Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 55(3) (2023) 79-82
DOI: 10.22060/mej.2023.21486.7450

The development of power-law preconditioning approach for simulation of unsteady viscoelastic flows

H. Ghiyasi Shahraky, M. Norouzi *, A. Abbas Nejad, P. Akbarzadeh

Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

ABSTRACT: One of the particular features of viscoelastic liquids in unstable shear flows is the damping oscillatory behavior in the velocity field without imposing external force and oscillation. This behavior is seen because of the elastic property of the liquid. In the present paper, for the first time, the preconditioning method of local stress censor has been employed for numerically simulating unstable viscoelastic liquids passing through fixed parallel plates. In this regard, the Maxwell model has been used. In this method, by adding fake time derivation to governing equation, hyperbolic equations will be generated. By obtaining the preconditioning matrix of these equations corrected locally through the power relation of stress field and employing binary algorithm for time including inner and outer loop, solving incompressible unsteady flows can be possible in the form of artificial compressible flows. In order to converge the inner loop, the four-step Vossooghifar's method has been implemented. Equations were discretized through the finite difference and shifted network. Calculation of unsteady viscoelastic flows has been performed for various Reynolds numbers, Weissenberg numbers and viscosity ratios have been presented. The results are in good agreement with the numerical results. Results of the convergence rate indicate that the locally preconditioning power censor method is the appropriate one for a viscosity ratio lower than 0.5 demonstrating a higher convergence rate and reduced time cost of calculations.

Review History:

Received: Jun. 12, 2022
Revised: Nov. 21, 2022
Accepted: Mar. 03, 2023
Available Online: Apr. 25, 2023

Keywords:

preconditioning power method
stress censor
binary implicit algorithm
unsteady viscoelastic flow
convergence rate

1- Introduction

Researchers are always looking for numerical methods for simulating unsteady viscoelastic flows indicating appropriate steady behavior, higher convergence rate, low calculation error, and time-effective calculation time. In equations of incompressible flows which are a kind of parabolic-elliptic equations, there is no relation between continuity and momentum equations in terms of pressure. Incompressible unsteady equations are transferred to hyperbolic equations by adding an unphysical continuity equation. This method is known as the artificial compressible method [1]. Torkel [1] added an unphysical term to the momentum equations which is known as the preconditioning method. The preconditioning power method utilizing a preconditioning matrix with a local velocity censor was introduced by Esfahanian and Akbarzade [2]. The preconditioning power method utilizing a preconditioning matrix with a local velocity sensor was used to simulate unsteady and steady flow, and laminar and turbulent flow around an airfoil which indicated a higher convergence rate and lower calculation time [3]. Sato and Richardson employed Oldroyd-B and UCM to solve unsteady Poiseville viscoelastic flow [4]. In the present research, the preconditioning power method to simulate unsteady developing viscoelastic flow passing through fixed parallel plates for the first time.

2- Methodology

Preconditioning power model is implemented to simulate steady flow equations in which any progressive method can be used to discretized [3]. In this study, Vossoghifar's four-step method using preconditioning local censor in the stress field has been employed to modify the inner time loop. For solving incompressible unsteady flows by preconditioning power method, it is necessary to add implicitly real-time derivation with second-order accuracy to steady flow equations in the regressive form [5]. In this way, with a converging solution in virtual time, it is possible to solve equations in real-time through a binary-time algorithm [6]. According to the concept of the implicit method, there is no limitation in choosing the time step in terms of the stability of the method. The real-time step is just depending on the accuracy of the problem. To solve the governing equations, the finite element method with the shifted grid is used. For the evaluation of unsteady flow, local pressure and local velocity software have been employed. To discretize, equations (1) to (3) have been used [3].

In equations (1) to (3), K varies from 1 to 4 and δ_K is a constant coefficient in Vossooghi method in which for K=1,

*Corresponding author's email: norouzi@shahroodut.ac.ir

Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.

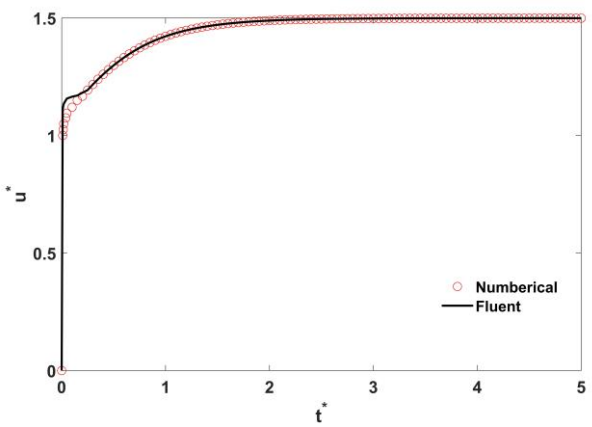


Fig. 1. Comparison of time variation of the u-velocity at $x = 9$ and $y = 1$ for $\mathrm{Re} = 10$ and $\beta = 1$ by solving the fluent.

δ_K is $2^{\frac{1}{3}} - 1$ and for other *k*, it is $\frac{2}{3} - \frac{2^{\frac{1}{3}}}{3}$. The superscripts *n* and *N* indicate virtual and real-times.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{V}^0 = \mathbf{V}^n \\
&\mathbf{V}^K = \mathbf{V}^{K-1} + \frac{2\delta_K \Delta t_a \Delta t}{2\Delta t + 3\Delta t_a}\left\{-\vec{\nabla} p + \frac{\beta}{\mathrm{Re}}\nabla^2 \mathbf{V} + \vec{\nabla}.\boldsymbol{\tau} - \mathbf{V}.\nabla\mathbf{V}\right. \\
&\left. -\frac{3\,\mathbf{V}^n - 4\,\mathbf{V}^N + \mathbf{V}^{N-1}}{2\Delta t} - \frac{\alpha \mathbf{V}}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t_a}\right\}^{K-1} \\
&\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{V}^4
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\tau}^0 = \boldsymbol{\tau}^n \\
&\boldsymbol{\tau}^K = \boldsymbol{\tau}^{K-1} + \frac{2\delta_K \Delta t}{(2\Delta t + 3\ \mathrm{Wi})}\left\{\frac{(1-\beta)}{\mathrm{Re}}\gamma_{(1)}\right. \\
&\left. -\mathrm{Wi}\left(\frac{3\boldsymbol{\tau}^n - 4\boldsymbol{\tau}^N + \boldsymbol{\tau}^{N-1}}{2\Delta t}\right) - \boldsymbol{\tau}^n\right\}^{K-1} \\
&\boldsymbol{\tau}^{n+1} = \boldsymbol{\tau}^4
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&p^0 = p^n \\
&p^K = p^{K-1} - \left(\delta_K \Delta t_a c^2\right)\nabla.\mathbf{V}^{K-1} \\
&p^{n+1} = p^4
\end{aligned} \tag{3}$$

3- Results and Discussion

In this study, MATLAB has been used for simulation. In order to evaluate the results, analytical solutions cannot be employed for unsteady incompressible viscoelastic and Newtonian liquids passing through parallel plates in fully developed flows in references [7]. In order to validation of the present results, Fluent software has been used for $\beta = 1$ (Newtonian fluids) and $\mathrm{Re} = 10$ according to Figure 1. From Figure 1, it can be concluded that the results are in good agreement with the numerical results of Fluent. Figure 2 shows the effect of different preconditioning methods on the convergence rate for unsteady flows of viscoelastic fluid with $\mathrm{Re}=10$, $\mathrm{Wi} = 1$ and $\beta = 0.25$.passing between two fixed parallel planes. In this figure, the method of preconditioning the power of the stress sensor has the stability of the numerical solution and the increase of the convergence rate from the other methods mentioned in the viscosity ratio less than 0.5.

Table 1. Effect of the locally power-law PM of stress sensor on convergence rate unsteady flow of viscoelastic fluid passing between tow fixed parallel plates

Mode number	1	2	3	4	5	6
Re	10	10	10	10	5	20
Wi	1	1	5	1	1	1
Viscosity ratio	0	25	25	50	25	25
Reducing the number of iterations compared to the pressure sensor power preconditioning method (~%)	63	21	41	-4	37	72
Reducing the number of iterations compared to the speed sensor power preconditioning method (~%)	23	3	3	3	7	2

Table 1 represents the effect of the locally power-law PM of stress sensor on convergence rate unsteady flow of viscoelastic fluid passing between tow fixed parallel plates. To calculate the convergence rate, a reduction in the percentage of the number of iterations has been approximately considered. With the increase in the Reynolds and Weissenberg number, the convergence rate is raised and with the decrease in the viscosity ratio, the convergence rate is improved.

4- Conclusions

The achieved results illustrate that using the binary time algorithm in the preconditioning power sensor method of local stress for solving unsteady viscoelastic flow at a low viscosity rate of 0.5, in spite of the oscillatory feature of the velocity field, in addition to the increment in convergence and reduction in the calculation time, it can increase the stability of calculation. Also, by increasing the Reynolds number and Weissenberg number in the viscosity ratio less than 0.5, it increases the convergence rate of the preconditioning method of the power of the local stress sensor.

References

[1] E. Turkel, Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations, Journal of computational physics, 72(2) (1987) 277-298.

[2] V. Esfahanian, P. Akbarzadeh, K. Hejranfar, An improved

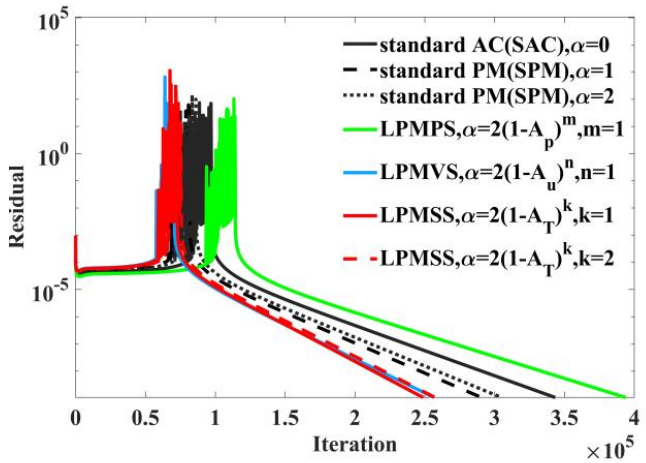


Fig. 2. Effect of the locally power-law PM on convergence rate for unsteady flow of viscoelastic fluid passing between tow fixed parallel plates with $\mathrm{Re}=10$ **,** $\mathrm{Wi}=1$ **and** $\beta=0.25$ **.**

progressive preconditioning method for steady non-cavitating and sheet-cavitating flows, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 68(2) (2012) 210-232.

[3] P. Akbarzadeh, S.M. Derazgisoo, A dual-time implicit power-law preconditioning method for solving unsteady incompressible flows, Modares Mechanical Engineering, 16(2) (2016) 99-110.

[4] G. Mompean, M. Deville, Unsteady finite volume simulation of Oldroyd-B fluid through a three-dimensional planar contraction, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 72(2-3) (1997) 253-279.

[5] H. Vosoughifar, Computational Fluid Dynamic in Matlab, Islamic Azad University-South Tehran Branch, (2016).

[6] F. Rouzbahani, K. Hejranfar, Numerical simulation of wave-floating bodies interaction using a truly incompressible SPH method with artificial compressibility approach, Journal of Solid and Fluid Mechanics, 8(1) (2018) 241-252.

[7] S. Aristov, D. Knyazev, Viscous fluid flow between moving parallel plates, Fluid Dynamics, 47(4) (2012) 476-482.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

H. Ghiyasi Shahraky, M. Norouzi, A. Abbas Nejad, P. Akbarzadeh, The development of power-law preconditioning approach for simulation of unsteady viscoelastic flows, Amirkabir J. Mech Eng., 55(3) (2023) 79-82.

DOI: 10.22060/mej.2023.21486.7450

This page intentionally left blank

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۵، شماره ۳، سال ۱۴۰۲، صفحات ۳۸۱ تا ۴۰۶
DOI: 10.22060/mej.2023.21486.7450

توسعه روش پیش‌شرط توانی برای شبیه‌سازی جریان‌های ناپایای سیالات ویسکوالاستیک

حمیدرضا غیاثی شهرکی ، محمود نوروزی*[1] ، علی عباس نژاد، پوریا اکبرزاده

مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

خلاصه: یکی از ویژگی منحصربه‌فرد سیالات ویسکوالاستیک در جریان‌های برشی ناپایای، رفتار نوسانی میراشونده در میدان سرعت بدون اعمال نوسان و نیروی خارجی است؛ عامل به وجود آورنده این ویژگی خاصیت الاستیک آن است. در مقاله حاضر، برای اولین بار از روش پیش‌شرط‌توانی حسگر محلی تنش برای پایداری حل عددی جریان‌های ناپایای سیال ویسکوالاستیک در حال عبور از بین دو صفحه موازی ثابت استفاده می‌شود. برای شبیه‌سازی حاضر، از مدل ماکسول ساده استفاده شده است. در این روش با افزودن جمله مشتق زمانی کاذب به معادلات حاکم، شکل معادلات هذلولوی می‌شود. با به دست آوردن ماتریس پیش‌شرط این معادلات که از رابطه‌توانی میدان تنش به صورت محلی تصحیح می‌شود، با استفاده از یک الگوریتم دوزمانه که شامل حلقه داخلی و خارجی است، حل معادلات جریان ناپایای تراکم‌ناپذیر به‌صورت تراکم‌پذیری مصنوعی امکان‌پذیر می‌شود. جهت همگرایی حلقه داخلی ، از روش عددی وثوقی‌فر چهارمرحله‌ای استفاده می‌شود. جهت گسسته‌سازی معادلات از روش تفاضل محدود و شبکه جابجا شده استفاده شده است. محاسبات جریان‌های ناپایای سیال ویسکوالاستیک برای اعداد رینولدز، اعداد وایزنبرگ و مقادیر نسبت لزجت مختلف ارائه شده است. نتایج به دست آماده دارای انطباق مناسبی با نتایج عددی دارد. نتایج نرخ همگرایی نشان می‌دهد که روش پیش‌شرط توانی حسگر محلی تنش برای نسبت لزجت کمتر از ۰/۵ دارای پایداری زیاد، افزایش سرعت همگرایی و کاهش هزینه زمانی محاسبات می‌شود.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۴۰۱/۰۳/۲۲
بازنگری: ۱۴۰۱/۰۸/۳۰
پذیرش: ۱۴۰۱/۱۲/۱۲
ارائه آنلاین: ۱۴۰۲/۰۲/۰۵

کلمات کلیدی:
روش پیش‌شرط توانی
حسگر تنش
الگوریتم ضمنی دوزمانه
جریان ناپایای ویسکوالاستیک
سرعت همگرایی

۱- مقدمه

امروزه موادی یافته می‌شوند شبیه سیالات امّا رفتار آن‌ها با مدل سیالات نیوتنی قابل توصیف نیستند. این سیالات به سیالات غیرنیتونی معروف‌اند. سیالات ویسکوالاستیک از معروف‌ترین نوع این سیالات هستند. سیالات ویسکوالاستیک در صنایع پتروشیمی، پزشکی، داروسازی، نظامی، مواد آرایشی و بهداشتی و ... دارای اهمیت است. مدل‌سازی عددی سیالات ویسکوالاستیک کمک بزرگی برای تحلیل رفتار فیزیکی تجهیزات مورد استفاده در صنعت و ساخت آن‌ها می‌کند. همواره محققان به دنبال روش‌های عددی برای این‌گونه مدل‌سازی‌ها هستند که دارای پایداری مناسب، نرخ همگرایی بالا، خطای محاسباتی کم و از لحاظ زمان محاسباتی مقرون به صرف باشند. برای مدل‌سازی عددی جریان‌های ناپایای سیال نیوتنی از یک الگوریتم دوزمانی[1] که با اضافه نمودن جمله مشتق زمان واقعی به‌صورت ضمنی به دستگاه معادلات حاکم است؛ برای حل این دستگاه معادلات، از دو حلقه تکرار به شکل حلقه تکرار بیرونی برای زمان حقیقی و حلقه تکرار داخلی برای زمان کاذب استفاده می‌شود که با همگرایی حلقه داخلی معادلات گام زمان واقعی حاصل می‌شود. در انتخاب گام زمان واقعی هیچ محدودیتی در این روش وجود ندارد؛ این روش توسط جیمسون [۱] ارائه شده است. اگر گام زمان حقیقی مساوی یا کوچک‌تر از زمان کاذب انتخاب شود، حل ناپایدار است. این نتیجه توسط آرنون و همکاران [۲] ارائه شد. معادلات جریان تراکم‌ناپذیر از نوع معادله سهموی-بیضوی است بین معادله پیوستگی و معادلات ممنتوم هیچ رابطه از نظر فشار وجود ندارد؛ چورین با اضافه نمودن جمله غیرفیزیکی مشتق زمانی فشار و توان دوم سرعت صوت کاذب به معادله پیوستگی، معادلات جریان تراکم‌ناپذیر به معادله هذلولوی تبدیل می‌شود که با پیمایش در گام زمانی کاذب این جمله غیرفیزیکی از بین می‌رود. این روش به روش تراکم‌پذیری مصنوعی[2] معروف است [۳]. تُرکل، جمله مشتق زمانی کاذب فشار را به معادلات ممنتوم اضافه کرد که

1 . Dual-Time method

2 . Artificial Compressibitity

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: norouzi@shahroodut.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode دیدن فرمائید.

با این کار به توسعه روش تراکم‌پذیری مصنوعی پرداخت، این روش به روش پیش‌شرط[1] معروف است [۴]. روش پیش‌شرط محلی با استفاده از یک ماتریس پیش‌شرط محلی با حسگر میدان فشار که در هر گام زمانی به‌صورت محلی اصلاح می‌شود، مالان و همکاران[۵, ۶] ارائه کردند. روش پیش‌شرط توانی[2] با استفاده از ماتریس پیش‌شرط با حسگر محلی سرعت برای تحلیل عددی جریان آزاد، دائم و تراکم‌ناپذیر روی استوانه، تحلیل جریان کاویتاسیون توسط اصفهانیان و اکبرزاده [۷, ۸] بررسی شد. بررسی تأثیر دمش و مکش روی ضرایب برآ و پسای جریان‌های کاویتاسیونی و جریان لزج تراکم‌ناپذیر در هیدروفویل‌ها با به‌کارگیری روش پیش‌شرط توانی توسط اکبرزاده و همکاران [۹, ۱۰] مورد بررسی قرار گرفت. همچنین از روش پیش‌شرط توانی با استفاده از حسگر محلی سرعت برای شبیه‌سازی عددی جریان دائم و ناپایای، تراکم‌ناپذیر آرام و آشفته در اطراف ایرفویل تحقیق نمودند که موجب افزایش نرخ همگرایی و کاهش زمان محاسباتی شد [۱۱, ۱۲]. از روش تراکم‌پذیری مصنوعی با استفاده از الگوریتم دوزمانی جهت شبیه‌سازی عددی اجسام شناور در جریان ناپایای سیال تراکم‌ناپذیر، هجران‌فر و همکاران [۱۳] استفاده کردند. در ادامه به تاریخچه سیالات ویسکوالاستیک پرداخته می‌شود. در جریان سیالات ویسکوالاستیک داخل کانال مستقیم با سطح مقطع غیرمدّور، مستقیم‌الخط نیستند، بلکه در نزدیک گوشه‌ها جریان ثانویه ایجاد می‌شود، توسط اریسکون و همکارانش [۱۴] گزارش داده شد. داربی و همکارانش [۱۵] با مدل‌سازی دوبعدی جریان سیال ویسکوالاستیک در داخل کانال دریافتند که هیچ جریان ثانویه ایجاد نمی‌شود. واترز و کینگ [۱۶] به بررسی حل تحلیلی جریان پوازیه[3] ناپایای سیال ویسکوالاستیک بین دو صفحه موازی بی‌نهایت با استفاده از معادله اولدروید–بی پرداختند . برای حل تحلیلی جریان‌های ناپایای سیال اولدروید–بی داخل کانال به سطح مقطع مستطیلی راه‌حل‌های دقیق توسط فتکاو و همکاران [۱۷] ارائه شد. ساتو و ریچاردسون [۱۸] از مدل اولدروید–بی و مدل ماکسول ساده برای حل مسئله جریان پوازیه ناپایای سیال ویسکوالاستیک استفاده کردند. جریان آرام سیال ویسکوالاستیک با نفوذپذیری بالا درکانال متخلخل توسط دومیری گنجی و همکارانش [۱۹] مورد بررسی قرار گرفت. بررسی افزایش پایداری در عدد وایزنبرگ بالا برای جریان سیال ویسکوالاستیک توسط جعفری و همکارانش [۲۰] انجام شد. محمودی و همکاران [۲۱] به تحلیل عددی جریان مغشوش سیال ویسکوالاستیک در کانال دو بعدی با استفاده از مدل فن–پی پرداختند. محققان [۲۲] نیز به بررسی عددی جریان ناپایای سیال ویسکوالاستیک در داخل یک کانال همگرا، بین دو صفحه همگرا و در مجاری بسته پرداختند.

همواره مطالعه و شناخت عددی رفتار جریان‌های درحال‌توسعه ناپایای سیالات ویسکوالاستیک در هندسه‌های ساده مانند کانال دوبعدی با سطح مقطع مستطیلی دارای اهمیت است. جریان‌های ناپایای سیالات ویسکوالاستیک به دلیل وجود خاصیت الاستیک دارای ویژگی منحصربه‌فرد رفتار نوسانی در محدوده پایدار، بدون عامل خارجی نوسانی در شرایط مرزی و نیروی‌های خارجی هستند. روش‌های عددی که دارای دقت مناسب، نرخ همگرایی بالا و کاهش زمان محاسباتی برای مدل‌سازی عددی جریان ناپایای سیالات ویسکوالاستیک باشند، در مکانیک سیالات محاسباتی دارای جایگاه ویژه بین محققان است. روش عددی پیش‌شرط توانی برای تحلیل عددی جریان ناپایای نسبت به روش‌های دیگر دارای نرخ همگرایی بالا و دقت کافی است؛ بنابراین توسعه روش پیش‌شرط توانی با استفاده از حسگر محلی تنش برای حل جریان ناپایای درحال‌توسعه سیال ویسکوالاستیک می‌تواند در پایداری حل، دقت جواب و تسریع نرخ همگرایی مؤثر باشد.

در این مقاله برای نخستین‌بار از روش پیش‌شرط توانی برای مدل‌سازی عددی جریان‌های ناپایای درحال‌توسعه سیالات ویسکوالاستیک عبوری از بین دو صفحه موازی ثابت استفاده شده است. همچنین تأثیر نرخ همگرایی این روش با استفاده از حسگر فشار، سرعت و تنش برای نخستین بار برای این هندسه و جریان ناپایای سیال ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار گرفته است. در این روش از یک الگوریتم دوزمانه که شامل گسسته‌سازی زمان حلقه بیرونی به صورت ضمنی مرتبه دوم و زمان حلقه داخلی به صورت روش چهارمرحله‌ای وثوقی‌فر و با استفاده از ضریب پیش‌شرط محلی حسگر میدان تنش در هرگام زمان حلقه داخلی اصلاح می‌شود، برای اولین‌بار در این مقاله استفاده شده است.

۲- معادلات حاکم

در این مقاله، جریان آرام، تراکم‌ناپذیر و ناپایای سیال ویسکوالاستیک مورد مطالعه قرارگرفته است. طبق اصول اولیه مکانیک سیالات، معادلات پیوستگی و ممنتوم برای تمام جریان سیال پیوسته به شکل زیر است:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla.\left(\rho\vec{\mathbf{V}}\right)=0 \qquad (۱)$$

1 . Preconditioning Method
2 . Power-Law Preconditioning Method
3 . Poiseuille Flow

$$\frac{\partial\left(\rho\vec{\mathbf{V}}\right)}{\partial t}+\rho\vec{\mathbf{V}}.\nabla\vec{\mathbf{V}}=-\vec{\nabla}p+\vec{\nabla}.\boldsymbol{\tau}+\vec{\mathbf{F}} \qquad (۲)$$

که در معادلات فوق $\vec{V}$ بردار سرعت، p میدان فشار، $\boldsymbol{\tau}$ تانسور تنش، $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ تغییرات چگالی نسبت به زمان که در تحقیق حاضر چگالی ثابت بنابراین $\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\right)$ است و $\vec{F}$ نیرو خارجی، چون در این پژوهش جریان آزاد است و عامل انتقال انرژی نیروی جاذبه نیست این جمله از معادله (۲) حذف می‌گردد. از آنجا که در این پژوهش از روش شبکه جابجا شده برای گسسته‌سازی استفاده می‌شود و این روشی بسیار مناسبی برای جریان سیال نیوتنی است. چون که در معادلات ناویراستوکس، جمله دیورژانس تنش به جمله لاپلاسین میدان سرعت ساده می‌شود و این جمله به سادگی روی شبکه جابجا شده گسسته‌سازی شده و شرایط مرزی ساده‌تر به آن اعمال می‌شود. در نتیجه جمله تنش ویسکوز نقش مؤثری در افزایش پایداری حل عددی دارد. از این رو جمله تنش را به صورت مجموع تنش‌های ویسکوز و پلیمری مانند رابطه (۳) می‌توان تفکیک کرد. جمله تنش ویسکوز که از معادله متشکله نیوتنی رابطه (۴) به دست می‌آید منجربه لاپلاس سرعت می‌شود و تنش پلیمر از معادله ماکسول ساده رابطه (۵) به دست می‌آید. این امر نقش مؤثری در افزایش پایداری تحلیل عددی جریان‌های ویسکوالاستیک ایفا می‌کند [۲۳].

$$\tau=\tau_N+\tau_p \qquad (۳)$$

$$\tau_N=\eta_N\dot{\gamma} \qquad (۴)$$

$$\boldsymbol{\tau}_P+\lambda_1\frac{\partial\boldsymbol{\tau}_P}{\partial t}=\eta_P\dot{\gamma} \qquad (۵)$$

لازم است برای مدل‌سازی جریان سیال ویسکوالاستیک، معادلات حاکم و معادله مشخصه را بی‌بعدسازی شوند. جهت بی‌بعدسازی معادلات از روابط زیر استفاده شده است:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\tau}^*=\frac{\boldsymbol{\tau}}{\rho U^2} \qquad \beta=\frac{\eta_N}{\eta_0} \qquad p^*=\frac{p}{\rho U^2}\\ \dot{\gamma}^*=\frac{U^2}{h}\dot{\gamma} \quad \mathrm{Re}=\frac{\rho U h}{\eta_0} \quad \mathrm{Wi}=\frac{\lambda U}{h}\\ v^*=\frac{v}{U}\ x^*=\frac{x}{h} \qquad y^*=\frac{y}{h} \qquad u^*=\frac{u}{U}\\ \eta_0=\eta_N+\eta_P \qquad v^*=\frac{v}{U} \qquad t^*=\frac{tU}{h}\end{gathered} \qquad (۶)$$

در رابطه (۶)، Re عدد رینولدز که نسبت نیروی اینرسی به نیروی لزجت است، عدد رینولدز در حل تحلیل و عددی سیالات کاربرد فراوانی دارد. Wi عدد وایزنبرگ که نسبت نیروی الاستیک به نیروی لزجت است و عدد وایزنبرگ نیز مانند عدد رینولدز، در تحلیل عددی سیالات ویسکوالاستیک و برای تعیین بهترین مدل ساختاری برای تحلیل سیالات غیرنیوتنی مورد استفاده قرار می‌گیرد. که در رابطه (۶) u و v سرعت بی‌بعد در جهت x و y، p فشار، $\boldsymbol{\tau}$ تانسور تنش، t زمان حقیقی، t_a زمان کاذب، β نسبت لزجت، η_0 لزجت کل، η_P لزجت پلیمر، η_N لزجت نیوتنی، U سرعت مرجع، h طول مرجع و c^2 سرعت صوت کاذب است. معادلات پیش‌شرط‌سازی جریان بی‌بعد حاکم و معادله متشکله بی‌بعد ماکسول ساده جهت مدل‌سازی جمله تنش استفاده شده است در رابطه (۸) آورده شده است. برای سادگی در نوشتار از نوشتن علامت (*) برای کمیت‌های بی‌بعد در معادلات صرف نظر شده است. معادلات حاکم به شکل زیر است:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t_a}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (۷)$$

$$\begin{gathered}\frac{\alpha u}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t_a}+\frac{\partial u}{\partial t_a}+\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2+p\right)+\\ \frac{\partial}{\partial y}(uv)=\frac{\beta}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\right)\end{gathered} \qquad (۸)$$

$$\begin{gathered}\frac{\alpha v}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t_a}+\frac{\partial v}{\partial t_a}+\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\left(v^2+p\right)+\frac{\partial}{\partial x}(uv)=\\ \frac{\beta}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}\right)\end{gathered} \qquad (۹)$$

$$\tau_{xx} + \mathrm{Wi}\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} = \frac{2(1-\beta)}{\mathrm{Re}}\frac{\partial u}{\partial x} \quad (۱۰)$$

$$\tau_{xy} + \mathrm{Wi}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} = \frac{(1-\beta)}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad (۱۱)$$

$$\tau_{yy} + \mathrm{Wi}\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial t} = \frac{2(1-\beta)}{\mathrm{Re}}\frac{\partial v}{\partial y} \quad (۱۲)$$

α ضریب پیش‌شرط توانی به صورت معادله (۱۳) تعریف می‌شود. در رابطه (۱۳) A_τ حسگر محلی تنش است که از رابطه (۱۴) محاسبه می‌شود.

$$\alpha = 2(1-A_\tau)^k \quad (۱۳)$$

$$A_\tau = \lim_{x \to x_i^+} \frac{|\nabla \tau(x_i) - \nabla \tau(x)|}{|\nabla \tau(x_i)| - |\nabla \tau(x)|} \quad (۱۴)$$

در رابطه (۱۳) $k \geq ۱$ و مقدار آن عدد طبیعی است. $\nabla \tau(x_i)$ گرادیان تنش در نقطه $x = x_i$ که i نقطه در شبکه محاسباتی، از رابطه (۱۵) به دست می‌آید:

$$\nabla \tau(x_i) = \lim_{x \to x_i^-} \frac{\tau(x) - \tau(x_i)}{x - x_i} \quad (۱۵)$$

سرعت صوت کاذب تأثیر بسزایی روی نرخ همگرایی و پایداری حل عددی درروش پیش‌شرط توانی دارد. . تامامدیس و همکارنش[۲۴] گزارش دادند که انتخاب مقدار سرعت صوت کاذب به شرایط جریان، نوع هندسه جسم و تجربه فرد برنامه‌نویس وابسته است؛ که مقدار پیشنهادی آن‌ها برای سرعت صوت کاذب بین ۰/۱ تا ۱۰ است . ادیبی [۲۵] با بررسی ضریب تراکم‌پذیری روی جریان تراکم‌ناپذیر ناپایای سه بعدی با روش تراکم‌پذیری مصنوعی دریافت، ضریب تراکم‌پذیر مصنوعی فقط روی نرخ همگرایی مؤثر است و تأثیری در دقت جواب ندارد. بهترین نرخ همگرایی در روش تراکم‌پذیری مصنوعی برای مقادیر ۱ تا ۵ حاصل می‌شود .

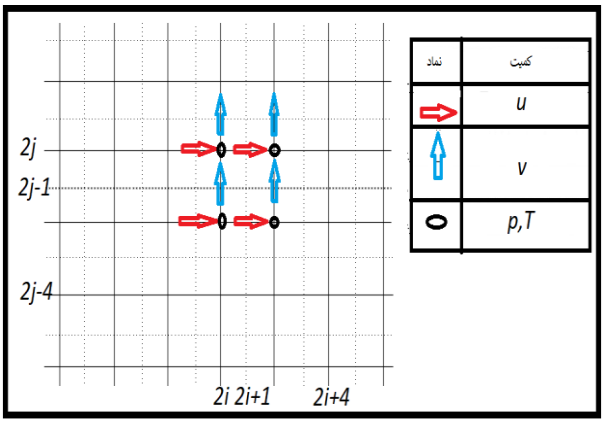
از روش پیش‌شرط توانی جهت مدل‌سازی معادلات جریان‌های دائم استفاده می‌شود که برای گسسته‌سازی مشتق زمان مجازی از هر روش پیشرو می‌توان استفاده کرد. برای حل معادلات جریان‌های ناپایای تراکم‌ناپذیر به روش پیش‌شرط توانی لازم است مشتق زمان حقیقی را به صورت ضمنی با دقت مرتبه دو به صورت پسرو به معادلات جریان دائم اضافه شود. به این ترتیب با همگرایی حل در زمان مجازی، حل معادلات در زمان حقیقی میسر می‌شود که این روش به الگوریتم دو زمانه معروف است [۱۳]. با توجه به ماهیت روش ضمنی، هیچ محدودیتی از لحاظ پایداری روش عددی جهت انتخاب مقدارگام زمانی حقیقی وجود ندارد. انتخاب گام زمانی حقیقی فقط به دقت مسئله بستگی دارد(یعنی تا چه زمانی نتایج مسئله مورد نیاز است). رابطه (۱۶) گسسته‌سازی مشتق زمان حقیقی را به صورت مرتبه دوم پسرو را نشان می‌دهد.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{3u^{N+1} - 4u^N + u^{N-1}}{2\Delta t} \quad (۱۶)$$

با جایگذاری رابطه (۱۶) در رابطه (۲) و جمله $\pm ۳\, u^n$ به منظور برقرار کردن رابطه‌ای بین پارامترها در گام حقیقی و کاذب جهت حل این معادلات به صورت روش تراکم‌پذیر مصنوعی امکان‌پذیر باشد، اضافه می‌شود. شکل نیمه گسسته معادله ممنتوم در جهت x به صورت رابطه (۱۷) حاصل می‌شود:

$$\frac{\alpha u}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t_a} + \frac{\partial u}{\partial t_a} + \frac{3u^{N+1} \pm 3u^n - 4u^N + u^{N-1}}{2\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(u^2 + p\right) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) = \frac{\beta}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right) \quad (۱۷)$$

با همگرایی حل در زمان کاذب t_a، حل در گام بعدی زمان حقیقی از رابطه (۱۸) حاصل می‌شود:



شکل ۱. نمایی از شبکه‌بندی دامنه محاسبات و تعریف مقادیر بر روی گره‌های مربوطه.

Fig. 1. A view of computational grid domain and define values on the corresponding nodes.

$$u^{N+1} = u^{n+1} \tag{۱۸}$$

با جایگذاری رابطه (۱۸) در رابطه (۱۷)، شکل نیمه گسسته معادله ممنتوم، دو زمانه به صورت رابطه (۱۹) تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial t_a} = \frac{2\Delta t}{2\Delta t + 3\Delta t_a}\{-\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2 + p\right) - \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{\beta}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right) - \frac{3u^n - 4u^N + u^{N-1}}{2\Delta t} - \frac{\alpha u}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t_a}\} \tag{۱۹}$$

شکل نیمه گسسته معادله ماکسول ساده به صورت الگوریتم دوزمانه به شکل رابطه (۲۰) است:

$$\mathbf{V}^K = \mathbf{V}^{K-1} + \frac{2\delta_K \Delta t_a \Delta t}{2\Delta t + 3\Delta t_a}\{-\vec{\nabla} p + \frac{\beta}{\mathrm{Re}}\nabla^2 \mathbf{V} + \vec{\nabla}.\boldsymbol{\tau} - \mathbf{V}.\nabla\mathbf{V} - \tag{۲۰}$$

گسسته‌سازی انجام شده با توجه به ماهیت روش‌های عددی، هیچ محدودیتی ازلحاظ پایداری حل جهت انتخاب گام زمان حقیقی وجود ندارد، همین امر سبب کاهش زمان محاسباتی می‌شود.

۳- گسسته‌سازی عددی

برای حل معادلات حاکم و متشکله از روش تفاضل محدود با استفاده از شبکه جابجا شده استفاده می‌شود. برای حل معادلات جریان ناپایای تراکم‌ناپذیر همان‌طور که بیان شد از الگوریتم دوزمانه استفاده می‌شود؛ بنابراین برای حل جریان ناپایای تراکم‌ناپذیر سیال ویسکوالاستیک در روش پیش‌شرط توانی استفاده از روش تفاضل محدود با استفاده از شبکه جابجا شده که در حل جریان دائم تراکم‌ناپذیر سیال ویسکوالاستیک کاربرد فراوان و آسانی دارد، استفاده می‌شود. روش تفاضل محدود بر روی شبکه جابجا شده توسط هارلو و ولچ [۲۵] ارائه شد. جهت گسست‌سازی برای جمله زمان حقیقی از تقریب تفاضل پس‌روی با دقت مرتبه دو به صورت ضمنی و جهت تقریب جمله مشتقات مکانی درجه اول و دوم از تفاضل محدود مرکزی مرتبه دوم استفاده شده است. شکل۱ نمایی از شبکه محاسباتی و تعریف مقادیر بر روی گره‌ها را در شبکه جابجاشده نشان می‌دهد.

برای پیدا کردن جواب منحصربه‌فرد صحیح، نیاز به گسسته‌سازی مناسبی نسبت به جمله مشتق زمان کاذب است. روش‌های گسسته‌سازی مختلفی نسبت به زمان وجود دارد اما روش عددی وثوقی‌فر از لحاظ هزینه زمان محاسباتی و سرعت همگرایی برای گسسته‌سازی جمله زمان کاذب معادلات جریان ناپایای تراکم‌ناپذیر برتری دارد. روش عددی وثوقی‌فر ، معادلات درجه دوم را در چهار مرحله مبنا قرار می‌دهد، استفاده شده است [۲۶]. گسسته‌سازی جمله مشتق زمان با روش وثوقی‌فر برای حل معادله مومنتوم، معادله متشکله ماکسول ساده و معادله پیوستگی به ترتیب در رابطه‌های (۲۱) تا (۲۹) آمده است.

$$\mathbf{V}^0 = \mathbf{V}^n \tag{۲۱}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{V}^K = \mathbf{V}^{K-1} + \frac{2\delta_K \Delta t_a \Delta t}{2\Delta t + 3\Delta t_a}\{-\vec{\nabla} p + \\ \frac{\beta}{\mathrm{Re}}\nabla^2 \mathbf{V} + \vec{\nabla}.\boldsymbol{\tau} - \mathbf{V}.\nabla\mathbf{V} - \\ \frac{3\ \mathbf{V}^n - 4\ \mathbf{V}^N + \mathbf{V}^{N-1}}{2\Delta t} - \frac{\alpha \mathbf{V}}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t_a}\}^{K-1}\end{aligned} \tag{۲۲}$$

$$\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{V}^4 \tag{۲۳}$$

$$\boldsymbol{\tau}^0 = \boldsymbol{\tau}^n \tag{۲۴}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}^K = \boldsymbol{\tau}^{K-1} + \frac{2\delta_K \Delta t}{(2\Delta t + 3\ \mathrm{Wi})}\times \\ \{\frac{(1-\beta)}{\mathrm{Re}}\gamma_{(1)} - \mathrm{Wi}\left(\frac{3\boldsymbol{\tau}^n - 4\boldsymbol{\tau}^N + \boldsymbol{\tau}^{N-1}}{2\Delta t}\right) - \boldsymbol{\tau}^n\}^{K-1}\end{aligned} \tag{۲۵}$$

$$\boldsymbol{\tau}^{n+1} = \boldsymbol{\tau}^4 \tag{۲۶}$$

$$p^0 = p^n \tag{۲۷}$$

$$p^K = p^{K-1} - \left(\delta_K \Delta t_a c^2\right)\nabla.\mathbf{V}^{K-1} \tag{۲۸}$$

$$p^{n+1} = p^4 \tag{۲۹}$$

در رابطه (۱۸) تا (۲۶)، کمیت K از ۱ تا ۴ و δ_K ضریبی ثابت روش وثوقی‌فر که مقدار آن برای $K=1$ برابر با $\delta_K = 2^{\frac{1}{3}} - 1$ برای دیگر K ها برابر با $\delta_K = \frac{2}{3} - \frac{2^{\frac{1}{3}}}{3}$ است. بالانویس n و Nب یانگر زمان کاذب و حقیقی است. در این مقاله برای افزایش نرخ همگرایی از گام زمان محلی به شکل رابطه (۳۰) استفاده می‌شود [۶].

$$\Delta t_a = \frac{\mathrm{CFL} \times \Delta L_{\min}}{\lambda_{\max}} \tag{۳۰}$$

در رابطه (۳۰)، $\Delta L_{\min}$ کوچک‌ترین طول وجه سلول (i,j) ام، $\lambda_{\max}$ مقدار ویژه بیشینه[1] برای هر سلول، عدد کورانت فردیچ- لوی[2] که مقدار آن برحسب آزمایش‌های عددی به دست می‌آید. جهت گسسته‌سازی حسگر تنش از رابطه پیشنهادی مالان باتوجه به این که تنش در شبکه اولیه یعنی گره‌های زوج قرار دارد، به شکل رابطه (۳۱) گسسته می‌شود. برای معادلات ممنتوم و مرزها از درونیابی و برونیابی استفاده می‌شود [۶].

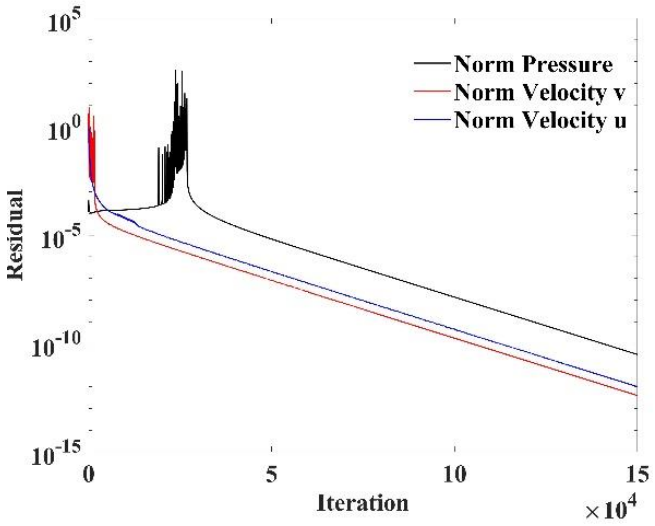
$$A_{\tau 2i,2j} = \frac{\left|4\tau_{xx\,2i,2j} - \tau_{xx\,2i+2,2j} - \tau_{xx\,2i-2,2j} - \tau_{xx\,2i,2j+2} - \tau_{xx\,2i,2j-2}\right|}{\left|\tau_{xx\,2i,2j} - \tau_{xx\,2i+2,2j}\right| + \left|\tau_{xx\,2i,2j} - \tau_{xx\,2i-2,2j}\right| + \left|\tau_{xx\,2i,2j} - \tau_{xx\,2i,2j+2}\right| + \left|\tau_{xx\,2i,2j} - \tau_{xx\,2i,2j-2}\right|} \tag{۳۱}$$

جهت ارزیابی همگرایی جریان ناپایای از نرم خطای فشار موضعی و سرعت‌های موضعی استفاده می‌شود. ولی به دلیل واضح‌تر بودن شکل‌های همگرایی از نرم خطای فشار موضعی به شکل رابطه (۳۲) استفاده می‌شود [۱۱]. این نرم خطای فشار موضعی نسبت به ترم خطای سرعت موضعی در جهت افقی و عمودی همانطور که از شکل ۲ مشخص است دیرتر به همگرایی می‌رسد. پس وقتی نرم خطای فشار موضعی همگرا شود نرم خطای سرعت‌ها نیز همگرا خواهند بود.

$$\mathrm{Res} = \mathrm{Log}\left(\sum_{i=1}^{In}\sum_{j=1}^{Im}\left(\frac{p^{n+1}{}_{2i,2j} - p^{n}{}_{2i,2j}}{p^{n+1}{}_{2i,2j}}\right)^2 \Big/ (In.Im)\right)^{1/2} \tag{۳۲}$$

در رابطه (۳۲) $p^{n+1}{}_{2i,2j}$ و $p^{n}{}_{2i,2j}$ فشار محلی در زمان جدید، فشار

1 . Maximum Eigenvalue
2 . Courant-Friedrichs-Lewy



شکل ۲. نرخ همگرایی جریان ناپایای سیال ویسکوالاستیک بین دو صفحه موازی ثابت با $\mathrm{Re}=۱۰$ ؛ $\mathrm{Wi}=۱$ و $\beta=۰/۵$.

Fig. 2. Convergence rate for unsteady flow of viscoelastic fluid passing between tow fixed parallel plates with $\mathrm{Re}=10$, $\mathrm{Wi}=1$ and $\beta=0.5$.

محلی در زمان قبلی، i و j شمارنده‌های گام مکان در جهت x و y است. همانطور که قبل‌تر بیان شد گام حلقه خارجی فقط به دقت مسئله بستگی دارد، تکرار حلقه خارجی به زمانی بی‌بعدی که نتایج مسئله مورد نیاز است بستگی دارد. با توجه به هندسه دوبعدی در راستای y شکل دارای تقارن است، می‌توان فضای محاسباتی را نصف هندسه حقیقی برای کاهش زمان محاسبات در نظر گرفت. شرایط مرزی در نظر گرفته شده در این تحقیق، مرز دیوار شرط عدم لغزش، مرز تقارن شرط تساوی برای سرعت محوری و شرط قرینه برای سرعت عمودی، در مرز ورودی سرعت محوری یک و تمام متغیرهای دیگر صفر، در مرز خروجی شرط توسعه‌یافتگی و درنهایت برای شرایط مرزی تنش از برونیابی استفاده می‌شود زیرا مرزها در شبکه ثانویه قرار دارند. در مرز تقارن تنش از شرایط آینه استفاده می‌شود. از سوی دیگر به دلیل جریان ناپایای مسئله لازم است شرایط اولیه نیز اعمال می‌شود. شرایط اولیه برای دو زمان حقیقی و مجازی، تمام سرعت‌های عرضی و محوری و تمام مؤلفه‌های تنش در لحظه اولیه برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود.

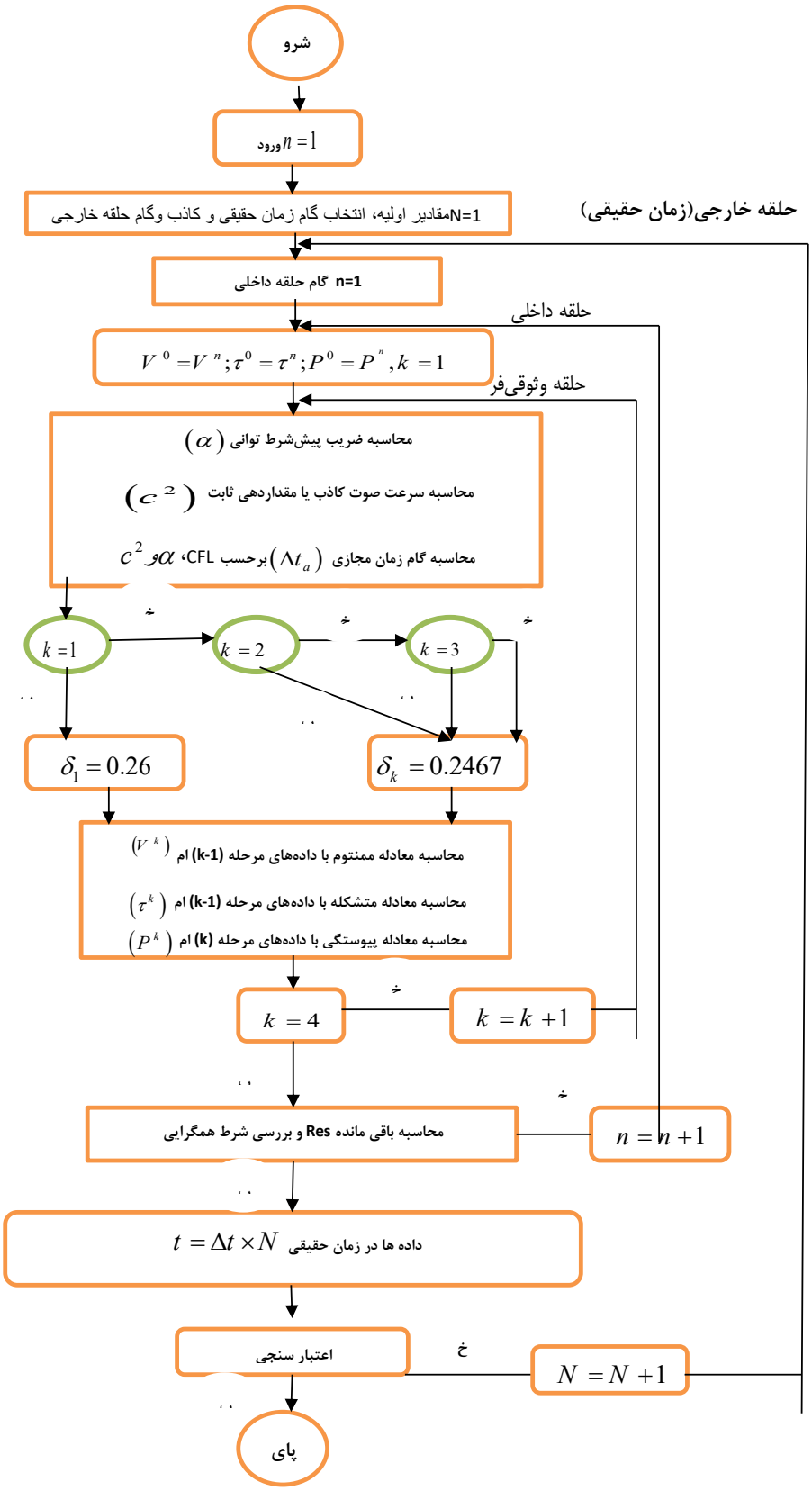
۴- نتایج و بحث

در این پژوهش برای مدل‌سازی جریان ناپایای تراکم‌ناپذیر سیال ویسکوالاستیک عبوری از بین دو صفحه موازی ثابت از روش پیش‌شرط توانی با حسگر تنش به صورت الگوریتم دوزمانه مورد استفاده قرار گرفته است. در این مدل‌سازی از برنامه‌ای در نرم‌افزار متلب طبق روندنمایی شکل ۳ استفاده شده است.

۴- ۱- ارزیابی صحت نتایج

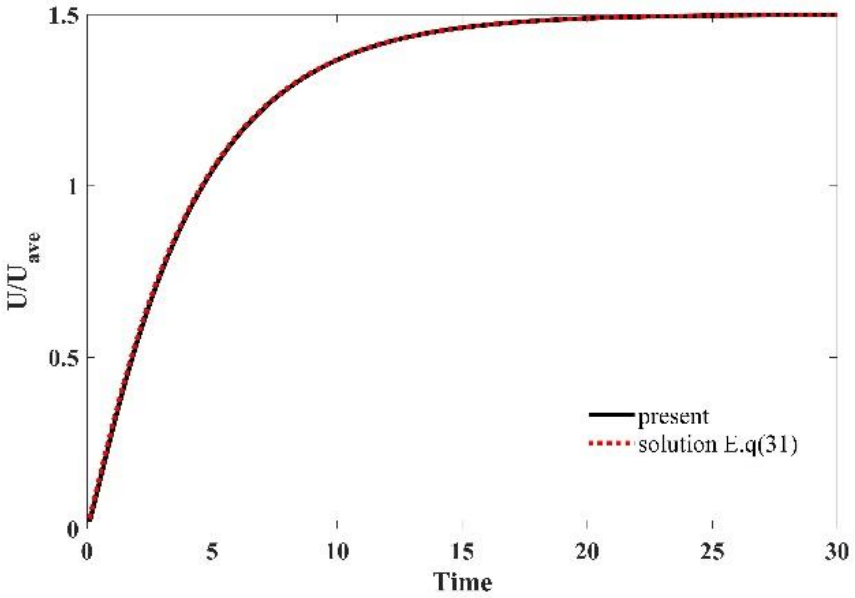
جهت ارزیابی نتایج از راه‌حل‌های تحلیلی برای جریان‌های ناپایای تراکم‌ناپذیر سیال ویسکوالاستیک و نیوتنی عبوری از بین دو صفحه‌موازی برای جریان کاملاً توسعه‌یافته در مراجع [۲۷, ۲۸] آمده است، نمی‌توان استفاده نمود، زیرا این دو مسئله یکسان نیستند. بنابراین نتایج عددی جریان کاملاً توسعه‌یافته برای حالت مقدار نسبت لزجت ۱ با حل تحلیل رابطه (۳۳) تا (۳۴) در شکل ۴ آمده است، دارای هم‌پوشانی و انطباق مناسبی است.

$$u_{ave.}^{*}=\int_0^1 u^{*}dy=\frac{2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{(-1)^{n-1}}{\lambda_n}\exp\left(\frac{-\lambda_n^{2}t^{*}}{\mathrm{Re}}\right) \qquad (۳۳)$$



شکل ۳. روندنمایی الگوریتم برنامه تهیه شده.

Fig. 3. The flowchart of prepared program algorithm.



شکل ۴. مقایسه سرعت u برحسب زمان در موقعیت $x=۹$ و $y=۱$ برای $\mathrm{Re}=۱۰$ و $\beta=۱$ در حالت کاملاً توسعه‌یافته.

Fig. 4. Comparison of time variation of the u-velocity at $x=9$ and $y=1$ for $\mathrm{Re}=10$ and $\beta=1$ in fully developed mode.

$$a_n = 4\times(-1)^n / \lambda_n^{\,3} \tag{۳۴}$$

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} \tag{۳۵}$$

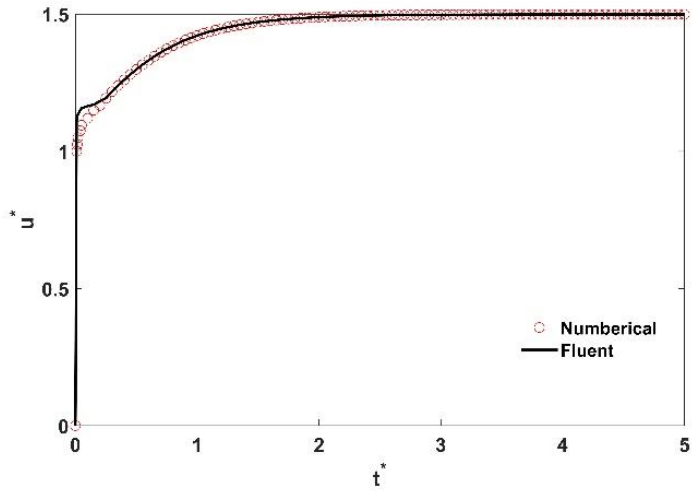
برای صحت نتایج حاصل از این مقاله از نرم‌افزار فلوئنت برای حالت مقدار نسبت لزجت ۱ (سیال نیوتنی) و مقدار عدد رینولدز ۱۰ مطابق شکل ۵ استفاده شده است. بنابراین از شکل ۵ می‌توان دریافت که نتایج دارای انطباق خوبی با حل عددی فلوئنت دارند. شکل ۶ ارزیابی نتایج با حل عددی روش پیش‌شرط سازی و روش پیش‌شرط توانی حسگر محلی سرعت برای مقادیر عدد رینولدز ۱۰، وایزنبرگ ۱ و نسبت لزجت ۱ نشان داده می‌شود. در شکل ۶، نتایج عددی دارای انطباق و هم‌پوشانی بسیار خوبی باهم دارند. از شکل ۴، ۵ و ۶، می‌توان صحت نتایج عددی به دست آمده در این مقاله را دریافت.

۴- ۲- استقلال حل از شبکه محاسباتی

جهت بررسی استقلال حل عددی از شبکه محاسباتی، از پنج شبکه با ابعاد مختلف ۱۵۰×۳۰، ۳۰۰×۳۰، ۲۰۰×۴۰، ۴۰۰×۴۰ و ۵۰۰×۵۰ موردمطالعه قرارگرفته است، نتایج عددی مربوط به تغییرات سرعت محوری u در موقعیت مکانی $x=۹$ و $y=۱$ برحسب زمان با مقادیر عدد رینولدز ۱۰ و عدد وایزنبرگ ۰/۲ برای شبکه‌های ذکر شده، در شکل ۷ نشان داده می‌شود. تعداد سلول‌های شبکه تأثیر زیادی روی دقت و زمان محاسبه حل دارد با افزایش تعداد سلول‌های شبکه محاسباتی زمان محاسبات افزایش خواهد یافت. بنابراین مطابق شکل ۷ از شبکه ۴۰×۲۰۰ برای کاهش هزینه محاسباتی و دقت مناسب در این مقاله استفاده می‌شود.

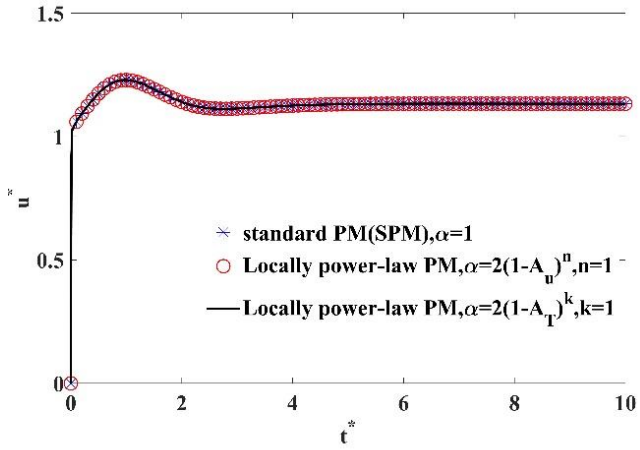
۴- ۳- استقلال حل از گام زمانی

جهت بررسی استقلال حل عددی از گام زمانی، سه‌گام زمان حقیقی ۰/۰۵، ۰/۰۲ و ۰/۰۱ مورد بررسی قرار می‌گیرد. شکل ۸ سرعت محوری برحسب زمان در موقعیت مکانی $x=۹$ و $y=۱$ ، شکل ۹ پروفیل سرعت محوری در مکان x=۵ و زمان ۱/۵ برای سه‌گام زمانی ذکر شده با مقادیر



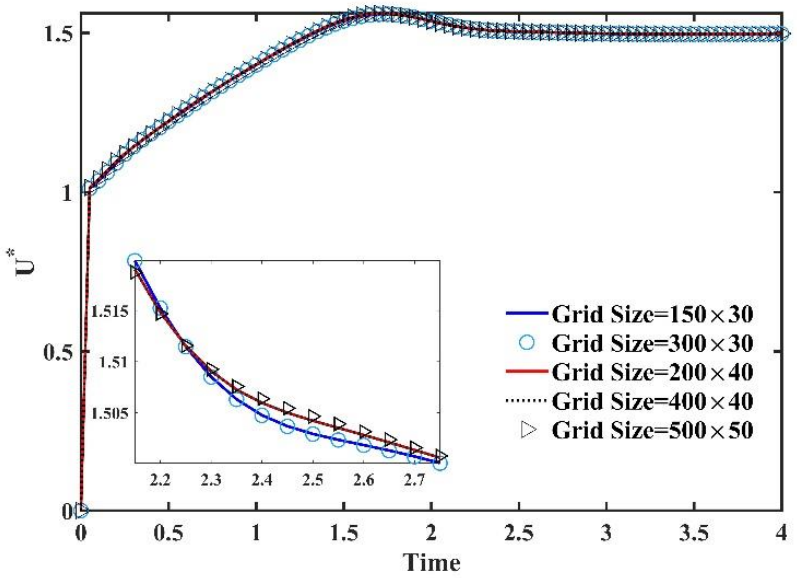
شکل ۵. مقایسه سرعت u برحسب زمان در موقعیت $x=۹$ و $y=۱$ برای $\mathrm{Re}=۱۰$ و $\beta=۱$ با حل فلوئنت.

Fig. 5. Comparison of time variation of the u-velocity at $x=9$ and $y=1$ for $\mathrm{Re}=10$ and $\beta=1$ by solving the fluent.



شکل ۶. مقایسه تغییرات سرعت محوری u برحسب زمان در موقعیت $x=۰/۵$ و $y=۰/۵$ برای جریان بین دو صفحه موازی ثابت با ، $\mathrm{Re}=۱۰$ و $\mathrm{Wi}=۱$ و $\beta=۰/۲۵$ برای روش‌های پیش‌شرط‌سازی، پیش‌شرط‌سازی توانی با حسگر سرعت و تنش.

Fig. 6. Comparison of time variation of the u-velocity at $x=0.5$, $y=0.5$ for flow between two parallel plates constant with $\mathrm{Re}=10$, $\mathrm{Wi}=1$ and $\beta=0.25$ for Standard Artificial Compressibility, Power-Law Preconditioning with Pressure and Stress Sensor Methods.



شکل ۷. استقلال حل از شبکه برای سرعت u برحسب زمان در موقعیت $x=۹$ و $y=۱$ برای $\mathrm{Re}=۱۰$ و $\mathrm{Wi}=۰/۲$.

Fig. 7. Grid study for time variation of the u-velocity at $x=9$, $y=1$ for $\mathrm{Re}=10$ and $\mathrm{Wi}=0.2$.

عدد رینولدز ۱۰، عدد وایزنبرگ ۱ و نسبت لزجت نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل ۸ و ۹ مشخص است انتخاب هر گام زمانی کوچک‌تر از ۰/۰۲ بر دقت جواب تأثیر ندارد و فقط در جواب خروجی مسئله در زمان موردنظر تأثیرگذار است. دلیل این اتفاق جمله زمان حقیقی است که به صورت ضمنی گسسته‌سازی می‌شود. به‌عنوان مثال با انتخاب گام زمانی ۰/۰۲ جواب‌های خروجی برنامه در زمان‌های ۰/۰۲، ۰/۰۴، ۰/۰۶، ...،۱/۰۲ و ... میسر می‌باشد و خروجی برنامه برای زمان ۱/۰۱ امکان‌پذیر نیست.

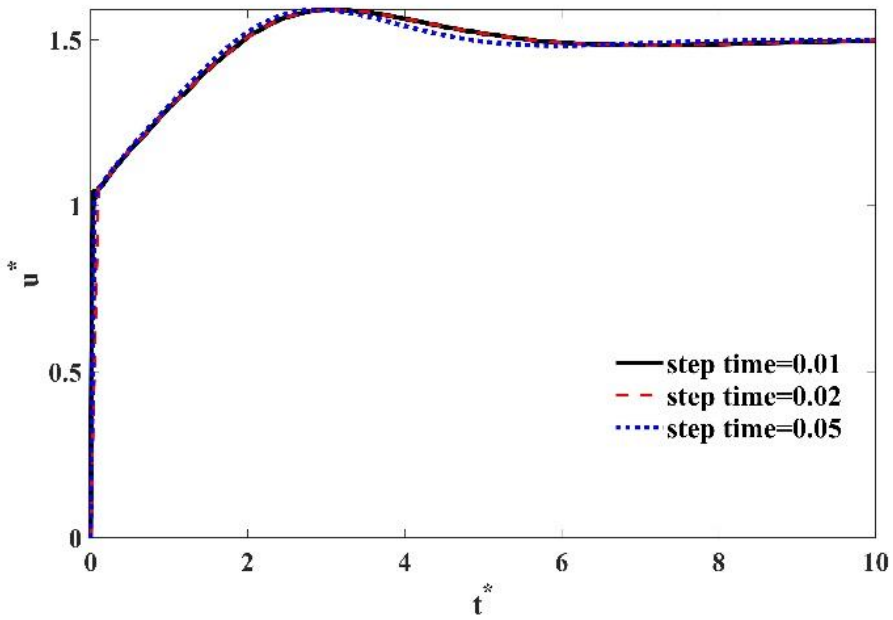
۴- ۴- نتایج میدان جریان

بررسی نتایج جریان در ناحیه توسعه‌یافته برای حالت‌های مختلف تغییرات عدد رینولدز، عدد وایزنبرگ و نسبت لزجت صورت می‌گیرد. معادلات جریان در ناحیه توسعه‌یافته طبق رابطه (۳۴) ازلحاظ ریاضی به شکل هذلولوی و ازنظر فیزیکی دارای ماهیت نفوذ است [۲۹]. طبق رابطه (۳۶) سرعت انتشار امواج برشی تقریباً برابر با $\frac{۱}{\sqrt{\mathrm{Re.Wi}}}$ است. شروع امواج برشی از مرز دیوار در لحظه صفر و به سمت خط مرکزی منتشر می‌شوند.

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t}+\mathrm{Wi}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial t^2}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} \qquad (۳۶)$$

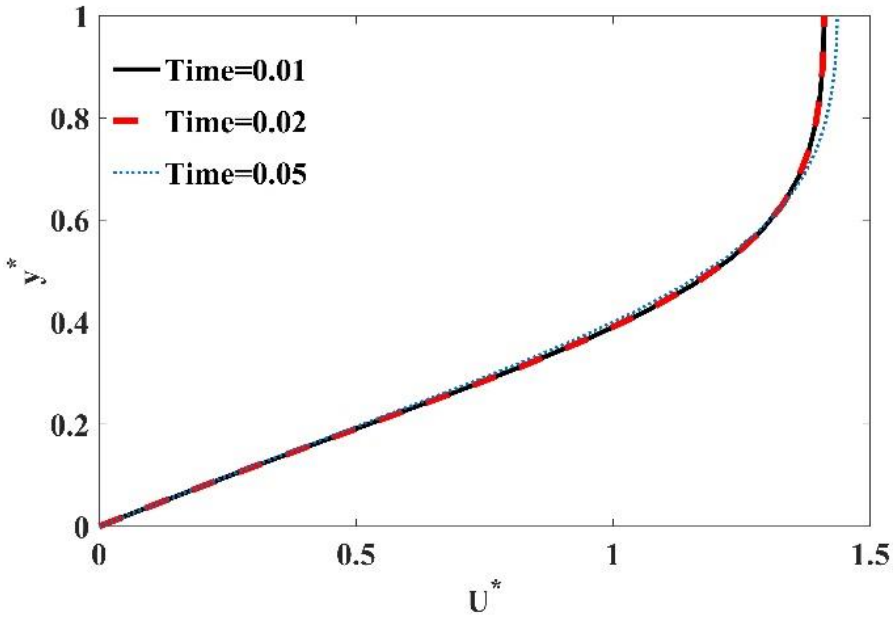
در شکل ۱۰ تغییرات سرعت محوری در خط مرکزی (محور تقارن) در ناحیه توسعه‌یافته نسبت به زمان، با تغییرات عدد رینولدز در دامنه ۲ تا ۲۰ با مقدار ثابت عدد وایزنبرگ و نسبت لزجت مقایسه می‌شود. در زمان بسیار کوتاهی (به اندازه گام اول) پس از راه‌اندازی طول اولین اوج به وجود می‌آید بعد از گذشت مدت زمانی جریان ثابت می‌شود. طول اولین اوج به مقدار عدد رینولدز بستگی دارد که با افزایش عدد رینولدز طول اولین اوج افزایش می‌یابد که برای عدد رینولدز ۱۰ در زمان ۲ تا ۶ رخ می‌دهد. امواج برشی باعث حرکت نوسانی میدان سرعت می‌شود. با افزایش سرعت انتشار موج برشی طول موج میدان سرعت کاهش می‌یابد. بنابراین با افزایش عدد رینولدز سبب کاهش سرعت انتشار امواج برشی، درنتیجه مطابق شکل ۱۰ طول‌موج میدان سرعت افزایش می‌یابد.

در شکل ۱۱ سرعت محوری در خط مرکزی نسبت به زمان در ناحیه توسعه‌یافته برای اعداد وایزنبرگ صفرتا ۵، مقدار ثابت عدد رینولدز ۱۰ و نسبت لزجت ۰/۲۵ در موقعیت مختصاتی $x=۹$ و $y=۱$ مقایسه می‌شود. در زمان بسیار کوتاهی (به‌اندازه گام اول) پس از راه اندازی طول اولین اوج به وجود می‌آید بعد از گذشت مدت زمانی جریان ثابت (حالت دائم) می‌شود. طول اولین اوج به مقدار عدد وایزنبرگ بستگی دارد که با افزایش عدد وایزنبرگ طول اولین اوج افزایش می‌یابد. برای عدد وایزنبرگ ۱ در زمان ۲ تا ۶ رخ می‌دهد. امواج برشی باعث حرکت نوسانی میدان سرعت



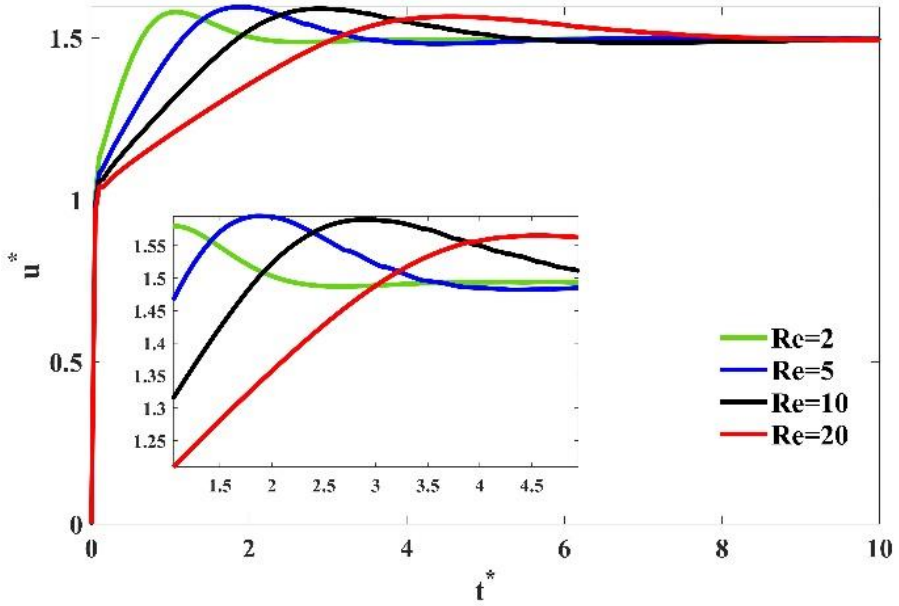
شکل ۸. سرعت محوری بی‌بعد در مکان $x=۹$ و $y=۱$ و $\mathrm{Wi}=۱$ ، $\mathrm{Re}=۱۰$ و $\beta=۰/۲۵$ در ناحیه کاملاً توسعه‌یافته برای گام‌های زمانی مختلف.

Fig. 8. Dimensional axial velocity at locations $x=9$, $y=1$ in $\mathrm{Re}=10$, $\mathrm{Wi}=1$ and $\beta=0.25$ in the fully developed area for different time steps.



شکل ۹. سرعت محوری بی‌بعد در مکان $x=۵$ و $\mathrm{Wi}=۱$ ، $\mathrm{Re}=۱۰$ و $\beta=۰/۲۵$ و در $t=۱/۵$ برای گام‌های زمانی مختلف.

Fig. 9. Dimensional axial velocity at locations $x=5$ and $\mathrm{Re}=10$, $\mathrm{Wi}=1$, $\beta=0.25$ in $t=1.5$ for different time steps.



شکل ۱۰. تأثیر عدد رینولدز مختلف با $\mathrm{Wi}=۱$ و $\beta=۰/۲۵$ بر میدان سرعت در ناحیه کاملاً توسعه‌یافته در موقعیت $x=۹$ و $y=۱$.

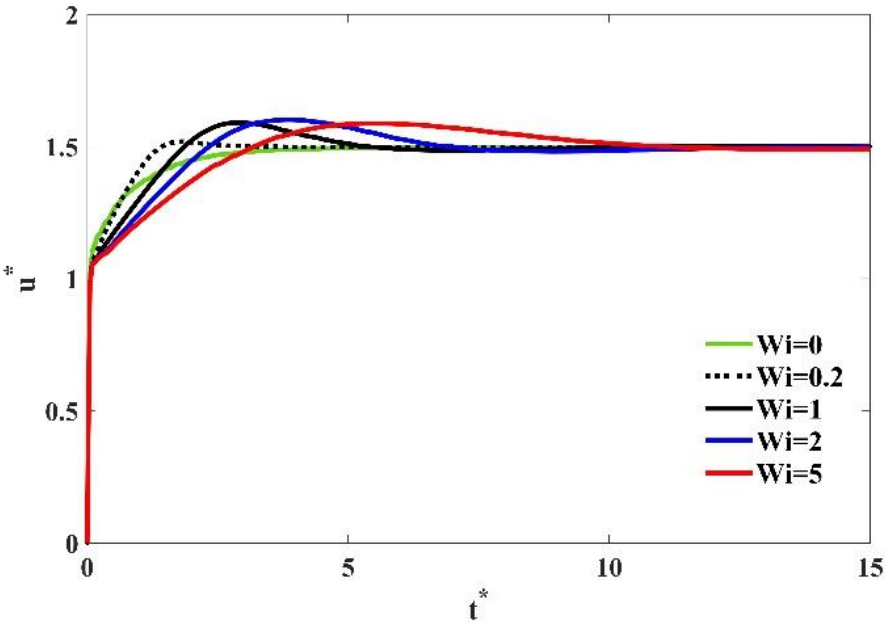
Fig. 10. Effect of different Reynolds number with $\mathrm{Wi}=1$ and $\beta=0.25$ on the velocity field in fully developed area in location $x=9$, $y=1$.

می‌شود. با افزایش سرعت انتشار موج برشی طول موج میدان سرعت کاهش می‌یابد. بنابراین با افزایش عدد وایزنبرگ سبب کاهش سرعت انتشار امواج برشی، درنتیجه مطابق شکل ۱۱ طول موج میدان سرعت افزایش می‌یابد. در عدد وایزنبرگ صفر (حالت نیوتنی) به دلیل عدم وجود نیروی الاستیک در میدان سرعت هیچ نوسانی ایجاد نمی‌شود.

تأثیر تغییرات نسبت لزجت بین صفرتا یک روی سرعت محوری در ناحیه توسعه‌یافته نسبت به زمان در موقعیت مختصاتی $x=۹$ و $y=۱$ برای مقدار ثابت عدد رینولدز ۱۰، عدد وایزنبرگ ۱ مقایسه می‌شود در شکل ۱۲ نشان داده شده است. این شکل نشان می‌دهد که با افزایش نسبت لزجت سبب تضعیف نقطه اوج و عاری از نوسانات می‌باشد. بنابراین با کاهش نسبت لزجت باعث زیاد شدن سرعت انتشار امواج برشی و کاهش انتشار امواج پخش می‌شود. درنتیجه با کاهش نسبت لزجت اوج موج و تعداد نوسانات میدان سرعت افزایش می‌یابد. مطابق شکل ۱۲ در نسبت لزجت صفر عاری از امواج پخش و دارای سرعت انتشار موج برشی زیادی است بنابراین دارای نوسانات زیاد و اوج موج بلندتر است. در نسبت لزجت یک (سیال نیوتنی) فاقد امواج برشی در جریان است، به همین دلیل هیچ نوسانی در میدان سرعت دیده نمی‌شود. با افزایش سرعت انتشار امواج پخش زمان رسیدن جریان به حالت ثابت (حالت دائم) طولانی‌تر می‌شود. عامل افزایش سرعت انتشار امواج پخش عدد رینولدز است که با کاهش این عدد سرعت انتشار امواج افزایش می‌یابد.

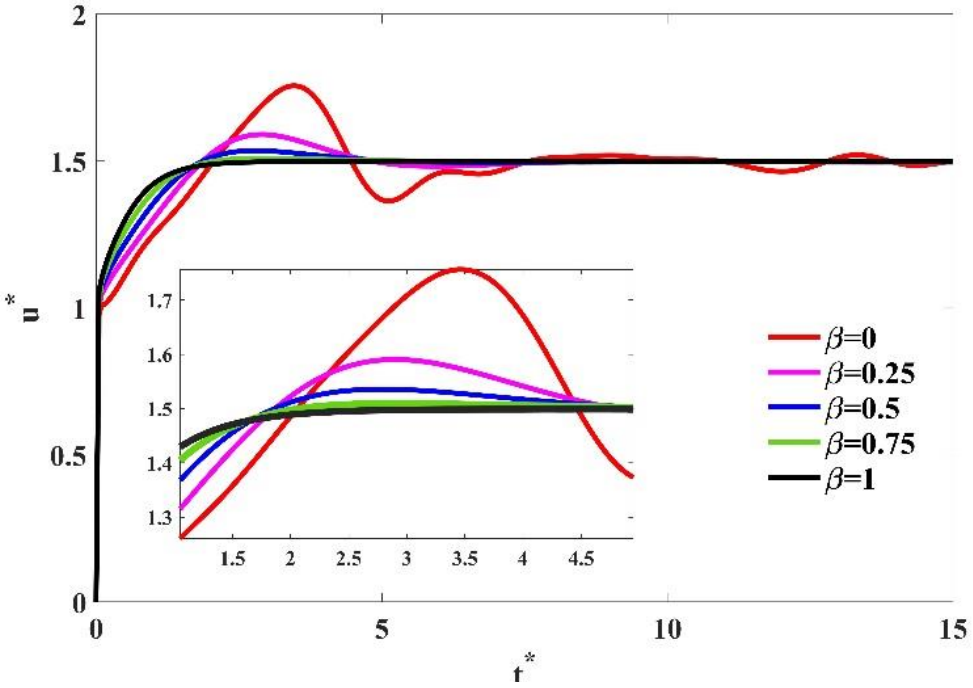
۴- ۵- بررسی نرخ‌همگرایی روش محلی پیش‌شرط توانی حسگر تنش

در مقاله حاضر به بررسی تأثیر روش محلی پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی برای عدد رینولدز، عدد وایزنبرگ و نسبت لزجت متفاوت پرداخته می‌شود که در این مقاله ۱۳ حالت مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین در محاسبات عددی برای روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش، سرعت و فشار از توان ۱ تا ۵ استفاده شده است و به دلیل شلوغی شکل، بهینه‌ترین توان در شکل‌ها نشان داده‌شده است.



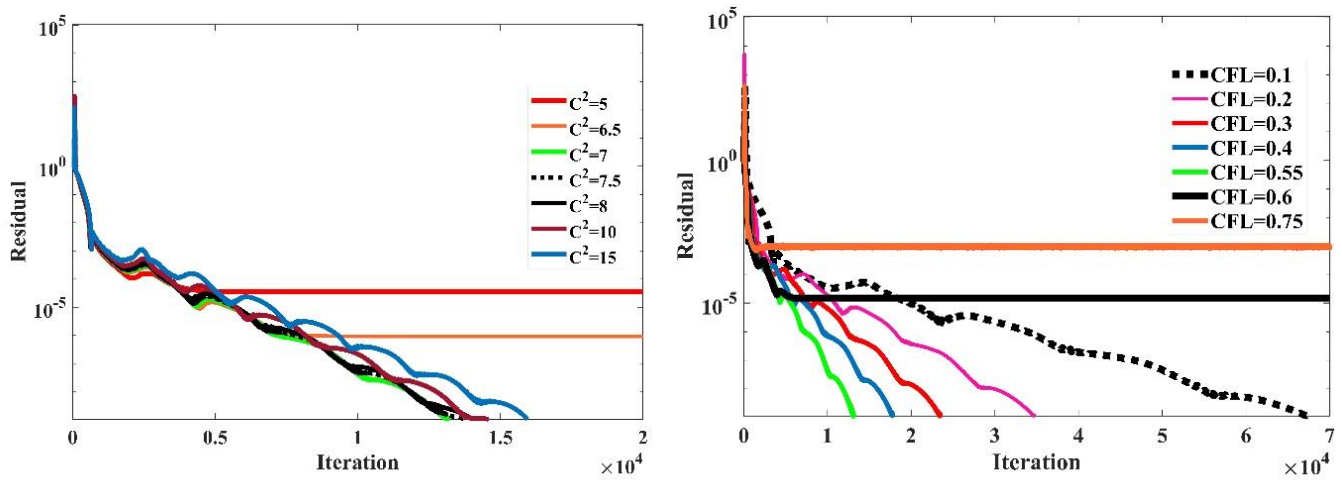
شکل ۱۱. تأثیر عدد وایزنبرگ مختلف با $\mathrm{Re}=۱۰$ و $\beta=۰/۲۵$ بر میدان سرعت در ناحیه کاملاً توسعه در موقعیت $x=۹$ و $y=۱$.

Fig. 11. Effect of different Weisenberg number with $\mathrm{Re}=10$ and $\beta=0.25$ on the velocity field in fully developed domain in location $x=9$, $y=1$.



شکل ۱۲. تتأثیر نسبت لزجت مختلف با $\mathrm{Re}=۱۰$ ، $\mathrm{Wi}=۱$ بر میدان سرعت در ناحیه کاملاً توسعه‌یافته و موقعیت $x=۹$ و $y=۱$.

Fig. 12. Effect of different viscosity ratios with $\mathrm{Re}=10$ and $\mathrm{Wi}=1$ on the velocity field in fully developed domain in location $x=9$ and $y=1$.



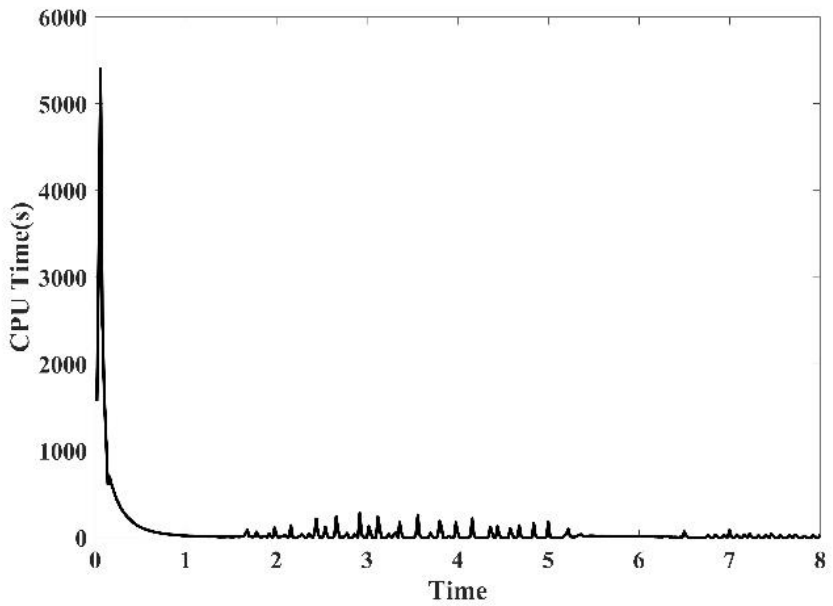
(a) (b)

شکل ۱۳. نتایج جریان دائم سیال ویسکوالاستیک در $\mathrm{Re}=۱۰$ و $\beta=۰/۲۵$ عبوری از بین دو صفحه موازی ثابت؛ الف) تأثیر تغییرات عدد کورانت فردیچ لوی بر نرخ همگرایی روش عددی، ب) تأثیر تغییرات مقدار سرعت صوت کاذب بر نرخ همگرایی روش عددی.

Fig. 13. The results of steady flow of viscoelastic fluid in $\mathrm{Re}=10$ and $\beta=0.25$ passing between tow fixed parallel plates; a) The effect of variation of CFL number on convergence rate of the numerical method, b) The effect of variation of Pseudo Acoustic Velocity on convergence rate of the numerical method.

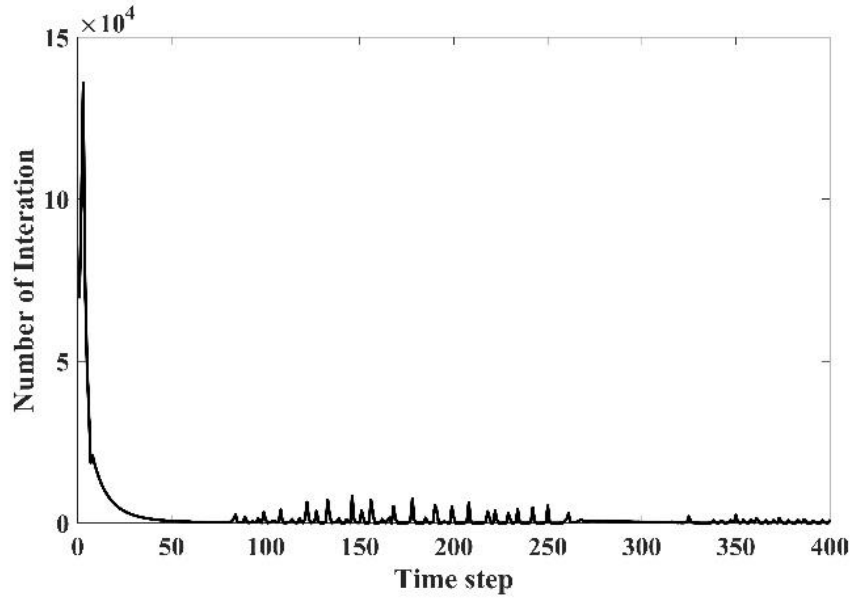
بدین منظور تأثیر تغییرات عدد کورانت فردیچ لوی برای مقدار ثابت سرعت صوت کاذب برابر با ۷ بر روی نرخ همگرایی جریان دائم سیال ویسکوالاستیک در مقادیر عدد رینولدز ۱۰ و نسبت لزجت ۰/۲۵ عبوری از بین دو صفحه موازی ثابت مورد مطالعه قرار گرفته است که نتایج آن در شکل ۱۳(الف) نشان داده شده است. با توجه به شکل ۱۳(الف) با افزایش مقدار عدد کورانت فردیچ لوی تا یک مقدار معین باعث افزایش نرخ همگرایی می‌شود ولی با افزایش بیشتر این عدد از مقدار معین باعث کاهش دقت جواب مسئله می‌شود. تأثیر سرعت صوت کاذب با مقدار ثابت عدد کورانت فردیچ لوی ۰/۵ بر روی نرخ همگرایی جریان دائم بیان شده، مورد مطالعه قرار می‌گیرد که نتایج آن در شکل ۱۳(ب) بیانگر این مطلب می‌باشد که با افزایش مقدار سرعت صوت کاذب از یک مقدار معین (برابر با ۷) سبب کاهش نرخ همگرایی و با انتخاب مقادیر کمتر از مقدار معین منجربه کاهش دقت جواب مسئله می‌شود. در ادامه از مقادیر سرعت صوت کاذب ۷ و عدد کورانت فردیچ لوی ۰/۵۵ برای جریان ناپایای سیال ویسکوالاستیک در مقادیر رینولدز ۱۰ و نسبت لزجت ۰/۲۵ عبوری از بین دو صفحه موازی ثابت استفاده می‌شود. برای دیگر مقادیر رینولدز و نسبت لزجت جریان دائم در این مقاله نیز از همین روند استفاده شده است. در این مقاله از مقادیر سرعت صوت کاذب و عدد کورانت فردریچ لوی جریان دائم برای مقادیر جریان ناپایای استفاده می‌شود؛ در جریان‌های ناپایا برای افزایش نرخ همگرایی می‌توان عدد کورانت فردیچ لوی به دست آمده از جریان‌های دائم را ۰/۲۵ تا ۳ برابر استفاده نمود.

در این مدل‌سازی برای برنامه‌نویسی، برنامه موردنظر از نرم‌افزار متلب و کامپیوتر با مشخصات ۶۴ گیگابایت رم و پردازنده مرکزی باقدرت ۳/۵ گیگاهرتز استفاده شده است. شکل ۱۴ محور عمودی زمان محاسباتی پردازنده مرکزی برای اجرای یک گام زمان حقیقی یا اجرای یک‌بار حلقه داخلی تا برقراری شرط همگرایی و محور افقی زمان حقیقی مسئله را نشان می‌دهد از شکل ۱۴ می‌توان دریافت که برای حل کامل این جریان ۸ ساعت ۴۱ دقیقه ۲۷ ثانیه زمان لازم است. در شکل ۱۵ محور عمودی تعداد تکرارهای هر گام حلقه داخلی تا رسیدن به همگرایی و محور افقی شماره گام حلقه خارجی را نشان می‌دهد که در این حالت زمان موردنیاز مسئله ۸ و با گام زمانی ۰/۰۲ برابر با ۴۰۰ گام تکرار حلقه خارجی نیاز است و تعداد کل تکرار حلقه خارجی برای ۴۰۰ گام برابر با ۹۳۰۳۹۲ است. با توجه به شکل ۱۵ در ۱۰ گام اول بیشترین تعداد تکرار را نسبت به گام‌های دیگر دارد و بیشترین تعداد تکرار مربوط به گام سوم است. تمام نتایج به‌دست آماده در این مقاله با دقت $۱۰^{-۶}$ است.



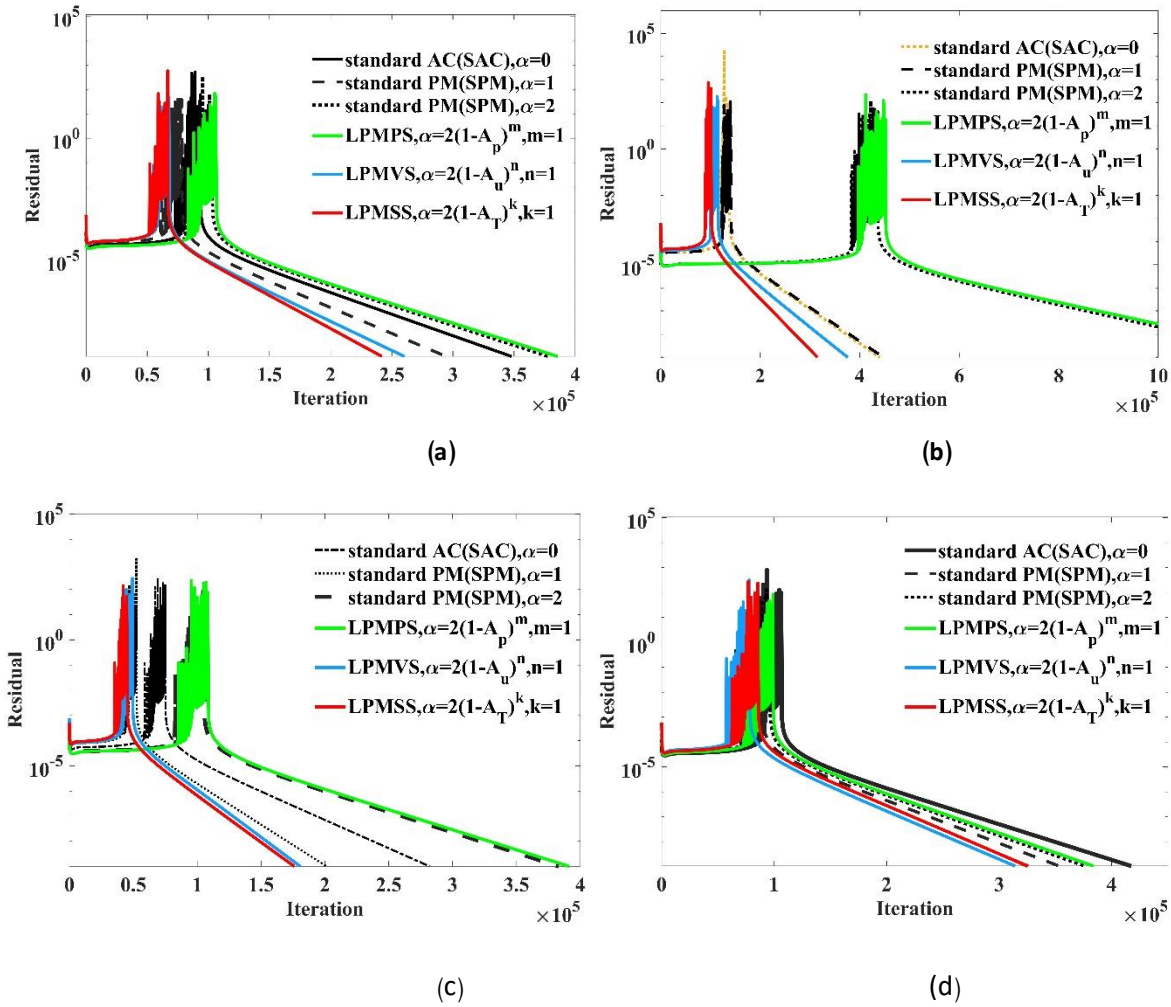
شکل ۱۴. زمان واحد پردازش مرکزی در هرلحظه از زمان برای $\mathrm{Re}=۱۰$ ، $\mathrm{Wi}=۱$ **و** $\beta=۰/۲۵$.

Fig. 1. CPU time per time step for $\mathrm{Re}=10$, $\mathrm{Wi}=1$ **and** $\beta=0.25$.



شکل ۱۵. تعداد تکرارها در هر گام زمانی برای $\mathrm{Re}=۱۰$ ، $\mathrm{Wi}=۱$ **و** $\beta=۰/۲۵$.

Fig. 15. Number of iteration per time step for $\mathrm{Re}=10$, $\mathrm{Wi}=1$ **and** $\beta=0.25$.



شکل ۱۶. تأثیر روش محلی پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی برای جریان ناپایای سیال ویسکوالاستیک عبوری از بین دو صفحه موازی ثابت با Re = ۵ ؛ a) Wi = ۱ و β = ۰ ، b) Wi = ۱ و β = ۰/۲۵ ، c) Wi = ۵ و β = ۰/۲۵ ، d) Wi = ۱ و β = ۰/۵ .

Fig. 16. Effect of the locally power-law PM on convergence rate for unsteady flow of viscoelastic fluid passing between tow fixed parallel plates with Re=5 : a) Wi = 1 , β = 0 , b) Wi = 1 , β = 0.25 , c) Wi = 5 , β = 0.25 , d) Wi = 1 , β = 0.5 .

شکل ۱۶، نتایج تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط بر نرخ همگرایی به صورت تاریخچه باقی‌مانده برحسب تعداد گام تکرار برای جریان‌های ناپایای سیال ویسکوالاستیک در عدد رینولدز ۵، عدد وایزنبرگ ۱ و ۵ و نسبت لزجت صفرتا ۰/۵ عبوری از بین دو صفحه موازی ثابت در سه‌گام زمان واقعی (حلقه خارجی) را نشان می‌دهد. در شکل ۱۵ روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش[1] از روش‌های پیش‌شرط توانی حسگر سرعت[2]، پیش‌شرط توانی حسگر فشار[3]، پیش‌شرط استاندارد[4] و تراکم‌پذیر استاندارد[5] در عدد رینولدز ۵ و نسبت لزجت کمتر از ۰/۵ دارای تسریع نرخ همگرایی و کاهش تعداد تکرار که منجربه کاهش زمان محاسباتی می‌شود؛ همچنین روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش باعث افزایش پایداری حل عددی می‌گردد.

شکل ۱۷، تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط بر نرخ همگرایی برای جریان‌های ناپایای سیال ویسکوالاستیک در عدد رینولدز ۱۰، عدد وایزنبرگ ۱ و ۵ و نسبت لزجت صفرتا ۰/۷۵ عبوری از بین دو صفحه موازی ثابت را نمایش می‌دهد؛ در این شکل روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش از روش‌های دیگر ذکر شده در نسبت لزجت کمتر از ۰/۵ دارای پایداری حل

1 . Power-law Preconditioning of The Stress Sensor Method
2 . Power-law Preconditioning of The Velocity Sensor Method
3 . Power-law Preconditioning of The Pressure Sensor Method
4 . Standard Preconditioning Method
5 . Standard Artificial Compressibility

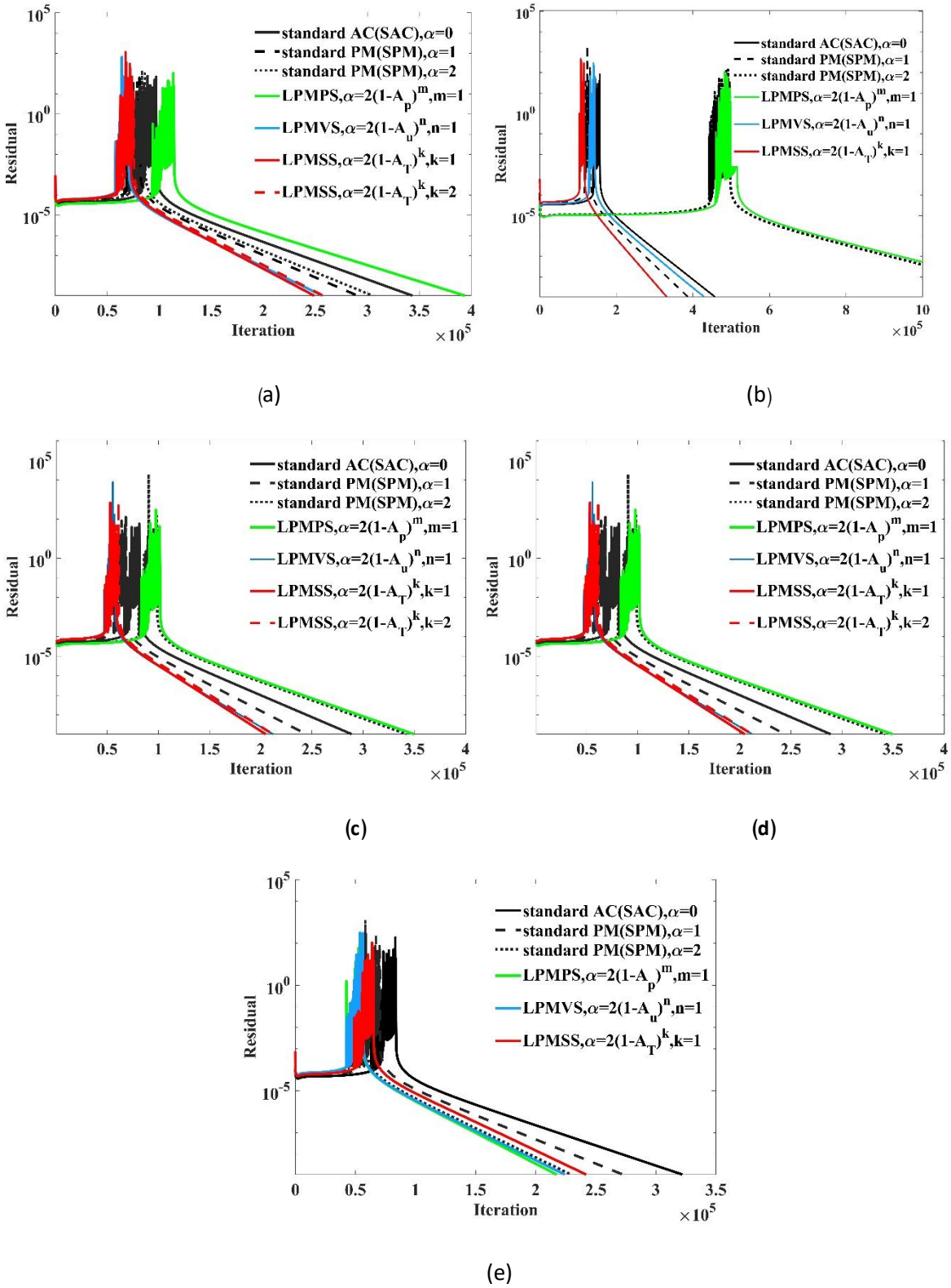
عددی و افزایش نرخ همگرایی است اما در نسبت لزجت ۰/۵ و بیشتر روش پیش‌شرط توانی حسگر محلی سرعت یا فشار نسبت به روش پیش‌شرط توانی حسگر محلی تنش دارای نرخ همگرایی بیشتر است. در شکل ۱۸، تأثیر نرخ همگرایی برای عدد رینولدز ۲۰، عدد وایزنبرگ ۱ و ۵ و نسبت لزجت صفر تا ۰/۵ مورد بررسی قرار گرفته است که روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش نسبت به دیگر روش‌های پیش‌شرط در نسبت لزجت کمتر از ۰/۵ دارای افزایش نرخ همگرایی و افزایش پایداری در حل عددی است.

در ادامه خطوط همتراز میدان سرعت محوری برای زمان‌های مختلف جریان ناپایای سیال ویسکوالاستیک برای عدد رینولدز ۱۰، عدد وایزنبرگ ۱ و مقدار نسبت لزجت ۰/۲۵ عبوری از بین دو صفحه موازی ثابت در شکل‌های ۱۹ تا ۲۱ نشان داده شده است.

جدول ۱ تأثیر روش محلی پیش‌شرط توانی حسگر تنش بر نرخ همگرایی نسبت به روش‌های دیگر پیش‌شرط برای جریان ناپایای سیال ویسکوالاستیک برای عدد رینولدز ۲۰، ۱۰ و ۵، عدد وایزنبرگ ۱ و ۵ و نسبت لزجت صفر، ۰/۲۵، ۰/۵ و ۰/۷۵ عبوری از بین دو صفحه موازی ثابت مورد بررسی قرارگرفته است. به‌منظور محاسبه نرخ همگرایی از مقدار درصد کاهش تعداد تکرارها به صورت تقریبی استفاده شده است. در جدول ۱ علامت منفی در مقدار درصد کاهش تعداد تکرارها نشان دهنده آن است که نرخ همگرایی آن روش چند درصد نسبت به روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش بیشتر است. با افزایش عدد رینولدز یا عدد وایزنبرگ نرخ همگرایی زیادتر و با کاهش نسبت لزجت نرخ همگرایی تسریع می‌شود. با مقایسه روش محلی پیش‌شرط توانی حسگر تنش با سایر روش‌های پیش‌شرط در جدول ۱ می‌توان دریافت که در نسبت لزجت کمتر از ۵۰ درصد، نرخ همگرایی ۳ تا ۷۶ درصد افزایش و تعداد تکرارها کاهش و به منجربه آن زمان محاسباتی کمتر می‌شود ولی در نسبت لزجت ۵۰ درصد و بیشتر، نرخ همگرایی ۸ تا ۳۶ درصد نسبت به دو روش پیش‌شرط و تراکم‌پذیر استاندارد افزایش می‌یابد.

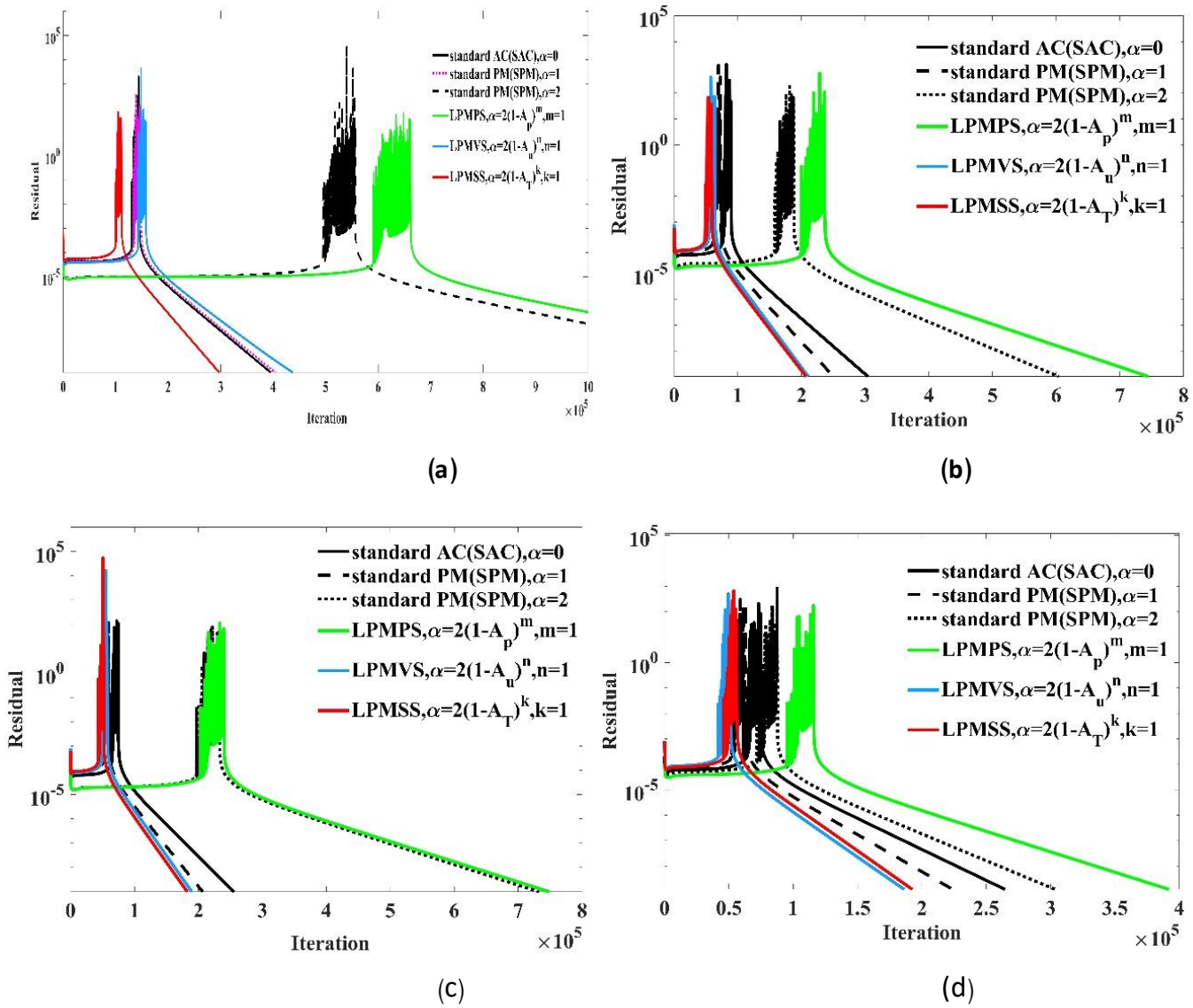
جدول ۱. تأثیر روش محلی پیش‌شرط توانی حسگر تنش بر سرعت همگرایی جریان ناپایای سیال ویسکوالاستیک عبوری از بین دو صفحه موازی ثابت.
Table 1. Effect of the locally power-law PM of stress sensor on convergence rate unsteady flow of viscoelastic fluid passing between tow fixed parallel plates.

شماره حالت	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
عدد رینولدز	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۵	۵	۵	۵	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰
عدد وایزنبرگ	۱	۱	۵	۱	۱	۱	۱	۵	۱	۱	۱	۵	۱
نسبت لزجت (٪)	۰	۲۵	۲۵	۵۰	۷۵	۰	۲۵	۲۵	۵۰	۰	۲۵	۲۵	۵۰
کاهش تعداد تکرار نسبت به روش تراکم‌پذیری استاندارد (٪~)	۲۷	۲۷	۲۹	۲۷	۲۵	۲۸	۳۰	۳۶	۲۲	۳۲	۳۱	۲۸	۲۷
کاهش تعداد تکرار نسبت به روش پیش‌شرط استاندارد در ضریب (٪~)۱	۱۴	۱۴	۱۶	۱۴	۱۱	۲۹	۵	۱۰	۸	۲۶	۱۷	۱۱	۱۳
کاهش تعداد تکرار نسبت به روش پیش‌شرط استاندارد در ضریب (٪~)۲	۶۶	۱۸	۴۰	۴	-۵	۶۷	۳۶	۵۳	۱۴	۶۹	۶۶	۷۵	۳۶
کاهش تعداد تکرار نسبت به روش پیش‌شرط توانی حسگر فشار (٪~)	۶۷	۲۱	۴۱	-۴	-۱۱	۶۷	۳۷	۵۴	۱۵	۷۰	۷۲	۷۶	۵۰
کاهش تعداد تکرار نسبت به روش پیش‌شرط توانی حسگر سرعت (٪~)	۲۳	۳	۳	۰.۸	-۸	۱۶	۷	۱	-۳	۲۳	۲	۴	-۳
توان بهینه	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱



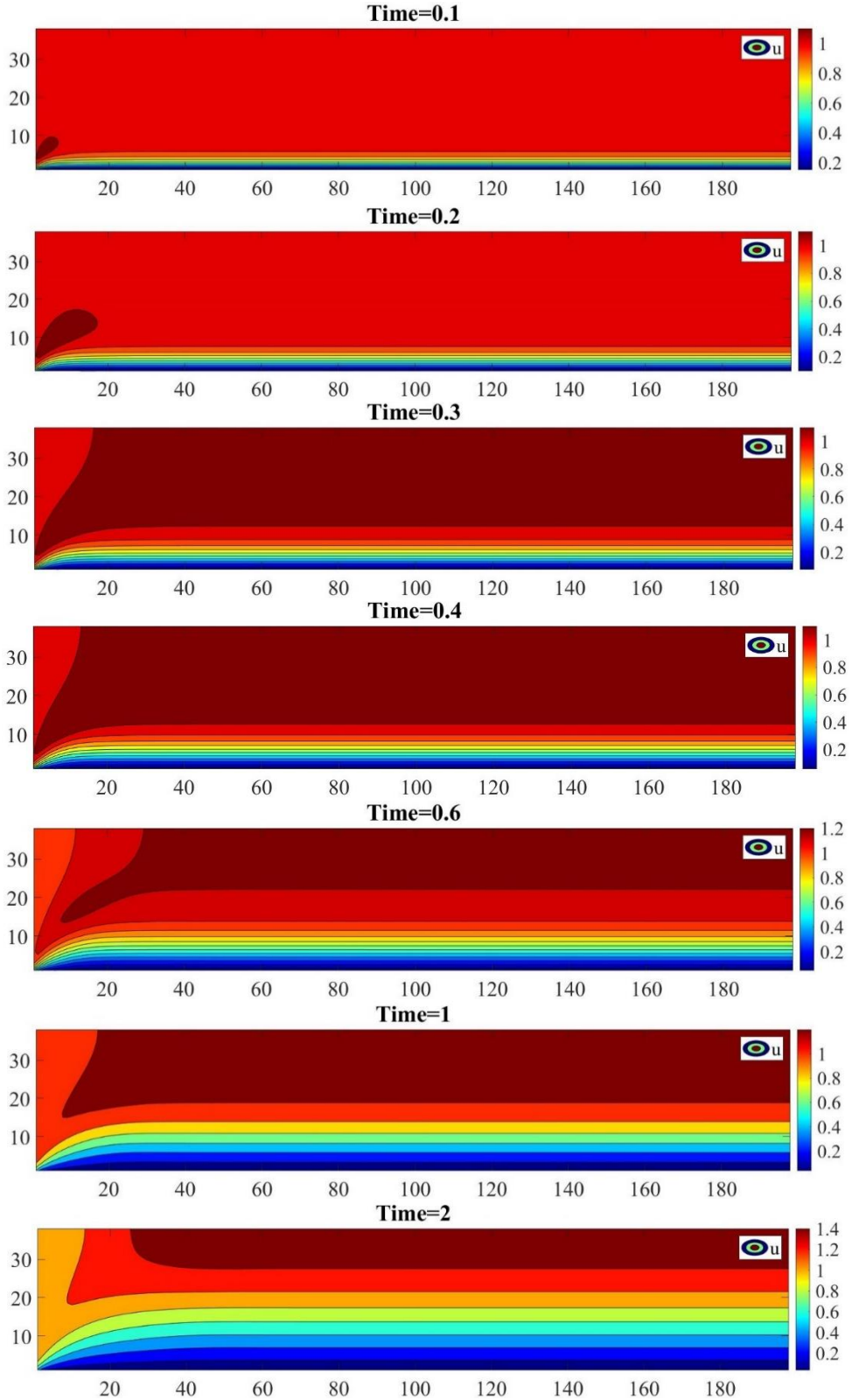
شکل ۱۷. تأثیر روش محلی پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی برای جریان ناپایای سیال ویسکوالاستیک بین دو صفحه موازی ثابت با $Re=۱۰$ **؛ a)** $Wi=۱$ و $\beta=۰$ ، **b)** $Wi=۱$ و $\beta=۰/۲۵$ ، **c)** $Wi=۵$ و $\beta=۰/۲۵$ ، **d)** $Wi=۱$ و $\beta=۰/۵$ ، **e)** $Wi=۱$ و $\beta=۰/۷۵$.

Fig. 17. Effect of the locally power-law PM on convergence rate for unsteady flow of viscoelastic fluid passing between tow fixed parallel plates with $Re=10$ **: a)** $Wi=1$, $\beta=0$, **b)** $Wi=1$, $\beta=0.25$, **c)** $Wi=5$, $\beta=0.25$, **d)** $Wi=1$, $\beta=0.5$ **e)** $Wi=1$, $\beta=0.75$.



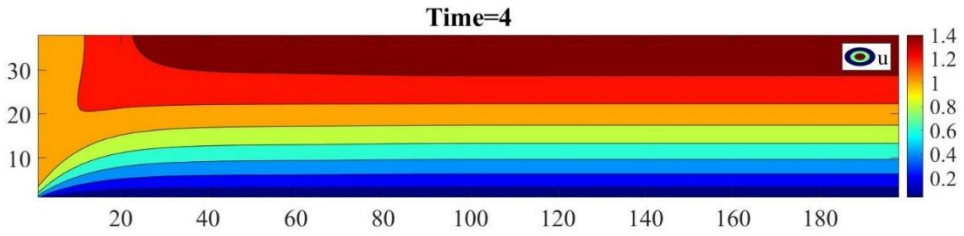
شکل ۱۸. تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط بر نرخ همگرایی برای جریان بین دو صفحه موازی با Re = ۲۰ ؛ a) Wi = ۱ و β = ۰ ، b) Wi = ۱ و β = ۰/۲۵ ، c) Wi = ۵ و β = ۰/۲۵ ، d) Wi = ۱ و β = ۰/۵ .

Fig. 18. Effect of the locally power-law PM on convergence rate for unsteady flow of viscoelastic fluid passing between tow fixed parallel plates with Re=20 **: a)** $\mathrm{Wi}=1$, $\beta=0$ **, b)** $\mathrm{Wi}=1$, $\beta=0.25$ **, c)** $\mathrm{Wi}=5$, $\beta=0.25$ **, d)** $\mathrm{Wi}=1$, $\beta=0.5$



شکل ۱۹. خطوط همتراز سرعت u در گام زمانی ۰/۱، ۰/۲، ۰/۳، ۰/۴، ۰/۶، ۱، ۲ .

Fig. 19. u-velocity contour in time step 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.6, 1and 2.



شکل ۲۰. خطوط همتراز سرعت u در گام زمانی ۴ .

Fig. 20. u-velocity contour in time step 4.

۵- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر، برای اولین بار از روش پیش‌شرط توانی برای شبیه‌سازی عددی جریان‌های ناپایای سیال ویسکوالاستیک در اعداد رینولدز، اعداد وایزنبرگ و نسبت لزجت متفاوت، عبوری از بین دو صفحه موازی ثابت مورد بررسی قرار گرفته است. برای نخستین بار از حسگر محلی تنش در روش پیش‌شرط توانی جهت افزایش پایداری، سرعت همگرایی و دقت حل عددی استفاده شده است. در این مقاله برای حل عددی معادلات حاکم با روش پیش‌شرط توانی از الگوریتم دو زمانه و جهت گسسته‌سازی از روش تفاضل محدود استفاده شده است؛ الگوریتم دو زمانه به صورت حلقه داخلی (زمان کاذب) و حلقه خارجی (زمان حقیقی) است که برای همگرایی حلقه داخلی (رسیدن به حالت دائم) از روش وثوقی‌فر چهار مرحله‌ای استفاده می‌شود. گام زمان کاذب به صورت محلی از مقادیر ویژه ماتریس پیش‌شرط توانی به دست می‌آید که در نرخ همگرایی و پایداری حل عدد تأثیرگذار است. نتایج عددی حاصل شده حاکی از آن است که استفاده از الگوریتم دو زمانه در روش پیش‌شرط توانی حسگر محلی تنش برای حل جریان ناپایای سیال ویسکوالاستیک با وجود خاصیت نوسانی میدان سرعت علاوه بر افزایش نرخ همگرایی و کاهش هزینه زمان محاسباتی، سبب افزایش پایداری حل عددی می‌شود. از مقایسه نرخ همگرایی روش پیش‌شرط توانی حسگر محلی تنش با دیگر روش‌های پیش‌شرط می‌توان دریافت که در مقادیر نسبت لزجت کمتر از ۰/۵ سرعت همگرایی این روش از دیگر روش‌های پیش‌شرط حدود ۳ تا ۷۶ درصد بیشتر است ولی در مقادیر نسبت لزجت ۰/۵ و بیشتر، روش محلی پیش‌شرط توانی حسگر سرعت یا فشار نرخ همگرایی بهتری دارد. با افزایش عدد رینولدز و عدد وایزنبرگ در نسبت لزجت کمتر از ۰/۵ منجربه افزایش نرخ همگرایی روش پیش‌شرط توانی حسگر محلی تنش می‌شود.

پیشنهادات

- بررسی روش پیش‌شرط توانی برای هندسه دیگر مانند جریان دائم و ناپایای سیال ویسکوالاستیک داخل لوله، کوئت و ... .
- استفاده از حسگر تنش به صورت نمایی یا لگاریتمی جهت افزایش نرخ همگرایی در روش پیش‌شرط توانی.
- توسعه روش پیش‌شرط توانی با استفاده از حسگر تنش برای تحلیل عددی جریان‌های دائم و غیردائم سیال ویسکوالاستیک با استفاده از معادله متشکله مدل فن تین تنر برای کانال مستطیلی در ناحیه درحال‌توسعه.
- توسعه روش پیش‌شرط توانی برای بررسی عددی انتقال حرارت دائم و غیردائم در کانال دوبعدی با استفاده از حسگر تنش.
- استفاده از روش پیش‌شرط توانی برای بررسی عددی جریان و انتقال حرارت دائم و غیردائم سیال ویسکوالاستیک داخل حفره با استفاده از حسگر تنش.
- بررسی عددی جریان‌های ناپایدار دائم و غیردائم سیال ویسکوالاستیک با استفاده از روش پیش‌شرط توانی و حسگر تنش برای کانال با مقطع مستطیلی مستقیم یا خمیده و مدور.

۶- فهرست علائم

A_τ	حسگر تنش محلی
c	سرعت صوت کاذب بی‌بعد
CFL	عدد کورانت-فردیچ-لوی
Wi	عدد وایزنبرگ
Re	عدد رینولدز
$\Delta L_{\min}$	کوچک‌ترین طول بی‌بعد وجه سلول
p	میدان فشار سیال، Pa
p^*	میدان فشار بی‌بعد
t	زمان حقیقی، s
t^*	زمان حقیقی بی‌بعد
Δt	گام زمان حقیقی بی‌بعد
t_a	زمان کاذب بی‌بعد
Δt_a	گام زمان کاذب بی‌بعد
U	سرعت مشخصه بی‌بعد
$\vec{V}$	بردار بی‌بعد سرعت سیال
v, u	سرعت سیال در راستای x و y، m/s
v^*, u^*	سرعت بی‌بعد سیال در راستای x و y
Δx	فاصله بی‌بعد بین دو گره شبکه اولیه یا ثانویه در راستای x
Δy	فاصله بی‌بعد بین دو گره شبکه اولیه یا ثانویه در راستای y

علائم یونانی

α	ضریب پیش‌شرط
β	نسبت لزجت نیوتنی بی‌بعد به‌کل
$\beta_{conv.}$	ضریب تراکم‌پذیری جابجایی
$\dot{\gamma}$	نرخ برش بی‌بعد
δ	کمیت تراکم‌پذیری کاذب بی‌بعد
δ_K	ضریب گام زمانی وثوقی‌فر
η_p	لزجت پلیمر، Pa.s
η_N	لزجت نیوتنی، Pa.s
η_0	لزجت بی‌بعد کل
λ_1	زمان رهایی از تنش، s
$\lambda_{\max}$	مقدار ویژه بیشینه
ρ	چگالی، kg/m³
ρ_a	چگالی کاذب، kg/m³
τ	تانسور تنش، Pa
τ^*	تانسور تنش بی‌بعد
τ_P	تانسور تنش پلیمر بی‌بعد
τ_N	تانسور تنش نیوتنی بی‌بعد
τ_{xx}	مؤلفه بی‌بعد تنش در جهت محورx
τ_{xy}	مؤلفه بی‌بعد تنش برشی در صفحه xy
τ_{yy}	مؤلفه بی‌بعد تنش در جهت محور y

زیرنویس

a	کاذب
$conv.$	جابجایی
max	بیشینه
min	کمینه
N	نیوتنی
P	پلیمری
0	کل
i	شمارنده گره در جهت محور x
j	شمارنده گره در جهت محور y

بالانویس

N	شمارنده گام زمان حقیقی
n	شمارنده گام زمان کاذب
h	نصف فاصله بین دو صفحه، m
K	شمارنده گام زمانی وثوقی‌فر
*	علامت بی‌بعد

منابع

[1] A. Jameson, Time dependent calculations using multigrid, with applications to unsteady flows past airfoils and wings, in: 10th Computational fluid dynamics conference, 1991, pp. 1596.

[2] A. Arnone, M.-S. Liou, L. POVINELLI, Multigrid time-accurate integration of Navier-Stokes equations, in: 11th Computational Fluid Dynamics Conference, 1993, pp. 3361.

[3] A.J. Chorin, A numerical method for solving incompressible viscous flow problems, Journal of computational physics, 135(2) (1997) 118-125.

[4] E. Turkel, Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations, Journal of computational physics, 72(2) (1987) 277-298.

[5] A. Malan, R. Lewis, P. Nithiarasu, An improved unsteady, unstructured, artificial compressibility, finite volume scheme for viscous incompressible flows: Part I. Theory and implementation, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 54(5) (2002) 695-714.

[6] A. Malan, R. Lewis, P. Nithiarasu, An improved unsteady, unstructured, artificial compressibility, finite volume scheme for viscous incompressible flows: part II.

application, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 54(5) (2002) 715-729.

[7] V. Esfahanian, P. Akbarzadeh, The Jameson's numerical method for solving the incompressible viscous and inviscid flows by means of artificial compressibility and preconditioning method, Applied Mathematics and Computation, 206(2) (2008) 651-661.

[8] V. Esfahanian, P. Akbarzadeh, K. Hejranfar, An improved progressive preconditioning method for steady non-cavitating and sheet-cavitating flows, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 68(2) (2012) 210-232.

[9] P. Akbarzadeh, E. Akbarzadeh, Numerical investigation of blowing effect on hydrodynamic behavior of cavitating flows over hydrofoils using power law preconditioning method, Modares Mechanical Engineering, 14(8) (2014) 59-67. (in persian)

[10] P. Akbarzadeh, I. Mirzaee, M.H. Kayhani, E. Akbarzadeh, Blowing and suction effect on drag and lift coefficients for viscous incompressible flows over hydrofoils by power-law preconditioning method, Modares Mechanical Engineering, 14(4) (2014) 129-140. (in persian)

[11] P. Akbarzadeh, S. Derazgisoo, M. Shahnazi, A. Askari Lahdarboni, A Power-law Preconditioning Approach for Accelerating the Convergence Rate of Steady and Unsteady Incompressible Turbulent Flows, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, 51(2) (2019) 437-454. (in persian)

[12] P. Akbarzadeh, S.M. Derazgisoo, A dual-time implicit power-law preconditioning method for solving unsteady incompressible flows, Modares Mechanical Engineering, 16(2) (2016) 99-110. (in persian)

[13] F. Rouzbahani, K. Hejranfar, Numerical simulation of wave-floating bodies interaction using a truly incompressible SPH method with artificial compressibility approach, Journal of Solid and Fluid Mechanics, 8(1) (2018) 241-252. (in persian)

[14] J.L. Ericksen, Overdetermination of the speed in rectilinear motion of non-Newtonian fluids, Quarterly of Applied Mathematics, 14(3) (1956) 318-321.

[15] R.E. Gaidos, R. Darby, Numerical simulation and change in type in the developing flow of a nonlinear viscoelastic fluid, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 29 (1988) 59-79. (in persian)

[16] N. Waters, M. King, Unsteady flow of an elastico-viscous liquid, Rheologica Acta, 9(3) (1970) 345-355.

[17] C. Fetecau, C. Fetecau, Unsteady flows of Oldroyd-B fluids in a channel of rectangular cross-section, International Journal of Non-Linear Mechanics, 40(9) (2005) 1214-1219.

[18] G. Mompean, M. Deville, Unsteady finite volume simulation of Oldroyd-B fluid through a three-dimensional planar contraction, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 72(2-3) (1997) 253-279.

[19] Z.A. D. Domiri Ganji, N. Pahlavni Nejad, Investigation of viscoelastic flow in porous channel by Akbari Ganji method, Second International Conference on New Technologies in Science, (2018). (in persian)

[20] S.P. A. Jafari, Increasing numerical stability in the simulation of viscoelastic flows at high Weisenberg numbers, Journal of Solid and Fluid Mechanics, 9 (2019). (in persian)

[21] A.R. H. Mahmoudi, H. Amiri Moghadam, S. Azad shahraki, Two-dimensional analysis of turbulent flow of viscoelastic fluid in a channel: a numerical study, Fluid Dynamics Conference, 17 (2017). (in persian)

[22] M.F. Letelier, D.A. Siginer, Secondary flows of viscoelastic liquids in straight tubes, International journal of solids and structures, 40(19) (2003) 5081-5095.

[23] P. Tamamidis, G. Zhang, D.N. Assanis, Comparison of pressure-based and artificial compressibility methods for solving 3D steady incompressible viscous flows, Journal of Computational Physics, 124(1) (1996) 1-13.

[24] T. Adibi, Three-dimensional Characteristic Based Scheme and Artificial Compressibility Factor on Its Accuracy and Convergence, Fluid Mechanics & Aerodynamics Journal, 7(1) (2018) 37-48. (in persian)

[25] F.H. Harlow, J.E. Welch, Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, The physics of fluids, 8(12) (1965) 2182-2189.

[26] H. Vosoughifar, Computational Fluid Dynamic in Matlab, Islamic Azad University-South Tehran Branch, 2016. (in persian)

[27] S. Aristov, D. Knyazev, Viscous fluid flow between moving parallel plates, Fluid Dynamics, 47(4) (2012).

[28] M. Haque, Velocity Distribution of Unsteady Laminar Flow for Viscous Fluid, GANIT: Journal of Bangladesh Mathematical Society, 29 (2009) 1-9.

[29] A. Duarte, A.I. Miranda, P.J. Oliveira, Numerical and analytical modeling of unsteady viscoelastic flows: The start-up and pulsating test case problems, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 154(2-3) (2008) 153-169.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

H. Ghiyasi Shahraky, M. Norouzi, A. Abbas Nejad, P. Akbarzadeh, The development of power-law preconditioning approach for simulation of unsteady viscoelastic flows, Amirkabir J. Mech Eng., 55(3) (2023) 381-406.

DOI: 10.22060/mej.2023.21486.7450

این صفحه عمداً خالی است