



توسعه مدل تحلیلی برای الاستومر دی‌الکتریک ناهمسانگرد ویسکوالاستیک و مطالعه رفتار الکترومکانیکی وابسته به نرخ

مرضیه مجیدی، مسعود عسگری*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۱/۰۴/۱۵

بازنگری: ۱۴۰۱/۰۸/۰۹

پذیرش: ۱۴۰۱/۱۱/۱۰

ارائه آنلاین: ۱۴۰۱/۱۱/۲۶

کلمات کلیدی:

الاستومر دی‌الکتریک

هایپروالاستیسیته

ناهمسانگردی

ویسکوالاستیسیته

مکانیک محیط‌های پیوسته غیرخطی

خلاصه: مطالعات انجام شده بر رفتار الاستومرهای دی‌الکتریک، به عنوان یکی از انواع پلیمرهای فعال الکتریکی، اغلب متمرکز بر خواص هایپروالاستیک و دی‌الکتریک آن‌ها می‌باشد. اما گسترش استفاده از این مواد به عنوان عملگر در صنعت وابسته به شناخت بهتر عوامل مؤثر بر رفتار آن‌ها، از جمله ویسکوالاستیسیته و همینطور امکان افزودن ویژگی‌های نوین همچون ناهمسانگردی به این دسته الاستومرهاست. در این پژوهش با استفاده از توسعه روابط پایه در مکانیک محیط‌های پیوسته و مطالعه معادلات حاکم، یک مدل کوپل غیرخطی برای توصیف رفتار ماده هایپروویسکوالاستیک ناهمسانگرد با خاصیت دی‌الکتریک ارائه شده است. ابتدا با مقایسه گام به گام بین نتایج حاصل از قسمت‌های تشکیل دهنده مدل ارائه شده و نتایج تجربی گزارش شده در منابع موجود، مدل پیشنهادی مورد ارزیابی قرار گرفت. موافقت قابل قبول بین نتایج، حاکی از صحت و دقت مدل در توصیف رفتار ماده می‌باشد. در ادامه با استفاده از فرم جامع مدل، برای ماده تراکم‌ناپذیر دارای خواص هایپروویسکوالاستیک، ناهمسانگرد و دی‌الکتریک، به مطالعه تأثیر نرخ بارگذاری و میدان الکتریکی بر رفتار الاستومرهای تقویت شده با الیاف در زوایای گوناگون پرداخته شده است. نتایج به دست آمده از اعمال مدل بر یک مسئله نمونه نشان می‌دهد افزایش زاویه الیاف نسبت به افق، سبب کاهش بازه‌ی تنش، و افزایش تأثیر نرخ بارگذاری و میدان الکتریکی می‌شود.

۱- مقدمه

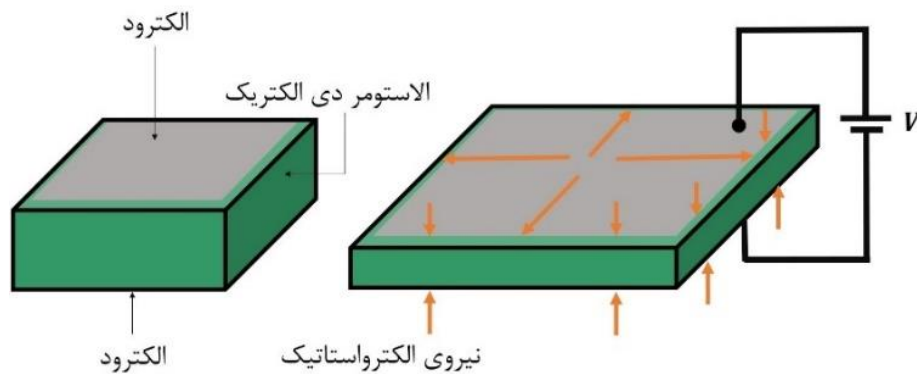
تراکم‌ناپذیری، لایه‌ی الاستومری دارای خواصی چون مدول الاستیک پایین، ویسکوزیته کم، رسانایی الکتریکی و ضریب دی‌الکتریک بالاست [۲] که در کنار ویژگی‌های خاص الکترومکانیکی شامل رسانایی، نرمی، ضخامت کم، قدرت چسبندگی به لایه‌ی الاستومر و مقاومت کم، منجر به استفاده از عملگر الاستومر دی‌الکتریک در ساخت و توسعه ربات‌های نرم [۳]، ادوات توانبخشی [۴] و ابزارهای کاشتنی شده است [۵].

توسعه کاربرد این عملگرها در صنایع روز مرهون پژوهش‌های پیشین و دانش حاصل از آن‌ها در این حوزه می‌باشد که در ادامه به معرفی مختصر تعدادی از آن‌ها پرداخته می‌شود. در اولین مدل‌های فیزیکی ارائه شده برای توصیف رفتار الکترومکانیکی ماده پارامتر تنش مکسول به صورت تابعی از ضریب نفوذپذیری ماده و میدان الکتریکی اعمالی معرفی شد [۶]. همچنین در روابط پیشنهادی برای توصیف مقدار کرنش‌های بزرگ‌تر از ۲۰ درصد، از پارامتر چگالی انرژی الکترومکانیکی استفاده شد [۱]. به عنوان نمونه مدل‌های نئوهوکین و آگدن برای توصیف رابطه کرنش-ولتاژ [۷] و مدل مونی ریولین برای بررسی اثر پیش‌کرنش بر عملکرد عملگر الاستومر

سازوکار عملیاتی الاستومر دی‌الکتریک‌ها بر اساس اصل تغییر شکل الکترواستاتیکی است. به این معنی که تحریک الکتریکی سبب تغییر شکل الاستومر می‌شود و اعمال بار مکانیکی (یا تغییر شکل) سبب تغییر ظرفیت الکتریکی ماده می‌شود. این سازوکار امکان ساخت عملگر و حسگر با استفاده از الاستومر دی‌الکتریک‌ها را فراهم می‌کند. یک عملگر الاستومر دی‌الکتریک شامل یک لایه‌ی نازک الاستومر بین دو الکتروود نرم است. با اعمال میدان الکتریکی بر الکتروودها، بارهای الکتریکی از یک الکتروود به الکتروود دیگر منتقل می‌شود. نیروی الکترواستاتیکی ایجاد شده بین بارهای مخالف روی الکتروودها باعث فشرده شدن لایه‌ی الاستومری در راستای ضخامت می‌شود. از آنجایی که الاستومرها تراکم‌ناپذیرند کاهش ضخامت سبب افزایش مساحت می‌شود و بدین ترتیب تغییر شکل سبب تبدیل انرژی الکتریکی به انرژی مکانیکی می‌شود [۱]. سازوکار عملیاتی الاستومر دی‌الکتریک‌ها در شکل ۱ نمایش داده شده است. علاوه بر

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: asgari@kntu.ac.ir





شکل ۱. سازکار و عملیاتی الاستومر دی الکتریکها

Fig. 1. Working principle of dielectric elastomers

دی الکتریک تابع زمان بوده و دارای خاصیت ویسکوالاستیسیته است. تعدادی از پژوهش‌های انجام شده در این حوزه با ارائه مدل غیرخطی [۱۳]، ارائه‌ی مدل بر اساس ترمودینامیک غیرتعادلی [۱۴]، مطالعه خزش [۱۵] و اثر فرکانس تحریک [۱۶]، بر پدیده‌های اتلافی تمرکز کرده‌اند. تعداد دیگری از پژوهش‌ها بر وابستگی رفتار ماده به زمان و همچنین نرخ بارگذاری پرداخته‌اند. در این مطالعات ضرایب وابسته به زمان برای تابع انرژی کرنشی [۱۷]، مدل‌های مادی الاستیک متفاوت در نرخ کرنش‌های مختلف [۱۸] بررسی شده است.

جمع‌بندی مطالعات معرفی شده نشان می‌دهد بررسی رفتار ماده الاستومر دی الکتریکی که ضمن تقویت شدن با الیاف به نرخ بارگذاری نیز حساس است ضمن مرتفع کردن خلأ موجود در دانش کنونی، با فراهم کردن یک مدل نسبتاً جامع و قابل درک به گسترش کاربرد این ماده نیز کمک می‌کند. در این پژوهش یک رابطه‌ی ساختاری ارائه می‌شود که کلیه ویژگی‌های مورد نظر ماده را در نظر گرفته و امکان مطالعه اثر آنها بر رفتار را فراهم می‌کند. برای بررسی رفتار هایپرالاستیک الاستومر از مدل مونی ریولین، برای مطالعه اثر افزودن الیاف از مدل هولزایفل و برای در نظر گرفتن اثر تراکم ناپذیری از یک جمله شامل تابع پنالته استفاده شده است. همچنین تابع انرژی پیشنهادی دارای جمله‌ی وابسته به زمان می‌باشد که می‌تواند اثر وابستگی به نرخ را در رفتار ماده شبیه‌سازی کند. در نظر گرفتن همه‌ی ویژگی‌های مورد اشاره با هم سبب افزایش دقت مدل در توصیف رفتار الاستومر دی الکتریک ناهمسانگرد با در نظر گرفتن خاصیت ویسکوالاستیک

دی الکتریک [۸] استفاده شد. با در نظر گرفتن نتایج حاصل از این مطالعات می‌توان گفت روش انرژی در پیش‌بینی رفتار الاستیک غیرخطی و تغییر شکل بزرگ ماده‌ی الاستومر دی الکتریک موفق عمل می‌کند.

در ادامه محققان تلاش کرده‌اند تا با در نظر گرفتن ویژگی‌های پیچیده‌تر و افزودن شاخصه‌های ممکن به مدل ماده، از جمله افزودن الیاف رفتار آن را هر چه دقیق‌تر پیش‌بینی کرده و به توسعه کاربردهای حاضر بپردازند. الاستومر دی الکتریک ناهمسانگرد ضمن فراهم کردن امکان کنترل بهتر تغییر شکل، با کاهش مقدار ولتاژ مورد نیاز برای تحریک الکتریکی، در جهت رفع یکی از اساسی‌ترین محدودیت‌ها برمی‌آید. رابطه ساختاری معرفی شده توسط سان بر اساس تئوری‌های مکانیک محیط‌های پیوسته و استفاده از پارامتر نامتغیر در مدل‌سازی نتایج حاصل از تست‌های تجربی الاستومر دی الکتریک‌ها موفق عمل کرد [۹]. همچنین مطالعات یونگ و همکاران نشان داد استفاده از الیاف با افزایش ولتاژ بحرانی و کاهش کشیدگی بحرانی سبب پایدارتر شدن ماده می‌شوند. مطالعه غشای تقویت شده با الیاف به روش المان محدود و تجربی نشان داد تحریک در سیستم به جهت، چیدمان، تراکم و نوع الیاف (کوتاه یا بلند بودن) وابسته است [۱۰]. همچنین، استفاده از شبیه‌سازی و روش المان محدود جهت به کارگیری تنش کوشی و بررسی اثر افزودن الیاف بر رفتار خمشی، نیرو و تغییر شکل تیر [۱۱] و همین‌طور مطالعه تأثیر اختلاف مدول برشی، ضریب نفوذپذیری، کسر حجمی الیاف، پیش کشش و پیش تنش مکانیکی [۱۲] به شناخت پتانسیل‌ها و رفتار ماده کمک شایانی کرده است. از طرف دیگر، مطالعات تجربی نشان داده رفتار مواد الاستومر

در این عبارت پارامترهای C_{10} و C_{01} ضرایب ثابتی از جنس تنش هستند که برای هر ماده به دست می‌آیند. C_{10} معرف رفتار الاستیک ماده است. اما پارامتر C_{01} که همواره غیرمنفی است، در این مدل جهت توضیح رفتار غیرالاستیک ماده به کار گرفته می‌شود. با افزایش این پارامتر، نمودار تنش- کرنش رسم شده با استفاده از رابطه (۱) غیرخطی‌تر خواهد بود. همچنین لازم است مجموع ثوابت C_{10} و C_{01} همواره غیرمنفی باشد. یک فرض اساسی برای الاستومرها فرض تراکم‌ناپذیری آن‌ها می‌باشد. برای در نظر گرفتن این فرض، تانسور گرادیان تغییر شکل به دو بخش حجمی F_{vol} و حجم ثابت \bar{F} تجزیه می‌شود.

$$\bar{F} = J^{-1/3} F, F = \bar{F} F_{vol} \quad (2)$$

در چنین شرایطی تابع انرژی کرنشی نیز به دو بخش تجزیه خواهد شد. در بخش اول، که مربوط به رفتار هایپرالاستیک است، از گرادیان تغییر شکل حجم ثابت و نامتغیرهای متناظر با آن استفاده می‌شود. در بخش دوم، برای در نظر گرفتن فرض تراکم‌ناپذیری، از پارامتر ژاکوبین در یک تابع پنالیتی استفاده می‌شود.

$$W = \bar{W}^{hyperelastic}(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3) + W^{vol}(J) \quad (3)$$

تابع پنالیتی مورد نظر در این پژوهش به صورت رابطه (۴) تعریف شده است [۲۰]:

$$W^{vol} = \frac{K}{2}(J-1)^2 \quad (4)$$

که در آن K مدول بالک ماده می‌باشد. بیان نهایی تابع انرژی کرنشی یک ماده هایپرالاستیک تراکم‌ناپذیر عبارتست از:

$$W = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + \frac{K}{2}(J-1)^2 \quad (5)$$

و مدلسازی نزدیک به واقعیت می‌شود. از طرف دیگر، بخش‌های مختلف مدل بر اساس نیاز و ویژگی‌های ماده قابل تغییر است. این مشخصه باعث می‌شود رابطه ساختاری استخراج شده برای طیف گسترده‌ای از مواد قابل استفاده و ابزار کارایی در مطالعات در حوزه‌های مختلف باشد. استخراج تحلیلی معادلات همچنین امکان مطالعه تحلیلی و جزیی پارامترهای دخیل در نتایج را فراهم می‌آورد. در این مقاله پس از ارائه مبانی نظری، ابتدا به توسعه مدل مورد نظر پرداخته می‌شود. سپس ضمن کالیبره کردن مدل برای بدست آوردن ضرایب مورد نیاز، با مقایسه نتایج حاصل با نتایج گزارش شده در مطالعات تجربی امکان قضاوت در مورد کارایی مدل فراهم می‌شود. همچنین نتایج برای یک نمونه فرض با همهی خواص مورد نظر گزارش و در بخش آخر به جمع‌بندی یافته‌ها پرداخته می‌شود.

۲- معادلات حاکم و توسعه‌ی مدل

الاستومرهای دی‌الکتريک‌ها به دلیل داشتن کرنش‌های بسیار بزرگ، رفتار غیرخطی شدیدی تحت اعمال ولتاژ الکتریکی از خود نشان می‌دهند. از این رو در این مواد تنش بر اساس اصل کار مجازی و با استفاده از تابع انرژی پتاسیل کرنش W بدست می‌آید. برای مواد هایپرالاستیک، از جمله الاستومرها، X بردار موقعیت نقطه‌ی مادی در مختصات مرجع است که تحت ضابطه‌ی χ به X نگاشته می‌شود.

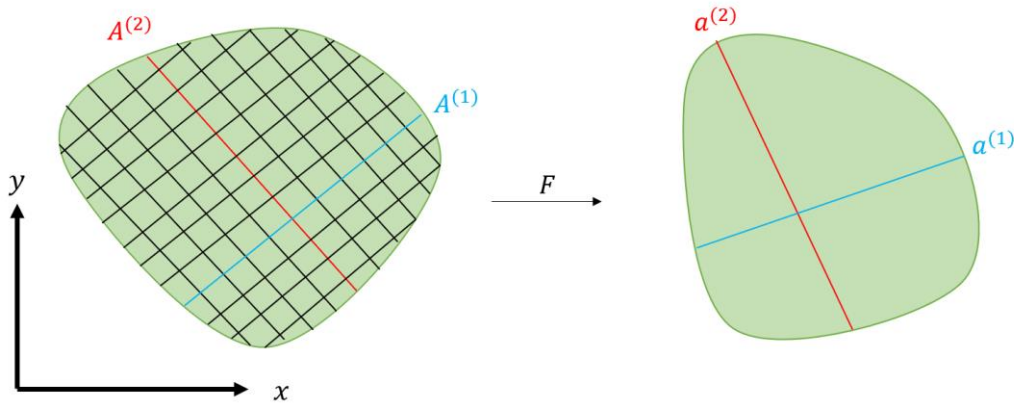
گرادیان تغییر شکل این حرکت، که پارامتر مهمی در مکانیک محیط‌های پیوسته‌ی غیرخطی است، با F بیان می‌شود:

در ترمینان این تانسور، پارامتر ژاکوبین، که با J نمایش داده می‌شود بیانگر تغییر حجم ایجاد شده در ماده در اثر تغییر شکل است. قابل ذکر است که برای یک ماده‌ی تراکم‌ناپذیر تغییر شکل باعث ایجاد تغییر حجم نخواهد شد و در این صورت $J=1$. با استفاده از تانسور گرادیان تغییر شکل و تانسور کرنش کوشی-گرین راست F و C تعریف می‌شود.

در پی‌ریزی روابط غیرخطی مورد نیاز، نامتغیرهای تانسور C که به شکل زیر محاسبه می‌شوند I_1, I_2, I_3 نقش مهمی دارند.

انرژی کرنشی یک ماده هایپرالاستیک همسانگرد اغلب به شکل تابعی از نامتغیرها تعریف می‌شود. از بین توابع معرفی شده برای این منظور، در این پژوهش تابع مونی ریولین، رابطه (۱)، برای توصیف انرژی کرنشی ماده انتخاب شده است [۱۹].

$$W^{hyperelastic} = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (1)$$



شکل ۲. بردارهای یکه در راستای الیاف در مختصات مرجع و تغییر شکل یافته

Fig. 2. Unit vectors along the fiber families in the reference and deformed configurations

مثبت مربوط به مدل هستند که برای هر ماده با توجه به نتایج تست تجربی انتخاب می‌شود. گزینش مناسب این دو پارامتر سبب افزایش دقت و توانایی مدل در پیش‌بینی تأثیر الیاف بر پاسخ مکانیکی ماده در محدوده‌های متفاوت فشار می‌شود.

برای افزودن خاصیت دی‌الکتریک به ماده هایپروالاستیک، جمله‌ی زیر به تابع انرژی کرنشی افزوده می‌شود [۲۲]:

$$W^{electric} = -\frac{1}{2} \epsilon J C^{-1} : [E \otimes E] \quad (۸)$$

که در آن، ϵ ضریب گذردهی ماده و E بردار میدان الکتریکی در مختصات مرجع است. قابل ذکر است که ضریب گذردهی ϵ برای هر ماده از حاصلضرب ضریب گذردهی نسبی ماده ϵ_r در ϵ_0 ضریب گذردهی خلأ با مقدار $۸/۸۵ \times ۱۰^{-۱۲}$ (F/m) بدست می‌آید.

برای افزودن خاصیت ویسکوالاستیسیته و همچنین در نظر گرفتن نرخ بارگذاری، لازم است جمله دیگری برای افزودن به تابع انرژی کرنشی محاسبه شود. این جمله تابعی است از نامتغیر تانسور \dot{C} ، J_m ($m=1,2,3,4$). تابع انرژی در نظر گرفته شده برای خاصیت ویسکوالاستیک، با در نظر گرفتن تراکم ناپذیری عبارتست از [۲۳]:

اگر به ماده هایپروالاستیک مورد نظر دو دسته الیاف با زاویه مشخص در مختصات مرجع اضافه شود، مطابق شکل ۲، لازم است انرژی کرنشی ناشی از آن‌ها نیز در تابع انرژی کرنشی وارد شود. برای این منظور ابتدا بردارهای یکه در راستای الیاف در مختصات تغییر شکل یافته محاسبه می‌شوند که در آن $A^{(i)}$ بردار یکه در جهت دسته الیاف i ام در مختصات مرجع و $a^{(i)}$ بردار یکه در جهت دسته الیاف i ام در مختصات تغییر شکل یافته می‌باشد.

$$a^{(i)} = F A^{(i)}, i=1,2 \quad (۹)$$

بر اساس مدل انتخابی برای در نظر گرفتن اثر الیاف، لازم است دو نامتغیر I_4 و I_6 به ترتیب مربوط به دسته الیاف اول و دوم نیز تعریف شوند مدل انتخابی برای در نظر گرفتن اثر الیاف مدل هولزاپفل [۲۱] می‌باشد که عبارتست از:

$$W^{anisotropic} = \frac{k_1}{2k_2} \left\{ \exp[k_2(I_4 - 1)^2] - 1 \right\} \times \frac{k_1}{2k_2} \left\{ \exp[k_2(I_6 - 1)^2] - 1 \right\} \quad (۱۰)$$

در این مدل نیز k_1 (از جنس تنش) و k_2 (بی بعد) پارامترهای ثابت و

$$S = 2\left(\frac{\partial W^{elastic}}{\partial C} + \frac{\partial \bar{W}^{viscoelastic}}{\partial \dot{C}}\right) = 2\left(\frac{\partial \bar{W}^{hyperelastic}}{\partial C} + \frac{\partial W^{vol}}{\partial C} + \frac{\partial W^{anisotropic}}{\partial C} + \frac{\partial W^{electric}}{\partial C} + \frac{\partial \bar{W}^{viscoelastic}}{\partial \dot{C}}\right) \quad (13)$$

روابط مورد نیاز برای مشتق‌گیری در پیوست آمده‌اند.

در نهایت برای جمله‌های انرژی کرنشی، مشتق‌گیری به شکل زیر انجام

می‌شود:

$$\frac{\partial \bar{W}^{hyperelastic}}{\partial C_{ij}} = \frac{\partial \bar{W}^{hyperelastic}}{\partial \bar{C}_{kl}} \frac{\partial \bar{C}_{kl}}{\partial C_{ij}} = \left(C_{10} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}_{kl}} + C_{01} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{C}_{kl}}\right) \frac{\partial \bar{C}_{kl}}{\partial C_{ij}} = J^{\frac{2}{3}}(C_{10} \delta_{kl} + C_{01}(\bar{I}_1 \delta_{kl} - \bar{C}_{kl})) \times \left(\frac{1}{2}(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{3} C_{kl} C_{ij}^{-1}\right) = C_{10} J^{\frac{2}{3}}(\delta_{ij} - \frac{1}{3} I_1 C_{ij}^{-1}) + C_{01} J^{\frac{4}{3}}(I_1 \delta_{ij} - C_{ij} - \frac{2}{3} I_2 C_{ij}^{-1}) \quad (14)$$

$$\frac{\partial W^{vol}}{\partial C_{ij}} = K(J-1) \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} = \frac{K}{2} J(J-1) C_{ij}^{-1} \quad (15)$$

$$\frac{\partial W^{anisotropic}}{\partial C_{ij}} = \frac{\partial W^{anisotropic}}{\partial \bar{C}_{kl}} \frac{\partial \bar{C}_{kl}}{\partial C_{ij}} = k_1(I_4 - 1) \left\{ \exp[k_2(I_4 - 1)^2] \right\} \frac{\partial I_4}{\partial C_{ij}} + k_1(I_6 - 1) \left\{ \exp[k_2(I_6 - 1)^2] \right\} \frac{\partial I_6}{\partial C_{ij}} = k_1(I_4 - 1) \left\{ \exp[k_2(I_4 - 1)^2] \right\} A_i^{(1)} A_j^{(1)} + k_1(I_6 - 1) \left\{ \exp[k_2(I_6 - 1)^2] \right\} A_i^{(2)} A_j^{(2)} \quad (16)$$

$$\bar{W}^{viscoelastic} = \frac{1}{4}(\bar{I}_1 - 3)[\eta_1 \bar{J}_2 + \eta_2 \bar{J}_4] \quad (9)$$

در این عبارت پارامترهای η_1 و η_2 بر حسب (Pa.s)، ضرایب ثابت

مدل هستند و با تست تجربی بدست می‌آید.

لازم به ذکر است که در بدست آوردن این تابع، روابط زیر دخیل هستند

که در آن‌ها L ماتریس گرادیان سرعت فضایی و D بخش متقارن L

می‌باشد.

در نهایت فرم نهایی تابع انرژی کرنشی برای ماده به صورت زیر خواهد

بود:

$$W = W^{elastic} + \bar{W}^{viscoelastic} \quad (10)$$

$$W^{elastic} = \bar{W}^{hyperelastic} + W^{vol} + W^{anisotropic} + W^{electric} \quad (11)$$

$$W = \bar{W}^{hyperelastic} + W^{vol} + W^{anisotropic} + W^{electric} + \bar{W}^{viscoelastic} = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + \frac{K}{2}(J-1)^2 + \frac{k_1}{2k_2} \left\{ \exp[k_2(I_4 - 1)^2] - 1 \right\} + \frac{k_1}{2k_2} \left\{ \exp[k_2(I_6 - 1)^2] - 1 \right\} - \frac{1}{2} \varepsilon J C^{-1} : [E \otimes E] + \frac{1}{4}(\bar{I}_1 - 3)[\eta_1 \bar{J}_2 + \eta_2 \bar{J}_4] \quad (12)$$

با کامل شده عبارت تابع انرژی کرنشی، در گام بعدی به استخراج

ماتریس تنش پرداخته می‌شود. اولین مرحله در این مسیر مشتق‌گیری از

بخش‌های الاستیک و ویسکوالاستیک تابع انرژی نسبت به ماتریس‌های

\dot{C} و C و محاسبه تانسور تنش پائولا کیرشهف دوم S می‌باشد.

$$\begin{aligned} \sigma_{mn} = & \frac{2}{J} (C_{10} (\bar{B}_{mn} - \frac{1}{3} \bar{I}_1 \delta_{mn}) + \\ & C_{01} (\bar{I}_1 \bar{B}_{mn} - \bar{B}_{mx} \bar{B}_{nx} - \frac{2}{3} \bar{I}_2 \delta_{mn}) + \\ & k_1 (I_4 - 1) \{ \exp[k_2 (I_4 - 1)^2] \} a_m^{(1)} a_n^{(1)} + \\ & k_1 (I_6 - 1) \{ \exp[k_2 (I_6 - 1)^2] \} a_m^{(2)} a_n^{(2)} + \\ & K (J - 1) \delta_{mn} + \varepsilon (e_m e_n - \frac{1}{2} e_l e_l \delta_{mn}) + \\ & \frac{1}{2} (\bar{I}_1 - 3) [\eta_1 + 2\bar{J}_4 \eta_2] (\bar{B}_{mx} \bar{B}_{nx} - \frac{1}{3} \bar{C}_{kl} \bar{C}_{kl} \delta_{mn}) \end{aligned} \quad (21)$$

۳- نتایج و بحث

با کامل شدن رابطه مورد نیاز برای محاسبه تنش، به استخراج پارامترهای ثابت موجود در مدل و همچنین قضاوت در مورد کارایی آن پرداخته می‌شود. همچنین بررسی اثر پارامترهای مختلف بر رفتار ماده مطالعه می‌شود.

۳-۱- کالیبراسیون و صحت سنجی مدل

برای این منظور از داده‌های تجربی موجود در ادبیات پژوهش استفاده می‌شود. شایان ذکر است که نتایج حاصل از تست تجربی اغلب بر اساس تنش نامی، حاصل تقسیم نیرو بر سطح مقطع در مختصات مرجع، بیان می‌شود. رابطه‌ی تنش نامی برای یک ماده‌ی تراکم ناپذیر تحت تنش به شکل زیر بیان شده است:

$$t = \frac{dW}{d\lambda} \quad (22)$$

که در آن انرژی کرنشی به صورت $W(\lambda, \lambda^{-1/2})$ ، تابعی از کشیدگی‌های اصلی به صورت $\lambda_1 = \lambda$ و $\lambda_2 = \lambda^{-1/2}$ می‌باشد.

داده‌های تجربی مورد نیاز برای کالیبراسیون و صحت سنجی قسمت‌های هایپرلاستیک و ناهمسانگرد مدل، از مرجع [۲۴] استخراج شده که در آن تست تجربی، تست کشش ساده بوده است. تانسور گرادیان تغییر شکل و تانسور \mathbf{C} برای این بارگذاری عبارتست از:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^{electric}}{\partial C_{ij}} = & -\frac{1}{2} \varepsilon E_k E_l \left(\frac{\partial C_{kl}^{-1}}{\partial C_{ij}} J + C_{kl}^{-1} \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} \right) = \\ & -\frac{1}{4} \varepsilon J E_k E_l (C_{kl}^{-1} C_{ij}^{-1} - C_{ik}^{-1} C_{jl}^{-1} - C_{il}^{-1} C_{jk}^{-1}) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{W}^{viscoelastic}}{\partial \dot{C}_{ij}} = & \frac{\partial \bar{W}^{viscoelastic}}{\partial \dot{C}_{kl}} \frac{\partial \dot{C}_{kl}}{\partial \dot{C}_{ij}} = \\ & \frac{1}{4} (\bar{I}_1 - 3) \left[\eta_1 \frac{\partial \bar{J}_2}{\partial \dot{C}_{kl}} + 2\bar{J}_4 \eta_2 \frac{\partial \bar{J}_4}{\partial \dot{C}_{kl}} \right] = \\ & \frac{1}{4} J^{-\frac{4}{3}} (\bar{I}_1 - 3) [\eta_1 + 2\bar{J}_4 \eta_2] (C_{ij} - \frac{1}{3} C_{kl} C_{kl} C_{ij}^{-1}) \end{aligned} \quad (18)$$

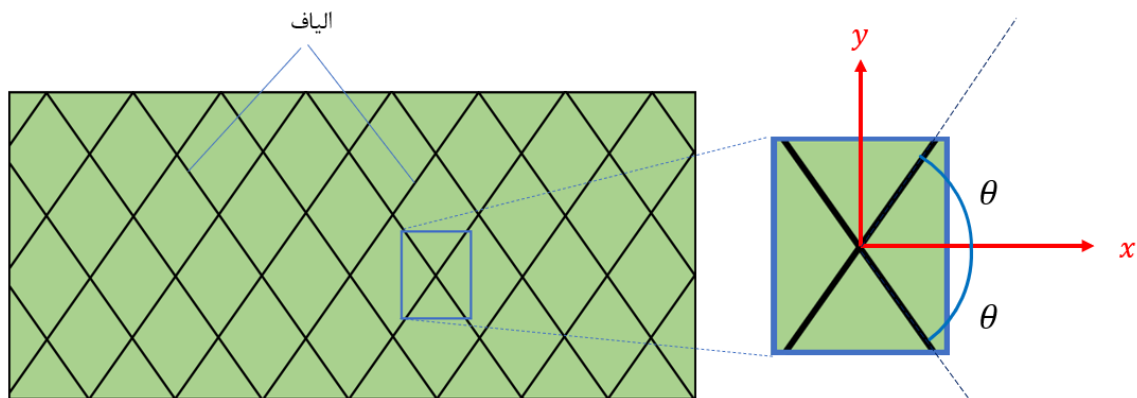
بر اساس رابطه‌ی (۱۳) تنش پائولا کیرشهف دوم بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} S_{ij} = & 2C_{10} J^{-\frac{2}{3}} (\delta_{ij} - \frac{1}{3} I_1 C_{ij}^{-1}) + \\ & 2C_{01} J^{-\frac{4}{3}} (I_1 \delta_{ij} - C_{ij} - \frac{2}{3} I_2 C_{ij}^{-1}) + \\ & KJ(J-1)C_{ij}^{-1} + \\ & 2k_1 (I_4 - 1) \{ \exp[k_2 (I_4 - 1)^2] \} A_i^{(1)} A_j^{(1)} + \\ & 2k_1 (I_6 - 1) \{ \exp[k_2 (I_6 - 1)^2] \} A_i^{(2)} A_j^{(2)} - \\ & \frac{1}{2} \varepsilon J E_k E_l (C_{kl}^{-1} C_{ij}^{-1} - C_{ik}^{-1} C_{jl}^{-1} - C_{il}^{-1} C_{jk}^{-1}) + \\ & \frac{1}{2} J^{-\frac{4}{3}} (\bar{I}_1 - 3) [\eta_1 + 2\bar{J}_4 \eta_2] (C_{ij} - \frac{1}{3} C_{kl} C_{kl} C_{ij}^{-1}) \end{aligned} \quad (19)$$

در گام بعدی، برای محاسبه‌ی تنش کوشی، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود:

$$\sigma_{mn} = \frac{1}{J} F_{mi} F_{nj} S_{ij} \quad (20)$$

بدین ترتیب فرم جامع برای تنش کوشی عبارتست از:



شکل ۳. زاویه‌ی دو دسته الیاف نسبت به محور افقی

Fig. 3. Orientation of two fiber families

برای بدست آوردن بخش ناهمسانگرد تابع انرژی لازم است بردارهای یکه در جهت الیاف در مختصات مرجع و همچنین نامتغیرهای متناظر با آن‌ها محاسبه شود. لازم به ذکر است تست تجربی انتخاب شده بر نمونه‌ای صورت گرفته که در آن دو دسته الیاف با زاویه‌های θ و $-\theta$ نسبت به محور افقی وجود داشته است. شکل ۳ چیدمان الیاف نسبت به محور افقی را نمایش می‌دهد. بنابراین داریم:

$$F = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1/2} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$C = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$A^{(1)} = \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (28)$$

$$A^{(2)} = \begin{Bmatrix} \cos(-\theta) \\ \sin(-\theta) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

$$I^4 = A^{(1)} \cdot C A^{(1)} = \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \lambda^2 \cos^2 \theta + \lambda^{-1} \sin^2 \theta$$

سایر پارامترهای مورد نیاز عبارتند از:

$$J = 1, \quad (25)$$

$$I_1 = \lambda^2 + 2\lambda^{-1},$$

$$I_2 = \lambda^{-2} + 2\lambda \quad (26)$$

بخش هایپرالاستیک تابع انرژی کرنشی در مدل به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$W^{hyperelastic} = C_{10}(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3) + C_{01}(\lambda^{-2} + 2\lambda - 3) \quad (27)$$

جدول ۱. ضرایب هایپرالاستیک و ناهمسانگردی برای الیاف کتان در ماتریس سیلیکون رابر

Table 1. Hyperelastic and anisotropic constants for silicon rubber reinforced by cotton fibers

ضرایب ناهمسانگردی (الیاف از جنس کتان)			ضرایب هایپرالاستیک (ماتریس از جنس سیلیکون رابر)		
k_f	k_f (MPa)	θ	K (MPa)	C_{11} (MPa)	C_{12} (MPa)
	۷۸/۹۳	۰			
۰/۱	۱۲/۰۸	۱۵±	۲۵/۸۳۸	۰/۰۰۱۳۹	۰/۱۲۷۸۰
	۳/۰۷	۳۰±			
	۱/۸۸	۴۵±			

برازش منحنی رابطه‌ی استخراج شده برای ماتریس سیلیکون رابر و الیاف کتان با زاویه الیاف ۰، ۱۵±، ۳۰± و ۴۵±، بر نتایج تست تجربی گزارش شده در منبع [۲۴] منجر به بدست آوردن ضرایب هایپرالاستیک و ناهمسانگرد در زوایای مذکور می‌شود که عبارتند از:

در شکل ۴ بارگذاری و مشخصات هندسی نمونه در تست تجربی و همچنین نتایج تجربی در مقایسه با نتایج حاصل از رابطه (۳۳) و ضرایب بدست آمده نمایش داده شده است.

لازم به ذکر است برازش منحنی با استفاده از جعبه ابزار برازش منحنی^۱ در نرم افزار متلب انجام شده است. برای این منظور ابتدا نتایج مربوط به تست تجربی از منبع [۲۴] استخراج و رسم شد. سپس رابطه تنش (رابطه (۳۳)) در نرم‌افزار وارد شده است. همچنین با توجه به محدودیت‌های ذکر شده برای ضرایب هایپرالاستیک و ناهمسانگردی، مثلاً نامنفی بودن ضریب C_{01} ، قیودی برای تعیین ضرایب در نظر گرفته شود. در پایان ضرایب محاسبه شده توسط نرم‌افزار به عنوان پارامترهای مدل معرفی شده‌اند.

در ادامه مقایسه‌ی نمودارهای حاصل از روابط تحلیلی با نمودارهای گزارش شده برای تحلیل المان محدود، که در شکل ۵ مشاهده می‌شود، حاکی از صحت مدل ارائه شده در این پژوهش و دقت کافی آن در پیش‌بینی رفتار ماده هایپرالاستیک تقویت شده با الیاف است. نتایج تحلیل المان محدود از منبع [۱۱] استخراج شده است.

در ادامه برای صحت سنجی مدل در بخش ویسکوالاستیک، از نتایج تجربی گزارش شده در منبع [۲۳] استفاده می‌شود. در این پژوهش یک استوانه از جنس کبد گاو تحت بار فشاری تک محوره قرار گرفته است. بارگذاری در دو نرخ متفاوت ۰/۰۲۱۶ و ۰/۱۷۶۰ میلی‌متر بر ثانیه انجام شده

$$I^6 = A^{(1)} \cdot CA^{(1)} = \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \lambda^2 \cos^2 \theta + \lambda^{-1} \sin^2 \theta$$

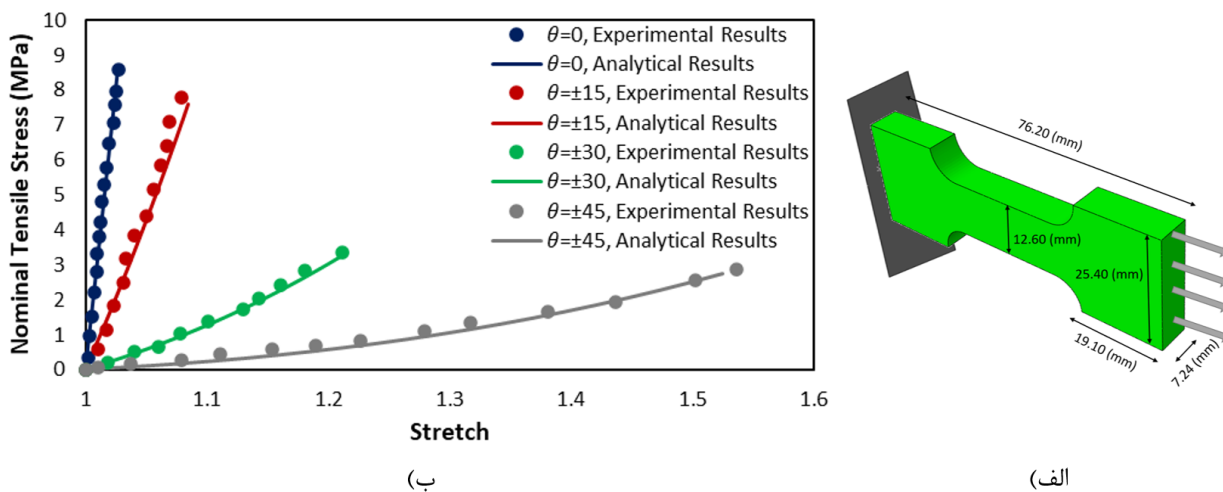
با استفاده از پارامترهای محاسبه شده، تابع انرژی کرنشی برای بخش ناهمسانگرد به صورت رابطه (۳۲) بدست می‌آید.

$$W^{anisotropic} = \frac{k_1}{k_2} \left\{ \exp[k_2 (\lambda^2 \cos^2 \theta + \lambda^{-1} \sin^2 \theta - 1)^2] - 1 \right\} \quad (32)$$

پس از کامل شدن عبارت تابع انرژی کرنشی، برای استخراج تنش نامی، t طبق رابطه (۲۲) از این تابع نسبت به λ مشتق‌گیری می‌شود:

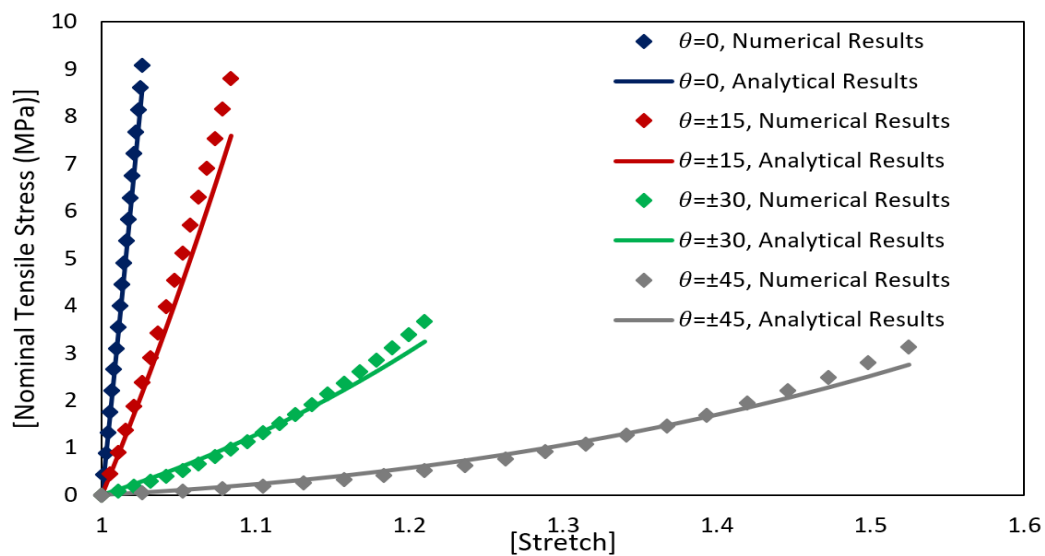
$$t = \frac{dW}{d\lambda} = \frac{dW^{hyperelastic}}{d\lambda} + \frac{dW^{anisotropic}}{d\lambda} = 2(C_{10}\lambda + C_{01})(1 - \lambda^{-3}) + 2k_1 \left\{ \exp[k_2 (\lambda^2 \cos^2 \theta + \lambda^{-1} \sin^2 \theta - 1)^2] - 1 \right\} \times (2\lambda^3 \cos^4 \theta - \lambda^{-3} \sin^4 \theta + \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \lambda^{-2} \sin^2 \theta - 2\lambda \cos^2 \theta) \quad (33)$$

1 Curve fitting toolbox



شکل ۴. الف) بارگذاری و مشخصات هندسی نمونه در تست تجربی. ب) مقایسه نتایج حاصل از تحلیل روابط با ضرایب استخراج شده و نتایج تست تجربی [۲۴] برای ماده هایپرالاستیک ناهمسانگرد

Fig. 4. a) Loading and geometric properties of the experiment sample. b) Analytical vs experimental results [24] for an anisotropic hyperelastic material



شکل ۵. مقایسه نتایج حاصل از تحلیل روابط و نتایج حل عددی [۱۱] برای ماده هایپرالاستیک ناهمسانگرد

Fig. 5. Analytical vs numerical results [11] for an anisotropic hyperelastic material

بدین ترتیب رابطه تنش نامی نهایی عبارتست از:

$$t = \frac{dW^{hyperelastic}}{d\lambda} + \frac{dW^{viscoelastic}}{d\dot{\lambda}} = 2(C_{10}(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3) + C_{01}(\lambda^{-2} + 2\lambda - 3)) + \frac{1}{2}(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3)[\eta_1(2\lambda^2 + \lambda^{-4}) + 4\eta_2(\lambda^3 - \lambda^{-3})^2]\dot{\lambda} \quad (39)$$

ضرایب مورد نیاز برای استفاده در رابطه (۳۹) در جدول ۲ گزارش شده‌اند. استفاده از این ضرایب در رابطه (۳۹) منجر به نتایج خواهد شد که در قیاس با نتایج حاصل از تست تجربی در شکل ۶ نمایش داده شده است. موافقت قابل قبول بین نتایج حاصل از تحلیل روابط و تست تجربی دقت و صحت مدل را در پیش بینی رفتار ماده ویسکوالاستیک تأیید می‌نماید.

برای صحت‌سنجی مدل در بخش دی‌الکتریک نیز مشابه بخش‌های گذشته نتایج تجربی گزارش شده در یکی از پژوهش‌های پیشین به عنوان مرجع (مرجع [۲۵]) انتخاب شده است. در این پژوهش الاستومر از جنس VHB ۴۹۰۵ ابتدا تحت بار مکانیکی P_1 قرار گرفته و از حالت مرجع (تغییر شکل یافته) به حالت پیش کشیدگی تبدیل می‌شود. در این مرحله اعمال بار مکانیکی سبب ایجاد کشیدگی λ_p در راستای بار خواهد شد. سپس به نمونه در این حالت میدان الکتریکی اعمال خواهد شد و نمونه به حالت تحریک شده می‌رسد. در این مرحله کشیدگی در راستاهای درون صفحه، نسبت به حالت مرجع (تغییر شکل نیافته) λ_1 و λ_2 می‌باشد. همچنین با توجه به فرض تراکم ناپذیر بودن نمونه کشیدگی در راستای عمود بر صفحه $\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}$ خواهد بود. مراحل بارگذاری در شکل ۷ نمایش داده شده است.

در این بارگذاری معادله حالت به صورت زیر بیان می‌شود که در آن σ_1 تنش ناشی از اعمال بار مکانیکی می‌باشد.

$$\sigma_1 = \lambda_1 \frac{\partial W^{hyperelastic}}{\partial \lambda_1} + \lambda_1 \frac{\partial W^{electric}}{\partial \lambda_1} \quad (40)$$

براساس تغییرشکل‌های ایجاد شده در نمونه ماتریس گرادیان تغییر شکل و بخش‌های هایپرالاستیک و دی‌الکتریک تابع انرژی عبارتند از:

است. برای این بارگذاری ماتریس‌های F و C مشابه عبارات بدست آمده در بخش قبلی است. اما در این بخش به مشتق زمانی ماتریس C نیاز داریم:

$$\dot{C} = \begin{bmatrix} 2\lambda \dot{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^{-2} \dot{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{-2} \dot{\lambda} \end{bmatrix} \quad (34)$$

همچنین نامتغیرهای ماتریس \dot{C} عبارتند از:

$$J_2 = (2\lambda^2 + \lambda^{-4}) \dot{\lambda}^2, \quad (35)$$

$$J_4 = 2(\lambda^3 - \lambda^{-3}) \dot{\lambda} \quad (36)$$

استفاده از این پارامترها در رابطه‌ی انتخاب شده برای بخش ویسکوالاستیک، تابع انرژی کرنشی در این بخش به صورت زیر بدست می‌آید:

$$W^{viscoelastic} = \frac{1}{4}(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3)[\eta_1(2\lambda^2 + \lambda^{-4}) + 4\eta_2(\lambda^3 - \lambda^{-3})^2]\dot{\lambda}^2 \quad (37)$$

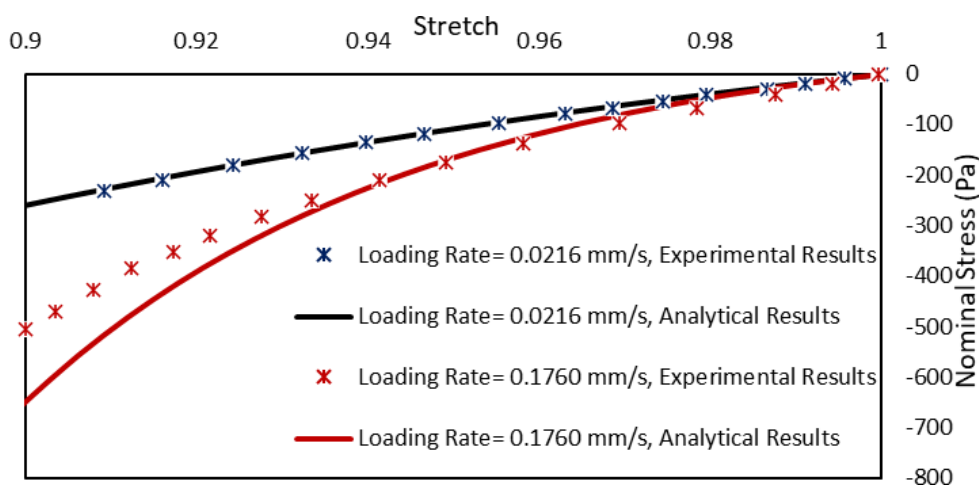
در ادامه به محاسبه مشتق این عبارت نسبت به $\dot{\lambda}$ می‌پردازیم که بخشی از تنش نامی در این بارگذاری است.

$$\frac{dW^{viscoelastic}}{d\dot{\lambda}} = \frac{1}{2}(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3)[\eta_1(2\lambda^2 + \lambda^{-4}) + 4\eta_2(\lambda^3 - \lambda^{-3})^2]\dot{\lambda} \quad (38)$$

جدول ۲. ضرایب هایپرالاستیک و ویسکوالاستیک [۲۳]

Table 2. Hyperelastic and viscoelastic constants [23]

ضرایب ویسکوالاستیک		ضرایب هایپرالاستیک		
η_r (kPa.s)	η_1 (kPa.s)	K (kPa)	C_{10} (kPa)	C_{01} (kPa)
۳۰۰	۶۷۰	۸۰۰	۰/۷۸۵	-۰/۴۸۴



شکل ۶. مقایسه نتایج حاصل از تحلیل روابط و نتایج تست تجربی [۲۳] برای ماده هایپر ویسکوالاستیک

Fig. 6. Analytical vs experimental results [23] for a hayperelastic material

$$W^{electric} = -\frac{1}{2} \epsilon J C^{-1} : \quad (44)$$

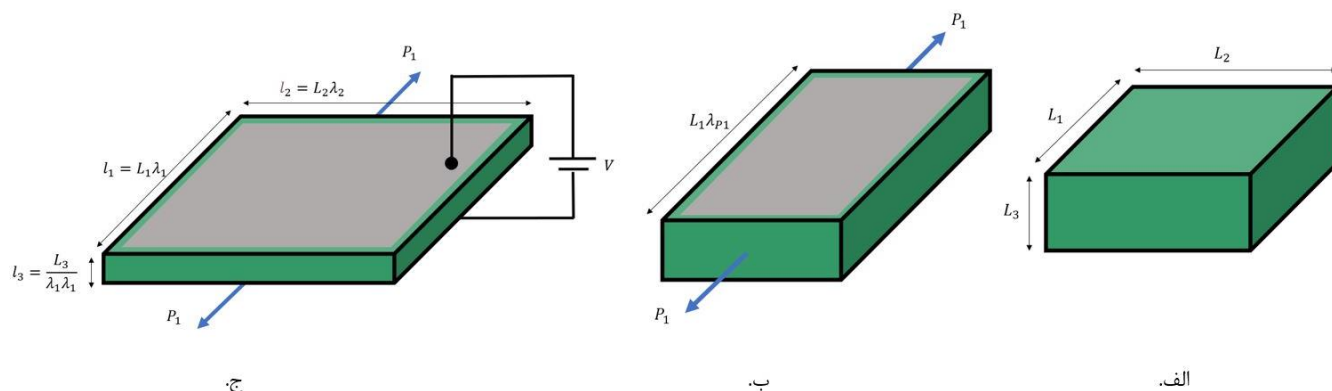
$$E_3^2 = -\frac{1}{2} \epsilon \lambda_1^2 \lambda_2^2 E^2 = -\frac{1}{2} \epsilon \lambda_1^2 \lambda_2^2 \left(\frac{V}{L_3}\right)^2$$

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1} \end{bmatrix}, \quad (41)$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (42)$$

همچنین قابل ذکر است که میدان الکتریکی نامی، E موجود در رابطه، از حاصل تقسیم اختلاف پتانسیل به ضخامت نمونه در مختصات مرجع به دست می آید چرا که مقدار حقیقی آن (متناظر با ضخامت تغییر شکل یافته) با توجه به اثر گرادیان تغییر شکل در محاسبات اعمال خواهد شد. در نهایت با توجه به اینکه در مقاله مرجع مقدار λ_p در حالت پیش کشیدگی (قبل از اعمال اختلاف پتانسیل) ۲/۳۶ گزارش شده است، نمودار کشیدگی

$$W^{hyperelastic} = C_{10}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2} - 3) + C_{01}(\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_1^2 \lambda_2^2 - 3) \quad (43)$$



شکل ۷. بارگذاری مکانیکی و الکتریکی نمونه هایپر دی الکتریک

Fig. 7. Mechanical and electrical loading for a hyper dielectric sample

جدول ۳. ضرایب هایپیرالاستیک و دی الکتریک برای ماده ۴۹۰۵ VHB

Table 3. Hyperelastic and dielectric constants for VHB 4905

ε (F/m)	C_{10} (kPa)	C_{01} (kPa)
$4/7 \times 10^{-12} / 85$	۷/۳	۱۶

مدل جامع پرداخته می‌شود. ماده مورد نظر برای مدل جامع ماتریس سیلیکون رابر تقویت شده با دو دسته الیاف کتان است که خواص ناهمسانگردی الیاف آن در جدول ۱ ارائه شده است. همچنین برای بدست آوردن ضرایب مربوط به هایپیرالاستیسیته و خاصیت ویسکوالاستیک از نتایج تجربی موجود در منبع [۲۸] و برازش منحنی رابطه (۳۹) استفاده شده است. همین‌طور ضرایب گذری نسبتی برای سیلیکون رابر و الیاف کتان به صورت جداگانه در منابع [۲۹ و ۳۰] گزارش شده است. در نهایت ضرایب هایپیرالاستیک و ویسکوالاستیک استخراج شده و ضریب گذری الکتریکی نسبتی کامپوزیت حاصل از ترکیب سیلیکون رابر و کتان، با توجه به درصد حجمی الیاف ۵۸٪ طبق جدول ۴ بدست خواهد آمد.

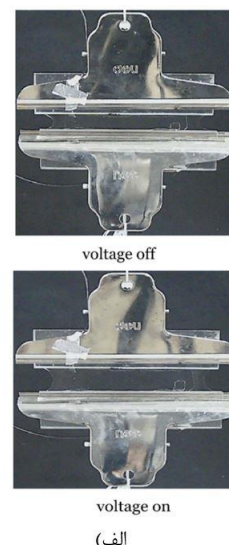
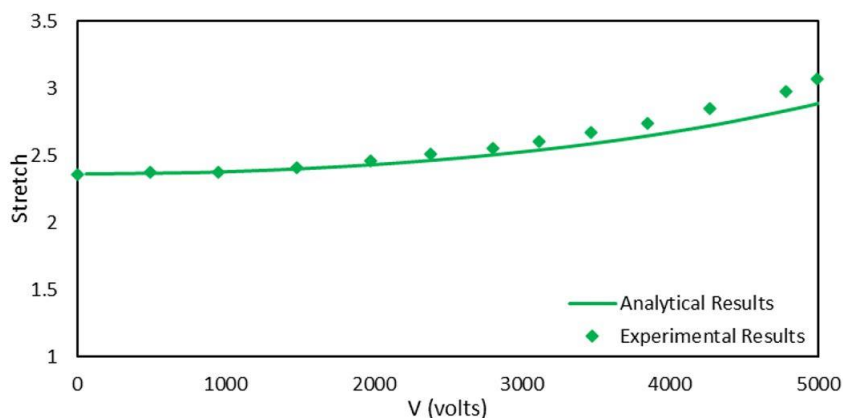
با فرض بارگذاری به صورت کشش تک محوره در راستای محور X ، و استفاده از ماتریس گرادیان تغییر شکل متناظر، تنش کوشی در فرم جامع، از رابطه (۲۱) به شکل زیر ساده می‌شود.

در راستای یک بر اساس ولتاژ به صورت شکل ۷ بدست خواهد آمد. قابل ذکر است ضرایب مورد نیاز برای رسم نمودار عبارتند از ε ، C_{10} و C_{01} برای ماده ۴۹۰۵ VHB که به ترتیب از مراجع [۲۶] و [۲۷] بدست آمده و در جدول ۳ گزارش شده‌اند.

همان‌طور که در شکل ۸ مشاهده می‌شود، مشابهت نتایج گزارش شده از تست تجربی و نتایج به دست آمده از روابط، صحت مدل ارائه شده را تأیید می‌نماید.

لازم به ذکر است که هر چند صحت‌سنجی مدل به شکل یکپارچه ارزیابی معتبرتری از صحت و دقت مدل ارائه می‌دهد، به دلیل عدم وجود نتایج تجربی مناسب برای این منظور، در این پژوهش بخش‌های مختلف توصیف‌کننده رفتار ماده به شکل جداگانه مورد سنجش قرار گرفته‌اند.

پس از تأیید روابط ارائه شده در مدلسازی خواص هایپیرالاستیک، ناهمسانگرد، ویسکوالاستیک و دی الکتریک با ترکیب خواص با هم به تحلیل



(ب)

(الف)

شکل ۸. الف) تجهیزات تست تجربی [۲۵]. ب) مقایسه نتایج حاصل از تحلیل روابط و نتایج تست تجربی [۲۵] برای ماده هایپروالاستیک با خاصیت دی الکتریک

Fig. 8. a) Experimental test setup [25]. b) Analytical vs experimental results [25] for a hyperelastic dielectric material

جدول ۴. ضرایب هایپروالاستیک و ویسکوالاستیک ماتریس سیلیکون رابر و ضریب گذردهی نسبی برای ماتریس، الیاف و کامپوزیت نهایی

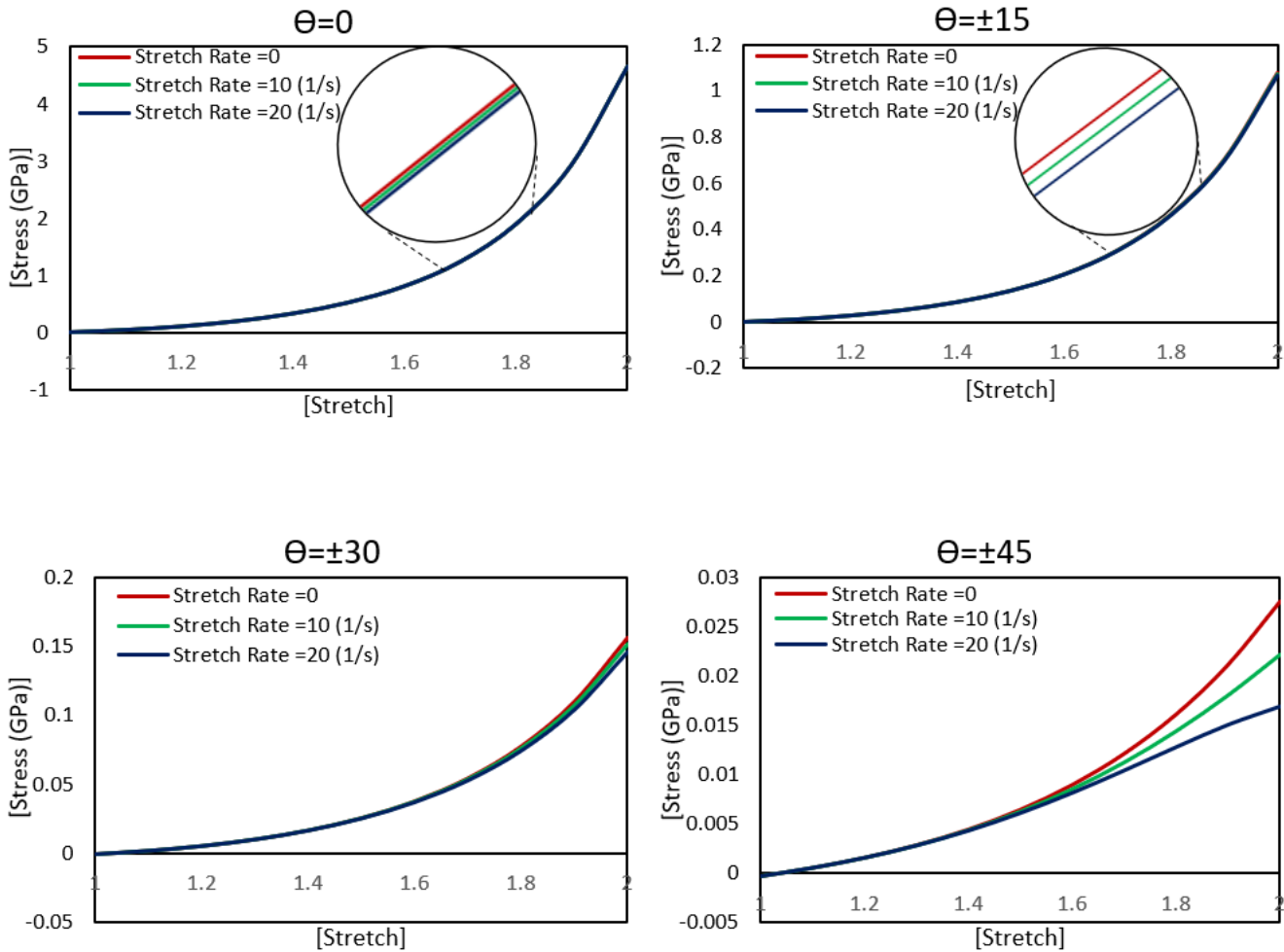
Table 4. Hyperelastic and viscoelastic constants for silicon rubber and relative permittivity constants for the matrix, fibers and final composite

ϵ_r (F/m)	ϵ_r (F/m)	ϵ_r (F/m)	η_r (kPa.s)	η_l (kPa.s)	C_{11} (MPa)	C_{11} (MPa)
کامپوزیت	کتان	سیلیکون رابر				
۳/۲۳	۳/۱۸	۳/۳	-۰/۵۳۹۹	۵/۰۲۶۹	۰/۵۳۵۲	۱/۰۵۳۸

۳-۲- اثر نرخ بارگذاری بر رفتار ماده‌ی هایپروویسکوالاستیک ناهمسانگرد در شکل ۹ نمودار تنش-کشیدگی برای نمونه با دو دسته الیاف (۴ زاویه الیاف مختلف) تحت بارگذاری کشش تک محوری رسم شده است. نمودارها بیانگر اثر نرخ کشیدگی بر رفتار ماده می‌باشد که در آن نرخ‌های صفر، ۱۰ و ۲۰ در نظر گرفته شده‌اند. مشاهده می‌شود که برای الیاف صفر درجه (الیاف در راستای محور کشش) اثر نرخ کشیدگی کم و قابل چشمپوشی است. اما با افزایش زاویه الیاف نسبت به محور کشش تأثیر نرخ کشیدگی به تدریج بزرگتر می‌شود. با توجه به تصاویر، اثر نرخ کشیدگی در هر چهار زاویه الیاف، در کشیدگی‌های کوچک، ناچیز است و با افزایش مقدار کشیدگی، این تأثیر بزرگتر می‌شود. بر اساس نمودارهای بدست آمده برای الیاف در زاویه $\pm 30^\circ$

$$\sigma_{11} = \frac{4}{3}(C_{10}\lambda + C_{01})(\lambda - \lambda^{-2}) + 4k(\lambda^4 \cos^4 \theta + \lambda \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \lambda^2 \cos^2 \theta) \exp[k_2(\lambda^2 \cos^2 \theta + \lambda^{-1} \sin^2 \theta - 1)^2] - \frac{1}{2}\epsilon E_3^2 \lambda + (\lambda^6 - 3\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^{-2} - 2\lambda^{-3} - 1) \times [\eta_1 + 4\eta_2(\lambda^3 - \lambda^{-3})\dot{\lambda}] \quad (45)$$

در ادامه به بررسی نتایج حاصل پرداخته خواهد شد.



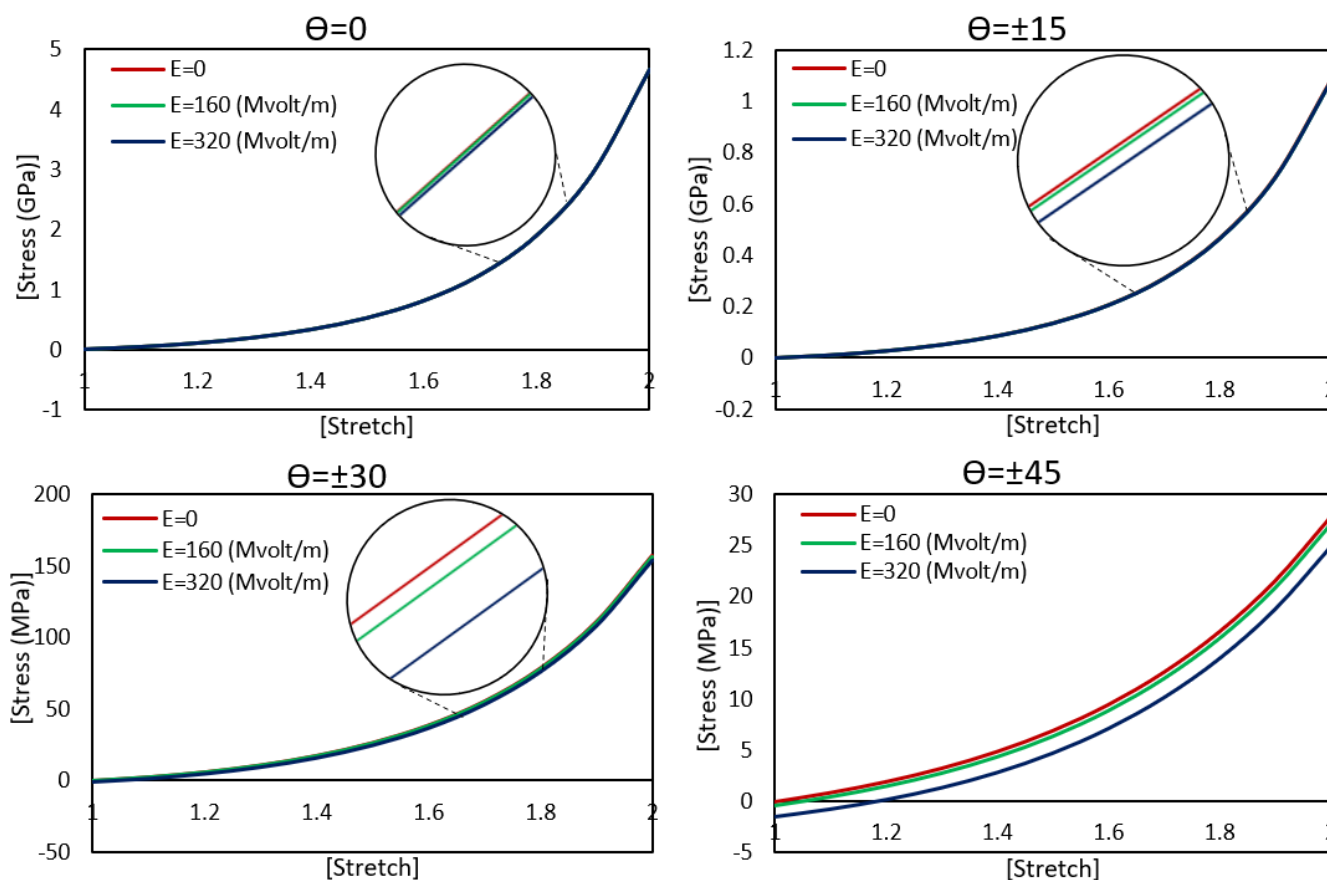
شکل ۹. اثر نرخ کشیدگی بر نمودار تنش-کشیدگی در زاویه الیافهای مختلف

Fig. 9. Rate dependency effect on the stress-stretch chart at different fiber angles

این بخش نرخ کشیدگی $\dot{\lambda} = 1(1/s)$ در نظر گرفته شده است. میدانهای اعمال شده در دو گروه کلی قرار گرفته‌اند. در گروه اول میدانهای الکتریکی صفر، ۱۶۰ و ۳۲۰ مگاولت بر متر و در گروه دوم میدانهای صفر، ۱۶۰۰ و ۳۲۰۰ مگاولت بر متر (ده برابر میدانهای الکتریکی گروه اول) فرض شده‌اند. بر اساس نمودار شکل‌های ۱۰ و ۱۱، که تغییرات تنش بر اساس کشیدگی را نمایش می‌دهند، با افزایش زاویه الیاف نسبت به محور کشش، اثر میدان الکتریکی (در هر دو گروه میدان الکتریکی) بر رفتار ماده بیشتر می‌شود. همین‌طور مشاهده می‌شود که در میدانهای کوچک (گروه اول)

و ± 45 درجه، در صورتی که میزان کشیدگی به اندازه کافی بزرگ باشد، می‌توان کاهش شیب نمودار در اثر افزایش نرخ کشیدگی را مشاهده نمود. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش زاویه الیاف نسبت به محور کشش، بازه تنش بدست آمده کاهش می‌یابد.

۳-۳- اثر میدان الکتریکی بر رفتار ماده‌ی هایپروویسکوالاستیک ناهمسانگرد در بخش دیگر اثر میدان الکتریکی بر رفتار نمونه تقویت شده با دو دسته الیاف، در زوایای مختلف، بررسی شده است. برای بدست آوردن نتایج

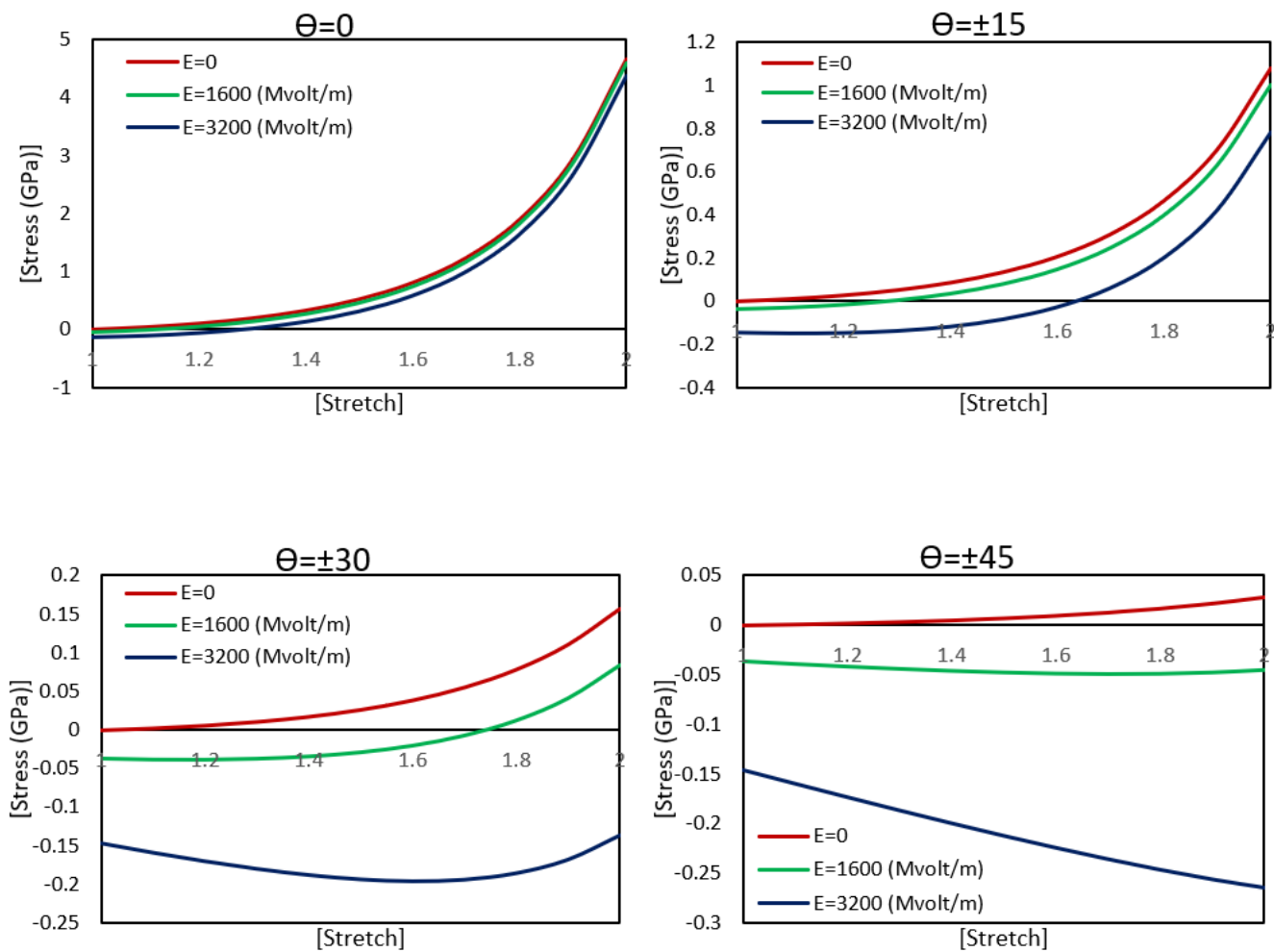


شکل ۱۰. اثر میدان‌های الکتریکی گروه یک بر نمودار تنش-کشیدگی در زاویه الیاف‌های مختلف

Fig. 10. Electric field effect on the stress-stretch chart at different fiber angles, group 1

همچنین، با توجه به شکل‌های ۹، ۱۰ و ۱۱ مشاهده می‌شود که اثر نرخ کشیدگی و میدان الکتریکی، در هر سه تصویر، با افزایش زاویه‌ی الیاف افزایش یافته است. در زاویه الیاف صفر، الیاف کاملاً هم راستا با محور اعمال بار مکانیکی هستند. به همین دلیل در این آرایش، بخش قابل توجهی از تنش توسط الیاف تحمل می‌شود. و از آنجایی که برای الیاف، خاصیت وابستگی به نرخ و دی‌الکتریک در نظر گرفته نشده، تغییرات نرخ بارگذاری یا میدان اثر کمی بر تنش نهایی کامپوزیت دارد. با افزایش زاویه الیاف، سهم ماتریس سیلیکونی در تحمل تنش افزایش می‌یابد و مدل در نظر گرفته شده برای ماتریس قابلیت توصیف رفتار وابسته نرخ و دی‌الکتریک را دارد. بدین ترتیب با افزایش زاویه الیاف این ویژگی‌های در تنش نهایی با وضوح بیشتری مشاهده می‌گردد.

اثر میدان بر رفتار نمونه با زاویه الیاف نزدیک به صفر، به سختی قابل رویت است. اما برای میدان‌های گروه دوم، تأثیر میدان الکتریکی حتی در زاویه الیاف صفر و نزدیک به آن به وضوح مشخص است. به علاوه در میدان‌های گروه یک (شکل ۱۰)، نمودار تنش بر حسب کشیدگی، برای همه زوایای الیاف و همه مقادیر میدان، شیب صعودی دارد. اما در میدان‌های گروه دوم (شکل ۱۱)، در زاویه الیاف $\pm 30^\circ$ و $\pm 45^\circ$ درجه، با افزایش مقدار میدان الکتریکی، شیب نمودارها به تدریج در حال کم شدن است. از طرف دیگر، با افزایش میدان الکتریکی و زاویه‌ی الیاف، عرض از مبدأ نمودارها افزایش یافته است که حاکی از بزرگتر شدن سهم تنش الکتریکی (با مقدار منفی) نسبت به سایر جمله‌ها در رابطه $\pm 45^\circ$ است. در این نمودارها نیز کاهش بازه‌ی تنش، با افزایش زاویه‌ی الیاف نسبت به محور کشش قابل مشاهده است.



شکل ۱۱. اثر میدان‌های الکتریکی گروه دو بر نمودار تنش-کشیدگی در زاویه الیاف‌های مختلف

Fig. 11. Electric field effect on the stress-stretch chart at different fiber angles, group 2

۴- نتیجه‌گیری

سپس به شکل تحلیلی بررسی شده‌است. بنابراین رابطه ساختاری پیشنهادی بر اساس آن، قابلیت مطالعه دقیق و جزئی در مورد پارامترهای مؤثر بر رفتار ماده را فراهم می‌کند. همچنین به دلیل استقلال جمله‌های توصیف کننده رفتار ماده از هم، به سادگی می‌توان هر جمله را با توجه به ویژگی‌های ماده مورد پژوهش و مدل انتخابی تغییر و ارتقا داد. از طرف دیگر امکان توسعه روابط فعلی و تهیه‌ی فرم قابل استفاده در نرم‌افزارهای المان محدود و حل مسائل پیچیده به صورت عددی وجود دارد.

یافته‌های این تحلیل نشان می‌دهند که، با افزایش زاویه الیاف نسبت به افق، گستره تنش کاهش و اثر نرخ بارگذاری و میدان الکتریکی افزایش می‌یابد. همچنین تأثیر تغییر هر یک از جمله‌ها، ناشی از تغییرات پارامترهای مؤثر متناظر، در نتایج حاصل از مدل به خوبی قابل رویت است [۷].

در این پژوهش مدلی برای توصیف رفتار ماده دی‌الکتریک الاستومر هایپروویسکو الاستیک تقویت شده با دو دسته الیاف ارائه شده است. مقایسه نتایج بدست آمده از قسمت‌های مجزای مدل با نتایج تست‌های تجربی موجود در ادبیات تحقیق برای مواد با ویژگی‌های مختلف، حاکی از صحت و دقت مدل پیشنهادی در پیش‌بینی رفتار ماده است. همچنین استفاده از فرم جامع مدل پیشنهادی امکان توضیح تغییرات تنش کوشی بر حسب کشش را فراهم می‌کند. نتایج حاصل از تحلیل تنش کوشی مستخرج از فرم جامع برای یک مسئله نمونه از تنش تک محوره نشان می‌دهد که مدل ارائه شده علاوه بر ناهمسانگردی و اثر میدان الکتریکی، قابلیت پیش‌بینی رفتار وابسته به نرخ ماده را نیز دارد. مدل ارائه شده بر اساس روابط تحلیلی توسعه و

$$F = \frac{\partial \chi(X)}{\partial X} = \frac{\partial x}{\partial X} \quad (۱)$$

$$B = FF^T \quad (۲)$$

$$C = F^T F \quad (۳)$$

$$I_1 = 1 : C = tr(C) \quad (۴)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (I_1^2 - (1 : C^2)) \quad (۵)$$

$$I_3 = \det(C) \quad (۶)$$

$$I_4 = A^{(1)} . CA^{(1)} = a^{(1)} . a^{(1)} \quad (۷)$$

$$I_6 = A^{(2)} . CA^{(2)} = a^{(2)} . a^{(2)} \quad (۸)$$

$$J_1 = 1 : \dot{C} = tr(\dot{C}) \quad (۹)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} (1 : \dot{C}^2) \quad (۱۰)$$

$$J_3 = \det(\dot{C}) \quad (۱۱)$$

$$J_4 = I : (C \dot{C}) \quad (۱۲)$$

$$L = \dot{F} F^{(-1)} \quad (۱۳)$$

$$D = \frac{1}{2} (L + L^T) \quad (۱۴)$$

$$\dot{C} = \dot{F}^T F + F^T \dot{F} = 2F^T DF \quad (۱۵)$$

$$\dot{\bar{C}} = \dot{F}^T \bar{F} + \bar{F}^T \dot{F} = 2\bar{F}^T D\bar{F} = J^{-\frac{2}{3}} \dot{C} - \frac{2}{3} J^{-\frac{5}{3}} \dot{J} C \quad (۱۶)$$

$$\dot{J} = J tr(D) \quad (۱۷)$$

$$\frac{\partial J}{\partial C_{ij}} = \frac{J}{2} C_{ij}^{-1} \quad (۱۸)$$

$$\frac{\partial C_{kl}}{\partial C_{ij}} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (۱۹)$$

$$\frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}_{kl}} = \delta_{kl}, \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{C}_{kl}} = \bar{I}_1 \delta_{kl} - \bar{C}_{kl}, \frac{\partial I_4}{\partial C_{ij}} = A_i^{(1)} A_j^{(1)} \quad (۲۰)$$

$$\frac{\partial I_6}{\partial C_{ij}} = A_i^{(2)} A_j^{(2)} \quad (۲۱)$$

$$\frac{\partial C_{kl}^{-1}}{\partial C_{ij}} = -\frac{1}{2} (C_{ik}^{-1} C_{jl}^{-1} + C_{il}^{-1} C_{jk}^{-1}) \quad (۲۲)$$

$$\frac{\partial \dot{J}}{\partial \dot{C}_{ij}} = \frac{1}{2} J C_{ij}^{-1} \quad (۲۳)$$

$$\frac{\partial \bar{J}_2}{\partial \bar{C}_{kl}} = \dot{\bar{C}}_{kl} \quad (۲۴)$$

$$\frac{\partial \bar{J}_4}{\partial \bar{C}_{kl}} = \bar{C}_{kl} \quad (۲۵)$$

$$F_{mi} F_{nj} \delta_{ij} = B_{mn} \quad (۲۶)$$

$$F_{mi} C_{ij}^{-1} F_{nj} = \delta_{mn} \quad (۲۷)$$

$$F_{mi} C_{ij} F_{nj} = B_{mx} B_{nx} \quad (۲۸)$$

$$F_{mi} A_i^{(1)} = a_m^{(1)} \quad (۲۹)$$

$$F_{mi} e_i = E_m \quad (۳۰)$$

۵- فهرست علائم

علائم انگلیسی

بردار یکه در جهت دسته الیاف i ام در مختصات مرجع و مختصات تغییر شکل یافته	$A^{(i)}, a^{(i)}$
تانسور کرنش کوشی-گرین چپ	B
تانسور کرنش کوشی-گرین راست	C
ثوابت در مدل مونی ریولین، Pa _i	C_{\cdot}, C_{\cdot}
بخش متقارن ماتریس گرادیان سرعت فضایی	D
بردار میدان الکتریکی در مختصات مرجع و تغییر شکل یافته، Vol t / m	E, e
ماتریس گرادیان تغییر شکل	F
ماتریس واحد	I
نامتغیرهای تانسور کرنش کوشی-گرین و نامتغیرهای مربوط به ناهمسانگردی ژاکوبین (دترمینان تانسور گرادیان تغییر شکل)	$I_i, i = 1, 2, 3, 4, 6$
نامتغیرهای تانسور مشتق کرنش کوشی-گرین	$J, i = 1, 2, 3, 4$
مدول بالک، Pa	K
ثوابت ناهمسانگردی	k_{\cdot}, k_{\cdot}
ماتریس گرادیان سرعت فضایی	L
ابعاد اولیه و نهایی لایه‌ی الاستومری	$l_i, L_i, i = 1, 2, 3$
نیروهای مکانیکی	$P_i, i = 1, 2, 3$
تانسور تنش پایولا-کیرشهف دوم	S
بردار تنش نامی، Pa	t
ولتاژ، Vol t	v
چگالی انرژی جنبشی	W
بردارهای موقعیت مرجع و حاضر	x, X
	علائم یونانی
تابع دلتای کرونگر	δ_{ij}
ضریب گذردهی نسبی، ضریب گذردهی خلأ و ضریب گذردهی ماده، F / m	$\epsilon_r, \epsilon_{\cdot}, \epsilon$
زاویه الیاف	θ
ثوابت ویسکوالاستیک، Pa.s	η_1, η_2
کشیدگی اصلی	$\lambda_i, i = 1, 2, 3$
تنش کوشی، Pa	σ
ضابطه‌ی انتقال از مختصات مرجع به مختصات تغییر شکل یافته	χ
	زیرنویس
حجمی	vol

بالانویس

•	اوپراتور مشتق نسبت به زمان
—	بخش حجم ثابت

منابع

- [1] R. Pelrine, R. Kornbluh, Q. Pei, J. Joseph, High-speed electrically actuated elastomers with strain greater than 100%, Science, 287(5454) (2000) 836-839.
- [2] S. Bauer, S. Bauer-Gogonea, I. Graz, M. Kaltenbrunner, C. Keplinger, R. Schwödiauer, 25th anniversary article: a soft future: from robots and sensor skin to energy harvesters, Advanced Materials, 26(1) (2014) 149-162.
- [3] Q. Pei, M. Rosenthal, S. Stanford, H. Prahlad, R. Pelrine, Multiple-degrees-of-freedom electroelastomer roll actuators, Smart materials and structures, 13(5) (2004) N86.
- [4] F. Carpi, A. Mannini, D. De Rossi, Elastomeric contractile actuators for hand rehabilitation splints, in: Electroactive Polymer Actuators and Devices (EAPAD) 2008, SPIE, 2008, pp. 37-46.
- [5] F. Carpi, G. Frediani, S. Turco, D. De Rossi, Bioinspired tunable lens with muscle-like electroactive elastomers, Advanced functional materials, 21(21) (2011) 4152-4158.
- [6] R.E. Pelrine, R.D. Kornbluh, J.P. Joseph, Electrostriction of polymer dielectrics with compliant electrodes as a means of actuation, Sensors and Actuators A: Physical, 64(1) (1998) 77-85.
- [7] G. Kofod, Dielectric elastomer actuators, The Technical University of Denmark, 2001.
- [8] H. Kim, S. Oh, K. Hwang, H. Choi, J. Jeon, J. Nam, Actuator model of electrostrictive polymers (EPs) for microactuators, in: Smart Structures and Materials 2001: Electroactive Polymer Actuators and Devices, SPIE, 2001, pp. 482-490.
- [9] S. Son, Nonlinear electromechanical deformation of isotropic and anisotropic electro-elastic materials, Virginia Tech, 2011.
- [10] H. Yong, X. He, Y. Zhou, Electromechanical instability

- [21] G.A. Holzapfel, T.C. Gasser, R.W. Ogden, A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models, *Journal of elasticity and the physical science of solids*, 61(1) (2000) 1-48.
- [22] A. Büschel, S. Klinkel, W. Wagner, Dielectric elastomers—numerical modeling of nonlinear visco-electroelasticity, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 93(8) (2013) 834-856.
- [23] Z.M. Ghahfarokhi, M. Salmani-Tehrani, M.M. Zand, S. Esmaeilian, A New Viscous Potential Function for Developing the Viscohyperelastic Constitutive Model for Bovine Liver Tissue: Continuum Formulation and Finite Element Implementation, *International Journal of Applied Mechanics*, 12(03) (2020) 2050029.
- [24] L.D. Peel, Fabrication and mechanics of fiber-reinforced elastomers, Brigham Young University, 1998.
- [25] Y. Wang, B. Chen, Y. Bai, H. Wang, J. Zhou, Actuating dielectric elastomers in pure shear deformation by elastomeric conductors, *Applied Physics Letters*, 104(6) (2014) 064101.
- [26] S. Son, N. Goulbourne, Dynamic response of tubular dielectric elastomer transducers, *International Journal of Solids and Structures*, 47(20) (2010) 2672-2679.
- [27] T. Vu-Cong, C. Jean-Mistral, A. Sylvestre, Impact of the nature of the compliant electrodes on the dielectric constant of acrylic and silicone electroactive polymers, *Smart Materials and Structures*, 21(10) (2012) 105036.
- [28] L. Guo, Y. Lv, Z. Deng, Y. Wang, X. Zan, Tension testing of silicone rubber at high strain rates, *Polymer Testing*, 50 (2016) 270-275.
- [29] C. Löwe, X. Zhang, G. Kovacs, Dielectric elastomers in actuator technology, *Advanced engineering materials*, 7(5) (2005) 361-367.
- [30] F.S.C. Mustata, A. Mustata, Dielectric behaviour of some woven fabrics on the basis of natural cellulosic fibers, *Advances in Materials Science and Engineering*, (2014).
- in anisotropic dielectric elastomers, *International Journal of Engineering Science*, 50(1) (2012) 144-150.
- [11] A. Ahmadi, M. Asgari, Nonlinear coupled electro-mechanical behavior of a novel anisotropic fiber-reinforced dielectric elastomer, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 119 (2020) 103364.
- [12] M. Jandron, D.L. Henann, Electromechanical instabilities in periodic dielectric elastomer composites, *International Journal of Solids and Structures*, 191 (2020) 220-242.
- [13] E. Yang, M. Frecker, E. Mockensturm, Viscoelastic model of dielectric elastomer membranes, in: *Smart Structures and Materials 2005: Electroactive Polymer Actuators and Devices (EAPAD)*, SPIE, 2005, pp. 82-93.
- [14] W. Hong, Modeling viscoelastic dielectrics, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59(3) (2011) 637-650.
- [15] C. Chiang Foo, S. Cai, S. Jin Adrian Koh, S. Bauer, Z. Suo, Model of dissipative dielectric elastomers, *Journal of Applied Physics*, 111(3) (2012) 034102.
- [16] A. York, J. Dunn, S. Seelecke, Experimental characterization of the hysteretic and rate-dependent electromechanical behavior of dielectric electro-active polymer actuators, *Smart Materials and Structures*, 19(9) (2010) 094014.
- [17] M. Wissler, E. Mazza, Modeling and simulation of dielectric elastomer actuators, *Smart Materials and structures*, 14(6) (2005) 1396.
- [18] J.-S. Plante, S. Dubowsky, On the performance mechanisms of dielectric elastomer actuators, *Sensors and Actuators A: Physical*, 137(1) (2007) 96-109.
- [19] N. Kumar, V.V. Rao, Hyperelastic Mooney-Rivlin model: determination and physical interpretation of material constants, *Parameters*, 2(10) (2016) 01.
- [20] J. Simo, R. Taylor, Penalty function formulations for incompressible nonlinear elastostatics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 35(1) (1982) 107-118.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Majidi, M. Asgari, Developing an Analytical Model for Viscoelastic Anisotropic Dielectric Elastomer and Investigating the Rate Dependent Electromechanical Behavior, Amirkabir J. Mech Eng., 54(12) (2023) 2781-2800.

DOI: [10.22060/mej.2023.21565.7468](https://doi.org/10.22060/mej.2023.21565.7468)

