_0^2} \phi^2 \right)}} \quad (50)$$

و یا:

$$T = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2A_1 + A_2 x_0^2}} \int_0^1 \frac{d\phi}{\sqrt{(1-\phi^2)(1-k^2\phi^2)}}, \quad (51)$$

$$k = \sqrt{\frac{(B_4 + \mu^2 B_5) x_0^2}{2B_1 + (B_4 + \mu^2 B_5) x_0^2}}$$

انتگرال فوق یک انتگرال بیضوی نوع اول است. شرط وجود انتگرال بیضوی نوع اول عبارت است از:  $a0 \leq k^2 < 1$ ؛ به عبارت دیگر باید  $x_0 < \sqrt{\frac{-A_1}{A_2}}$  بنابراین فرکانس طبیعی ورق عبارت است از:

$$\omega_n = \frac{\pi \sqrt{2A_1 + A_2 x_0^2}}{2\sqrt{2} F(k, \pi/2)} \quad (52)$$

$$= \frac{\pi}{2F(k, \pi/2)} \sqrt{\frac{D_1 + (D_2 + \mu^2 D_3) x_0^2}{D_4 - \mu^2 D_5}}$$

که  $u = F(k, \theta) = \int_0^{\sin \theta} \frac{d\phi}{\sqrt{(1-\phi^2)(1-k^2\phi^2)}} = \int_0^{\theta} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}}$  و  $A_i, D_i = const$  است.

برای محاسبه جمله زمان‌مند جابجایی عمودی و مقدار نهایی  $W$  باید توجه کرد که در مساله غیرخطی برخلاف مساله خطی با تغییر شرایط اولیه و ضرایب ثابت مساله، رفتار پاسخ ممکن است به‌طور کلی دچار تغییرات قابل توجهی شود، مثلاً در مساله غیرخطی با تغییر شرط اولیه معادله، ممکن است پاسخ نوسانی به یک پاسخ غیرنوسانی تبدیل شود و یا عکس آن اتفاق بیفتد. با در نظر گرفتن این موضوع در چند حالت مختلف پاسخ تحلیلی مساله دنبال می‌گردد؛

**روش اول:** در این روش بدون توجه به شرایط اولیه معادله دیفرانسیل، حل مساله دنبال می‌شود. بدین منظور ۴ حالت مختلف در نظر گرفته می‌شود:

الف)  $A_1 > 0, A_2 < 0$  با توجه به تعریف انتگرال بیضوی نوع اول، با مشتق‌گیری و استفاده از تغییر متغیر می‌توان نوشت:

$$\left( \frac{dy}{du} \right)^2 = (1-y^2)(1-k^2 y^2) \quad (53)$$

جمله  $\psi(x,y)$  تابع شکل پایه بوده و برای شرایط مرزی مختلف متفاوت است.

$$\int_0^a \int_0^b \Gamma_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = 0 \quad (45)$$

با اعمال روش گالرکین بر مساله با تکیه‌گاه ساده:

$$\Gamma_{mn} = \left\{ D \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 + \rho \frac{\ddot{W}_{mn}(t)}{W_{mn}(t)} \right.$$

$$- h \left( C_1 \cos \frac{2n\pi y}{b} + \frac{q_x}{h} \right) \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 W_{mn}^2(t)$$

$$- h C_2 \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 W_{mn}^2(t) \cos \frac{2m\pi x}{a} -$$

$$\mu^2 \left[ -\rho \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{\ddot{W}_{mn}(t)}{W_{mn}(t)} + h \left( C_1 \cos \frac{2n\pi y}{b} + \frac{q_x}{h} \right) \times \right.$$

$$\left. \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 W_{mn}^2(t) - h C_2 \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 W_{mn}^2(t) \times \right.$$

$$\left. \left( \frac{18m^2 \pi^2}{a^2} \sin^2 \frac{m\pi x}{a} - \frac{13m^2 \pi^2}{a^2} \right) \right.$$

$$- \rho \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \frac{\ddot{W}_{mn}(t)}{W_{mn}(t)} - h C_1 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 W_{mn}^2(t) \times$$

$$\left. \left( \frac{18n^2 \pi^2}{b^2} \sin^2 \frac{n\pi y}{b} - \frac{13n^2 \pi^2}{b^2} \right) + q_x \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 W_{mn}^2(t) \right.$$

$$\left. + h C_2 \left( \frac{n\pi}{b} \right)^4 \cos \frac{2m\pi x}{a} W_{mn}^2(t) \right] \times W - P$$

و جایگذاری  $\phi$  در رابطه نتیجه می‌شود:

که مقادیر ثابت در پیوست (۱) آمده است. با جایگذاری در رابطه (۴۵) و انتگرال‌گیری نتیجه می‌شود:

$$\ddot{W}_{mn}(t) + A_1 W_{mn}(t) + A_2 W_{mn}^3(t) = 0, \quad (46)$$

$$A_1 = \frac{B_1}{B_2 - \mu^2 B_3}, A_2 = \frac{B_4 + \mu^2 B_5}{B_2 - \mu^2 B_3}, \quad A_i, B_i = cte$$

رابطه غیرخطی (۴۶) به معادله دافینگ مشهور است.

فرم عمومی معادله دیفرانسیل ارتعاشات غیرخطی به صورت  $m\ddot{x} + g(\dot{x}) + f(x) = F_0 \sin(\omega t)$  بدون حضور میراکننده و در نظر گرفتن شرایط اولیه  $\dot{x}(0)=0$  و  $x(0)=x_0$  نتیجه می‌شود:

$$\dot{x}(x) = \left[ 2 \int_x^{x_0} f(\eta) d\eta \right]^{1/2} \quad (48)$$

که  $\eta$  متغیر انتگرال‌گیری است. در نتیجه با مرتب‌سازی و انتگرال‌گیری بر حسب متغیر  $x$  برای محاسبه فرکانس طبیعی ورق در حالت ارتعاشات آزاد و فاقد میرایی می‌توان نوشت [۲۱]:

$$W = dn(t, k) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (64)$$

و در این حالت  $A_2=2$ .

(د)  $A_1 < 0, A_2 < 0$  مجدداً با توجه به تعریف انتگرال بیضوی نوع اول، با مشتق‌گیری و استفاده از تغییر متغیر  $\tan \theta = y$  می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (1+y^2)(1+y^2-k^2y^2) \quad (65)$$

همانند قبل با مشتق‌گیری از طرفین و ساده‌سازی به دست می‌آید:

$$y'' + (k^2 - 2)y + (2k^2 - 2)y^3 = 0 \quad (66)$$

با مقایسه این رابطه با معادله دافینگ نتیجه می‌شود:

$$W_{mn}(t) = sc(t, k) = \tan(\text{amp}(t, k)) \quad (67)$$

که  $sc(t, k)$  تابع بیضوی ژاکوبی تانژانت است. بنابراین فرم کامل جابجایی عمودی عبارت است از:

$$W = sc(t, k) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (68)$$

شرط وجود جواب در این حالت عبارت است از  $2A_1 - A_2 = -2$ .

ملاحظه می‌شود که روش ارائه‌شده فقط حالات خاصی را پوشش داده و طیف پاسخ محدود است. بنابراین روش دیگری نیز در اینجا ارائه می‌شود که طیف وسیع‌تری از پاسخ مساله را پوشش می‌دهد.

**روش دوم:** در این روش با در نظر گرفتن شرایط اولیه معادله دیفرانسیل، برخی حل‌های تحلیلی به دست می‌آید؛ معادله دیفرانسیل غیرخطی  $\ddot{x} + ax + bx^3 = 0$  (معادله دافینگ، رابطه (47)) با شرایط اولیه  $x(0) = X_0$  و  $\dot{x}(0) = 0$  در اینجا در نظر گرفته می‌شود. مجدداً چهار حالت مختلف در نظر گرفته و با استفاده از خواص مثلثاتی و مشتقی توابع بیضوی [22, 23] حل مساله به دست می‌آید. نتایج حاصل در زیر خلاصه شده است:

۱. به ازاء  $a > 0$  و  $b < 0$  پاسخ برابر است با  $x = X_0 \text{Sn}(k, \omega t + K)$  که  $\omega^2 = a - (1/2)bX_0^2$  و  $k^2 = bX_0^2 / (2a - bX_0^2)$  محدودیت جواب در این حالت عبارت است از  $|X_0| < \sqrt{-a/b}$ .

۲. بازاء  $a > 0$  و  $b > 0$  پاسخ برابر است با  $x = X_0 \text{Cn}(k, \omega t)$  که  $\omega^2 = a + bX_0^2$  و  $k^2 = bX_0^2 / 2(a - bX_0^2)$  برای جواب به دست آمده در این حالت محدودیتی وجود ندارد.

۳. بازاء  $a < 0$  و  $b > 0$  پاسخ برابر است با  $x = X_0 \text{Dn}(k, \omega t)$  که  $\omega^2 = \frac{bX_0^2}{2}$  و  $k^2 = 2\left(1 - \frac{a}{bX_0^2}\right)$  در این حالت نوسان حول

$x = \pm \sqrt{a/b}$  صورت گرفته و محدودیت جواب عبارت است از

$$|X_0| \neq \sqrt{-\frac{a}{b}} \quad \text{و} \quad |X_0| < \sqrt{-\frac{2a}{b}}$$

مجدداً با مشتق‌گیری از طرفین و ساده‌سازی بدست می‌آید:

$$y'' + (1+k^2)y - 2k^2y^3 = 0 \quad (54)$$

با مقایسه این رابطه با معادله دافینگ (رابطه 47) نتیجه می‌شود:

$$W_{mn}(t) = sn(t, k) = \sin(\text{amp}(t, k)) \quad (55)$$

که  $sn(t, k)$  تابع بیضوی ژاکوبی سینوسی است. بنابراین فرم کامل جابجایی عمودی عبارت است از:

$$W = sn(t, k) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (56)$$

شرط وجود جواب در این حالت عبارت است از  $2A_1 + A_2 = 2$ .

(ب)  $A_1 > 0, A_2 > 0$  با توجه به تعریف انتگرال بیضوی نوع اول، با مشتق‌گیری و استفاده از تغییر متغیر  $\cos \theta = y$  می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (1-y^2)(1-k^2+k^2y^2) \quad (57)$$

با مشتق‌گیری مجدد از طرفین و ساده‌سازی به دست می‌آید:

$$y'' + (1-2k^2)y + 2k^2y^3 = 0 \quad (58)$$

با مقایسه این رابطه با معادله دافینگ نتیجه می‌شود:

$$W_{mn}(t) = cn(t, k) = \cos(\text{amp}(t, k)) \quad (59)$$

که  $cn(t, k)$  تابع بیضوی ژاکوبی کسینوسی است. بنابراین فرم کامل جابجایی عمودی عبارت است از:

$$W = cn(t, k) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (60)$$

محدودیت جواب در این حالت عبارت است از  $A_1 + A_2 = 1$ .

(ج)  $A_1 < 0, A_2 > 0$  با توجه به تعریف انتگرال بیضوی نوع اول، با مشتق‌گیری و استفاده از تغییر متغیر  $\sqrt{1-k^2} \sin^2 \theta = y$  می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (1-y^2)(y^2+k^2-1) \quad (61)$$

با مشتق‌گیری مجدد از طرفین و ساده‌سازی به دست می‌آید:

$$y'' + (k^2-2)y + 2y^3 = 0 \quad (62)$$

با مقایسه این رابطه با معادله دافینگ نتیجه می‌شود:

$$W_{mn}(t) = dn(t, k) = \sqrt{1-k^2} \sin^2(\text{amp}(t, k)) \quad (63)$$

که  $dn(t, k)$  تابع بیضوی ژاکوبی دلتا است. بنابراین فرم کامل جابجایی عمودی عبارت است از:



| $\mu$ | $\frac{h}{a}$ | $\omega_{11}$ , $\left(\frac{b}{a}=1\right)$ |         | $\omega_{11}$ , $\left(\frac{b}{a}=2\right)$ |         |
|-------|---------------|--|---------|--|---------|
|       |               | 3D-TOE [10]                                  | Present | 3D-TOE [10]                                  | Present |
| ۱     | ۰/۱           | ۵/۰۹۳  | ۵/۰۸۸   | ۳/۴۸۸  | ۳/۴۸۲   |
|       | ۰/۰۵          | ۴/۷۳۳  | ۴/۷۱۶   | ۳/۳۱۶  | ۳/۳۱۲   |
| ۲     | ۰/۱           | ۴/۶۴۶  | ۴/۶۳۹   | ۳/۲۷۰  | ۳/۲۶۵   |
|       | ۰/۰۵          | ۴/۳۷۴  | ۴/۳۶۸   | ۳/۱۲۹  | ۳/۱۲۲   |
| ۳     | ۰/۱           | ۴/۲۹۹  | ۴/۲۹۲   | ۳/۰۸۸  | ۳/۰۸۲   |
|       | ۰/۰۵          | ۴/۰۸۵  | ۴/۰۷۹   | ۲/۹۷۰  | ۲/۹۶۴   |
| ۴     | ۰/۱           | ۴/۰۲۰  | ۴/۰۱۴   | ۲/۹۳۴  | ۲/۹۲۸   |

برای محاسبه نتایج عددی از مقادیر زیر استفاده شده است:

$$E = 1650 \text{ GPa}, \nu = 0.3, \rho = 2300 \text{ kg/m}^3$$

در جدول‌های ۲ و ۳ به ترتیب نسبت فرکانس طبیعی غیرمحللی به محللی حالت‌های اول و دوم بازاء مقادیر مختلف پارامتر مقیاس و نسبت اضلاع ورق آمده است.

جدول ۲: نسبت فرکانسی اول  $\omega^{nl}/\omega^l$  بر حسب پارامتر مقیاس و

نسبت اضلاع ورق  $a/b$

| $a/b$ | $\mu$ | $\omega^{nl}/\omega^l$ |
|-------|-------|------------------------|
| ۱     | ۰/۰   | ۱                      |
|       | ۰/۲   | ۰/۷۹۴                  |
|       | ۰/۴   | ۰/۵۴۳                  |
|       | ۰/۶   | ۰/۳۹۷                  |
|       | ۰/۸   | ۰/۳۱۴                  |
| ۰/۸   | ۰/۰   | ۱                      |
|       | ۰/۲   | ۰/۸۲۲                  |
|       | ۰/۴   | ۰/۵۶۷                  |
|       | ۰/۶   | ۰/۴۱۹                  |
|       | ۰/۸   | ۰/۳۳۴                  |

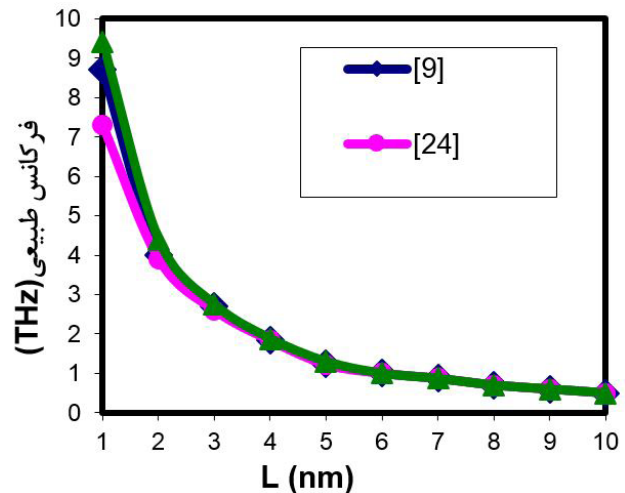
۴. بازاء  $a < 0$  و  $b < 0$  پاسخ برابر است با  $x = X_0 Sc(k, \omega t)$  که  $\omega^2 = a - \frac{bX_0^2}{2}$  و  $k^2 = 1 - \frac{bX_0^2}{2a - bX_0^2}$  . محدودیت جواب در این حالت عبارت است از  $|X_0| \leq \sqrt{a/b}$  .

### ۵- نتایج عددی

در این قسمت ابتدا دقت فرمول‌بندی حاضر به کمک یک نمونه نانو ورق مربعی بررسی شده است. سپس اثر پارامترهای مختلف بر ارتعاشات غیرخطی نانو ورق استخراج گردیده است.

مدل حاضر نزدیکی خوبی را با داده‌های عددی مقالات در دسترس [۲۴،۹] برای حالت نانو ورق مربعی ایزوتروپ نشان می‌دهد (شکل ۱). در این حالت از مقادیر زیر استفاده شده است [۲۴]:

$$E = 1.02 \text{ TPa}, \nu = 0.3, \rho = 2300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, h = 0.34 \text{ nm}, \mu = 1 \text{ nm}$$



شکل ۱: مقایسه بین فرکانس‌های اصلی داده شده توسط مدل حاضر با داده‌های مراجع [۲۴ و ۹]

به منظور اعتبارسنجی، همچنین نتایج بدست آمده در جدول ۱ با مرجع [۱۰] مقایسه شده و نشان می‌دهد دقت نتایج در حد قابل قبولی است.

جدول ۱: اعتبارسنجی فرکانس طبیعی بی بعد شده برای نانو ورق

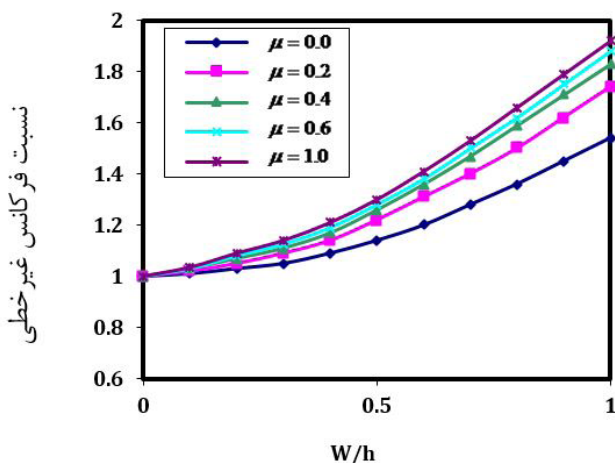
مستطیلی بازاء  $m=n=1$

| $\mu$ | $\frac{h}{a}$ | $\omega_{11}$ , $\left(\frac{b}{a}=1\right)$ |         | $\omega_{11}$ , $\left(\frac{b}{a}=2\right)$ |         |
|-------|---------------|--|---------|--|---------|
|       |               | 3D-TOE [10]                                  | Present | 3D-TOE [10]                                  | Present |
| ۰/۰۵  | ۰/۰۵          | ۵/۸۳۷  | ۵/۸۳۶   | ۳/۸۱۹  | ۳/۸۱۷   |
|       | ۰/۱           | ۵/۷۰۰  | ۵/۶۸۳   | ۳/۷۵۶  | ۳/۷۵۱   |
|       | ۰/۰۵          | ۵/۱۹۹  | ۵/۱۸۶   | ۳/۵۴۱  | ۳/۵۳۷   |

| $a/b$ | $\mu$ | $\omega^{nl} / \omega^l$ |
|-------|-------|--------------------------|
| 0.4   | 0.0   | 1                        |
|       | 0.2   | 0.753                    |
|       | 0.4   | 0.683                    |
|       | 0.6   | 0.457                    |
|       | 0.8   | 0.314                    |
| 0.2   | 0.0   | 1                        |
|       | 0.2   | 0.833                    |
|       | 0.4   | 0.707                    |
|       | 0.6   | 0.532                    |
|       | 0.8   | 0.373                    |

| $a/b$ | $\mu$ | $\omega^{nl} / \omega^l$ |
|-------|-------|--------------------------|
| 0.6   | 0.0   | 1                        |
|       | 0.2   | 0.849                    |
|       | 0.4   | 0.617                    |
|       | 0.6   | 0.446                    |
|       | 0.8   | 0.268                    |
| 0.4   | 0.0   | 1                        |
|       | 0.2   | 0.858                    |
|       | 0.4   | 0.634                    |
|       | 0.6   | 0.487                    |
|       | 0.8   | 0.394                    |
| 0.2   | 0.0   | 1                        |
|       | 0.2   | 0.885                    |
|       | 0.4   | 0.667                    |
|       | 0.6   | 0.516                    |
|       | 0.8   | 0.422                    |

شکل ۲ اثر پارامتر مقیاس بر روی نسبت فرکانسی غیرخطی را برای ورق مربعی نشان می‌دهد.



شکل ۳: نسبت فرکانسی دوم  $\omega^{nl} / \omega^l$  بر حسب پارامتر مقیاس و نسبت اضلاع ورق  $a/b$

شکل ۴: اثر تغییر پارامتر مقیاس بر نسبت فرکانس غیرخطی حالت اول نسبت به منحنی دامنه بی بعد شده برای ورق مستطیلی با  $a/h=20$

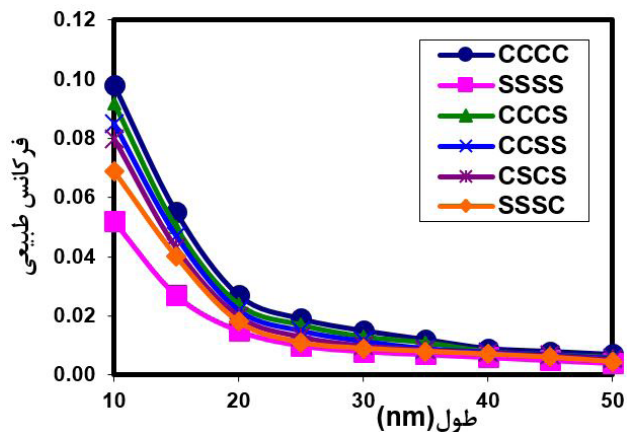
| $a/b$ | $\mu$ | $\omega^{nl} / \omega^l$ |
|-------|-------|--------------------------|
| 1     | 0.0   | 1                        |
|       | 0.2   | 0.623                    |
|       | 0.4   | 0.387                    |
|       | 0.6   | 0.246                    |
| 0.8   | 0.0   | 1                        |
|       | 0.2   | 0.647                    |
|       | 0.4   | 0.405                    |
|       | 0.6   | 0.251                    |
| 0.6   | 0.0   | 1                        |
|       | 0.2   | 0.664                    |
|       | 0.4   | 0.521                    |
|       | 0.6   | 0.313                    |
| 0.4   | 0.0   | 1                        |
|       | 0.2   | 0.664                    |
|       | 0.4   | 0.521                    |
|       | 0.6   | 0.313                    |
| 0.2   | 0.0   | 1                        |
|       | 0.2   | 0.664                    |
|       | 0.4   | 0.521                    |
|       | 0.6   | 0.313                    |

شکل ۴: اثر تغییر پارامتر مقیاس بر نسبت فرکانس غیرخطی حالت اول نسبت به منحنی دامنه بی بعد شده برای ورق مستطیلی با  $a/h=20$

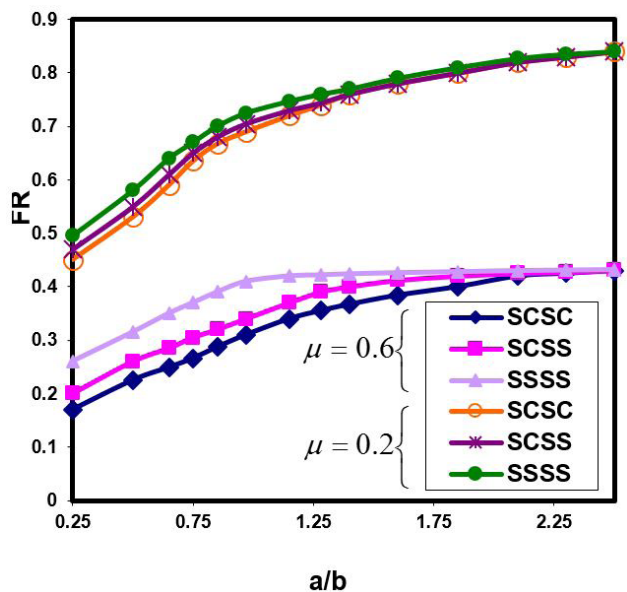
تاثیر نسبت اضلاع ورق بر نسبت فرکانس غیرخطی برای ورق با تکیه‌گاه‌های ساده در شکل ۳ نشان داده شده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود با افزایش پارامتر مقیاس تاثیر نسبت اضلاع ورق کاهش پیدا می‌کند.

در شکل ۴ مقایسه بین نسبت فرکانسی خطی و غیرخطی تحت تاثیر پارامتر مقیاس برای یک ورق مستطیلی انجام شده و نتایج نشان می‌دهند که با افزایش پارامتر مقیاس، پاسخ خطی و غیرخطی اختلاف بیشتری پیدا می‌کنند.

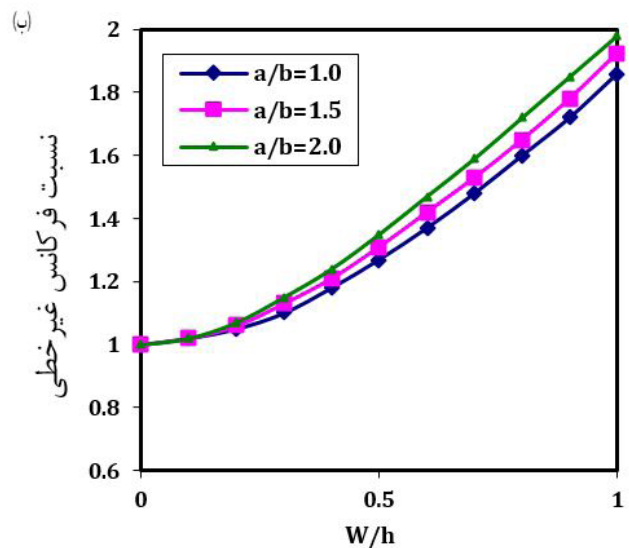
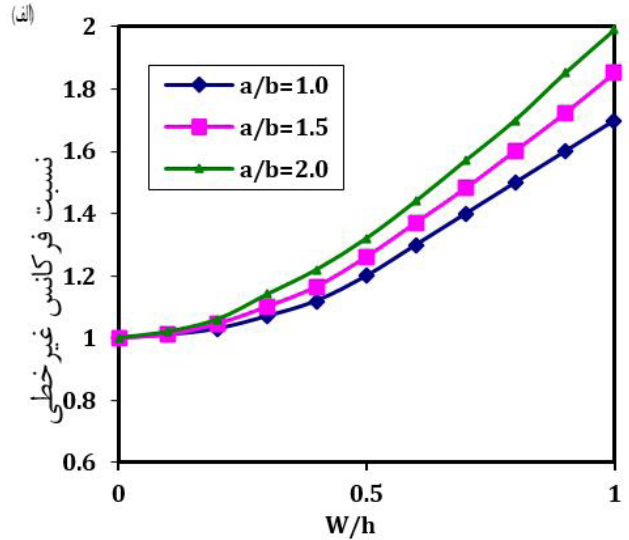
با تعریف نسبت فرکانسی به صورت  $FR = \omega^{nl} / \omega^l$  (که  $\omega^{nl}$  فرکانس طبیعی محاسبه شده توسط تئوری غیر محلی و  $\omega^l$  فرکانس طبیعی محاسبه شده با تئوری محلی است) مقایسه تاثیر شرایط مرزی مختلف بر مساله حاضر در شکل‌های ۵ و ۶ نشان داده شده است. شکل ۵ تغییرات فرکانس‌های طبیعی نانو ورق مربعی را به ازاء طول‌های مختلف برای انواع شرایط مرزی نشان می‌دهد. براساس نمودارهای به‌دست‌آمده، هرچه شرایط مرزی سفتی بیشتری داشته باشد، تاثیر پارامتر غیرمحلی بر روی آن بیشتر خواهد بود. به عبارت دیگر تاثیرات غیرمحلی بر حالت CCCC بسیار بیشتر از حالت SSSS است.



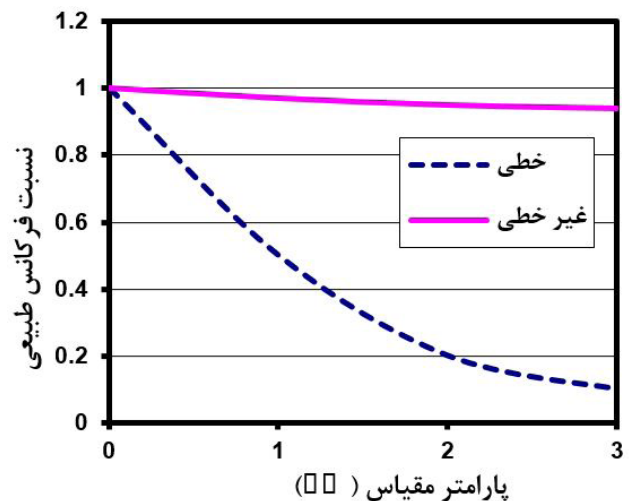
شکل ۵: فرکانس‌های طبیعی نانو ورق مربعی با شرایط مرزی مختلف شکل ۶ تاثیر نسبت اضلاع ورق بر نسبت فرکانسی را بازاء دو مقدار خاص پارامتر مقیاس ( $\mu=0.6$ ,  $\mu=0.2$ ) و سه شرط مرزی مختلف نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که با افزایش نسبت اضلاع ورق، نسبت فرکانسی برای هر سه نوع شرایط مرزی افزایش پیدا می‌کند.



شکل ۶: تغییرات نسبت فرکانسی اصلی با نسبت اضلاع ورق با شرایط مرزی مختلف



شکل ۳: اثر نسبت اضلاع ورق بر نسبت فرکانس غیرخطی حالت اول نسبت به منحنی دامنه بی بعد شده برای ورق مستطیلی دارای تکیه‌گاه ساده با  $a/h=20$  برای الف)  $\mu=0.2$  ب)  $\mu=0.8$



شکل ۴: اثر تغییر پارامتر مقیاس بر نسبت فرکانس خطی و غیرخطی حالت اول برای ورق مستطیلی با  $a/h=20$

## ۶- بررسی وقوع تشدید داخلی در نانو ورق

یک پدیده فیزیکی در سیستم‌های غیرخطی با چند درجه آزادی و سیستم‌های پیوسته اتفاق می‌افتد که مشابه آن در سیستم‌های خطی و سیستم‌های یک درجه آزادی دیده نمی‌شود. در سیستم‌های پیوسته به‌طور کلی این پدیده هنگامی اتفاق می‌افتد که برخی فرکانس‌ها تناسب‌پذیر یا تقریباً تناسب‌پذیر باشند؛ به عبارت دیگر اعداد صحیح مثبت یا منفی  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$  وجود داشته باشد به گونه‌ای که  $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3 + \dots + m_n\omega_n \approx 0$  هنگامی که چنین شرایطی وجود داشته باشد، احتمال وقوع پدیده تشدید داخلی وجود خواهد داشت و شرایط برای اثرگذاری متقابل حالت‌های شامل تشدید داخلی مهیا خواهد شد. در این حالت سیستم غیرخطی به گونه‌ای عمل می‌کند که به نظر می‌رسد یک تحریک هارمونیک با فرکانس‌های  $\omega_1$  و  $\omega_2$  اتفاق افتاده و نوسانات آزادی که خود را تقویت می‌کند تولید می‌نماید که به این پدیده تشدید داخلی گفته می‌شود. با وجود تشدید داخلی نوسانات آزاد حتی در حضور میراکننده تقویت می‌شوند و سبب کوپلینگ دو حالت می‌شود [۲۱]. حتی اگر فقط یک حالت به صورت اولیه تحریک شود، تشدید داخلی حالت دیگر را تحریک می‌کند. انرژی به‌طور پیوسته بین دو حالت مبادله می‌شود. تشدید داخلی در سیستم‌های دو درجه آزادی با مرتبه ۳ غیرخطی هنگامی اتفاق می‌افتد که  $\omega_2 \approx 3\omega_1$  باشد. باید توجه داشت که وقوع پدیده تشدید داخلی به هندسه، ترکیب و ساخت قطعه و همچنین شرایط مرزی سیستم بستگی دارد [۲۵]. در نتیجه وقوع تشدید داخلی، انرژی بین حالت‌ها مبادله شده و پاسخ به صورت چند حالتی خواهد بود. یکی از پیامدهای تشدید داخلی ایجاد کوپلینگ قوی بین حالت‌هاست و با افزایش برهم خوردن میزان‌سازی تشدید داخلی کاهش<sup>۴</sup> می‌یابد [۲۵]. برای بررسی احتمال وقوع این پدیده ارتعاشات آزاد یک نانورق مستطیلی ایزوتروپ با تکیه‌گاه‌های ساده در نظر گرفته می‌شود. برای پیش‌بینی تشدید داخلی با در نظر گرفتن تئوری غیر محلی و با فرض  $\mu = 0.1a$ ،  $\omega_{mn} = K\lambda_{ij}(m, n)$  و  $b/a = 1.5$ ، تعدادی از فرکانس‌های خطی نانو ورق محاسبه و با یکدیگر مقایسه می‌شوند. نتایج در جدول ۴ آمده است.

جدول ۴: فرکانس‌های خطی برای نانو ورق مستطیلی با تکیه‌گاه‌های ساده و  $\omega_{mn} = K\lambda_{ij}(m, n)$  و  $b/a = 1/5$ ،  $\mu = 0.1a$

| $\lambda_{11}$ | $\lambda_{12}$ | $\lambda_{13}$ | $\lambda_{14}$ | $\lambda_{21}$ | $\lambda_{31}$ | $\lambda_{41}$ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| ۱/۲۶۴          | ۲/۱۸           | ۳/۳۴۸          | ۴/۵۰۵          | ۳/۰۸۹          | ۴/۸۸۸          | ۶/۲۶۹          |

با مقایسه فرکانس‌ها ملاحظه می‌شود  $(\lambda_{14}/\lambda_{11}) = 3.564$  که نزدیکترین حالت برای پدیده تشدید داخلی ۳:۱ است. در صورت وقوع این پدیده جابجایی عمودی ورق برابر خواهد شد با  $W_c/h = A_{c1} \cos \omega t$  و  $A_{c1} \cos 3\omega t$  که در این رابطه  $W_c$  جابجایی عمودی نقطه میانی ورق و  $A_c$  مقدار دامنه میانه ورق خواهد بود [۲۶].

## 4 Detuning

روش‌های محاسبه تشدید داخلی اغلب بر اساس دو شاخه روش‌های اغتشاش و اجزاء محدود پایه‌گذاری شده‌اند. مشهورترین آنها روش اغتشاش مقیاس‌های زمانی چندگانه<sup>۵</sup> است که نخستین بار توسط نایفه و همکارانش برای محاسبه تشدید داخلی در ورق‌های دایره‌ای و بیضوی بکار گرفته شد [۲۷، ۲۸]. روش اغتشاش تنها قادر به حل مسائلی با درجه غیرخطی ضعیف بوده و هنگام پرداختن به تخمین‌های مرتبه بالا با حجم محاسباتی بسیار بالا و طاقت فرسا مواجه خواهد شد. روش دیگری به نام روش المان محدود نموی دامنه<sup>۶</sup> توسط لاو و همکاران برای ورق همگن ایزوتروپ ارائه شده که برای تخمین‌های درجه غیرخطی مرتبه بالا مناسب بوده و قادر است مسیر منحنی‌های فرکانسی بسیار پیچیده را دنبال نماید. این روش یک روش نیمه‌تحلیلی است، زیرا در بعد زمان تحلیلی بوده و در بعد فضا عددی است [۲۶]. ریبیرو و پتیت با استفاده از روش المان محدود سلسله مراتبی<sup>۷</sup> (HFEM) ارتعاشات آزاد غیرخطی ورق ایزوتروپیک را بررسی نموده و وجود تشدید داخلی ۱:۳ را بین حالت‌های نوسانی در حالات مختلف نشان داده‌اند [۲۹]. برای رسیدن به این مقصود آنها معادله حاکم را با استفاده از اصل کار مجازی و روش توازن هارمونیک<sup>۸</sup> (HBM) توسعه داده‌اند. در این روش زمان به فرم سری فوریه درآمده و مساله به حل یک سیستم معادلات دیفرانسیل غیرخطی با وجود متغیرهای فضا محدود می‌شود. برخلاف روش اغتشاش، این روش به مسایل غیرخطی ضعیف محدود نشده و برای سیستم‌های غیرپیچیده حل همواره به حل تناوبی دقیق همگرا می‌شود.

در این تحقیق از روش المان محدود نموی دامنه استفاده شده است. شرح جزئیات روش به طور کامل در مرجع [۲۶] آمده است. فرمول‌بندی روش بر اساس یک رابطه بازگشتی تصحیح‌شونده برای فرکانس حرکت  $\omega$  پایه ریزی شده و عبارت است از [۲۶]:

$$\{a\}_{n+1} = \{a\}_n + \begin{cases} 0 \\ \{\Delta a_2\}_n \end{cases}, \quad \omega_{n+1} = \omega_n + \Delta \omega_n \quad (69)$$

و  $n$  امین تصحیح فرکانس  $\Delta \omega_n$  از رابطه زیر محاسبه خواهد شد:

$$\Delta \omega_n = \frac{[A_{12}]\{\Delta a_2\}_n - (\bar{R}_1)_n}{F_1 - [A_{12}]\{\Delta a_2\}_n^{(2)}} \quad (70)$$

که:

$\{\bar{R}\}$  بردار تصحیح تجمیع شده از سهم المان‌ها

$\{F\}$  بردار نیروی اینرسی موازنه نشده به واسطه نمو فرکانس واحد

تجمیع شده از سهم المان‌ها

$\{a\}$ : نمو فعال

$\{\Delta a_2\}$ : باقیمانده نمو فعال

5 Multiple Time Scales Perturbation Method

6 Amplitude Incremental Finite Element Method

7 Hierarchical Finite Element Method

8 Harmonic Balance Method

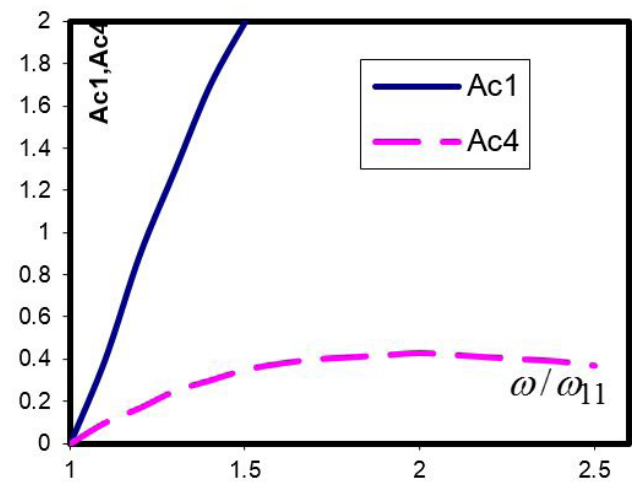
$\{A_{12}\}$ : درایه ۱۲ ماتریس بیانگر  $([k]-\omega_0^2[M])$

$\{M\}$ : ماتریس جرم متناظر

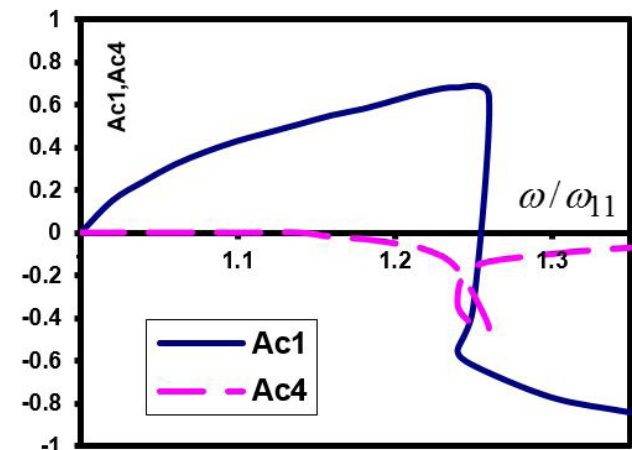
$\{K\}$ : ماتریس سختی متناظر

تکرار تا ارضای یک معیار مانند  $\max|(\Delta a)_n / a_j \text{ ref.}| < \text{permissible error}$  می‌تواند ادامه یابد. در واقع  $n$ امین مولفه جدیدترین نمو اصلاحی محاسبه شده و بزرگترین دامنه کلی از همان نوع است.

به کمک روش مذکور تاثیر شرایط مرزی در وقوع یا عدم وقوع پدیده تشدید داخلی بررسی و نتایج در شکل‌های ۷ و ۸ نشان می‌دهند که با توجه به نمودارهای داده شده، با وجود تکیه‌گاه ثابت تشدید داخلی از نوع ۱:۳ در نانو ورق رخ داده است.



شکل ۷: نمودار تغییرات دامنه نقطه مرکزی ورق نسبت به نسبت فرکانسی نانو ورق مستطیلی با تکیه‌گاه‌های متحرک



شکل ۸: پاسخ تشدید داخلی آزاد نانو ورق مستطیلی با تکیه‌گاه‌های ثابت

بر اساس شکل ۸ هنگامی که نسبت فرکانسی تا نزدیکی  $(\omega/\omega_{11})=1.13$  افزایش می‌یابد، رشد دامنه هارمونیک چهارم  $A_{c4}$  آغاز می‌شود و در همین زمان دامنه هارمونیک اول  $A_{c1}$  یک حرکت بازگشت U شکل را دنبال کرده و مقدار آن به واسطه تبادل انرژی با هارمونیک چهارم به یک باره سقوط می‌کند. در ادامه منحنی  $A_{c1}$  سرانجام محور

افقی را قطع کرده و مجدداً در جهت منفی رشد می‌کند؛ در حالی که، منحنی  $A_{c4}$  پس از تشکیل یک حلقه به واسطه گذشتن از مرحله تشدید داخلی مجدداً کاهش می‌یابد.

## ۷- نتیجه‌گیری

اثر مقیاس کوچک بر روی ارتعاش غیرخطی نانو ورق مستطیلی توسط تئوری الاستیسیته غیرمحملی ارینگن مورد بررسی قرار گرفت. معادلات حاکم بر ورق به طور تحلیلی به دست آمده و فرم بسته حل برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و بر اساس انتگرال بیضوی برای فرکانس طبیعی و تابع بیضوی ژاکوبی برای جابجایی عمودی استخراج شد. با توجه به مطالعه حاضر نتایج زیر قابل ارائه می‌باشد:

- یک کاهش در ابعاد ورق سبب افزایش تاثیر پارامتر غیرمحملی و در نتیجه کاهش پارامتر فرکانس می‌شود.
- خواص ارتعاشی نانو ورق به اندازه ورق، حالت ارتعاشی و پارامتر غیرمحملی بستگی دارد.
- استفاده از مدل تئوری ورق محلی در تحلیل فرکانسی نانو ورق یک تخمین رو به بالا را سبب خواهد شد.
- پارامتر غیرمحملی بر حالت‌های ارتعاشی بالاتر تاثیر بیشتری برجا می‌گذارد.
- اثر غیرمحملی در یک نانو ورق مربعی در مقایسه با نانو ورق مستطیلی بیشتر است.
- اثر پارامتر غیرمحملی بر رفتار ارتعاشی تقریباً مستقل از نسبت طول به ضخامت ورق است.
- نسبت فرکانسی با افزایش دامنه ارتعاشات و نسبت پواسون کاهش یافته و نیز با کاهش نسبت ضخامت و نسبت اضلاع ورق کاهش خواهد یافت.
- پارامتر مقیاس کوچک فرکانس‌های طبیعی را کاهش داده اما نسبت‌های فرکانس غیرخطی به خطی نانو ورق را افزایش می‌دهد. به عبارت دیگر، تئوری‌های محلی تخمین روبه بالای فرکانس‌های طبیعی را بدست می‌دهند.
- اثرات مقیاس کوچک بر فرکانس‌های مرتبه بالاتر بیشتر است.
- برای مقادیر بزرگ پارامتر مقیاس، نسبت فرکانس طبیعی حالت غیرخطی به حالت خطی بطور فزاینده‌ای افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر می‌توان گفت با افزایش پارامتر مقیاس، تخمین فرکانس طبیعی نانو ورق با در نظر گرفتن تئوری خطی خطای بیشتری به همراه دارد.
- تاثیرات غیرمحملی بر ارتعاشات نانو ورق برای شرایط مرزی SSSS، CCCS، CCSS، CSCS، و SSSC دارای ترتیب افزایشی است.
- احتمال وقوع پدیده تشدید داخلی در نانو ورق مستطیلی در شرایط خاصی وجود دارد و تشدید میزان جابجایی عمودی ورق را به دنبال

خواهد داشت.

## ۸- پیوست ۱

$$C_1 = \frac{Eb^2m^2n^2\pi^2}{8a^2(b^2n^2 + 4\pi^2n^4\mu^2)}$$

$$C_2 = \frac{Ea^2m^2n^2\pi^2}{8b^2(a^2m^2 + 4\pi^2m^4\mu^2)}$$

## ۹- مراجع

- [12] K.F. Wang, B.L. Wang, 2013. "Effect of surface energy on the non-linear postbuckling behavior of nanoplates", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 55, pp19-24.
- [13] Pouya Asgharifard Sharabiani, Mohammad Reza Haeri Yazdi, 2013. "Nonlinear free vibrations of functionally graded nanobeams with surface effects", *Composites: Part B*, 45, pp.581-586.
- [14] Rajarshi Maitra, Supratik Bose, 2012. "Post Buckling Behaviour of a Nanobeam considering both the surface and nonlocal effects", *International Journal of Advancements in Research & Technology*, 1, pp.1-5.
- [15] Ali Farajpour, Alireza ArabSolghar, Alireza Shahidi, 2013. "Postbuckling analysis of multi-layered graphene sheets under non-uniform biaxial compression", *Physica E*, 47, pp.197-206.
- [16] W. Lestari, S. Hanagud, 2001. "Nonlinear vibration of buckled beams: some exact solutions", *International Journal of Solids and Structures*, 38, pp. 4741—4757.
- [17] Hamed Farokhi, Mergen H. Ghayesh, Marco Amabili, 2013. "Nonlinear resonant behavior of microbeams over the buckled state", *Appl. Phys. A*, 113, pp.297-307.
- [18] Ventsel E., Krauthammer T., 2001. "*Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Applications*", Marcell Dekker Inc.
- [19] Robert M. Jones, 1999. "*Mechanics of Composite Materials: 2nd Edition*", Taylor & Francis, Inc.
- [20] Reddy J. N., 2007. "*Theory and Analysis of Elastic plates and Shells: 2nd Edition*", Taylor & Francis Group.
- [21] Kelly S.G., 2012. "*Mechanical Vibrations: Theory and Applications SI.*", Cengage Learning.
- [22] Byrd PF, Friedman MD., 1991. "*Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists*", Berlin: Springer.
- [23] Abramowitz M, Stegun I., 1965. "*Handbook of Mathematical Functions, Chapter 17.*", Dover Publications Inc.: New York.
- [24] Ansari R., Rajabiehfarid R., Arash B., 2010. "Nonlocal finite element model for vibrations of embedded multi-layered graphene sheets", *Comput. Mater. Sci.*, 49, pp.831-838.
- [25] Nayfeh A.H., Mook D.T., 1995. "*Nonlinear oscillations*", New York: Wiley.
- [26] Lau, S. L., Cheung, Y. K., and Wu, S. Y., 1984.
- [1] Popov V. N., 2004. "Carbon nanotubes: properties and application", *Materials Science and Engineering Research*, 43, pp. 61-102
- [2] Rafei-Tabar H., 2004. "Computational modelling of thermo-mechanical and transport properties of carbon nanotubes", *Physics Reports*, 390, pp. 235-452.
- [3] Eringen, A.C., 1983. "On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves", *Journal of Applied Physics.*, 54, pp. 4703-4710.
- [4] Eringen, A.C., 2002. "*Nonlocal Continuum Field Theories*", Springer, New York.
- [5] Koiter, W. T., 1964. "Couple Stresses in the Theory of Elasticity", *Royal Netherlands Academy of Sciences, Series B*, LXVII, 1 No. 67, pp. 17-44.
- [6] Mindlin, R.D., Eshel, N.N., 1968. "On first strain-gradient theories in linear elasticity", *Int. J. Solids Struct.* 4, pp. 109-124.
- [7] Yang F, Chong ACM, Lam DCC, Tong P., 2002. "Couple stress based strain gradient theory for elasticity", *Int J Solids Struct.*, 39, pp. 2731-43.
- [8] Reddy J.N., Kim J., 2012. "A nonlinear modified couple stress-based third-order theory of functionally graded plates", *Composite Structures*, 94, pp.1128-1143.
- [9] Pradhan SC, Phadikar JK., 2009. "Nonlocal elasticity theory for vibration of nanoplates", *J. Sound Vib.*, 325, pp. 206-23.
- [10] Alibeigloo A., 2011. "Free vibration analysis of nanoplate using three-dimensional theory of elasticity", *Acta Mech*, 222, pp. 149-159.
- [11] Setoodeh AR, Malekzadeh P, Vosoughi AR., 2011. "Nonlinear free vibration of orthotropic graphene sheets using nonlocal mindlin plate theory", *Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci*, 226, No.7, pp. 1896-1906.

*Sound and Vibration*, 41, pp.359-373.

[28] D. W. Lobitz, A. H. Nayfeh and D. T. Mook, 1977. "NON-LINEAR ANALYSIS OF VIBRATIONS OF IRREGULAR PLATES", *Journal of Sound and Vibration*, 50, pp.203-217.

[29] P. Ribeiro, M. Petyt, 1999. "Non-linear vibration of beams with internal resonance by the hierarchical finite-element method", *Journal of Sound and Vibration*, 224, pp.591-624.

"Internal Resonance by Amplitude Incremental Finite Element", *ASME JOURNAL OF APPLIED MECHANICS*, 51, pp. 845-851.

[27] S. Sridhar, D. T. Mook and A. H. Nayfeh., 1975. "NON-LINEAR RESONANCES IN THE FORCED RESPONSES OF PLATES, PART I: SYMMETRIC RESPONSES OF CIRCULAR PLATES", *Journal of*

