



روش بدون شبکه برای حل عددی جریان‌های داخلی با تقارن محوری

مصطفی هادی‌دولابی، مهدی هاشم‌آبادی*، رضا جمشیدی

مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۱/۰۶/۰۴
بازنگری: ۱۴۰۱/۱۲/۱۵
پذیرش: ۱۴۰۱/۱۲/۱۶
ارائه آنلاین: ۱۴۰۲/۰۱/۰۴

کلمات کلیدی:

روش بدون شبکه
جریان داخلی
مقارن محور
حل عددی
جریان غیرلزج

خلاصه: در این تحقیق یک روش عددی بدون شبکه برای حل جریان‌های داخلی و مقارن محور توسعه داده شده است. در این روش از حداقل مربعات سری تیلور برای گسسته‌سازی مکانی و از روش چند مرحله‌ای صریح رانگ کوتاه برای گسسته‌سازی زمانی استفاده شده است. در الگوریتم حاکم بر این کُد از معادلات اویلر دوبعدی و مقارن محور با استفاده از ترم‌های اتلافات مصنوعی مرتبه دو و چهار برای حل جریان استفاده شده است. جهت مدل‌سازی شرایط مرزی از مرزهای ورودی و خروجی مادون‌صوت، مافوق‌صوت و مرز دیواره به تناسب مساله استفاده شده است. جهت اعتبارسنجی نتایج حاصل از کُد، جریان غیر لزج درون یک نازل دوبعدی و همچنین جریان مافوق صوت داخل کانال به همراه برآمدگی مورد تحلیل قرار گرفته و نتایج با داده‌های معتبر مقایسه شده است. همچنین توانایی کُد در تسخیر شوک عمودی در جریان داخل نازل دوبعدی و تقارن محور ارائه شده است. در نهایت نیز شبیه‌سازی جریان پایا درون یک نازل همگرا-واگرا مقارن محور ماوراءصوت با ماخ خروجی ۵ انجام شده است تا دقت حل کُد عددی در سرعت ماوراءصوت نیز سنجیده شود. نتایج نشان می‌دهد کُد توسعه داده شده با دقت بسیار خوبی قادر به شبیه‌سازی جریان‌های داخلی پایا و مقارن محور است. روند همگرایی کُد نیز ارائه شده است که نشان از همگرایی مناسب کُد عددی دارد. زمان تحلیل برای تسخیر شوک در نازل دوبعدی تقارن محور نسبت به نرم‌افزار فلوئنت حدود ۶۴ درصد سریع‌تر است.

یا توابع چند جمله‌ای استفاده می‌کنند. در روش‌های بدون شبکه بیشتر از روش سری تیلور برای محاسبه کمترین مربعات خطا استفاده می‌شود. باتینا [۳] با استفاده از تابع وزنی ثابت و دشبانده و رامش [۴] نیز با استفاده از روش‌های بالادستی، توابع بر اساس کمترین مربعات خطا را تخمین زده‌اند. کتز و جیمسن [۵] نیز برای افزایش سرعت همگرایی در روش بدون شبکه روش چند ابری را پیشنهاد داده‌اند. در سال‌های اخیر روش‌های سریعی برای تحلیل جریان غیر لزج با استفاده از روش بدون شبکه برای جریان‌های دوبعدی توسعه یافته است. برخی تحقیقات نشان دادند هنگامی که در روش بدون شبکه از حداقل مربعات مرتبه اول تیلور و اتلافات عددی مرتبه دو و چهار جیمسون استفاده می‌شود، در مقایسه با روش حجم محدود با شبکه یکسان دارای سرعت همگرایی بیشتر و زمان محاسبات کمتری است [۶-۹]. هاشم‌آبادی و هادی‌دولابی برای بالابردن دقت حل روش بدون شبکه از گسسته‌سازی مرتبه بالاتر استفاده کردند [۱۰، ۱۱]. چپو و جیمسون [۱۲] HNC نیز روش بقایی را برای روش بدون شبکه ارائه داده‌اند. ژان و همکارانش [۱۳] یک روش بدون شبکه مبتنی بر طرح گاز جنبشی مجزا برای

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر از روش‌های عددی بدون شبکه جهت مرتفع نمودن برخی از مشکلات و نواقص موجود در روش‌های مبتنی بر شبکه استفاده شده است. در این روش تنها توزیع نقاط تعریف می‌شود و نوع ارتباط نقاط اهمیتی ندارد و از ابر نقاط برای تخمین داده‌های هر نقطه استفاده می‌شود. در مقایسه با روش‌های مبتنی بر شبکه، این روش‌ها از حساسیت کمتر نسبت به چینش نقاط برخوردار است. راحتی تولید و اصلاح توزیع نقاط (تطبیق) از مزایای استفاده از روش بدون شبکه است. لازم به ذکر است که هزینه تولید و توزیع نقاط به مراتب کمتر از تولید شبکه در میدان مشابه است. با توجه به اهمیت تولید نقاط در میدان جریان، حتی در سال‌های اخیر نیز برخی تحقیقات به توسعه روش‌های تولید نقاط برای حل‌های بدون شبکه پرداخته‌اند [۱].

روش‌های حل جریان در روش بدون شبکه توسط لی و گو [۲] معرفی شده‌اند. اغلب روش‌های مورد استفاده در دینامیک سیالات محاسباتی بر مبنای روش نقاط محدود است که معمولاً از حداقل مربعات سری تیلور و

*نویسنده عهده‌دار مکاتبات: hashemabadi@mut.ac.ir



کردند. شاهنه و همکارانش [۲۰] یک روش بدون شبکه مرتبه بالا برای حل جریان‌های تراکم‌ناپذیر توسعه داده‌اند. آن‌ها از توابع پایه شعاعی در روش بدون شبکه استفاده کردند. کوتوریر و سادات [۲۱] از روش بدون شبکه مبتنی بر تقریب پخش برای حل جریان دوبعدی و سه‌بعدی استفاده کرده‌اند. نتایج آن‌ها نشان داد که روش ارائه شده دارای دقت مناسبی است. اگرچه به دلیل مزایای روش‌های بدون شبکه این روش‌ها و مباحث پیرامونی آن مورد توجه محققین قرار گرفته است، اما حل جریان‌های داخلی پایا با استفاده از روش‌های سریع بدون شبکه (استفاده از ترم‌های اتلافات مصنوعی^۲ مرتبه دو و چهار) و همچنین حل معادلات متقارن محور با استفاده از این روش‌ها موضوعی است که به آن پرداخته نشده است و برای اولین بار تحقیق حاضر به آن پرداخته شده است و نوآوری اصلی در روش حل است. از این رو افق وسیعی برای تعمیم این روش به جریان‌های داخلی و تعیین دقت فیزیک حاکم بر این نوع جریان‌ها در هندسه‌هایی مانند نازل‌ها، کانال‌ها، تونل‌های باد، محفظه‌های احتراق، جریان حول روتور و استاتور و ... وجود دارد. روش حل ارائه داده شده قابلیت استفاده در تمامی جریان‌ها را دارد زیرا معادلات حاکم بر سیال را حل می‌کند و تنها در نحوه محاسبه شارهای جابجایی از روش نوین استفاده می‌کند. نحوه اعمال شرایط مرزی دیواره در این روش نسبت به روش‌هایی مانند حجم محدود متفاوت است و آن نیز به دلیل استفاده از نقاط همجوار در تعیین شرط مرزی است. هدف اساسی در این تحقیق، توسعه کد عددی بر پایه روش بدون شبکه سریع جهت شبیه‌سازی و تحلیل جریان‌های داخلی پایا و متقارن محور تراکم‌پذیر انجام شده است. هزینه‌های اندک تولید گره، سرعت بالای همگرایی نسبت به روش‌هایی مانند حجم محدود، استفاده از روش اختلاف مرکزی در تعیین اتلافات عددی، حل جریان‌های پایا و نتایج با دقت بسیار مناسب از جمله قابلیت‌های این کد به شمار می‌رود.

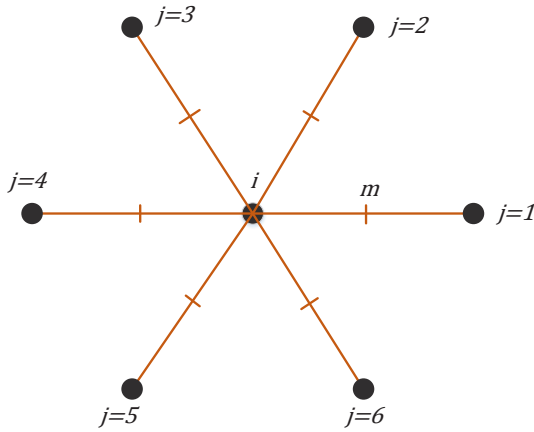
۲- معادلات حاکم

معادله حاکم بر جریان غیرلزج دو بعدی متقارن محور به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial y} = G \quad (1)$$

جریان‌های تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر ارائه کردند. آن‌ها گسسته‌سازی معادلات را با استفاده از روش حداقل مربعات اختلاف محدود و برای شبیه‌سازی ناپیوستگی‌های موجود در جریان‌های سرعت بالا از نقاط مجازی بین نقاط اصلی استفاده کردند. سریدار و بالاکریشن [۱۴] یک روش اختلاف محدود بالادست را برای حلگرهای بدون شبکه ارائه دادند. آن‌ها از این روش برای حل جریان‌های خارجی و داخلی دوبعدی بهره بردند. در این روش آن‌ها قادر بودند که روی هر نوع شبکه (باسازمان، بی‌سازمان یا حتی توزیع تصادفی نقاط) نتایج خوبی گرفته و نتایج در رژیم‌ها مختلف را با نتایج یک کد حجم محدود مقایسه کردند. آن‌ها در این مقاله تلاش محاسباتی روش بدون شبکه ارائه شده را تقریباً مشابه با روش حجم محدود بیان کردند. ما و همکارانش [۱۵] از ترکیب روش بدون شبکه و حجم محدود برای حل جریان دوبعدی داخل کانال دارای برآمدگی استفاده کردند. روش بدون شبکه در نزدیکی مرزها دارای مزایایی است که به راحتی می‌توان شرط مرزی بر روی دیواره را مدل کرد. توتا و وانگ [۱۶] با استفاده از روش توابع پایه شعاعی جریان داخلی غیرلزج داخل کانال به همراه برآمدگی و درون نازل همگرایی دوبعدی را تحلیل نموده‌اند. رمانه و همکارانش [۱۷] یک روش بدون شبکه مبتنی بر روش عددی مجانب برای حل معادلات دوبعدی استفاده کردند. آن‌ها از روش حداقل مربعات متحرک در روش عددی مجانب بهره بردند. بر طبق نتایج به دست آمده الگوریتم حل آن‌ها در جریان‌های تراکم‌ناپذیر کارایی مناسبی دارد. رانا و همکارانش [۱۸] از روش تقریبی پخش بدون شبکه^۱ برای شبیه‌سازی عددی جریان تراکم‌پذیر تقارن محوری در یک لوله با سطح مقطع متغیر استفاده کرده‌اند. آن‌ها نتایج با دقت مناسبی را در شبکه ریز به دست آورده‌اند. تمامی مطالعات در تحقیق آن‌ها برای لوله‌هایی است که ورودی مادون صوت دارند. کریشنا [۱۹] یک روش بدون شبکه دارای دو گام مبتنی بر ضلع را برای جریان‌های دوبعدی لزج و غیرلزج توسعه داده است. این روش برای مسائل دارای پخش کم و زیاد استفاده شده است. ژان و همکارانش [۱۳] یک روش بدون شبکه مبتنی بر دینامیک گاز گسسته^۲ برای شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر توسعه دادند. آن‌ها معادلات حاکم را با استفاده از حداقل مربعات گسسته‌سازی کردند. برای شبیه‌سازی مسائل تراکم‌پذیر دارای ناپیوستگی در جریان، نقاط مجازی بین دو نقطه همسایه تعبیه شده است تا ناپیوستگی‌های ریمن پایدار شوند. آن‌ها از این روش برای شبیه‌سازی جریان داخلی و خارجی مانند جریان مافوق صوت اطراف رمپ، جریان در حفره و جریان اطراف دو ایرفویل پشت سرهم استفاده

1 Meshless Diffuse Approximate Method
2 Discrete Gas-Kinetic



شکل ۱. ابر نقاط برای نقطه i

Fig. 1. nodes cloud for point i

جایی که W پارامترهای بقایی^۱ و F شارهای جابجایی^۲ هستند که به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$W = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E + p)u \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E + p)v \end{bmatrix}, G = -\frac{\alpha}{y} \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \\ (E + P)v \end{bmatrix}$$

9

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (3)$$

در تمامی نقاط همسایه نقطه مرکزی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E = \sum_{m=1}^N \omega_{im} [\Delta F_m - (\Delta x_m)(F_x)_i - (\Delta y_m)(F_y)_i]^2 \quad (6)$$

ω_{im} تابع وزنی است و به صورت معکوس فاصله بین دو نقطه i و m محاسبه می‌شود. با مشتق‌گیری تابع خطا نسبت به F_x و F_y و حداقل سازی آن‌ها داریم:

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \right)_i = \sum_{m=1}^N a_{im} \Delta F_{1,m} \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial y} \right)_i = \sum_{m=1}^N b_{im} \Delta F_{2,m}$$

N تعداد نقاط همسایه در هر ابر نقاط است و

$$a_{im} = \frac{\omega_{im} \Delta x_{im} \sum_k \omega_{ik} \Delta y_{ik}^2 - \omega_{im} \Delta y_{im} \sum_k \omega_{ik} \Delta x_{ik} \Delta y_{ik}}{\sum_k \omega_{ik} \Delta x_{ik}^2 \sum_k \omega_{ik} \Delta y_{ik}^2 - \left(\sum_k \omega_{ik} \Delta x_{ik} \Delta y_{ik} \right)^2} \quad (8)$$

در معادلات فوق، ρ ، p ، u ، v و E به ترتیب، چگالی، فشار، مولفه‌های سرعت و انرژی کل هستند. اگر $\alpha = 0$ باشد معادلات در حالت دوبعدی و اگر $\alpha = 1$ معادله فوق برای حالت متقارن محوری است.

۲-۱- گسسته‌سازی مکانی

ابر نقاطی مطابق شکل ۱ را در نظر بگیرید. نقاط j نقاط همسایگی نقطه i و نقاط m میانی بین نقطه i و همسایه‌هایش هستند. بسط سری تیلور مرتبه اول حول نقطه i به صورت زیر است:

$$F_m = F_i + (\Delta x_m) \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_i + (\Delta y_m) \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_i \quad (4)$$

جایی که $\Delta x_m = x_m - x_i$ و $\Delta y_m = y_m - y_i$ است.

خطای تخمین، e ، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E = \sum_{m=1}^N \omega_{im} [\Delta F_m - (\Delta x_m)(F_x)_i - (\Delta y_m)(F_y)_i]^2 \quad (5)$$

جایی که $\Delta F_m = F_m - F_i$ است. تابع خطای مجموع مربعات خطا

-
- 1 Conservative Variables
 - 2 Convective Fluxes

$$\lambda_{ik} = |a_{ik}u + b_{ik}v| + c\sqrt{a_{ik}^2 + b_{ik}^2} \quad (14)$$

که در آن C سرعت صوت محلی، u و v سرعت محلی، پارامترهای $K^{(2)}$ و $K^{(4)}$ ضرایب اتلاف برای مشتقات مرتبه دوم و چهارم، p فشار و λ_{ik} حداکثر مقادیر ویژه است.

۲-۳- گسسته‌سازی زمانی

با گسسته‌سازی زمانی صریح، رابطه (۱۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^n}{\Delta t} = \mathbf{R}_i \quad (15)$$

برای حل رابطه فوق از روش چند مرحله‌ای رانگ-کوتا^۱ به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_i^{(0)} &= \mathbf{W}_i^n \\ \mathbf{W}_i^{(k)} &= \mathbf{W}_i^{(0)} + \alpha_k \Delta t \mathbf{R}_i^{(k-1)} \\ \mathbf{W}_i^{(n+1)} &= \mathbf{W}_i^{(k)} \end{aligned} \quad (16)$$

در این تحقیق از رانگ-کوتای چهار مرحله‌ای استفاده شده است و ضرایب α_k به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$\alpha_1 = 0.3333, \alpha_2 = 0.2667, \alpha_3 = 0.5000, \alpha_4 = 1.0000$$

۲-۴- شرایط مرزی

شرط مرزی روی سطح دیواره برای حالت غیرلزج، شرط عدم ورود شار به سطح دیواره است که به همین دلیل مولفه سرعت عمود بر سطح برابر صفر خواهد بود. می‌توان نشان داد که سایر پارامترها بر روی دیواره به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۳].

$$b_{im} = \frac{\omega_{im} \Delta y_{im} \sum_k \omega_{ik} \Delta x_{ik}^2 - \omega_{im} \Delta x_{im} \sum_k \omega_{ik} \Delta x_{ik} \Delta y_{ik}}{\sum_k \omega_{ik} \Delta x_{ik}^2 \sum_k \omega_{ik} \Delta y_{ik}^2 - (\sum_k \omega_{ik} \Delta x_{ik} \Delta y_{ik})^2} \quad (9)$$

جایی که $\Delta F_{2,m} = F_{2,m} - F_{2,i}$ و $\Delta F_{1,m} = F_{1,m} - F_{1,i}$ است.

با جایگذاری مشتقات مکانی مرتبه اول (رابطه ۷) در رابطه (۱)، شکل کلی گسسته‌سازی شده معادلات به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial \mathbf{W}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^N (a_{ij} \mathbf{F}_{1ij} + b_{ij} \mathbf{F}_{2ij}) = G \quad (10)$$

این رابطه، گسسته‌سازی غیر اتلافی است که به دلیل داشتن نوسانات داخل میدان پایدار نیست. برای پایدارسازی می‌بایست اتلافات عددی به آن اضافه گردد. در این تحقیق، از اتلافات عددی مرتبه دوم و چهارم جیمسون استفاده شده است [۲۲].

۲-۲- اتلافات مصنوعی

با اضافه کردن مشتقات مرتبه دوم و چهارم به معادلات، می‌توان نوسانات را حذف کرد. در این حالت شکل کلی معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial \mathbf{W}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^N (a_{ij} \mathbf{F}_{1ij} + b_{ij} \mathbf{F}_{2ij}) - \mathbf{D}_i = G \quad (11)$$

$$\mathbf{D}_i = \sum_{k=1}^N d_{ik} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} d_{ik} &= \varepsilon_{ik}^{(2)} \lambda_{ik} (\mathbf{W}_k - \mathbf{W}_i) \\ &\quad - \varepsilon_{ik}^{(4)} \lambda_{ik} (\nabla^2 \mathbf{W}_k - \nabla^2 \mathbf{W}_i) \\ \varepsilon_{ik}^{(2)} &= K^{(2)} \nu_{ik} \\ \varepsilon_{ik}^{(4)} &= \max[0, K^{(4)} - \varepsilon_{ik}^{(2)}] \\ \nabla^2 \mathbf{W}_i &= \sum_{k=1}^N (\mathbf{W}_k - \mathbf{W}_i) \\ \nu_{ik} &= \frac{|p_k - p_i|}{|p_k + p_i|} \end{aligned} \quad (13)$$

$$W_b = W_a \quad (20)$$

برای شرط مرزی خروجی مادون صوت، در این مرز نیز بر اساس تئوری مشخصه‌ها، معادلات مختلفی بر اساس نوع ورودی‌ها وجود دارد. شرایط متداول در جریان‌های داخلی معمولاً معلوم بودن فشار استاتیک در مرز خروجی مادون صوت است. در این شرایط معادلات زیر بر روی مرز قابل اعمال است [۲۴]:

$$\begin{aligned} P_b &= P_a \\ \rho_b &= \rho_a + \frac{P_b - P_a}{c_0^2} \\ u_b &= u_a + \frac{n_x (P_b - P_a)}{\rho_0 c_0} \\ v_b &= v_a + n_y (P_b - P_a) / (\rho_0 c_0) \end{aligned} \quad (21)$$

که در آن اندیس متغیرها بر اساس شکل ۲ درج شده است. برای شرط مرزی خروجی مافوق صوت، در این مرز تمامی متغیرهای باقی، توسط مشخصه‌های جریان داخل میدان تعیین می‌شوند، به طوری که بر اساس شکل ۲ (b) می‌توان نوشت.

$$W_b = W_d \quad (22)$$

مرز محور تقارن در جریان غیرلزج مانند مرز دیواره عمل می‌نماید. زیرا شارهای جابجایی و تغییر پارامترهای جریان در راستای عمود بر محور تقارن می‌بایست برابر با صفر باشد. از این رو توضیحات ارائه شده برای مرز دیواره جامد، برای این مرز نیز قابل تعمیم است. به طور کلی در مرز محور تقارن شرایط زیر حاکم است [۲۴].

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \nabla \phi &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) &= 0 \\ \mathbf{t} \cdot \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

جایی که ϕ یک متغیر اسکالر است.

$$u_n = 0, \frac{\partial u_t}{\partial n} = 0, \frac{\partial H}{\partial n} = 0, \frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\rho u_t^2}{R_s} \quad (17)$$

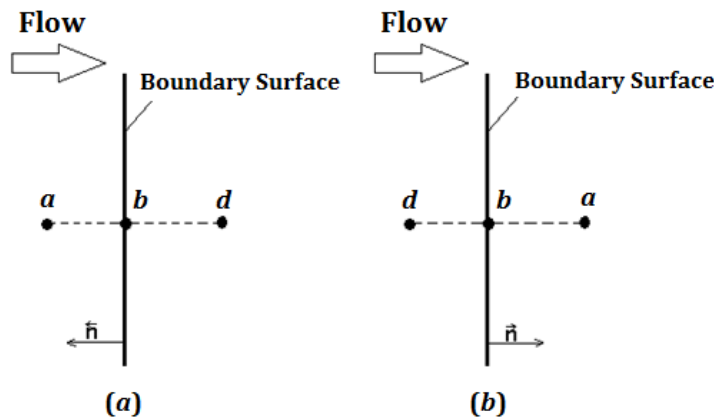
که در آن u_n سرعت عمودی، u_t سرعت مماسی، p فشار روی سطح و R_s شعاع انحنای سطح است. برای مرز ورودی مادون صوت، بر اساس تئوری مشخصه‌ها می‌توان نشان داد [۲۴] که در جریان دوبعدی پارامترهای جریان در مرز ورودی مادون صوت به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} P_b &= 0.5(P_a + P_d \\ &\quad - \rho_0 c_0 [n_x (u_a - u_d) + n_y (v_a - v_d)]) \\ \rho_b &= \rho_a + \frac{P_b - P_a}{c_0^2} \\ u_b &= u_a - \frac{n_x (P_a - P_b)}{\rho_0 c_0} \\ v_b &= v_a - n_y (P_a - P_b) / (\rho_0 c_0) \end{aligned} \quad (18)$$

که در آن P فشار استاتیک، ρ چگالی جریان، c سرعت صوت محلی، u سرعت در راستای X و v سرعت در راستای Y است. زیرنویس این کمیت‌ها نیز بر مبنای شکل ۲ درج شده است. در رابطه فوق ρ_0 و c_0 بیانگر حالت مرجع می‌باشند که به طور معمول برابر با مقادیر این متغیرها در نقطه d (شکل ۲) در نظر گرفته می‌شود. در حالتی که جریان ورودی به مرز دارای فشار کل معلوم باشد، در این صورت می‌بایست بر اساس مقدار این فشار و مقادیر سرعت در نقطه d ، مقادیر فشار استاتیک و چگالی متناظر با آن تعیین شود، در ادامه این مقادیر به عنوان پارامترهای جریان در نقطه a تلقی شده و معادلات روی مرز به صورت زیر ساده می‌شود [۲۴].

$$\begin{aligned} P_b &= 0.5(P_a + P_d) \\ \rho_b &= \rho_a + \frac{P_b - P_a}{c_0^2} \\ u_b &= u_d \\ v_b &= v_d \end{aligned} \quad (19)$$

برای شرط مرزی ورودی مافوق صوت، در این مرز تمامی متغیرهای باقی، توسط مشخصه‌های جریان ورودی به مرز تعیین می‌شوند، به طوری که بر اساس شکل ۲ (a) می‌توان نوشت:



شکل ۲. (a) مرز ورودی، (b) مرز خروجی، نقطه a خارج از مرز (جریان آزاد)، نقطه b روی مرز و نقطه d داخل میدان محاسباتی قرار دارد. جهت بردار نرمال به سمت خارج از میدان فرض می‌شود.

Fig. 2. (a) Inlet boundary, (b) Outlet boundary, point a is outside the boundary (free flow), point b is on the boundary and point d is inside the computational field. The direction of the normal vector is assumed to be outside the field.

واگرای دوبعدی، آزمایشات تجربی مختلفی را بر روی هندسه‌های مختلف نازل‌های دوبعدی انجام داد. وی همچنین نتایج تجربی توزیع فشار بر روی خط مرکزی دیواره‌های نازل را با نتایج تئوری حاصل از حل جریان غیر لزج درون همان نازل مقایسه نمود. در این تحقیق نیز به منظور اعتبارسنجی خروجی کُد عددی، یک نمونه از نازل‌های مورد مطالعه میسون (نازل B1)، باز تولید، گره‌بندی و تحلیل شده و نتایج با خروجی‌های تجربی مقایسه شده است. در شکل ۳ ساختار نازل دوبعدی و در جدول ۱ ابعاد هندسی پارامترهای آن نشان داده شده است.

در شکل ۴ نتایج توزیع نسبت فشار بر روی دیواره‌های نازل، حاصل از کُد عددی توسعه داده شده و نتایج تجربی میسون [۲۵] با یکدیگر مقایسه شده است. همان‌طور که از نمودارها پیداست، نتایج حاصل از کُد با دقت بسیار مطلوبی بر نتایج تست تجربی منطبق است. زمان همگرایی این حل با استفاده از کُد بدون شبکه توسعه داده شده حدود ۲۴ ثانیه است و روند همگرایی در شکل ۵ نشان داده شده است. همان‌طور که مشخص است زمان تحلیل یک نازل دوبعدی مافوق صوت با استفاده از کُد توسعه داده شده بسیار سریع است.

۳-۲- جریان حول برآمدگی درون کانال

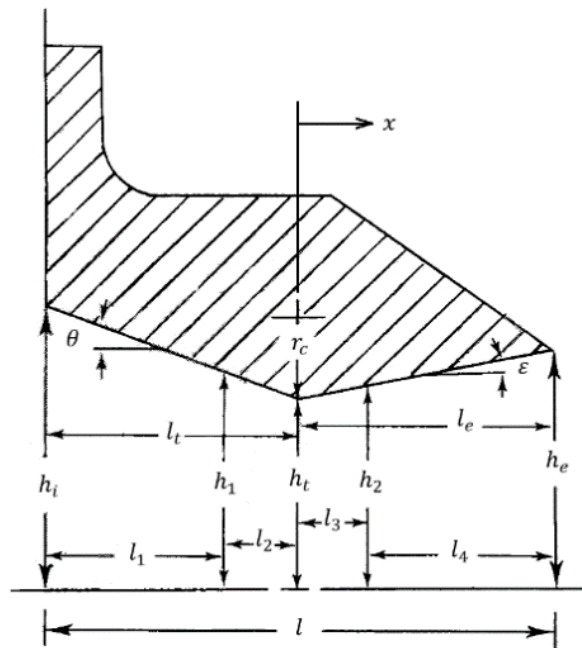
جریان داخل کانال دارای برآمدگی به دلیل پیچیدگی‌های جریانی، یکی

۳- نتایج

در این بخش نتایج حاصل از حل مسائل مختلف جریان داخلی با استفاده از کُد عددی، ارائه شده است. به این منظور در ابتدا جریان سیال غیر لزج درون دو نازل همگرا-واگرای دوبعدی مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه قابلیت کُد در تعیین دقت فیزیک حاکم بر جریان مافوق صوت حول برآمدگی دوبعدی درون کانال نشان داده شده است. تشکیل مناسب شوک‌های مایل روی برآمدگی، برخورد آن‌ها به دیواره بالایی کانال و انعکاس این شوک‌ها پارامترهایی است که در قالب ضریب فشار روی دیواره‌های بالایی و پایینی کانال قابل ارائه است. سپس توانایی کُد در محاسبه محل و قدرت شوک عمودی درون نازل همگرا-واگرای دوبعدی و تقارن محور نشان داده شده است. در نهایت نیز شبیه‌سازی جریان پایا درون یک نازل همگرا-واگرا متقارن محور ماوراءصوت با ماخ خروجی ۵ انجام شده است تا دقت حل کُد عددی در سرعت ماوراءصوت نیز سنجیده شود. همه محاسبات با یک کامپیوتر شخصی دارای پردازشگر اینتل چهارهسته‌ای و سرعت ۲/۵ گیگاهرتز انجام شده است.

۳-۱- اعتبارسنجی با تحلیل جریان در نازل دوبعدی

میسون [۲۵] به منظور بررسی اثر شکل گلوگاه بر رفتار نازل‌های همگرا-



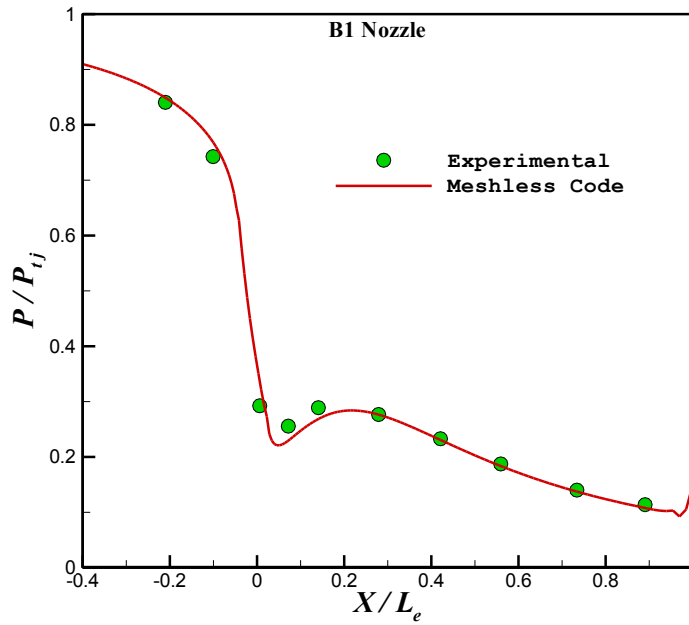
شکل ۳. ساختار هندسی و ابعاد نازل‌های همگرا-واگرای B1 مورد استفاده در تست تجربی

Fig. 3. Mason nozzle B1 geometry

جدول ۱. ابعاد نازل‌های همگرا-واگرای B1

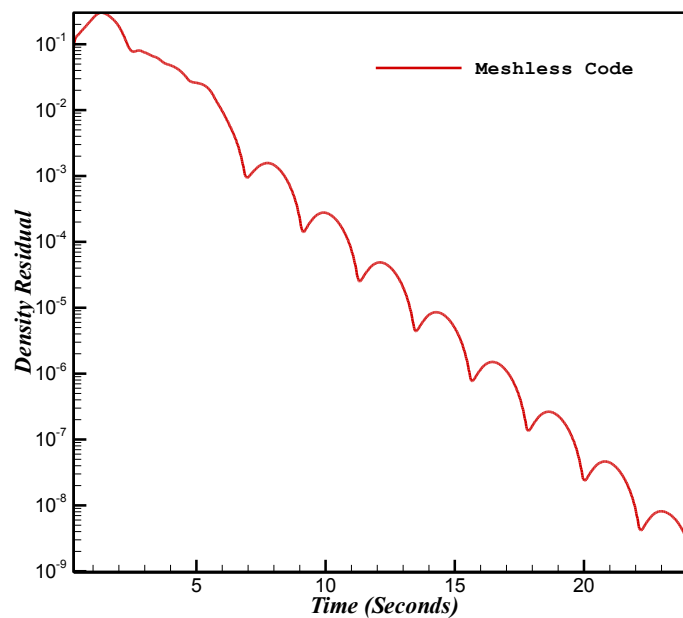
Table 1. Mason nozzle B1 dimensions

مقدار	پارامتر	مقدار	پارامتر
۵/۷۸	$l_e (cm)$	۵۰/۰۶	$A_e (cm^2)$
۵/۷۸	$l_t (cm)$	۲۷/۸۱	$A_t (cm^2)$
۴/۵۴	$l_1 (cm)$	۱/۸	A_e/A_t
۰/۲۴	$l_2 (cm)$	۲/۴۶	$h_e (cm)$
۰/۱۳	$l_3 (cm)$	۳/۵۲	$h_i (cm)$
۵/۶۵	$l_4 (cm)$	۱/۳۷	$h_t (cm)$
۰/۶۸	$r_c (cm)$	۱/۴۱	$h_1 (cm)$
۲۰/۸۴	$\theta (deg)$	۱/۳۸	$h_2 (cm)$
۱۰/۸۵	$\varepsilon (deg)$	۱۱/۵۶	$l (cm)$



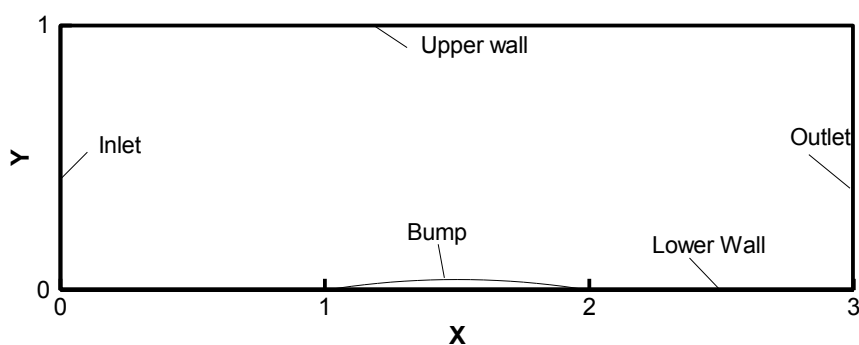
شکل ۴. توزیع فشار بی بعد (نسبت فشار محیط به فشار کل) بر روی دیواره همگرا-واگرای نازل B1

Fig. 4. Nondimension pressure distribution (ambient pressure to total pressure ratio) over nozzle B1 wall



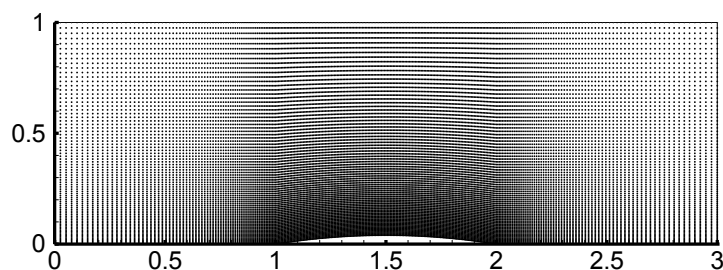
شکل ۵. زمان همگرایی نازل دوبعدی B1 با ۱۷۰۹۱ نقطه در میدان

Fig. 5. Convergence time of 2D nozzle B1 with 17091 points in the field



شکل ۶. شماتیک هندسه برآمدگی دوبعدی درون کانال و ابعاد دامنه محاسباتی

Fig. 6. Schematic of the geometry of the two-dimensional bump inside the channel and the dimensions of the computational domain



شکل ۷. شماتیک نحوه توزیع نقاط درون کانال دوبعدی دارای برآمدگی

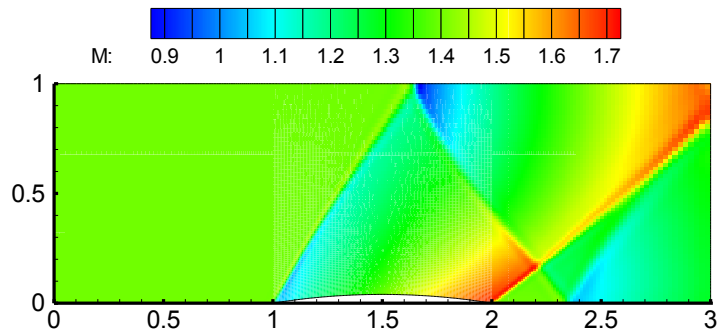
Fig. 7. Schematic of the distribution of points inside the two-dimensional channel with bump

از مسائل مورد علاقه محققین در زمینه شبیه‌سازی‌های عددی است. در این تحقیق جریان مافوق صوت با ماخ $1/4$ حول برآمدگی با نسبت ضخامت به وتر $0/04$ (برآمدگی 4%) درون یک کانال دوبعدی شبیه‌سازی شده است. فشار جریان آزاد 1 اتمسفر و چگالی جریان آزاد $1/225 \text{ kg/m}^3$ است.

مرزهای بالا و پایین کانال به صورت دیواره جامد و مرزهای ورودی و خروجی به صورت مرزهای ورودی و خروجی بر پایه شرایط جریان آزاد در نظر گرفته شده است. در شکل ۶ و شکل ۷ شماتیکی از مدل مورد بررسی و نحوه توزیع نقاط در میدان محاسباتی نشان داده شده است. تعداد نقاط در این میدان 23571 گره است که پس از بررسی مطالعه شبکه تعیین شده است. در شکل ۸ نیز نتایج خروجی کد در قالب کانتورهای فشار استاتیک و عدد ماخ برای دو هندسه مورد بررسی نشان داده شده است.

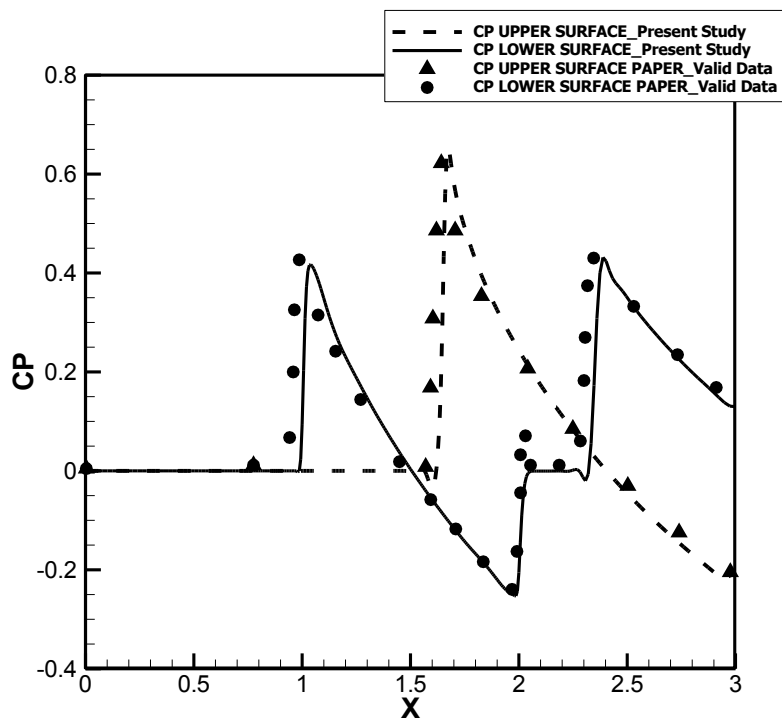
همان‌طور که مشاهده می‌شود، کد عددی با دقت مناسبی فیزیک حاکم از مسائل مورد علاقه محققین در زمینه شبیه‌سازی‌های عددی است. در این تحقیق جریان مافوق صوت با ماخ $1/4$ حول برآمدگی با نسبت ضخامت به وتر $0/04$ (برآمدگی 4%) درون یک کانال دوبعدی شبیه‌سازی شده است. فشار جریان آزاد 1 اتمسفر و چگالی جریان آزاد $1/225 \text{ kg/m}^3$ است. مرزهای بالا و پایین کانال به صورت دیواره جامد و مرزهای ورودی و خروجی به صورت مرزهای ورودی و خروجی بر پایه شرایط جریان آزاد در نظر گرفته شده است. در شکل ۶ و شکل ۷ شماتیکی از مدل مورد بررسی و نحوه توزیع نقاط در میدان محاسباتی نشان داده شده است. تعداد نقاط در این میدان 23571 گره است که پس از بررسی مطالعه شبکه تعیین شده است. در شکل ۸ نیز نتایج خروجی کد در قالب کانتورهای فشار استاتیک و عدد ماخ برای دو هندسه مورد بررسی نشان داده شده است.

در شکل ۹ توزیع فشار در دیواره‌های بالایی و پایینی کانال برای ماخ جریان آزاد $1/4$ به صورت مقایسه‌ای با نتایج مرجع [۲۶] نشان داده شده است. این شکل‌ها مبین این مطلب است که نتایج حاصل از کد دارای دقت مناسب و قابل اتکایی است. جهت بررسی استقلال حل از نحوه گره‌بندی و تعداد نقاط دامنه حل از چند گره‌بندی متفاوت با تعداد نقاط مختلف منطبق بر داده‌های جدول ۲ برای برآمدگی 4% استفاده شده است. نتایج حاصل نیز در شکل ۱۰ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش تعداد نقاط در دامنه محاسباتی، حل به تدریج به مقادیر دقیق نزدیک شده و بعد از آن افزایش



شکل ۸. کانتور عدد ماخ حول برآمدگی ۴٪ (ماخ جریان آزاد ۱/۴)

Fig. 8. Mach contour in the bumped channel ($M=1.4$)



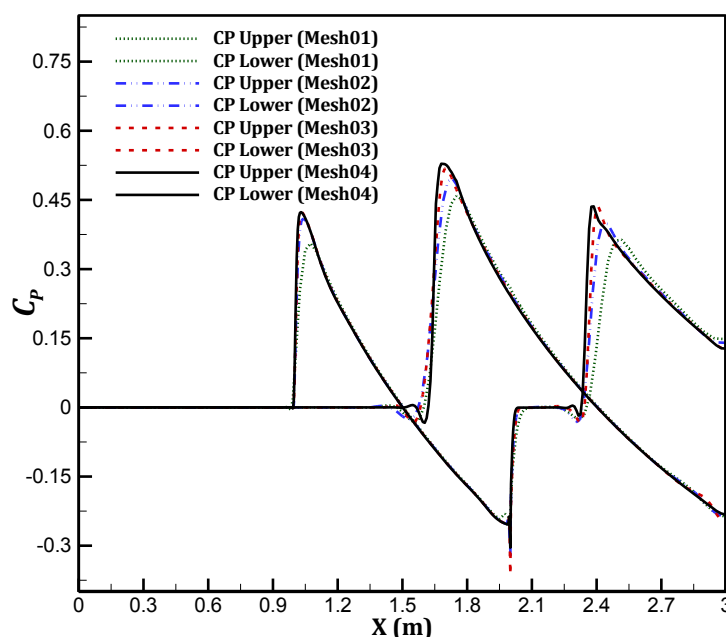
شکل ۹. ضریب فشار بر روی دیواره‌های کانال دوبعدی با برآمدگی ۴٪ (ماخ جریان آزاد ۱/۴)

Fig. 9. Pressure coefficient on the two-dimensional channel walls with 4% bump ($M=1.4$)

جدول ۲. تعداد نقاط به کار رفته در دامنه محاسباتی به ازای هر مرحله گره‌بندی جهت بررسی استقلال حل

Table 2. The number of points used in the computational domain for grid study

شماره گره بندی	۱	۲	۳	۴
تعداد نقاط	۴۹۶۱	۹۲۳۱	۱۷۳۹۱	۳۴۴۴۱



شکل ۱۰. ضریب فشار بر روی دیواره‌های کانال دوبعدی با برآمدگی ۴٪ به ازای تعداد نقاط متفاوت (ماخ جریان آزاد ۱/۴)

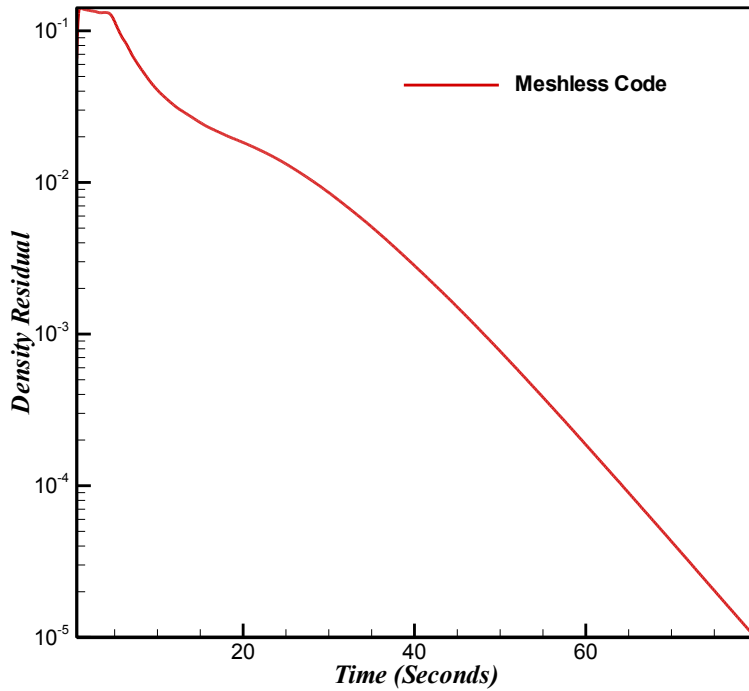
Fig. 10. Pressure coefficient on two-dimensional channel walls with 4% bump for different number of points ($M=1.4$)

و پارامترهای مرتبط با آن است. در شکل ۱۲ یک نازل دو بعدی با نسبت مساحت $A_{exit} / A_{throat} = 4$ و توزیع نقاط درون این نازل نشان داده شده است. با استفاده از روابط تحلیلی حاکم بر جریان تراکم پذیر غیرلزج می‌توان نشان داد، در صورتی که فشار کل ورودی نازل برابر با 2 bar و فشار استاتیک صفحه خروجی $1/21 \text{ bar}$ تنظیم شود، یک شوک قائم در موقعیت $A_{shock} / A_{throat} = 2$ (با توجه به شکل در موقعیت طولی $11/66$) تشکیل خواهد شد. عدد ماخ قبل از شوک برابر با $2/3$ بوده و بعد از شوک مقدار $0/55$ را به خود اختصاص می‌دهد. عدد ماخ جریان خروجی نیز برابر با $0/24$ خواهد بود.

تعداد نقاط تاثیر چندانی بر جواب مساله ندارد. با توجه به مطالعه شبکه مشخص است که توزیع نقاط با 17391 گره شبکه مناسبی برای حل است. زمان همگرایی برای این مساله با 34441 نقطه درون میدان حدود 80 ثانیه است و روند همگرایی در شکل ۱۱ نشان داده شده است.

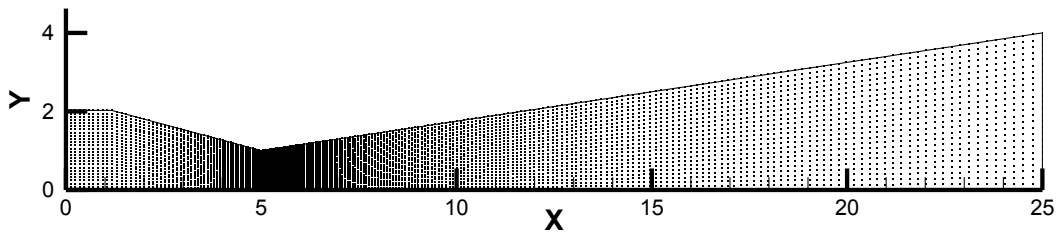
۳-۳- تسخیر شوک^۱ درون نازل دوبعدی

یکی از معیارهای عمده در شبیه‌سازی عددی جریان‌های داخلی تراکم‌پذیر تخمین مناسب فیزیک حاکم بر جریان از لحاظ تعیین محل شوک



شکل ۱۱. زمان همگرایی جریان مافوق صوت حول برآمدگی درون کانال با ۳۴۴۱ نقطه

Fig. 11. Convergence time of the supersonic flow around the bump inside the channel with 3441 points



شکل ۱۲. شماتیک هندسه و توزیع نقاط نازل دوبعدی

Fig. 12. Schematic of geometry and points distribution in 2-D nozzle

تسخیر نموده و مقادیر عدد ماخ را قبل و بعد از شوک عمودی و همچنین در خروجی نازل با دقت مناسبی تخمین بزند. در شکل ۱۳ و شکل ۱۴ به ترتیب کانتورهای فشار و ماخ جریان درون نازل نشان داده شده است.

۳-۴- تسخیر شوک درون نازل دوبعدی متقارن محور

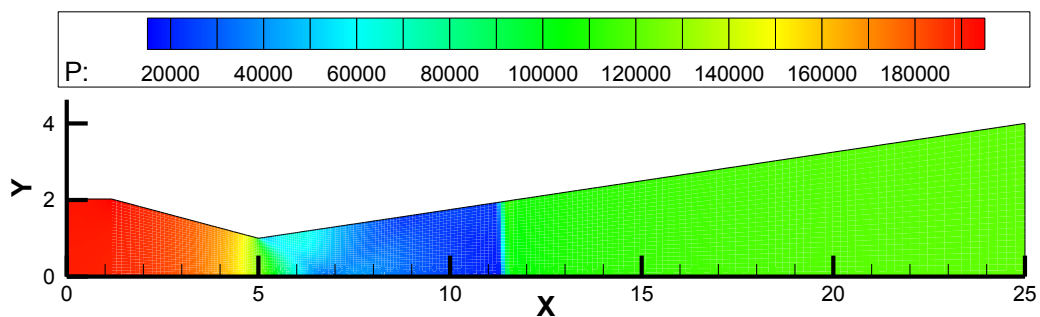
نازل معرفی شده در بخش قبل، در فضای دو بعدی صفحه‌ای تحلیل

در راستای آزمایش قابلیت کد عددی در تسخیر شوک عمودی از لحاظ قدرت و موقعیت تشکیل شوک، در این تحقیق نازل مذکور توسط کد عددی در شرایط ورودی و خروجی اشاره شده و با ۱۵۶۸۶ نقطه محاسباتی در میدان حل تحلیل شده است. مقادیر متناظر به دست آمده از حل تحلیلی و حل عددی بدون شبکه در جدول ۳ درج شده است. نتایج خروجی حاکی از آن است که کد با دقت بسیار مناسبی توانسته است شوک موجود درون نازل را

جدول ۳. پارامترهای جریان در نازل دوبعدی

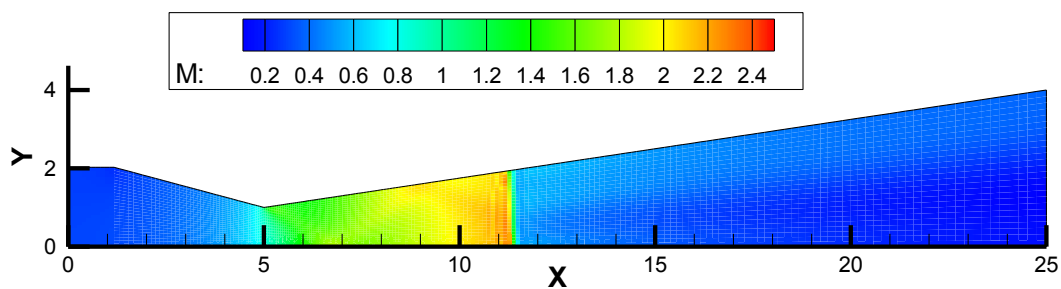
Table 3. Flow parameters in 2-D nozzle

مساحت گلوگاه (m^2)	مساحت صفحه خروجی (m^2)	موقعیت شوک عمودی (m)	ماخ قبل از شوک	ماخ بعد از شوک	ماخ در صفحه خروجی	روش حل
۱	۴	۱۱/۶۶	۲/۳	۰/۵۵	۰/۲۴	حل تحلیلی
۱	۴	۱۱/۴	۲/۴	۰/۵۷	۰/۲۳	حل عددی بدون شبکه



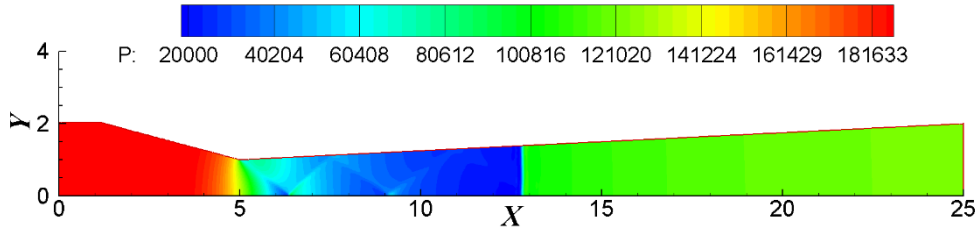
شکل ۱۳. کانتور توزیع فشار درون نازل دوبعدی

Fig. 13. Pressure contour in 2-D nozzle



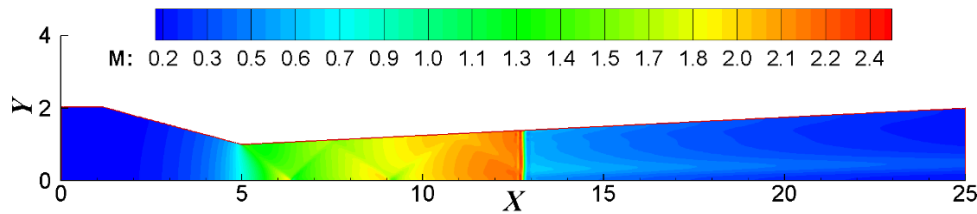
شکل ۱۴. کانتور توزیع عدد ماخ درون نازل دوبعدی

Fig. 14. Mach number contour in 2-D nozzle



شکل ۱۵. کانتور فشار استاتیک درون نازل دوبعدی متقارن محور

Fig. 15. Pressure contour in axisymmetric nozzle



شکل ۱۶. کانتور عدد ماخ درون نازل دوبعدی متقارن محور

Fig. 16. Mach contour in axisymmetric nozzle

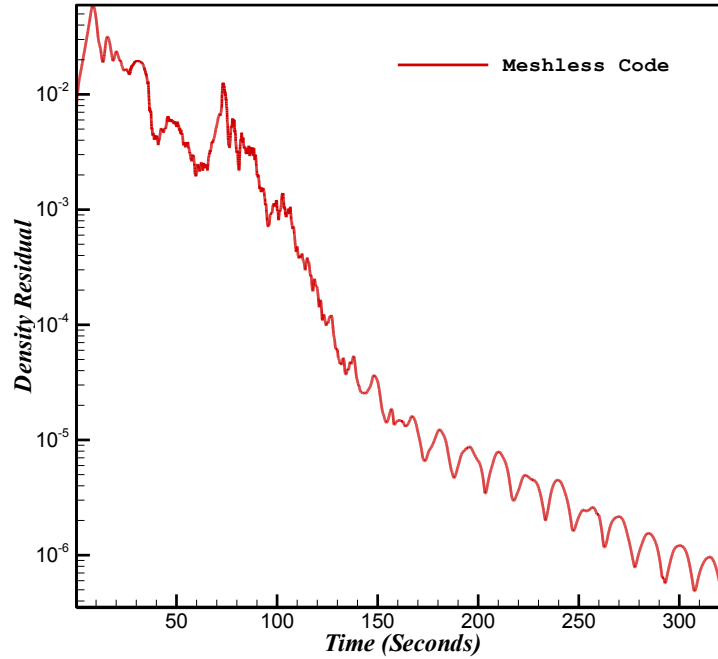
جدول ۴. پارامترهای جریان در نازل دوبعدی متقارن محور

Table 4. flow parameters in axisymmetric nozzle

روش حل	ماخ در صفحه خروجی	ماخ بعد از شوک	ماخ قبل از شوک	موقعیت شوک عمودی (m)	مساحت صفحه خروجی (m ²)	مساحت گلوگاه (m ²)
حل تحلیلی	۰/۲۴	۰/۵۵	۲/۳	۱۳/۲۸	۲	۱
حل عددی بدون شبکه	۰/۲۴	۰/۵۳	۲/۳	۱۲/۸۵	۲	۱

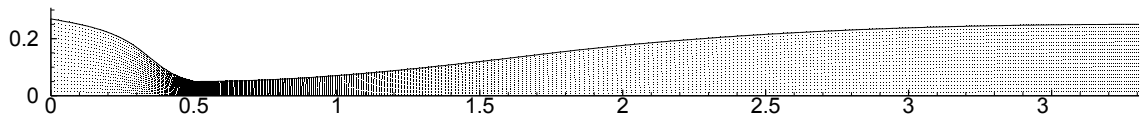
از تحلیل توسط کد عددی در قالب کانتور عدد ماخ ارائه شده است. در جدول ۳ نیز نتایج خروجی کد به صورت مقایسه‌ای با نتایج تحلیلی درج شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، کد با دقت بسیار مطلوبی رفتار جریان در نازل متقارن محور را شبیه‌سازی نموده است. کد توسعه داده شده توانسته است موقعیت شوک را با خطای حدود ۳٪ نسبت به روش تحلیل تخمین بزند. زمان همگرایی برای این مساله با استفاده از کد بدون شبکه توسعه داده شده حدود ۳۲۰ ثانیه است و روند همگرایی در شکل ۱۷ نشان داده شده است.

شده بود. این نازل را می‌توان به صورت نازل دوبعدی متقارن محور در نظر گرفت. با این تفاوت که به واسطه متقارن محور بودن جریان مساحت مقطع مختلف بر مبنای مساحت دایره محاسبه می‌شود. بر این اساس هندسه نازل تغییر کرده (نسبت مساحت‌ها ثابت می‌ماند) و موقعیت طولی محل تشکیل شوک نیز تغییر می‌کند. در این تحقیق نازل مذکور توسط کد عددی با ۲۶۶۵۶ نقطه محاسباتی در میدان حل تحلیل شده است. شماتیک هندسه نازل و کانتور فشار استاتیک در شکل ۱۵ است. در شکل ۱۶ نیز نتایج حاصل



شکل ۱۷. زمان همگرایی نازل دوبعدی متقارن محور با ۲۶۶۵۶ نقطه

Fig. 17. Convergence time of axisymmetric 2-D nozzle with 26656 points



شکل ۱۸. شماتیک هندسه و توزیع نقاط در نازل مافوق صوت با ماخ خروجی ۵

Fig. 18. Schematic of the geometry and distribution of points in the supersonic nozzle with Mach 5 at outlet

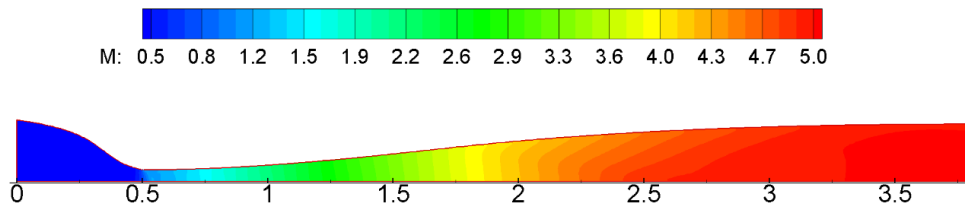
این بخش به شبیه‌سازی جریان پایا درون یک نازل همگرا-واگرا متقارن محور مافوق صوت پرداخته می‌شود. این نازل به عنوان اولین بخش یک تونل باد دمشی مافوق صوت به گونه‌ای طراحی شده است که ماخ خروجی آن برابر با ۵ باشد [۲۷، ۲۸]. در شکل ۱۸ شماتیک هندسه و گره‌بندی انجام شده نشان داده شده است. طول کل نازل ۳/۸۲ متر، مساحت خروجی نازل و گلوگاه به ترتیب ۰/۱۹۶۳ و ۰/۰۰۸۷۵ مترمربع و مساحت ورودی نازل نیز ۰/۲۲۷۳ مترمربع است. فشار و دما در ورودی نازل به ترتیب ۲۱/۵۶ بار و ۳۸۰ کلوین است و فشار در خروجی نیز ۰/۹۸ بار است. زمان همگرایی برای این مساله با ۹۰۵۱ نقطه در میدان محاسباتی، حدود ۲۱۶ ثانیه است.

در ادامه نتایج خروجی حاصل از تحلیل پایای نازل فوق توسط کد

همین مساله با تعداد نقاط برابر با استفاده از نرم‌افزار تجاری فلوئنت اجرا شده است و زمانی حدود ۹۰۰ ثانیه (۱۵ دقیقه) برای ایجاد شوک در نازل طول کشیده است. بنابراین زمان تحلیل کُد توسعه داده شده حدود ۶۴ درصد کمتر از روش حجم محدود است که فلوئنت استفاده می‌کند. از طرفی همگرایی در نرم‌افزار فلوئنت به هیچ عنوان مشابه همگرایی مناسب کُد عددی توسعه داده شده نیست زیرا میزان همگرایی به سختی حتی به 10^{-3} می‌رسد اما کُد بدون شبکه در زمان کمتر تا 10^{-6} همگرا شده است.

جریان درون نازل مافوق صوت متقارن محور

بعد از اعتبارسنجی نتایج کد عددی در شبیه‌سازی جریان‌های مختلف، در



شکل ۱۹. کانتور ماخ در نازل تقارن محوری مافوق صوت با ماخ خروجی ۵

Fig. 19. Mach contour in the supersonic axial symmetry nozzle with output Mach 5

نسبت به نرم افزار تجاری فلوئنت سریع تر است.

منابع

- [1] J.S. Rhee, Development of Point Generation Technique for a Meshless Method, Master Thesis, Seoul National University, 2014.
- [2] G.R. Liu, Y.T. Gu, An introduction to meshfree methods and their programming, Springer Science & Business Media, 2005.
- [3] J. BATINA, A gridless Euler/Navier-Stokes solution algorithm for complex-aircraft applications, in: 31st Aerospace Sciences Meeting, 1993, pp. 333.
- [4] S.M. Deshpande, V. Ramesh, K. Malagi, K. Arora, Least squares kinetic upwind mesh-free method, Defence Science Journal, 60(6) (2010).
- [5] A. Katz, A. Jameson, Multicloud: Multigrid convergence with a meshless operator, Journal of Computational Physics, 228(14) (2009) 5237-5250.
- [6] M. Hashemabadi, M. Hadidoolabi, An accurate and efficient gridless method based on implicit, fast, and constrained weights optimization schemes for compressible flows, Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 40(2) (2018) 1-17.
- [7] M. Hashemi, A. Jahangirian, An efficient implicit mesh-less method for compressible flow calculations, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 67(6) (2011) 754-770.
- [8] H. Wang, J. Periaux, A fast meshless method coupled

عددی بدون شبکه متقارن محور در قالب کانتور ماخ در شکل ۱۹ نشان داده شده است. همان طور که از این شکل مشخص است، ماخ در خروجی نازل مقدار ۵ شده است که با توجه به نسبت مساحت خروجی به مساحت گلوگاه همین مقدار باید به عنوان ماخ خروجی نازل باشد. بنابراین کد عددی بدون شبکه توانسته با دقت بسیار بالایی جریان تقارن محور پیرامون یک نازل مافوق صوت را تحلیل کند.

۴- نتیجه گیری

یک کد عددی بدون شبکه سریع برای حل جریان های داخلی و متقارن محور توسعه داده شد. در جریان تقارن محور عبارتی به سمت راست معادلات افزوده می شود که این معادلات را نسبت به معادلات دوبعدی متفاوت می کند. از حداقل مربعات سری تیلور برای گسسته سازی مشتقات مکانی و از روش چند مرحله ای صریح برای گسسته سازی زمانی استفاده شده است. ترم های استهلاک مصنوعی مرتبه دو و چهار برای حل معادلات غیرلزج استفاده شده است. دقت و توانایی این روش برای جریان های داخلی دوبعدی و متقارن محور در مقایسه با داده های تجربی، عددی و تحلیلی مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج نشان می دهد که روش توسعه داده شده در تخمین نسبت فشار بی بعد در دیواره نازل، موقعیت شوک، تخمین سرعت، فشار و دیگر پارامترها در جریان های داخلی و متقارن محور از دقت بسیار مناسبی برخوردار است. کد عددی توسعه داده شده، توانسته است موقعیت شوک در درون نازل را با حدود ۳٪ خطا نسبت به روش تحلیلی تخمین بزند. همچنین زمان همگرایی کد توسعه داده شده برای مسائل ارائه شده در حالت تقارن محوری نسبت به حالت دوبعدی بیشتر است زیرا در حالت تقارن محوری، عبارت های بیشتری در معادلات وجود دارد. در این تحقیق به دلیل سریع بودن روش حل بدون شبکه، زمان تحلیل برای مسائل تقارن محوری ارائه شده بیشتر از ۶۰ درصد

- with boundary elements, 143 (2022) 340-352.
- [19] H. Krishna, A New Edge-Based Meshless Scheme for High-Speed Inviscid and Viscous Flows, in: *Recent Advances in Computational Mechanics and Simulations*, Springer, 2021, pp. 527-537.
- [20] S. Shahane, A. Radhakrishnan, S.P. Vanka, A high-order accurate meshless method for solution of incompressible fluid flow problems, *Journal of Computational Physics*, 445 (2021) 110623.
- [21] S. Couturier, H. Sadat, A meshless method for the solution of incompressible flow equations, arXiv preprint arXiv:2103.02247, (2021).
- [22] A. Jameson, Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics, 2: Artificial diffusion and discrete shock structure, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 5(1-2) (1995) 1-38.
- [23] K. Arora, N. Rajan, S. Deshpande, Weighted Least Squares Kinetic Upwind Method (WLSKUM) using Eigenvector Basis, in: *8th Annual Aesi CFD Symposium*, 11th-13th August, 2005, pp. 135-155.
- [24] J. Blazek, *Computational fluid dynamics: principles and applications*, Butterworth-Heinemann, 2015.
- [25] M.L. Mason, The effect of throat contouring on two-dimensional converging-diverging nozzles at static conditions, *National Aeronautics and Space Administration, Scientific and Technical ...*, 1980.
- [26] Z. Ma, N. Emad, H. Chen, A Local Meshless Method for Solving Compressible Euler Equations, *Space Research Journal*, 1(1) (2008) 1-16.
- [27] M. Hadidoolabi, S. Ghaemi Kashani, M. Hashemabadi, A. Tarabi, Design and Analysis of Closed-type Free Jet Test Section for Hypersonic Wind Tunnel, *Tabriz University Mechanical Engineering Journal*, 48(2) (2018) 105-112 (in Persian).
- [28] M. Hadidoolabi, A. Yousefi, M. Hashemabadi, Hypersonic Wind Tunnel Diffusers Design Based on Numerical Analysis of Flow Field, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 49(3) (2017) 457-470 (in Persian).
- with artificial dissipation for solving 2D Euler equations, *Computers & Fluids*, 71 (2013) 83-90.
- [9] M. Hashemabadi, M. Hadidoolabi, Efficient Gridless Method Using Constrained Weights Optimization for Two-Dimensional Unsteady Inviscid Flows at Low Angles of Attack, *Journal of Aerospace Engineering*, 30(5) (2017) 04017052.
- [10] M. Hashemabadi, M. Hadidoolabi, Implicit second-order CUSP gridless method for unsteady moving boundary simulations, *Computers & Mathematics with Applications*, 74(4) (2017) 842-858.
- [11] M. Hashemabadi, M. Hadidoolabi, Development of an implicit high order gridless method for inviscid compressible flows, *Modares Mechanical Engineering*, 15(5) (2015).
- [12] E.K.-y. Chiu, Q. Wang, A. Jameson, A conservative meshless scheme: general order formulation and application to Euler equations, in: *AIAA 2011-651 49th Aerospace Sciences Meeting*, 2011.
- [13] N. Zhan, R. Chen, Y. You, Meshfree method based on discrete gas-kinetic scheme to simulate incompressible/compressible flows, *Physics of Fluids*, 33(1) (2021) 017112.
- [14] D. Sridar, N. Balakrishnan, An upwind finite difference scheme for meshless solvers, *Journal of Computational Physics*, 189(1) (2003) 1-29.
- [15] Z.-h. Ma, H.-q. Cen, X.-j. Wu, A gridless-finite volume hybrid algorithm for Euler equations, *Chinese Journal of Aeronautics*, 19(4) (2006) 286-294.
- [16] P.V. Tota, Z.J. Wang, Meshfree Euler solver using local radial basis functions for inviscid compressible flows, *AIAA paper*, 4581 (2007).
- [17] M. Rammane, S. Mesmoudi, A. Tri, B. Braikat, N. Damil, A mesh-free approach for the simulation of incompressible flows, in: *MATEC Web of Conferences*, EDP Sciences, 2019, pp. 07003.
- [18] K.B. Rana, B. Mavrič, R. Zahoor, B. Šarler, A meshless solution of the compressible viscous flow in axisymmetric tubes with varying cross-sections, *Engineering analysis*

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Hadidoolabi, M. Hashemabadi, R. Jamshidi, Meshless Method for Numerical Solution of Internal Flows with Axial Symmetry, Amirkabir J. Mech Eng., 55(3) (2023) 285-302.

DOI: [10.22060/mej.2023.21728.7497](https://doi.org/10.22060/mej.2023.21728.7497)

