



Singularity, dynamics, and kinetics analysis of a 5 degrees of freedom parallel robot using screw theory

S. Khosravi^{1,2}, M. Ghassabzadeh Saryazdi^{1*}

¹ Technology Institute of Mechanical Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

² Mechanical Engineering Department, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

ABSTRACT: This paper examines a parallel robot with 5 degrees of freedom with a linear platform. Parallel robots have a restricted workspace, and singularities make the workspace even more confined. So the behavior of the robot in the workplace is examined by focusing on kinematics and dynamics. To do kinematic analysis, the constraint equations are developed using the geometric relations, and the speed and acceleration equations of the robot are derived. The Jacobian matrix is then calculated using the screw theory, and the state of the singularities in the workspace is determined based on the Jacobian matrix. Considering the singularity and physical and geometric limitations, an algorithm for calculating the workspace is presented. In addition, the kinematic index of dexterity is investigated using the Jacobian matrix as a measure of the robot's closeness to the singular configurations. The results of solving kinematic and dynamic problems are validated with the output of the simulation in MATLAB software.

Review History:

Received: Feb. 20, 2023

Revised: May, 13, 2023

Accepted: Oct. 03, 2023

Available Online: Nov. 04, 2023

Keywords:

Kinematics and dynamics

singularity analysis

workspace analysis

screw theory

parallel robot

1- Introduction

During recent decades, the machine tool industry has discovered the potential benefits of parallel mechanisms and many parallel mechanisms with 5 and 6 degrees of freedom structures have been developed [1]. Parallel robots have significant advantages in machining applications, especially the machining of complex surfaces, due to the ratio of their weight to the load capacity they bear, as well as their suitable orientations in space.

The current research robot is a 5-degrees-of-freedom parallel robot with 4SPRR-SPR configuration. In [2] Garrett et al analyzed the inverse kinematics of this structure. In [3], considering a robot with this structure, Boras et al. investigated the changes in the connection point of the robot's legs to the ground from the point of view of singularities. In [4], in addition to kinematic analysis, Guo et al analyzed the stiffness of this structure by applying the screw theory. Reference [5] is in the limited category of research that has dealt with the dynamic analysis of this structure, in which the dynamics of the robot has been extracted by the method of Kane's equations.

Screw theory, inspired by Newton-Euler relations, analyzes the dynamics of multibody systems in a matrix form, in addition to having the advantages of Lagrange equation and Newton-Euler method and high calculation speed, it

is efficient for multibody systems with a high number of members.

In this article, the inverse kinematics calculations of the robot are first performed, then the Jacobian matrix is extracted using the screw theory. All singular orientations of the robot are obtained at every point of the working space. The kinematic index of dexterity is presented as a measure of the proximity of the robot to its singular points in the workspace. The dynamics of the robot are analyzed using the screw theory. Finally, all the obtained results are validated by simulating in MATLAB's sim-mechanics environment.

2- Modeling

The five-degree-of-freedom robot of the current research has a 4SPRR-SPR structure, Figure 1 shows how to connect the legs of the robot to the end effector and the fixed base.

The screw axes of the robot joints are shown in Figure 3. In equation (1), the Jacobian matrix of the robot is written, which is obtained based on the screw theory

$$J = \begin{bmatrix} ON_1 \times S_{1,4} & S_{1,4} \\ ON_2 \times S_{2,4} & S_{2,4} \\ ON_3 \times S_{3,4} & S_{3,4} \\ ON_4 \times S_{4,4} & S_{4,4} \\ ON_5 \times S_{5,4} & S_{5,4} \\ OM_1 \times S_{1,1} & S_{1,1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

*Corresponding author's email: mghsaryazdi@aut.ac.ir



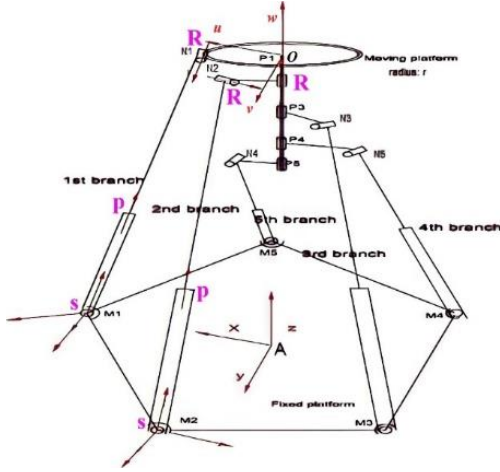


Fig. 1. 5 degrees of freedom parallel robot configuration

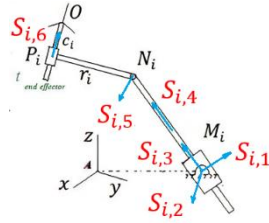


Fig. 3. Joint screw in the robot

In screw theory, the dynamic relationships of each member are written separately, and by assembling all the equations, matrix relationships are obtained to extract the forces of operators and reaction forces.

$$t_i = [\omega_i^T V_i^T]^T, t = [t_1^T \ t_2^T \ \dots \ t_{n-1}^T]^T \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} K^T & T^{Ac} \\ S^T & o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\eta = Mt + Wmt - w^s \quad (4)$$

where the matrix K with dimensions $6n \times 6(n-1)$ contains the constraint coefficients of all kinematic pairs, which is called the robot constraint matrix. t is a $6(n-1)$ vector that includes the twist of all links of the robot. η is the wrench vector of constraint torques and forces, also T^{Ac} called the actuator wrench shaping matrix. M is the mass matrix of the robot and W is the angular velocity matrix of the robot, w^s is the vector of external forces acting on the robot.

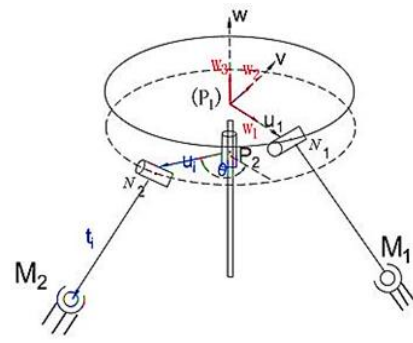


Fig. 2. Schematic of the end effector

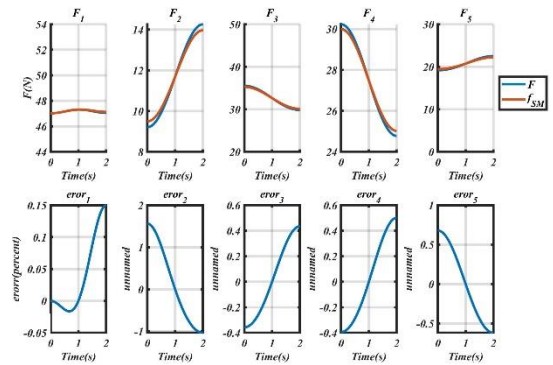


Fig. 4. The driving force the actuators and the error percentage with the simulation results

3- Results and discussion

The results of the analytical model based on the screw theory and sim-mechanics simulation are presented in Figure 4.

The physical interpretation of orientations in which the determinant of the Jacobian matrix becomes zero and the robot is placed in a singular state is shown in Figure 5.

The working space of the robot is obtained for any orientation, taking into account the constraints of equation (10). the workspace for a specific orientation is illustrated in Figure 6.

$$|J| \neq 0, L_{i_{min}} \leq L_i \leq L_{i_{max}}, 5^\circ \leq \pi - \beta_i \leq 85^\circ \quad (5)$$

The kinematic dexterity index is defined as a measure of how close the robot is to its singular configurations.

$$DI = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad (6)$$

where σ_{min} is the smallest singular value of the Jacobian matrix and σ_{max} is its largest singular value. Figure 7 shows

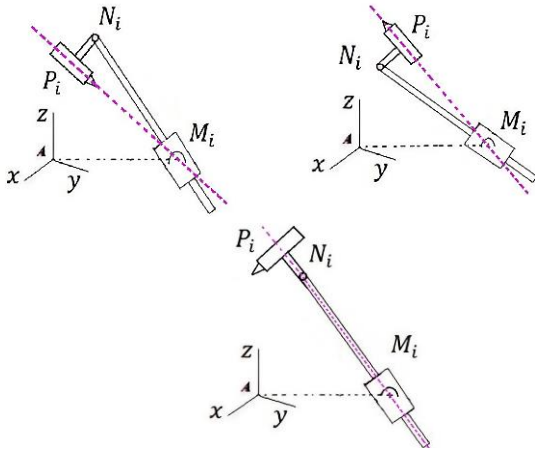


Fig. 5. Robot orientation in a singular configuration

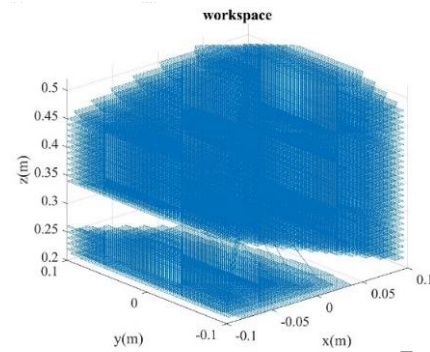


Fig. 6. Workspace for $\alpha = 0, \gamma = \pi/6$

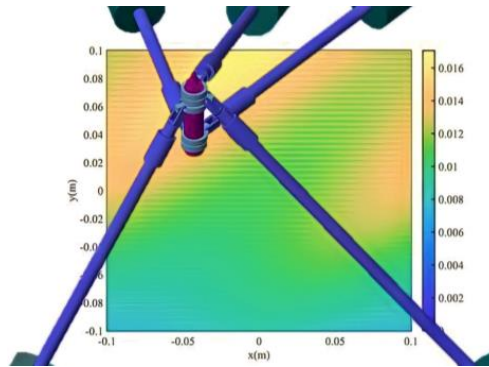


Fig. 7. Dexterity index distribution in a square space at a height of $z=0.25\text{m}$, $\alpha = 51^\circ$

the contour of the robot's dexterity for an optimal position and orientation.

4- conclusion

The aim of this research is the kinematic and dynamic analysis of a parallel robot. The Jacobian matrix and the dynamic equations of the robot were derived using the screw theory. By calculating the Jacobian matrix, singular points of the robot were extracted and by applying physical constraints, an algorithm was presented to calculate the working space of the robot. Then, the dexterity index was presented as a measure of the distance of the robot from singular points. This index was checked in the working space of the robot and it was determined that the robot has the highest value of dexterity index at the height of $z=0.25\text{m}$ and $\alpha = 51^\circ$.

References

- [1] F. Gao, B. Peng, H. Zhao, W. Li, A novel 5-DOF fully parallel kinematic machine tool, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 31(1) (2006) 201-207.
- [2] G.F. Bär, G. Weiß, Kinematic analysis of a pentapod robot, *Journal for Geometry and Graphics*, 10(2) (2006) 173-182.
- [3] J. Borràs, F. Thomas, Singularity-invariant leg substitutions in pentapods, in: 2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, IEEE, 2010, pp. 2766-2771.
- [4] Q. Guo, G. Cui, F. Zhang, J. Liu, Z. Cheng, Kinematics. Stiffness and Singularity Analysis of 3T2R 5-DOF Parallel Robot Mechanism, in: 2019 IEEE 9th Annual International Conference on CYBER Technology in Automation, Control, and Intelligent Systems (CYBER), IEEE, 2019, pp. 758-763.
- [5] W. Lin, B. Li, X. Yang, D. Zhang, Modelling and control of inverse dynamics for a 5-DOF parallel kinematic polishing machine, *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 10(8) (2013) 314.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

S. Khosravi, M. Ghassabzadeh Saryazdi, Singularity, dynamics, and kinetics analysis of a 5 degrees of freedom parallel robot using screw theory, Amirkabir J. Mech Eng., 55(8) (2023) 197-200.

DOI: [10.22060/mej.2023.22216.7580](https://doi.org/10.22060/mej.2023.22216.7580)





تحلیل دینامیکی یک ربات موازی ۵ درجه آزادی با بکارگیری تئوری پیچه و استخراج نقاط تکین

سعید خسروی^{۱*}، مریم قصابزاده سریزدی^۲

۱- پژوهشکده فناوری‌های مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

۲- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۱/۱۲/۰۱

بازنگری: ۱۴۰۲/۰۲/۲۳

پذیرش: ۱۴۰۲/۰۷/۱۱

ارائه آنلاین: ۱۴۰۲/۰۸/۱۳

کلمات کلیدی:

سینماتیک و دینامیک

فضای کاری

تکینگی

تئوری پیچه

ربات موازی

خلاصه: در این مقاله ربات موازی ۵ درجه آزادی با مجری نهایی خطی بررسی می‌شود. در این ربات توانایی جهت گیری مجری نهایی در فضای کاری، مزیتی برای انجام فرایند ماشینکاری سطوح پیچیده است. با چنین کاربردی، تحلیل عملکرد دینامیکی ربات از اهمیت بالایی برخوردار است. از طرفی رباتهای موازی، فضای کاری محدودی دارند و تکنیکهای آنها، فضای کاری را محدودتر می‌کند. از این رو با تمرکز بر دو حوزه سینماتیک و دینامیک، رفتار عملکردی این ربات در فضای کاری مورد مطالعه قرار می‌گیرد. به منظور انجام تحلیل سینماتیک، با استفاده از روابط هندسی و برداری، معادلات قید استخراج و سپس، معادلات حاکم بر سرعت و شتاب ربات بدست می‌آید. سپس با بکارگیری تئوری پیچه ماتریس ژاکوبین استخراج و با بررسی آن وضعیت تکینگی ها درون فضای کاری تعیین می‌گردد. با در نظر گرفتن تکینگی و محدودیتهای فیزیکی و هندسی، الگوریتمی برای محاسبه فضای کاری ارائه می‌شود. همچنین با استفاده از ماتریس ژاکوبین، شاخص سینماتیکی چالاکی بعنوان معیاری برای نزدیکی ربات به نقاط تکینه بررسی می‌گردد. در ادامه، معادلات دینامیکی حاکم بر ربات با استفاده از تئوری پیچه که مزایای هردو روش اویلر-لاگرانژ و نیوتن را داراست، استخراج گردیده و نتایج حل مسائل سینماتیک و دینامیک با خروجی شبیه سازی مکانیزم در محیط سیمولینک متلب اعتبارسنجی می‌شود.

۱- مقدمه

طی دهه‌های اخیر صنعت ماشین‌انزار مزایای بالقوه مکانیزم‌های موازی را کشف کرده‌است و مکانیزم‌های موازی بسیاری با ساختارهای ۵ و ۶ درجه آزادی توسعه یافته‌اند [۱]. ربات‌های موازی به دلیل نسبت وزن خود به ظرفیت باری که تحمل می‌کنند و همچنین جهت‌گیری‌های مناسبی که در فضا دارند، مزایای قابل توجهی در کاربردهای ماشینکاری، به ویژه ماشینکاری سطوح پیچیده دارند. اگرچه این ربات‌ها عموماً فضای کاری محدودی دارند و ماشین‌ابزارهای موازی ثابت نمی‌توانند الزامات ماشینکاری در مورد قطعه کار در مقیاس بزرگ را فراهم کنند، با این حال توسعه ربات‌های موازی متحرک به نوعی این مشکل را نیز برطرف کرده است. ربات موازی ۶ درجه آزادی استوارت که امروزه بعنوان پلتفرم استوارت شناخته می‌شود [۲]، بطور عمده در شبیه‌سازهای پرواز یا رانندگی، سکوها جذب ارتعاش، و مکانیزم‌های اتصال فضایی استفاده می‌شود [۳]. پس از توسعه ربات‌های موازی ۶ درجه آزادی تحقیقات بسیاری بر روی ربات‌های موازی با درجات آزادی کمتر (۲ تا ۵ درجه آزادی) انجام شده‌است. این ربات‌ها عموماً ساختاری ساده،

اتصالات سینماتیکی کمتر، هزینه کم و کنترل راحت‌تری دارند [۴-۶]. زی و همکاران [۴]، هوانگ و همکاران [۵] و جوشی و همکاران [۶] پیکربندی انواع مکانیزم‌های موازی با درجات آزادی کمتر را بررسی کرده‌اند. ربات‌های موازی با ساختارهای $[2UPR - SPR]$ [۷] و $3UPS - UPR$ [۸، ۹] ربات‌هایی هستند که برای تنظیم موقعیت بکار گرفته می‌شوند (U, P, R) و S به ترتیب برای مفاصل دورانی، خطی، یونیورسال و کروی استفاده می‌شوند. در [۱۰] محبوب‌خواه و همکاران به تحلیل فضای کاری و استخراج نقاط تکین یک ربات موازی چهار درجه آزادی پرداخته‌اند. در [۱۱] زمانی و همکاران به استخراج فضای کاری عاری از تکینگی یک ربات موازی ۴ درجه آزادی با استفاده از الگوریتم‌های فراابتکاری پرداخته‌اند. در [۱۲] به ارزیابی سینماتیکی و دینامیکی یک ربات موازی ۴ درجه آزادی پرداخته شده‌است.

ربات پژوهش حاضر، یک ربات موازی ۵ درجه آزادی با پیکربندی $4SPRR - SPR$ است. شکل ساختاری آن پتانسیل بالایی برای تبدیل به نوع جدیدی از ربات‌های ماشینکار متحرک دارد. در [۱۳] گرت

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: mghsaryazdi@aut.ac.ir



تکنیکی حاصل می‌شود، همه جهت‌گیری‌های تکین ربات در هر نقطه از فضای کاری استخراج می‌شود. شاخص سینماتیکی چالاکى بعنوان معیاری از نزدیکی ربات به نقاط تکین خود در فضای کاری ارائه و سپس دینامیک ربات با تئوری پیچ تحلیل می‌شود. همه نیروهای عملگرها و عکس‌العمل‌های قیدی در هر نقطه از مسیر حرکت ربات استخراج می‌گردد. در نهایت تمامی نتایج بدست آمده با شبیه‌سازی در محیط سیم‌مکانیک متلب صحت‌سنجی می‌شود.

۲- معرفی ربات

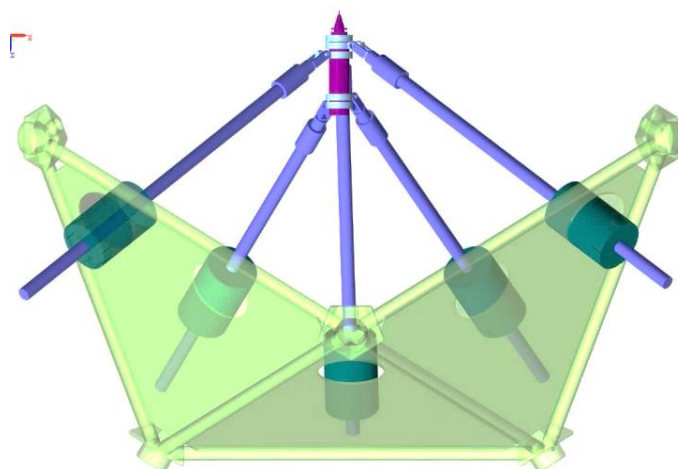
ربات پنج درجه آزادی پژوهش حاضر، دارای ساختار $4SPRR - SPR$ می‌باشد. به عبارتی ۴ تا از پاهای ربات، هر کدام یک زنجیر سینماتیکی است که اتصال آن از پایه ثابت به مجری نهایی به ترتیب با مفاصل کروی، انتقالی، دورانی و دورانی است و یکی از پاهای ربات یک زنجیر سینماتیکی با مفاصل کروی، انتقالی و دورانی است. در این ساختار عملگرهای ربات روی مفاصل انتقالی هستند، بعبارت دیگر محرک‌های ربات، عملگرهای خطی هستند. از طرفی پاهای ربات به مجری نهایی که یک پلنفرم خطی (و نه یک صفحه) است با استفاده از مفاصل دورانی متصل شده‌اند. شکل ۱ نحوه اتصال پاهای ربات به مجری نهایی و پایه ثابت را نشان می‌دهد.

با توجه به شماتیک شکل ۱، محل قرارگیری پاهای ربات روی پایه‌ی ثابت، با اتصال از طریق مفاصل‌های کروی است که با M_i ($i=1,2,\dots,5$) نامگذاری شده‌اند. به مفاصل کروی، پاهایی که در هر کدام از آنها یک مفصل خطی قرار دارد، اتصال دارد، این مفاصل‌های خطی در واقع عملگرهای فعال ربات هستند. هر کدام از این عملگرها با دو مفصل دورانی پیاپی که در شکل به ترتیب با N و P مشخص شده‌اند، به مجری نهایی که یک پلنفرم خطی است، متصل شده‌اند. اما پای اول فقط یک مفصل دورانی دارد و با توجه به شکل ۱ در محل N_1 به مجری نهایی متصل است. دستگاه مختصات راستگرد جهانی که با محورهای مختصات Z, Y, X مشخص است در نقطه A چسبیده به پایه ثابت است. اگر از نمای بالا به شماتیک ربات بنگریم، امتداد محور X از محل مفصل کروی M_1 می‌گذرد. دستگاه مختصات O با بردارهای یک W, V, U به محل مرکز جرم مجری نهایی چسبیده است، بردار W در راستای محور مجری نهایی تعریف شده است. اگر از صفحه‌ای که بردار نرمال آن W است به مجری نهایی بنگریم، راستای U در جهت مرکز مفصل دورانی پای اول ربات است. بر طبق معیار گروبلر [۱۶] تعداد درجات آزادی ربات از رابطه زیر بدست می‌آید:

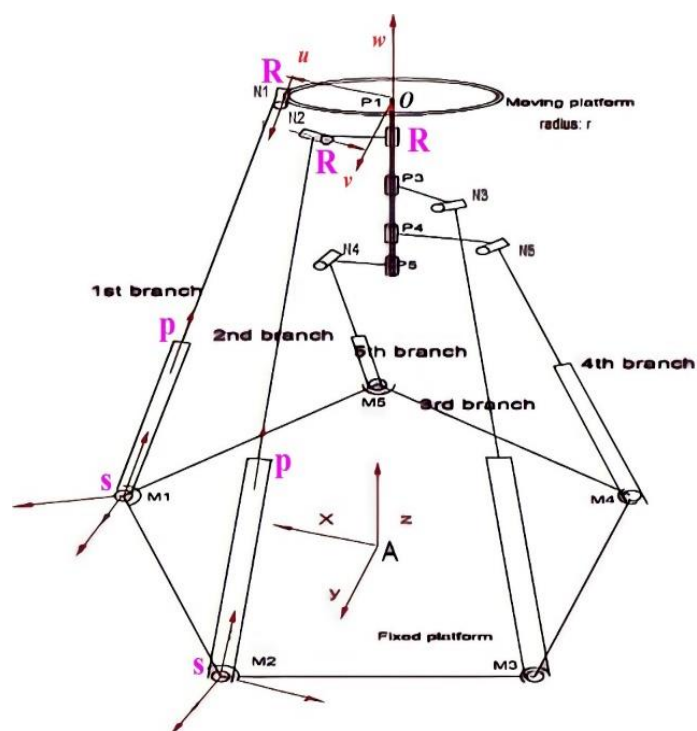
و همکاران به تحلیل سینماتیک معکوس این ساختار پرداخته‌اند. در [۱۴] بورس و همکاران با در نظر گرفتن ربای با این ساختار، به بررسی تغییرات محل اتصال پاهای ربات به زمین از منظر تکنیکی‌ها پرداخته‌اند. در [۱۵] لان‌لو و همکاران به تحلیل سینماتیک مستقیم و بررسی فضای کاری این ساختار پرداخته‌اند. در [۱۶] گوو و همکاران علاوه بر تحلیل‌های سینماتیکی به تحلیل سختی این ساختار با بکارگیری تئوری پیچ پرداخته‌اند. در [۱۷] با رویکرد مبتنی بر تئوری پیچ به طراحی توپولوژی و تحلیل سینماتیکی ماشین‌های موازی ۵ محوره پرداخته شده‌است و پیکربندی‌های متفاوت ۵ درجه آزادی در کنار این ساختار ارائه و تحلیل شده‌اند. در [۱۸] محمودی و همکاران با الهام از این ساختار و افزودن یک مفصل خطی، یک ربات موازی ۶ درجه آزادی با ساختار $4SPRR - PSRR$ ارائه کرده‌اند. در [۱۹] محبوب‌خواه و همکاران به تحلیل دینامیک معکوس یک ربات موازی ۶ درجه آزادی بعنوان میز ابزار در فرایندهای ماشینکاری پرداخته‌اند و نیروهای ماشینکاری را در تحلیل دینامیک معکوس لحاظ کرده‌اند. در [۲۰]، مدل‌سازی و کنترل دینامیک معکوس ساختار $4SPRR - SPR$ انجام شده‌است. مرجع [۲۰] در زمره محدود تحقیقاتی است که به تحلیل دینامیکی این ساختار پرداخته‌است، که در آن دینامیک ربات با روش معادلات کین استخراج شده است.

تحلیل دینامیک سیستم‌های چندجسمی با تعداد اجزای بالا، یکی از مسائل بحث برانگیز است. معادله لاگرانژ و روش نیوتن اوایل رایج‌ترین و محبوب‌ترین روش‌های مدل‌سازی دینامیکی در رباتیک هستند. این روش‌ها برای سیستم‌های دینامیک با درجه آزادی کم و اجزای کم بسیار کارآمد و راحت هستند. روش نیوتن اوایل نیاز به تجزیه و تحلیل هر یک از اجزای ربات و در نظر گرفتن نیروهای داخلی دارد. در نهایت، معادلات دینامیکی تمام اجزا را ترکیب می‌کند تا معادلات دینامیکی نهایی را به دست آورد. بنابراین برای محاسبه نیروهای داخلی در همه مفاصل، نیاز به کار بسیار بیشتری دارد. معادله لاگرانژ بر اساس تابع انرژی نیازی به در نظر گرفتن نیروهای داخلی بین اجزای ربات ندارد، اما مستلزم آن است که مشتقات مرتبه دوم تابع لاگرانژ محاسبه شود. بنابراین، معادله لاگرانژ برای سیستمی با درجه آزادی بالا و اجزای زیاد، کارایی پایینی دارد، بعلاوه به نیروهای داخلی دسترسی وجود ندارد [۲۰].

در این مقاله ابتدا محاسبات سینماتیک معکوس که مقدمه انجام تحلیل‌های دیگر است انجام می‌شود، سپس ماتریس ژاکوبین ربات با استفاده از تئوری پیچ استخراج می‌گردد. با تعبیر هندسی که از تئوری پیچ برای



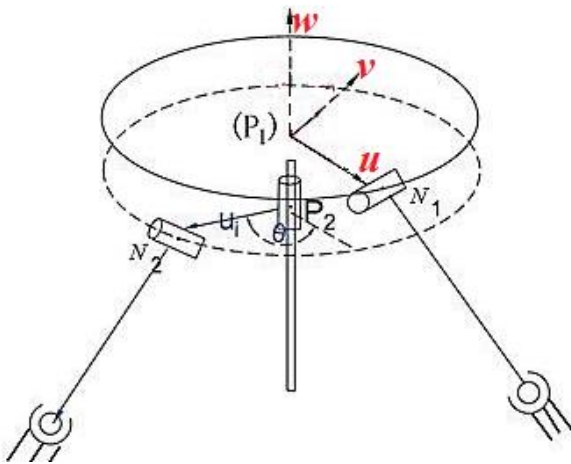
الف
a



ب
b

شکل ۱. پیکربندی ربات موازی ۵ درجه آزادی

Fig. 1. Configuration of 5 degrees of freedom parallel robot



شکل ۲. شماتیک مجری نهایی [۱۶]

Fig. 2. Schematic of the end effector [16]

$$DOF = d(n - g - 1) + \sum_i^g f_i + v \quad (1)$$

که در آن d درجه فضایی یا صفحه‌ای مکانیزم، n تعداد اعضای ربات، g تعداد مفاصل، f_i مجموع درجات آزادی است که هر مفصل دارد و v درجه آزادی افزونه^۱ مکانیزم است.

$$DOF = 6(16 - 19 - 1) + 29 = 5$$

۳- سینماتیک

برای تحلیل سینماتیک ربات نیاز به موقعیت و جهت‌گیری مجری نهایی است، موقعیت مجری نهایی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$o = [o_1, o_2, o_3] \quad (2)$$

و جهت‌گیری آن با ماتریس دوران R تعریف می‌شود.

$$R = R_Y R_X = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \cos \gamma \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (3)$$

که در آن α و γ زوایای اوپلری هستند که به ترتیب دوران حول محور u و v دستگاه مختصات چسبیده به مجری نهایی را نشان می‌دهند. موقعیت مفاصل کروی در دستگاه مختصات A و در دستگاه مختصات O به صورت زیر نوشته می‌شود:

$${}^A M_i = R^O M_i + o \quad (4)$$

موقعیت مفاصل دورانی نقاط P در دستگاه مختصات A و در دستگاه مختصات O به صورت زیر است:

$${}^A P_i = R^O P_i + o \quad (5)$$

1 redundant

موقعیت مفاصل دورانی نقاط N در دستگاه مختصات A به صورت زیر بدست می‌آید:

$${}^A N_i = R \begin{bmatrix} r \cos \theta_i \\ r \sin \theta_i \\ c_i \end{bmatrix} + o \quad (6)$$

که در آن، r با توجه به شکل ۱، شعاع مجری نهایی است و c_i ، فاصله هر یک از مفاصل دورانی متصل به مجری نهایی در راستای محور w دستگاه مختصات O است. با در نظر گرفتن شکل ۲ و ۳ بردارهای زیر تعریف می‌شوند:

$$l_i = {}^A N_i - {}^A M_i \quad (7)$$

$$u_i = [r \cos(\theta_i) \quad r \sin(\theta_i)] \quad (8)$$

که در آن θ_i زاویه لینک i ام نسبت به لینک اول، حول محور z دستگاه مختصات چسبیده به مجری نهایی است که در شکل ۲ مشخص شده است. u_i برداری است که دو مفصل دورانی پای i ام را به یکدیگر متصل

با حل معادلات فوق برای پاهای دوم تا پنجم ربات می‌توان به مقادیر θ_i ها دست یافت. با مشتق‌گیری از معادلات فوق می‌توان $\dot{\theta}_i$ و $\ddot{\theta}_i$ را محاسبه کرد.

$$d(eq_i)/dt = 0 \quad (12)$$

$$d^2(eq_i)/dt^2 = 0 \quad (13)$$

با حل سینماتیک ربات برای دوران مفاصل می‌توان طول مفاصل محرک خطی را به فرم زیر استخراج کرد:

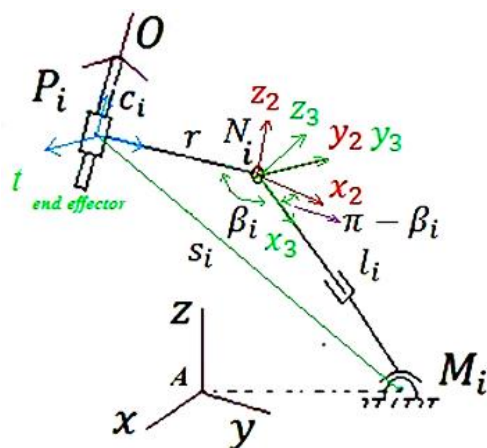
$${}^A L_i = \begin{bmatrix} {}^A M_{ix} \\ {}^A M_{iy} \\ {}^A M_{iz} \end{bmatrix} - R \begin{bmatrix} r \cos \theta_i \\ r \sin \theta_i \\ c_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} o_1 \\ o_2 \\ o_3 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$i = 1, 2, 3, 4, 5$

مختصات‌گذاری شکل ۳ برای انجام تحلیل‌های دینامیک به روش تئوری پیچ انجام شده‌است، این مختصات‌گذاری به منظور نوشتن سرعت خطی و زاویه‌ای هریک از اعضای ربات، در دستگاه مختصات بدنه بکار می‌رود که در بخش دینامیک ربات بدان اشاره می‌شود.

۴- استخراج ماتریس ژاکوبین با تئوری پیچ

تئوری پیچ یک ابزار قدرتمند ریاضی برای تحلیل مکانیزم‌های فضایی است، یک پیچ از دو بردار سه بعدی تشکیل شده و می‌توان از آن برای بیان کردن موقعیت و جهت‌گیری یک بردار فضایی، سرعت خطی و زاویه‌ای یا نیرو و کوپل استفاده کرد. بنابراین مفهوم تئوری پیچ مناسب تحلیل‌های سینماتیکی و دینامیکی است، از طرفی تبدیل بین فضای تئوری پیچ و فضای ماتریسی و برداری سراسر است. هنگامی که تئوری پیچ برای تحلیل یک مکانیزم اعمال می‌شود، مزایایی از قبیل مفاهیم هندسی واضح، تعابیر فیزیکی صریح، معادلات ساده‌تر و محاسبات جبری راحت را فراهم می‌آورد. به همین دلیل تئوری پیچ به صورت گسترده‌ای توسط محققین در تحلیل سامانه‌های چندجسمی بکار گرفته می‌شود.



شکل ۳. مختصات‌گذاری ربات

Fig. 3. Coordinates of the robot

می‌کند که در شکل ۲ مشخص شده‌است. همچنین بردارهای یکه در دستگاه مختصات O به شکل زیر تعریف می‌شود:

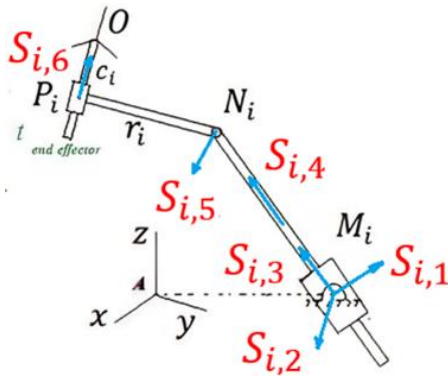
$$\begin{aligned} u &= [1 \quad 0 \quad 0]^T \\ v &= [0 \quad 1 \quad 0]^T \\ w &= [0 \quad 0 \quad 1]^T \end{aligned} \quad (9)$$

با توجه به شکل ۳ با در نظر گرفتن ساختار هندسی ربات برای هر یک از پاهای ربات می‌توان ادعا کرد که بردارهای u_i و l_i و همواره در یک صفحه قرار دارند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\det(w, u_i, l_i) = 0 \quad (10)$$

بر اساس محاسبات برداری می‌توان دترمینان فوق را به شکل ذیل نوشت:

$$eq_i = w \cdot (u_i \times l_i) = 0 \quad (11)$$



شکل ۴. نمایش پیچ مفصل در ربات

Fig. 4. Joint screw in the robot

با توجه به شکل ۳ و براساس تئوری پیچ [۱۶]، پیچ‌های آنی حرکت مجری نهایی، تولید شده توسط هر یک از پاهای ربات در دستگاه مختصات چسبیده به مجری نهایی به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \$_{p1} = & \$_{1i} \dot{\theta}_{1i} + \$_{2i} \dot{\theta}_{2i} + \$_{3i} \dot{\theta}_{3i} \\ & + \$_{4i} \dot{q}_{1i} + \$_{5i} \dot{\theta}_{5i}, i = 1 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \$_{p2} = & \$_{1i} \dot{\theta}_{1i} + \$_{2i} \dot{\theta}_{2i} + \$_{3i} \dot{\theta}_{3i} + \$_{4i} \dot{q}_{1i} \\ & + \$_{5i} \dot{\theta}_{5i} + \$_{6i} \dot{\theta}_{6i}, i = 2, 3, 4, 5 \end{aligned} \quad (16)$$

پیچ حرکت مجری نهایی بصورت ذیل است:

$$\$_p = \$_{p1} + \$_{p2} = [\omega^T \ v^T] \quad (17)$$

که $\$_{p1}$ پیچ حرکت تولید شده توسط پای اول ربات و $\$_{p2}$ پیچ حرکت تولید شده توسط پای دوم تا پنجم ربات است. ω و v سرعت زاویه‌ای و خطی دستگاه چسبیده به مرکز جرم مجری نهایی‌اند و آرایه شش بعدی $[\omega^T \ v^T]$ توئیست مجری نهایی است. $\dot{\theta}_{i,j}$ سرعت زاویه‌ای مفصل دورانی زام در پای آم و $\dot{q}_i$ سرعت خطی عملگر آم است. بنابراین با توجه به شکل ۴ هر پیچ به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} \$_{1i} = [S_{1i}; (\overline{OM}_i) \times S_{1i}] \\ \$_{2i} = [S_{2i}; (\overline{OM}_i) \times S_{2i}] \\ \$_{3i} = [S_{3i}; (\overline{OM}_i) \times S_{3i}], \\ \$_{4i} = [0; S_{4i}] \\ \$_{5i} = [S_{5i}; (\overline{ON}_i) \times S_{5i}] \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (18)$$

$$\$_{6i} = [S_{6i}; (\overline{OP}_i) \times S_{6i}], i = 2, 3, 4, 5$$

بر اساس تئوری پیچ، پای اول ربات، یک پیچ متقابل قیدی به شکل زیر دارد:

$$\$_{r,1} = [S_{1,1}; (\overline{OM}_1) \times S_{1,1}] \quad (19)$$

با حل کردن رابطه ضرب متقابل [۲۱] که در پیچ‌های متقابل برقرار است، با توجه به روابط (۱۵) و (۱۹):

$$\$_{r,1} \circ \$_{p,1} = 0 \quad (20)$$

که می‌توان آن را به فرم ماتریسی نوشت:

$$J_{c,1} \$_{p,1} = 0 \quad (21)$$

در آن $n-1$ ماتریس ژاکوبین قیدی پای اول ربات است. برای پاهای دوم تا پنجم پیچ متقابل قیدی صفر است، در نتیجه:

$$J_c = J_{c,1} \quad (22)$$

که در آن J_c ماتریس ژاکوبین قیدی ربات است.

$$J_a = \begin{bmatrix} (\overline{ON}_1) \times S_{1,4} & S_{1,4} \\ (\overline{ON}_2) \times S_{2,4} & S_{2,4} \\ (\overline{ON}_3) \times S_{3,4} & S_{3,4} \\ (\overline{ON}_4) \times S_{4,4} & S_{4,4} \\ (\overline{ON}_5) \times S_{5,4} & S_{5,4} \end{bmatrix} \quad (30)$$

با ترکیب ماتریس ژاکوبین قیدی و عملگری بدست می‌آید:

$$\dot{q}_0 = J_0 \$p, \dot{q}_0 = [\dot{d}_{1,4} \dot{d}_{2,4} \dot{d}_{3,4} \dot{d}_{4,4} \dot{d}_{5,4} 0] \quad (31)$$

که در آن J_0 ماتریس ژاکوبین ربات است:

$$J_0 = \begin{bmatrix} J_a \\ J_c \end{bmatrix} \quad (32)$$

۵- تحلیل دینامیک ربات با تئوری پیچه

در تئوری پیچه روابط دینامیکی هر عضو جداگانه نوشته میشود و با سرهم‌بندی تمام معادلات، روابط ماتریسی برای استخراج نیروهای عملگرها و نیروهای عکس‌العملی حاصل می‌شود. یکی از روابط مهمی که در تئوری پیچه حائز اهمیت است، ماتریس قیود است که نمایانگر نحوه اتصال اعضای ربات به یکدیگر است. این رابطه را بصورت یک فرم خطی همگن و به شکل زیر می‌توان نوشت.

$$K_{i,i-1} t_{i-1} + K_{i,i} t_i = 0 \quad (33)$$

که در آن $K_{i,i}$ و $K_{i,i-1}$ ماتریس ضرایب 6×6 هستند که به نوع مفصلی که لینک i را به لینک $i+1$ متصل کرده، بستگی دارند و t_i بردار توئیست لینک i است که یک بردار 1×6 شامل سرعت زاویه‌ای و سرعت خطی مرکز جرم لینک i می‌باشد عبارتی:

$$t_i = [\omega_i^T V_i^T]^T \quad (34)$$

اگر مفصل خطی پای اول قفل شود، پیچه متقابل دیگری نیز از پای اول حاصل می‌شود:

$$\$_{r,a,1} = [S_{1,4} (\overline{ON}_1) \times S_{1,4}] \quad (23)$$

$$\$_{r,a,1} \circ \$_{p,1} = \dot{d}_{1,4} \quad (24)$$

که در آن $\dot{d}_{1,4}$ نرخ عملگر خطی پای اول ربات است. اگر معادله فوق به فرم ماتریسی نوشته شود:

$$\dot{q}_{a,1} = J_{a,1} \$p,1 \quad (25)$$

$$J_{a,1} = [(\overline{ON}_1) \times S_{1,4} \quad S_{1,4}] q_{a,1} = [d_{1,4}] \quad (26)$$

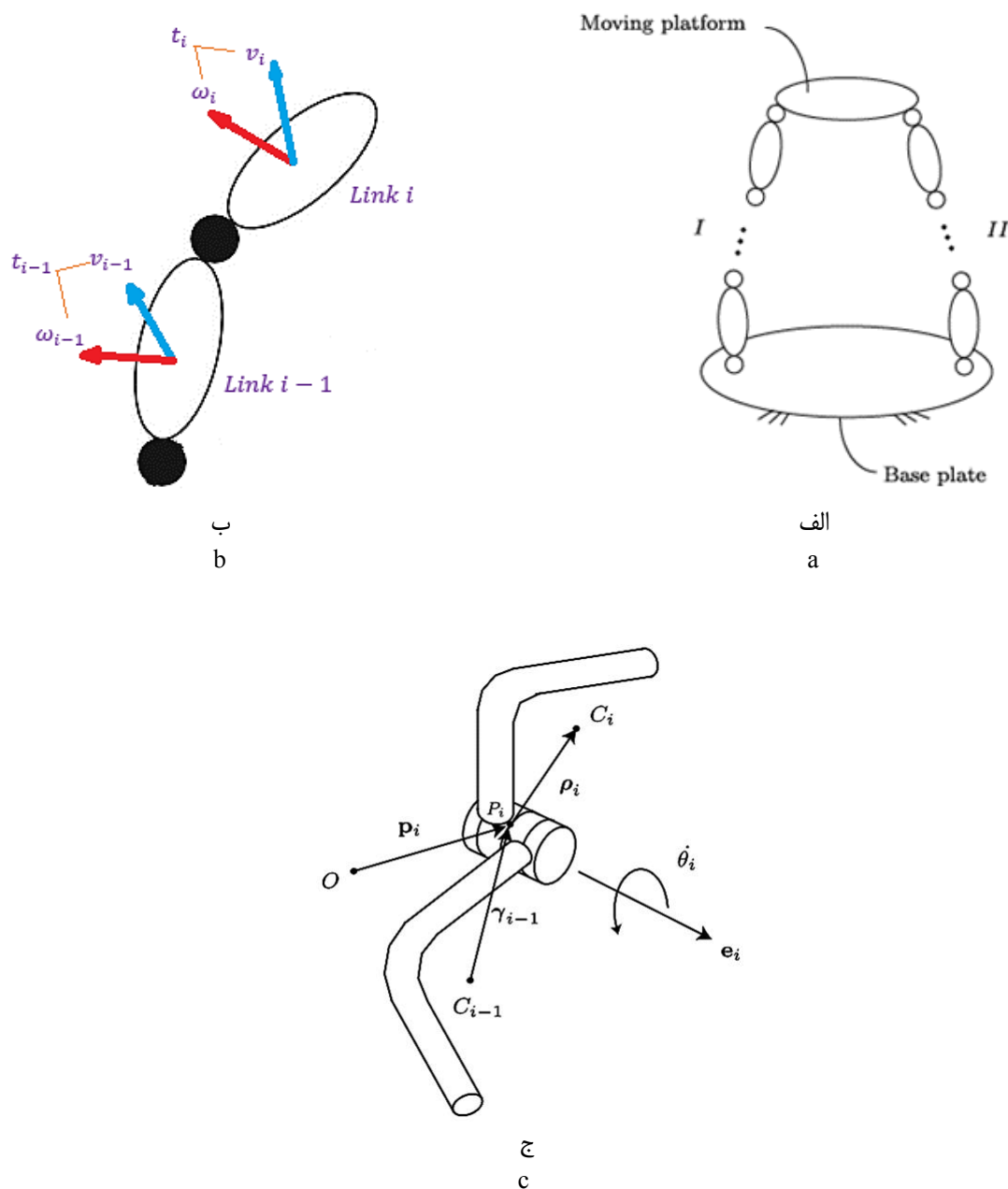
که در آن $J_{a,1}$ ماتریس ژاکوبین عملگری پای اول ربات است. اگر مفصل خطی پای i (ام $i = 2, 3, 4, 5$) قفل شود پیچه متقابل آن پا از روابط زیر استخراج می‌شود:

$$\$_{r,a,i} = [S_{i,4} (\overline{ON}_i) \times S_{i,4}] , i = 2, 3, 4, 5 \quad (27)$$

$$\$_{r,a,i} \circ \$_{p,2} = \dot{d}_{i,4}, \quad i = 2, 3, 4, 5 \quad (28)$$

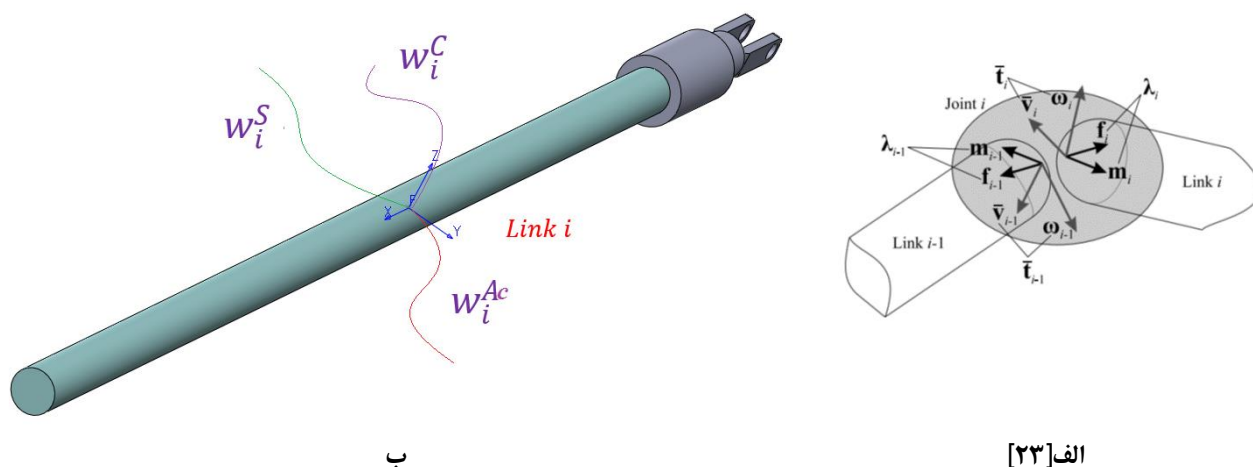
$$\dot{q}_{a,2} = J_{a,2} \$p,2, \dot{q}_{a,2} = [\dot{d}_{2,4} \dot{d}_{3,4} \dot{d}_{4,4} \dot{d}_{5,4}] \quad (29)$$

که $J_{a,1}$ و $J_{a,2}$ ماتریس ژاکوبین عملگری همه پاهای ربات است و می‌توان نوشت:



شکل ۵. پیکربندی عمومی یک ربات موازی [۲۲]، الف: پیکربندی عمومی [۲۲]، ب: آرایه تویست لینک ها، ج: شکل عمومی مفصل دورانی [۲۲]

Fig. 5. General configuration of a parallel robot [22], a. General parallel robot [22], b. Link twist array, c. General revolute joint [22]



شکل ۶. رنج قیدی در حالت کلی [۲۳]
Fig. 6. Constraint wrench in the general form[23]

با در نظر گرفتن یک لینک ربات، نیروها و گشتاورهایی که از دو مفصل به این لینک وارد می‌شود، منجر به تولید یک رنج w_i^c در مرکز جرم آن می‌شود. بطور کلی رنج به صورت یک آرایه ۶ بعدی تعریف می‌شود که سه مولفه اول آن گشتاورها و سه مولفه دوم آن را نیروها تشکیل می‌دهند. آرایه n بعدی w^c متشکل از رنج همه اعضای ربات را بردار رنج قیدی ربات^۲ می‌نامند. انجس در مرجع [۲۳]، نشان داده است که رابطه زیر برقرار است.

$$w^c = K^T \lambda \quad (36)$$

که در آن λ بردار رنج گشتاورها و نیروهای قیدی است که در محل مفاصل لینک‌ها ظاهر می‌شود و K همان ماتریس قیود معادله (۳۴) است. عبارتی در معادله (۳۶) تعبیر K^T ، به نوعی ماتریس انتقال گشتاورها و نیروهای قیدی از مفاصل به مرکز جرم اعضای ربات است.

در هر زوج سینماتیکی آامین رنج قیدی مفصل هیچ توانی روی لینک صلب تولید نمی‌کند. با توجه به شکل ۶ می‌توان نوشت:

$$P = \lambda_{i-1}^T \bar{t}_{i-1} + \lambda_i^T \bar{t}_i = 0 \rightarrow \lambda_i^T (\bar{t}_i - \bar{t}_{i-1}) = \lambda_i^T \Delta \bar{t}_i = 0 \quad (37)$$

با توجه به مختصات گذاری شکل ۳، می‌توان توئیست هر یک از اعضای ربات را در دستگاه مختصات مرجع نوشت. این فرمول‌بندی سینماتیک به طرز کارآمدی برای ربات‌های موازی به شکل ۵الف مناسب می‌باشد. در این ربات‌ها صفحه ثابت و متحرک با چند پا به یکدیگر متصل شده‌اند. در هر کدام از پاها چند زوج سینماتیکی وجود دارد که حرکت اعضای ربات را مقید می‌کنند. در شکل ۵ب دو لینک متوالی و آرایه توئیست متناظر آنها نمایش داده شده است. با توجه به نوع مفصلی که لینک‌ها را بهم متصل می‌کند، می‌توان رابطه‌ای بین توئیست دو لینک متوالی نوشت. در شکل ۵ج یک مفصل دورانی بین دو لینک نشان داده شده است.

برای یک ربات با d درجه آزادی و n لینک، به تعداد $6n$ معادله جبری قیدی ظاهر می‌شود که بطور خلاصه می‌توان نوشت:

$$Kt = 0 \quad (38)$$

که در آن ماتریس K با ابعاد $6n \times 6(n-1)$ ، ضرایب قیدی همه زوج‌های سینماتیکی را در خود دارد. که ماتریس قید ربات^۱ نامیده می‌شود. t یک بردار $6(n-1)$ است که توئیست همه لینک‌های ربات را شامل می‌شود.

که در آن M_i^{cg} و W_i ماتریس های 6×6 اینرسی و سرعت زاویه‌ای هستند، که به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$M_i^{cg} = \begin{bmatrix} I_i & O \\ O & m_i 1 \end{bmatrix}, \quad W_i = \begin{bmatrix} \Omega_i & O \\ O & O \end{bmatrix} \quad (۴۲)$$

که در آن ۱ و O به ترتیب نشان دهنده ماتریس 3×3 واحد و صفر، Ω_i ماتریس سرعت زاویه‌ای و I_i ماتریس اینرسی برای هر کدام از اعضای ربات هستند که نسبت به دستگاه مختصات چسبیده به مرکز جرم هر کدام از اعضا نوشته می‌شوند. m_i جرم هر کدام از اعضا است. علاوه بر این w_i^S و w_i^C و w_i^{Ac} به ترتیب بردار شش بعدی رنج عملگرها (که در این ربات شامل نیروی خطی ۵ عملگر خطی می‌باشد)، رنج قیدی مفاصل (شامل نیرو و گشتاور قیدی وارد شده از سمت هر مفصل، که به مرکز جرم منتقل شده‌است) و رنج بار استاتیکی (شامل نیروی وزن، نیروهای خارجی و گشتاورهای خارجی وارده بر هر عضو)، روی عضو i ام هستند. برای یک ربات با $n-1$ لینک متحرک، فرم بسته معادلات دینامیک ربات به شکل ذیل نوشته می‌شود:

$$M^{cg} \dot{t} = -WM^{cg}t + w^{Ac} + w^S + w^C \quad (۴۳)$$

که در آن t بردار توئیسیت ربات است:

$$t = [t_1^T \quad t_2^T \quad \dots \quad t_{n-1}^T]^T \quad (۴۴)$$

در حالیکه w^{Ac} و w^S و w^C به ترتیب رنج همه عملگرها، رنج همه نیروهای استاتیک و رنج همه قیدها می‌باشند.

ماتریس‌های M^{cg} و W نیز ماتریس‌های جرم و سرعت زاویه‌ای ربات هستند که بصورت ذیل تعریف می‌شوند.

$$M^{cg} = \text{diag} (M_1^{cg}, \dots, M_{n-1}^{cg}), \quad (۴۵)$$

$$W = \text{diag} (W_1, \dots, W_{n-1})$$

که در آن P توان تولیدی در مفصل است که برابر صفر است. از طرفی می‌توان برای اختلاف توئیسیت دو لینک رابطه زیر را نوشت:

$$\Delta \bar{t}_i = \sum_{j=1}^{k_i} A_{i,j} s_{i,j} \quad (۳۸)$$

که در آن $A_{i,j}$ و $s_{i,j}$ به ترتیب اندازه و بردار پیچه واحد j امین درجه آزادی یک مفصل است و k_i تعداد درجات آزادی i امین مفصل است. با جایگذاری رابطه (۳۸) در (۳۷) می‌توان نوشت:

$$\lambda_i^T \sum_{j=1}^{k_i} A_{i,j} s_{i,j} = 0 \rightarrow \quad (۳۹)$$

$$\text{since } A_{i,j} \neq 0 \rightarrow$$

$$\lambda_i^T s_{i,j} = 0, \quad j = 1, \dots, k_i$$

$$\lambda_i^T S_i = 0, \quad S_i = [s_{i,1} \quad \dots \quad s_{i,k_i}] \rightarrow S^T \lambda = 0 \quad (۴۰)$$

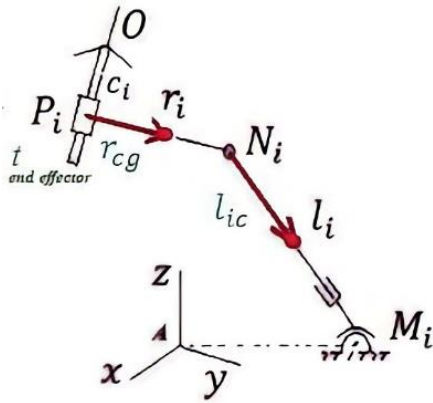
ماتریس S ، ماتریس پیچه مفصل^۱ نامیده می‌شود که شامل بردارهای پیچه همه زوج‌های سینماتیکی ربات است. با توجه به معادله فوق، واضح است که بردار پیچه مفاصل، λ در فضای پوچ ماتریس S^T قرار دارد. در مرجع [۲۲] به نحوه محاسبه ماتریس قید انواع مفصل‌ها از جمله مفصل لولایی، خطی، کروی، استوانه ای و... پرداخته شده است.

۶- محاسبه توئیسیت اعضای ربات

نیروی عکس‌العمل قیدی یکی از ارکان مهم تحلیل سازه‌ای ربات است. بدین منظور ترسیمه آزاد هر یک از اجزای ربات همانند شکل عرب رسم می‌شود. معادله تعادل دینامیک با توجه به تئوری پیچه برای لینک i ام بصورت زیر است:

$$M_i^{cg} \dot{t}_i = -W_i M_i^{cg} t_i + w_i^{Ac} + w_i^C + w_i^S, \quad (۴۱)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$



شکل ۷. موقعیت مرکز جرم اعضای ربات

Fig. 7. The position of the center of mass of the robot members

دینامیک استخراج شده با تئوری پیچ مکنایزم ربات در محیط نرم افزار سالدورکس طراحی و در محیط سیم مکانیک متلب شبیه سازی شده است. با توجه به شکل ۷، پارامترهای سینماتیکی و دینامیکی ربات به ترتیب در جدول ۱ و ۲ مشخص شده اند.

به ازای مسیر مجری نهایی مطابق شکل ۸، پاسخ های دو مدل تحلیلی و سیم مکانیک مقایسه می شوند. مسیر حرکت، منحنی پایه سیکلوئیدی است که حرکتی هموار را ایجاد می کند و فاقد جهش در نقاط ابتدایی و انتهایی می باشد. در شکل ۹ زاویه اتصال پاهای دوم تا پنجم (θ_i) نسبت به پای اول در دستگاه مختصات بدنه نمایش داده شده است. با حل سینماتیک معکوس زوایا، سرعت های زاویه ای و شتاب های زاویه ای محاسبه می شوند. شکل ۱۰، زوایا را که از مدل تحلیلی (θ_i) و شبیه سازی سیم مکانیک (θ_{ISM}) بدست آمده نمایش می دهد. همچنین شکل ۱۱، سرعت های زاویه ای مدل تحلیلی ($\dot{\theta}_i$) و شبیه سازی سیم مکانیک ($\dot{\theta}_{ISM}$) را نشان می دهد. شکل ۱۲، نیز شتاب های زاویه ای مدل تحلیلی ($\ddot{\theta}_i$) و شبیه سازی سیم مکانیک ($\ddot{\theta}_{ISM}$) را نمایش می دهد. بیشترین مقدار خطا در هر کدام از این نمودارها کمتر از ۰/۰۱ درصد است. مطابق شکل ۱۳، میزان حرکت عملگرهای خطی از مرکز مفاصل کروی اندازه گیری می شود. این مقادیر جابجایی که از مدل تحلیلی (L_i) و شبیه سازی سیم مکانیک (L_{ISM}) بدست آمده، در شکل ۱۴ نشان داده شده است.

برای صحت گذاری مدل دینامیک معکوس، شتاب متناظر با مسیر مجری نهایی، به مدل تحلیلی اعمال و گشتاور عملگرها به عنوان حل مدل دینامیکی، با خروجی های حاصل از شبیه سازی سیم مکانیک مقایسه

بردار توئیست ربات، t ، را می توان به صورت یک تبدیل خطی از نرخ زاویه مفاصل در نظر گرفت، عبارتی می توان نوشت:

$$t = T\dot{\theta} \quad (46)$$

و همچنین رنج عملگرها را می توان بصورت یک تبدیل خطی از گشتاورهای فعال عملگرها نوشت.

$$w^{Ac} = T^{Ac}\tau \quad (47)$$

با جایگذاری معادلات (۳۵) و (۴۶) در معادله (۴۲) بدست می آید:

$$K^T\lambda + T^{Ac}\tau = \eta \quad (48)$$

که در آن

$$\eta = M^{cg}\ddot{t} + WM^{cg}\dot{t} - w^s \quad (49)$$

فرم بسته معادلات دینامیک ربات را می توان به شکل ذیل نوشت:

$$\begin{bmatrix} K^T & T^{Ac} \\ S^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

که در نهایت رنج قیدی و نیروهای عملگری ربات از رابطه زیر استخراج می شود:

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^T & T^{Ac} \\ S^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \eta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

۷- صحت سنجی

برای حصول اطمینان از صحت معادلات سینماتیک استخراج شده که مبنای تحلیل های تکنیکی هستند و همچنین حصول اطمینان از معادلات

جدول ۱. پارامترهای سینماتیکی ربات

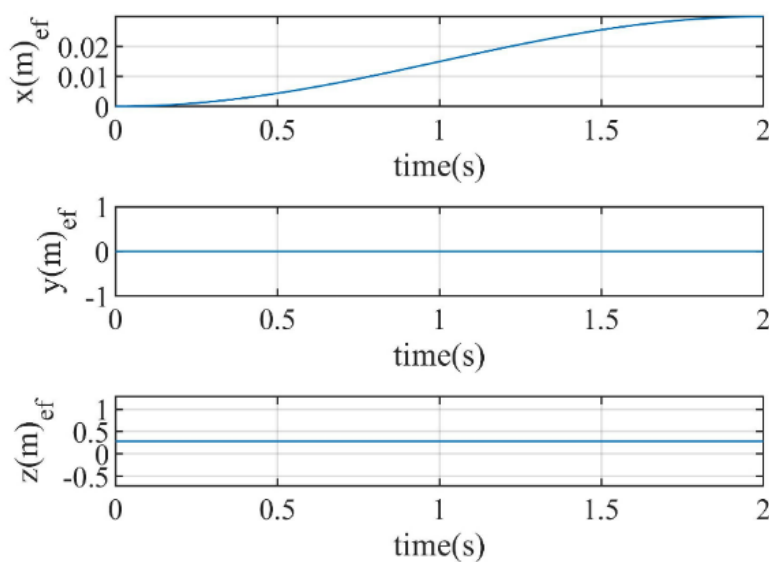
Table 1. Kinematic parameters of the robot

موقعیت مفاصل دورانی (${}^O C_i$)	سایر پامترها ($r_i, r_{i_{cg}}, l_{i_c}$)	موقعیت مفاصل کروی (${}^A M_i$)
$C_1 = (0, 0, 0, 0.254)$	$r_i = 0.1 \text{ m}$	${}^A M_1 = (0.16, 0, 0.06)$
$C_2 = (0, 0, 0, 0.254)$	$r_{i_{cg}} = r_i / 2$	${}^A M_2 = (0.17, 0.1, 0.12)$
$C_3 = (0, 0, 0, 0.13)$	$l_{i_c} = 0.1628 \text{ m}$	${}^A M_3 = (-0.14, 0.18, 0.17)$
$C_4 = (0, 0, 0, 0.2)$		${}^A M_4 = (-0.14, -0.18, 0.17)$
$C_5 = (0, 0, 0, 0.185)$		${}^A M_5 = (-0.17, -0.1, 0.12)$

جدول ۲. پارامترهای دینامیکی اجزای ربات

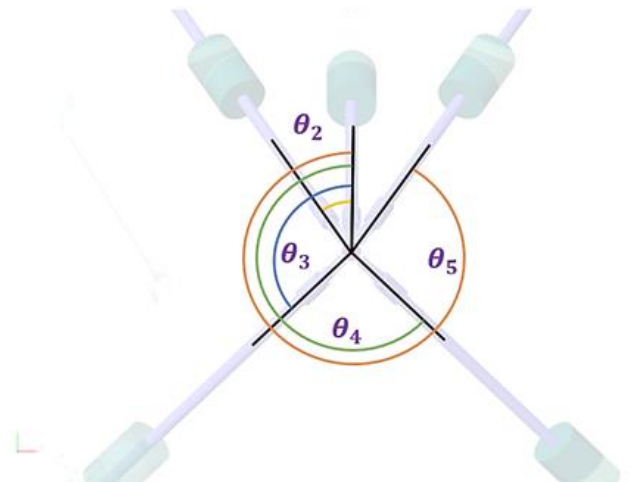
Table 2. Dynamic parameters of the robot

جرم (Kg)	اینرسی ($\text{Kg} \cdot \text{m}^2$)	عضو
۳	$\text{diag}(0, 1, 1) \times 0.1$	$\text{link}_{i,1}, i=1, \dots, 5$
۲	$\text{diag}(0, 7, 0.7) \times 0.1$	$\text{link}_{i,2}, i=1, \dots, 5$
۰/۰۵	$\text{diag}(0, 5, 0.5) \times 0.1$	$\text{link}_{i,3}, i=2, \dots, 5$
۳	$\text{diag}(0, 1, 1) \times 0.1$	End effector



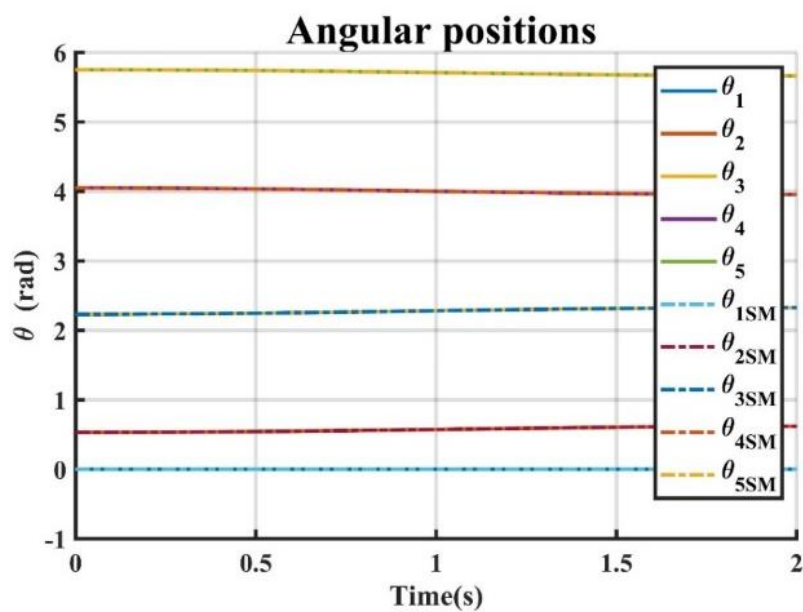
شکل ۸. مسیر مجری نهایی

Fig. 8. The end effector trajectory



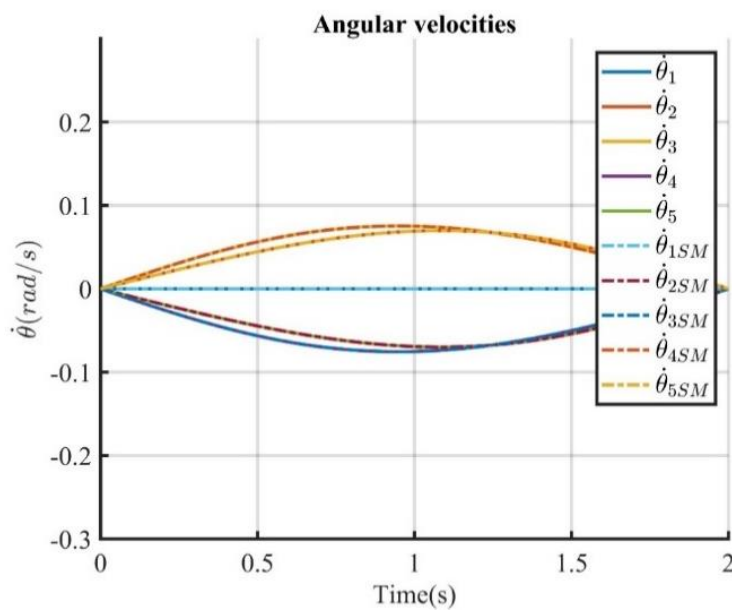
شکل ۹. متغیرهای مفصلی θ در ربات

Fig. 9. θ joint variables in the robot



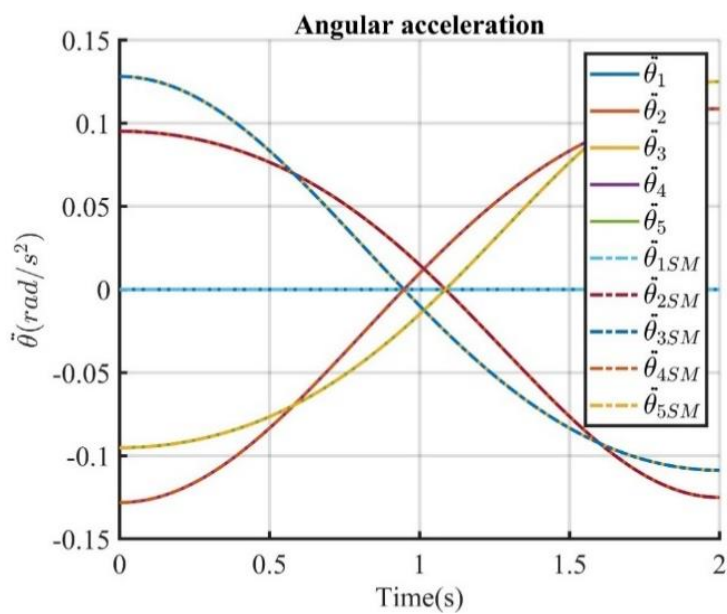
شکل ۱۰. صحت سنجی متغیرهای مفصلی θ

Fig. 10. Verification of joint variables θ



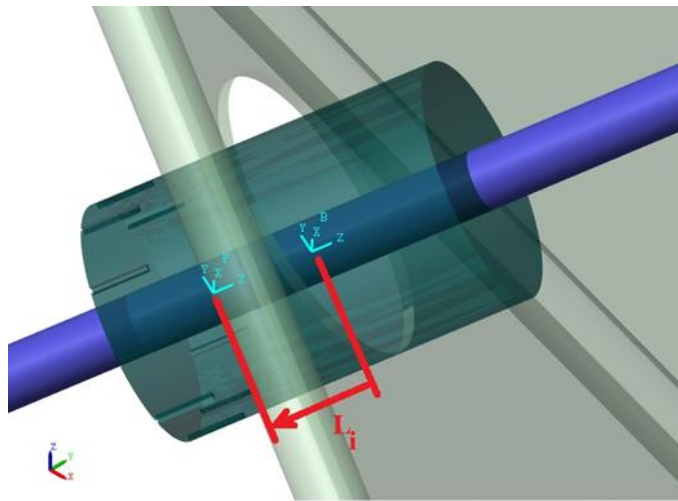
شکل ۱۱. صحت سنجی متغیرهای مفصلی $\dot{\theta}$

Fig. 11. Verification of joint variables $\dot{\theta}$



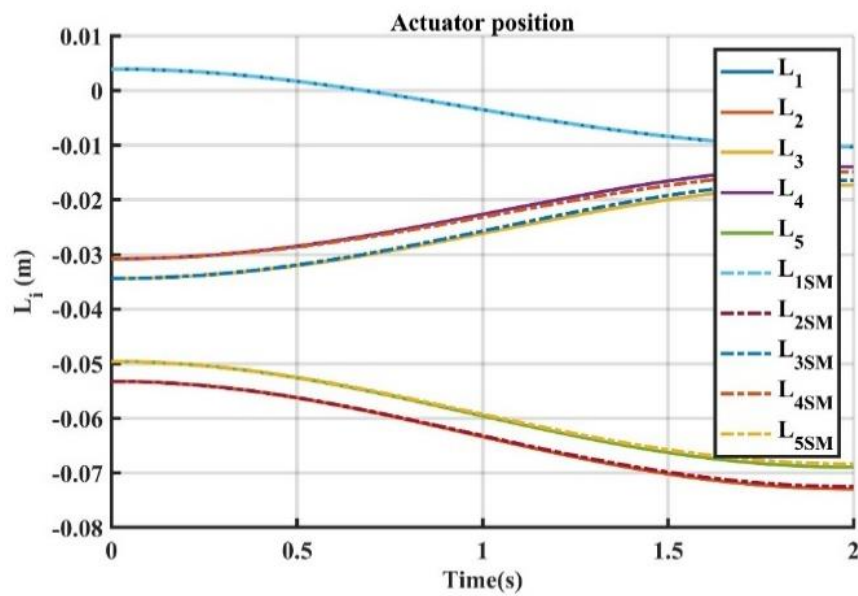
شکل ۱۲. صحت سنجی متغیرهای مفصلی $\ddot{\theta}$

Fig. 12. Verification of joint variables $\ddot{\theta}$



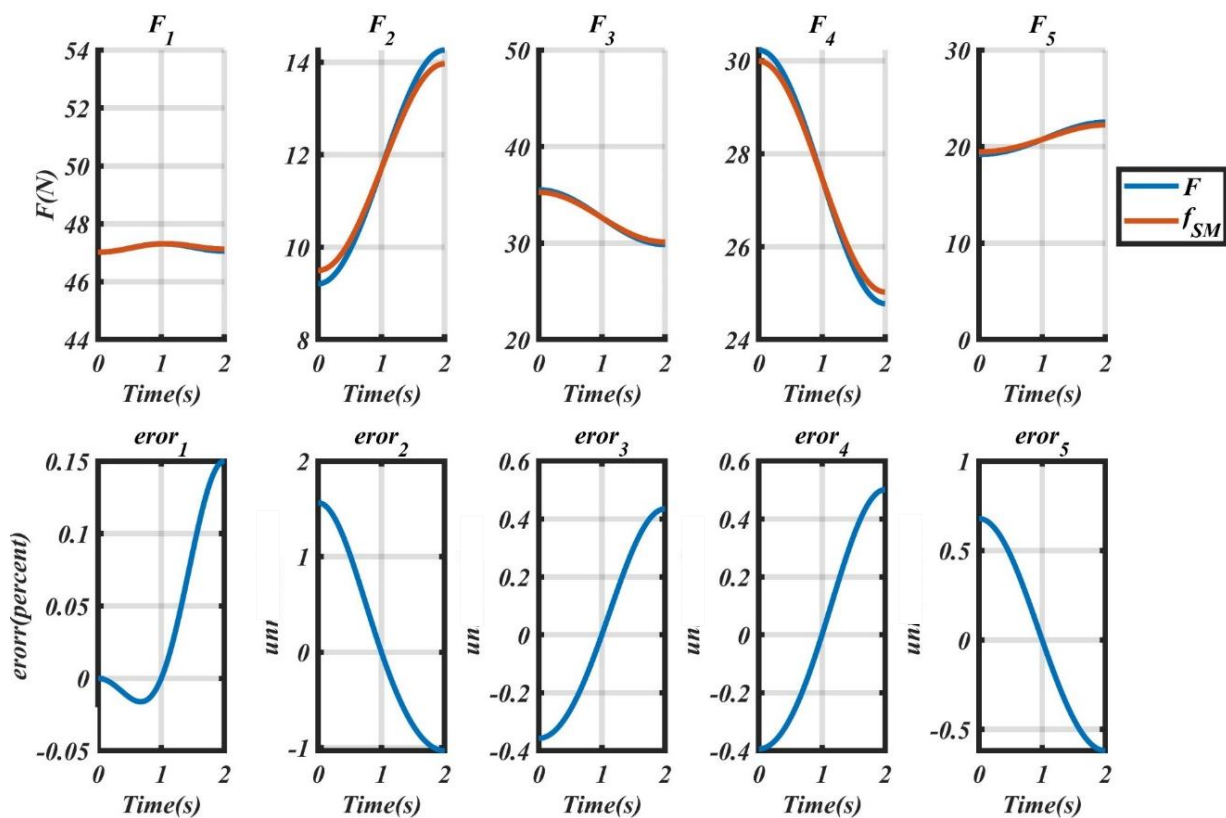
شکل ۱۳. نمایش میزان حرکت عملگرهای خطی ربات

Fig. 13. illustrating the movement of the robot's linear actuators



شکل ۱۴. حرکت عملگرهای خطی ربات

Fig. 14. Movement of robot linear actuators



شکل ۱۵. نیروی عملگرهای خطی ربات و درصد اختلاف با نتایج شبیه‌سازی

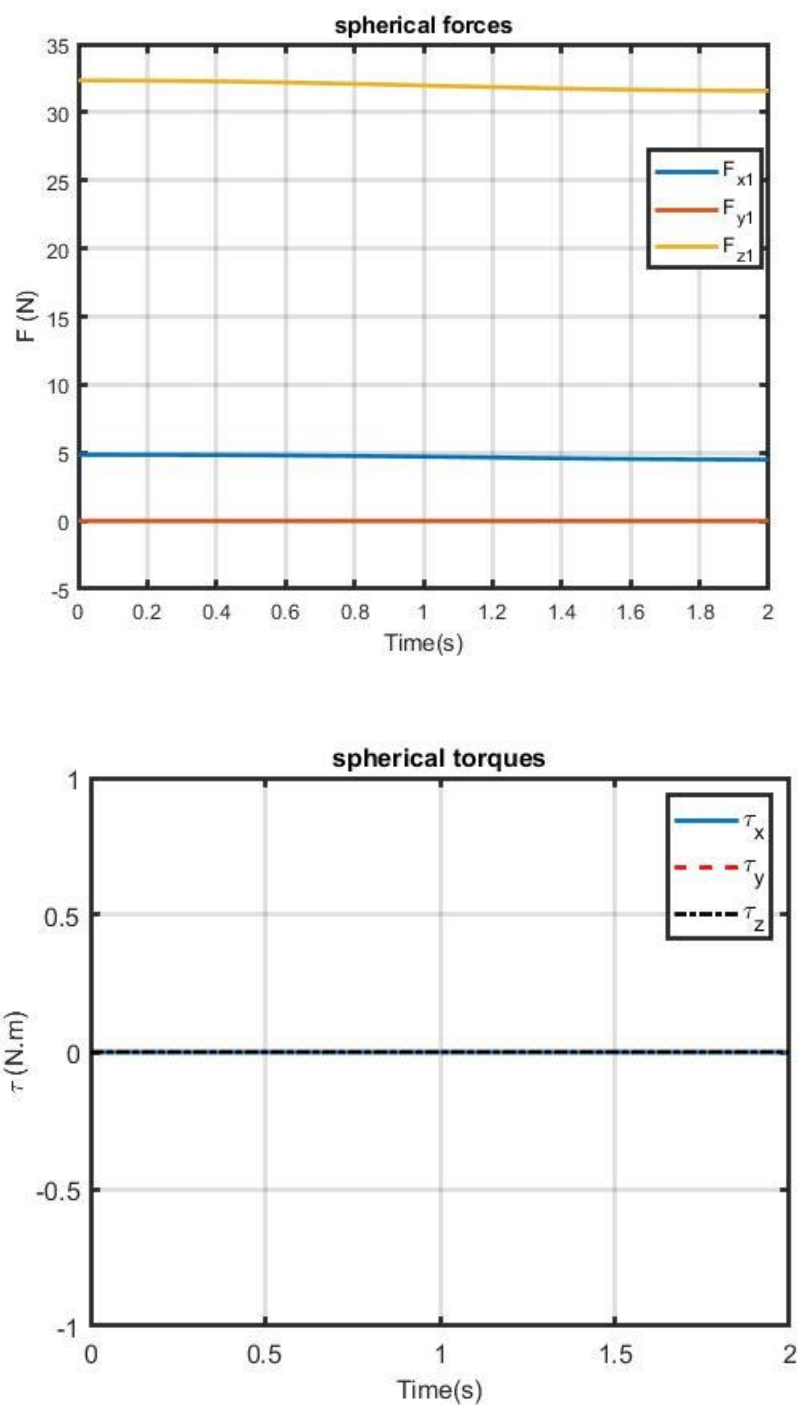
Fig. 15. The force of linear actuators and the error percentage with the simulation results

را در طول مسیر حرکت در دستگاه مختصات مرجع محاسبه نمود. بعنوان نمونه نیروها و گشتاورهای عکس‌العمل برای پای اول ربات در شکل‌های ۱۶ و ۱۷ رسم شده‌است.

۸- فضای کاری

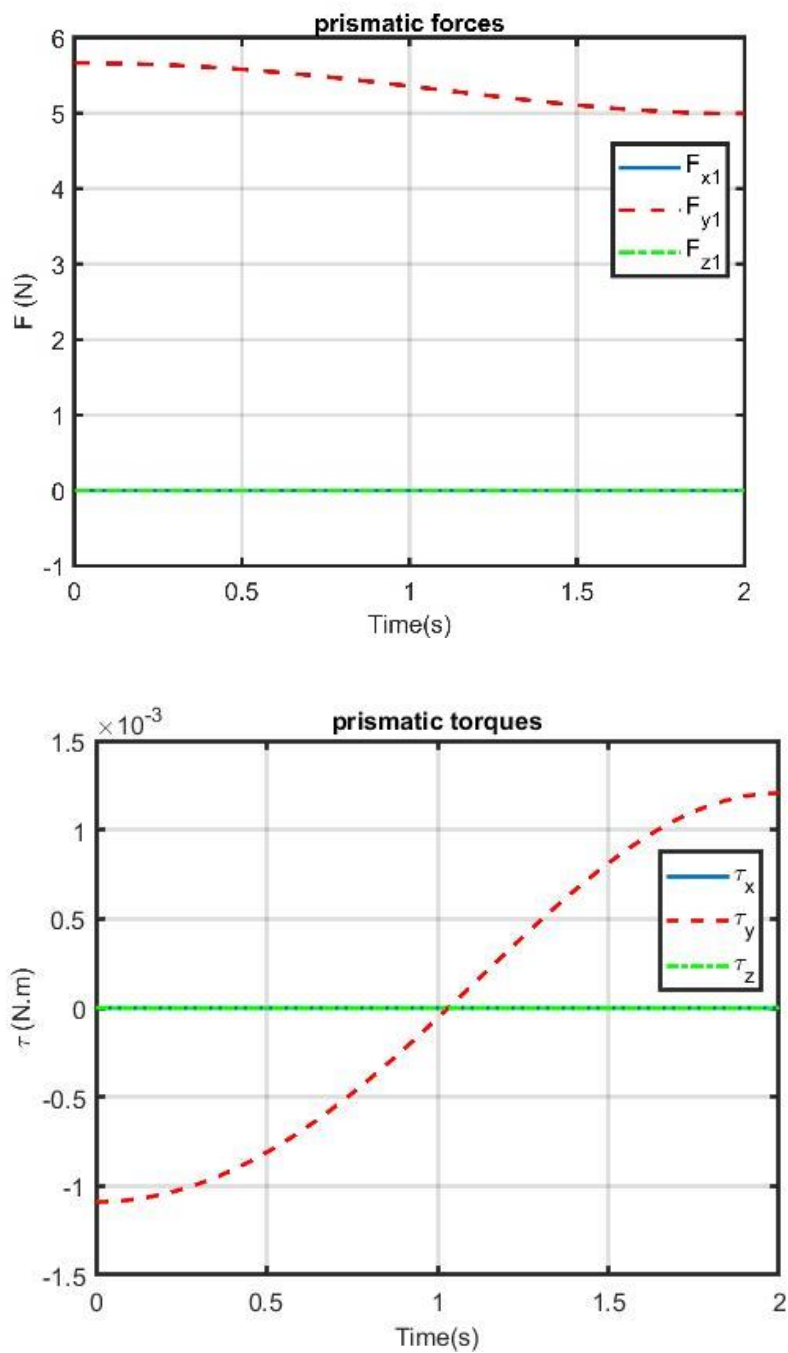
در این بخش با ارائه یک الگوریتم جستجو فضای کاری ربات تعیین می‌شود. در این الگوریتم با فرض مشخص بودن جهت‌گیری مجری نهایی، تمام فضای کاری جاروب می‌شود و به ازای هر نقطه، ماتریس ژاکوبین، محدودیت طول کورس عملگرهای خطی و قیود فیزیکی به منظور جلوگیری از برخورد اعضای ربات بررسی می‌شوند. سپس اگر همه قیود ارضا شوند، نقطه مورد نظر بعنوان فضای کاری ذخیره می‌شود. با توجه به فلوچارت ارائه

می‌شود. نتایج مدل تحلیلی و شبیه‌سازی سیم‌مکانیک در شکل ۱۵ ارائه شده‌اند. بیشترین مقدار خطا در بدترین حالت ۱/۵ درصد است که دلیل آن فرض در نظر گرفته‌شده در مدل دینامیکی است. همانطور که ذکر شد، پای اول ربات یک مفصل دورانی نسبت به بقیه پاهای ربات کمتر دارد و در محل این مفصل دورانی، پای اول به مجری نهایی قفل شده است. این بدان معناست که به مجری نهایی لینکی اضافه جوش شده است. در مدل دینامیکی مقدار جرم این لینک به جرم مجری نهایی افزوده شده ولی ممان اینرسی آن در نظر گرفته نشده است. عبارتی ممان اینرسی مجری نهایی در مدل تحلیلی تفاوتی اندک با مدل شبیه‌سازی شده دارد که منجر به تفاوت اندک در نتایج تحلیل دینامیکی شده است. همچنین با توجه به قابلیتی که تحلیل دینامیک پیچیده دارد می‌توان نیروی عکس‌العملی همه مفاصل ربات



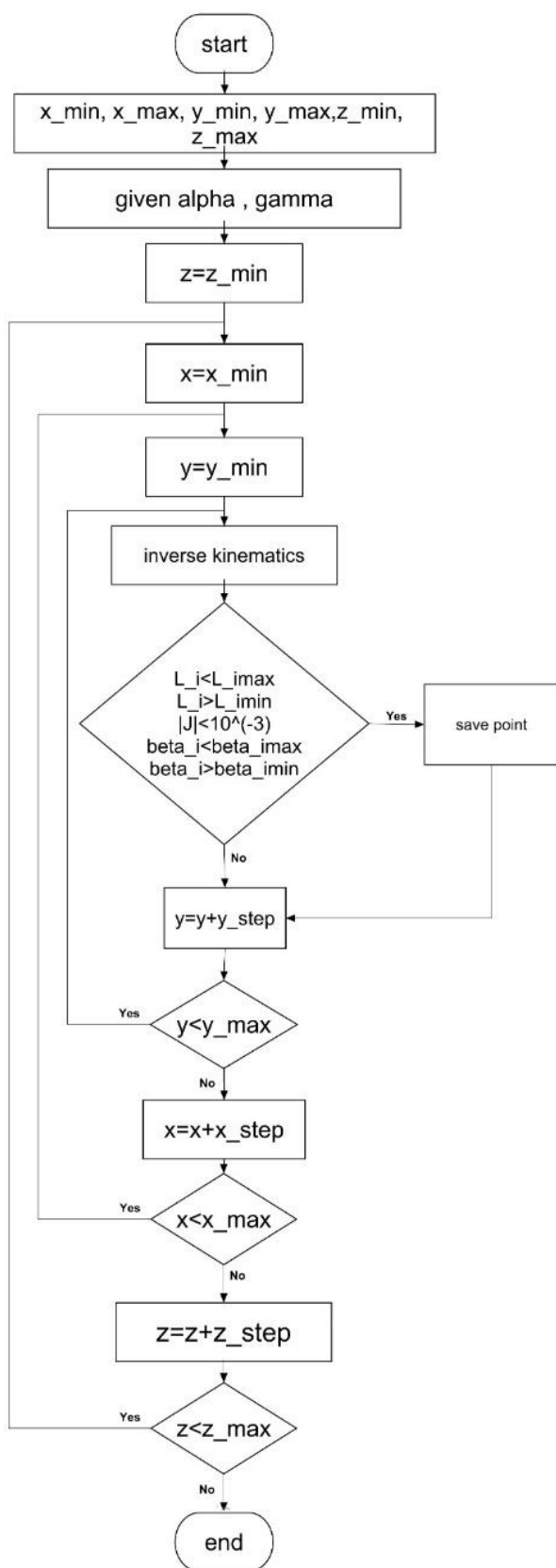
شکل ۱۶. رنج قیدی مفصل کروی پای اول ربات

Fig. 16. constraint wrench of the first spherical joint



شکل ۱۷. رنج قیدی مفصل خطی پای اول ربات

Fig. 17. constraint wrench of the prismatic joint for first link



شکل ۱۸. فلوچارت محاسبه فضای کاری

Fig. 18. Workspace calculation flowchart

شده در شکل ۱۸، عملیات جاروب کردن بدین صورت است که موقعیت مجری نهایی در صفحه $x\gamma$ به ازای ارتفاع ثابت z حرکت داده می‌شود. معادلات سینماتیک معکوس به ازای هر نقطه حل شده و پس از بررسی کردن محدودیت‌ها در همه نقاط صفحه، با تغییر ارتفاع جستجو در صفحه بعدی ادامه می‌یابد. این عملیات از ارتفاع کمینه‌ی تعریف شده برای ربات شروع می‌شود و تا ارتفاع بیشینه ادامه می‌یابد. قیدهایی که فضای کاری ربات را محدود می‌کنند به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$|J| \neq 0 \quad (52)$$

محدودیت طول لینک‌ها:

$$L_{i_{min}} \leq L_i \leq L_{i_{max}} \quad (53)$$

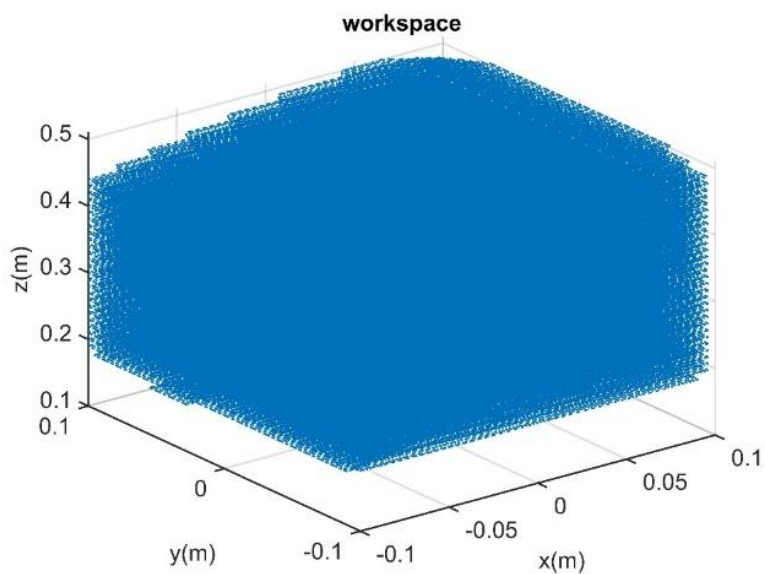
محدودیت برخورد اعضای ربات:

$$5^\circ \leq (\pi - \beta_i) \leq 185^\circ \quad (54)$$

در شکل ۱۹ فضای کاری ربات به ازای $\alpha = \gamma = 0$ رسم شده است و در شکل ۲۰ فضای کاری به ازای $\alpha = \pi/\epsilon$ و $\gamma = 0$ رسم شده است.

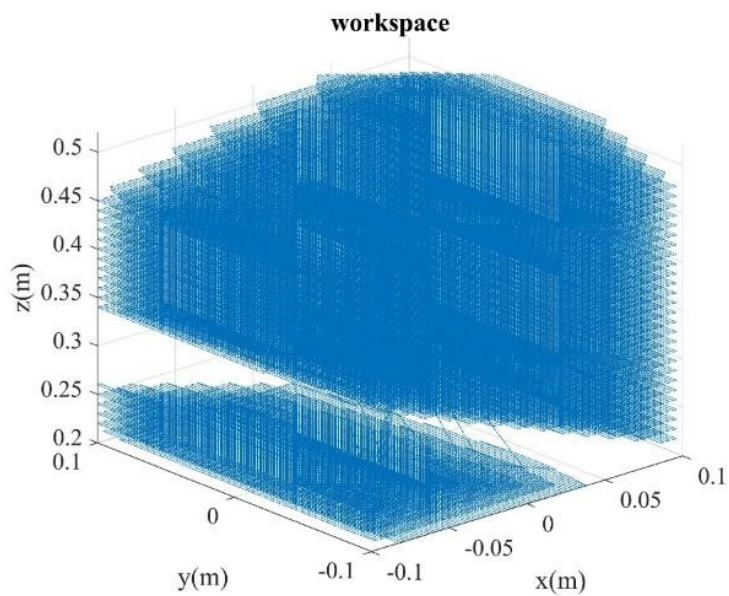
۹- بررسی نقاط تکینه

همانطور که در بخش مقدمه بیان شد، ربات‌های موازی نقاط تکین بسیاری در فضای کاری خود دارند. هنگام نزدیک شدن به نقاط تکین نیروی عملگرها بطور فزاینده‌ای افزایش پیدا می‌کند و نیاز است که این نقاط شناسایی و در طول عملیات کاری ربات از آن‌ها دوری شود. هنگامی که ربات در نقطه تکین خود قرار دارد، دترمینان ماتریس ژاکوبین برابر صفر است. در ربات پنج درجه آزادی حاضر، یک تعبیر فیزیکی صفر شدن ماتریس ژاکوبین این است که امتداد محور مجری نهایی از مرکز مفصل کروی یکی از پاها عبور می‌کند. با توجه به شکل ۲۱ الف و ۲۱ ب مشاهده می‌شود که در هر نقطه از فضای کاری، دو حالت ممکن برای هر کدام از پاهای ربات رخ می‌دهد، عبارتی مجری نهایی با دو جهت‌گیری خاص در حالت تکین قرار می‌گیرد. بطور کلی و با توجه به تعداد پاهای ربات در هر نقطه از فضای کاری حداقل ده نوع جهت‌گیری وجود دارد که ربات را در حالت تکین قرار



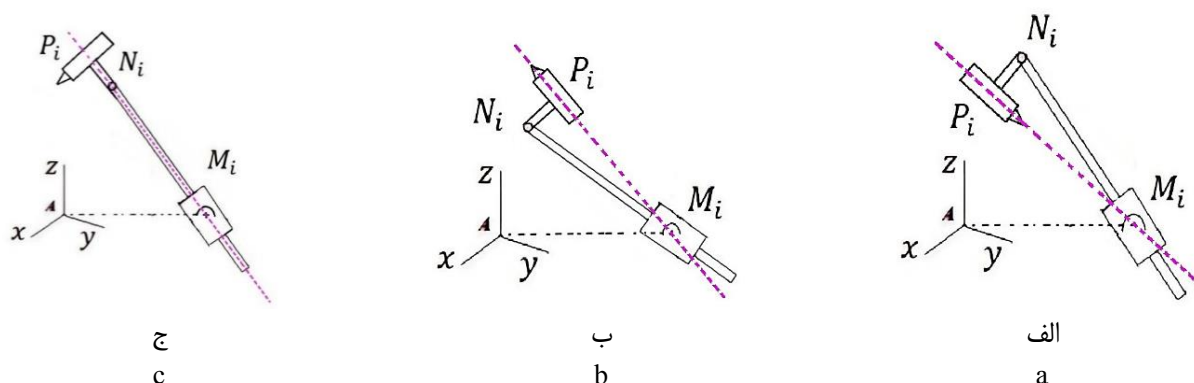
شکل ۱۹. فضای کاری به ازای $\alpha = \gamma = 0$

Fig. 19. workspace for $\alpha = 0, \gamma = 0$



شکل ۲۰. فضای کاری به ازای $\alpha = 0, \gamma = \pi/6$

Fig. 20. workspace for $\alpha = 0, \gamma = \pi/6$



شکل ۲۱. جهت گیری ربات در موقعیت تکینه

Fig. 21. Robot orientation in singular position

به افزایش شدید می‌کنند. یکی از شاخص‌های سینماتیکی مهم در تحلیل ربات‌های موازی شاخص چالاکی است [۲۴]. این شاخص از مقادیر منفرد ماتریس ژاکوبین استخراج می‌شود و بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$DI = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad (55)$$

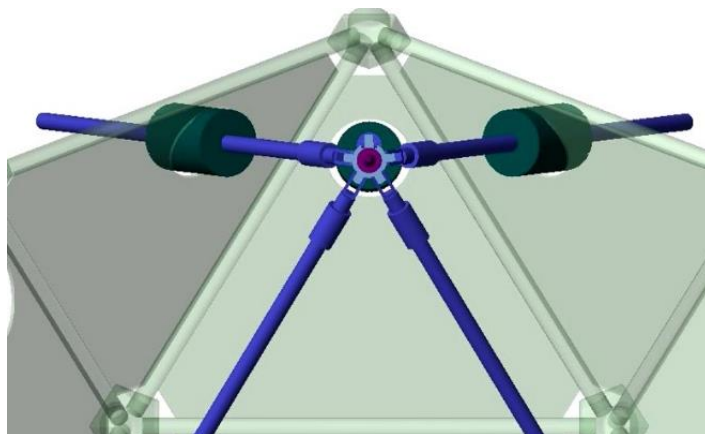
که در آن σ_{min} کمترین مقدار منفرد ماتریس ژاکوبین و σ_{max} بیشترین مقدار منفرد آن است. مقدار شاخص چالاکی بین صفر تا یک تغییر می‌کند و نمایانگر میزان نزدیک بودن ربات به نقاط تکین خود است. هر چه شاخص چالاکی به یک نزدیکتر باشد، ربات از نقاط تکین دورتر است و هر چه به صفر نزدیکتر باشد به نقاط تکین خود نزدیکتر است. می‌توان با جستجو در فضای کاری جهت‌گیری‌هایی را یافت که در آن شاخص چالاکی بیشینه است. همانطور که در شکل ۲۳ الف نمایان است، با حرکت در راستای محور Z ارتفاع صفحه‌ای که در آن شاخص چالاکی بیشینه است، $Z=0/25$ m می‌باشد. همچنین در این ارتفاع با توجه به شکل ۲۳ ب بهترین جهت‌گیری زاویه آلفا (دوران مجری نهایی حول محور X)، حدوداً ۵۱ درجه است. با توجه به شکل ۲۳ و مقادیر بیشینه شاخص چالاکی، می‌توان نتیجه گرفت که این

می‌دهد. تعبیر فیزیکی دیگر با توجه به شکل ۲۱ ج بدین معناست که امتداد دو عضو ربات در یک راستا قرار بگیرند. در این حالت نیز ماتریس ژاکوبین صفر است و ربات در حالت تکین قرار دارد.

بعنوان نمونه یک حالت تکینه برای بررسی عملکرد ربات در نظر گرفته می‌شود. با توجه به مسیر حرکتی که در شکل ۸ برای حرکت مجری نهایی تعریف شد، اگر ربات مسیر حرکت خود را در راستای محور X ادامه دهد به نقطه‌ای می‌رسد که امتداد محور مجری نهایی از مرکز مفصل کروی پای اول عبور می‌کند. در شکل ۲۲ الف این موقعیت تکین ربات نمایش داده شده‌است و با توجه به نتایج شبیه‌سازی‌ها در شکل ۲۲ ب قابل مشاهده است که در هنگام نزدیک شدن ربات به این نقطه نیروهای عملگر به شدت افزایش پیدا می‌کنند و در نقطه‌ی تکین به بیشترین حد خود می‌رسد. لذا لازم است فضای کاری ربات فاصله مناسبی از نقاط تکین داشته باشد. در بخش بعد معیاری جهت میزان دور یا نزدیک بودن ربات به نقاط تکین ارائه می‌گردد.

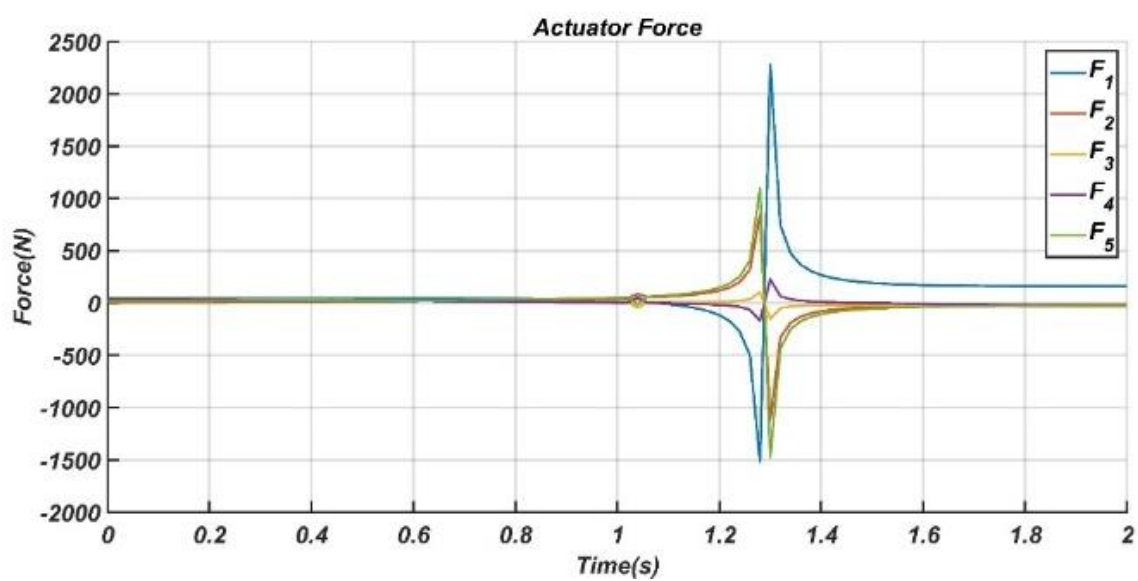
۱۰- شاخص چالاکی

همانطور که در قسمت قبل گفته شد هنگامی که ربات به سمت نقاط تکین خود حرکت می‌کند، نیروهای عملگری در نزدیکی نقاط تکین شروع



الف

a

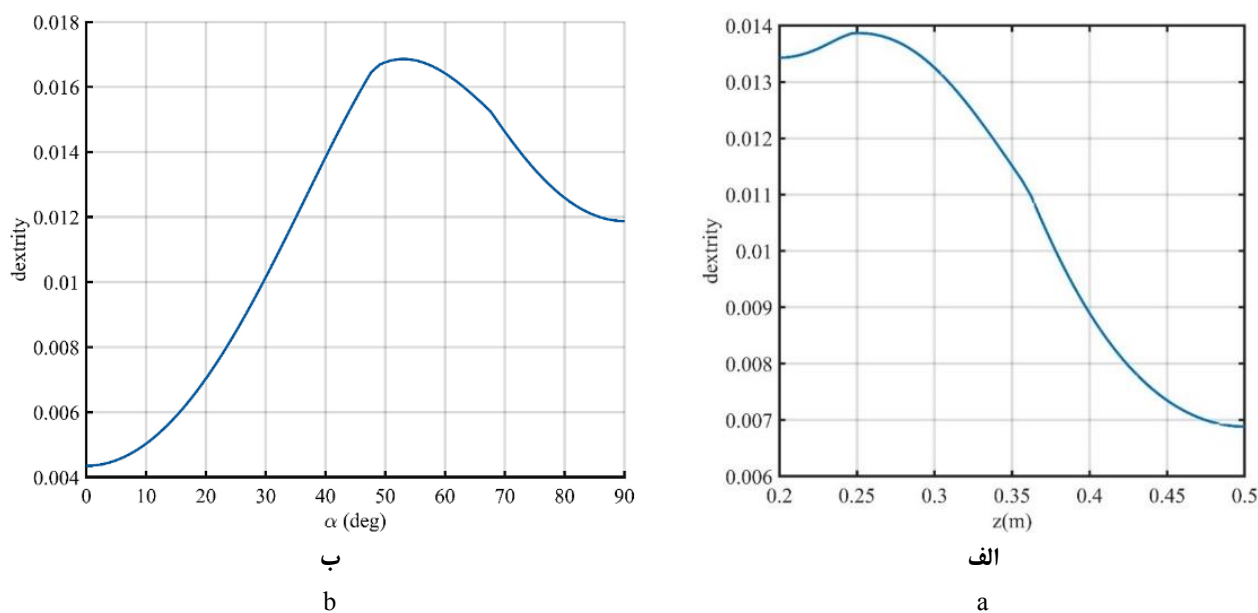


ب

b

شکل ۲۲. بررسی یک نقطه تکین

Fig. 22. Examining a singular point



شکل ۲۳. میزان تغییرات شاخص چالاکی به ازای تغییر ارتفاع و زاویه α

Fig. 23. The changes in dexterity index with regard to change in height and angle α

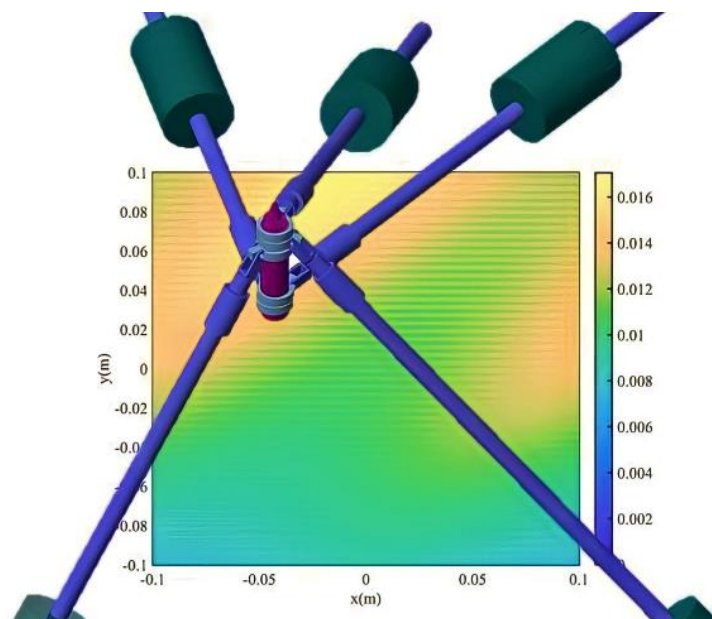
است. این ربات به دلیل توانایی جهت‌گیری مجری نهایی در فضای کاری، برای انجام فرایند ماشینکاری سطوح پیچیده مناسب است. بعد از انجام تحلیل‌های سینماتیکی ربات، به استخراج ماتریس ژاکوبین با تئوری پیچ‌پرداخته‌شد. از آنجایی که تئوری پیچ‌روشی موثر در تحلیل‌های دینامیکی سیستم‌های چند جسمی است، معادلات دینامیک ربات با استفاده از تئوری پیچ‌استخراج شدند. سپس با شبیه‌سازی در نرم‌افزار سیم‌مکانیک متلب، معادلات دینامیک صحت‌سنجی شدند. با محاسبه ماتریس ژاکوبین، نقاط تکیه ربات استخراج و با اعمال محدودیت‌های فیزیکی الگوریتمی به منظور محاسبه فضای کاری ربات ارائه گردید. سپس شاخص چالاکی به عنوان معیاری از دور بودن ربات از نقاط تکیه ارائه شد. این شاخص در فضای کاری ربات بررسی شد و مشخص گردید که ربات در ارتفاع $Z=0.25$ m و $\alpha = 51^\circ$ ، بیشترین مقدار شاخص چالاکی را دارد.

ربات، بر اساس رابطه ۵۵ ربات چالاکی نیست. البته این موضوع در عملکرد دینامیکی ربات مشکلی ایجاد نمی‌کند و ربات‌های متعددی با همین محدوده شاخص چالاکی در [۲۴] و [۲۵] توسط محققین بررسی و تحلیل شده‌اند.

در شکل ۲۴ مجری نهایی در ارتفاع $Z=0.25$ m یک فضای مربعی به ضلع ۲۰ سانتی‌متر را با دو جهت‌گیری مختلف جاروب و در هر نقطه از فضا میزان شاخص چالاکی مشخص شده‌است. با توجه به شکل، نقاطی یافت می‌شود که در آن ربات بیشترین چالاکی داراست و بعبارتی در دورترین حالت از نقاط تکیه قرار دارد.

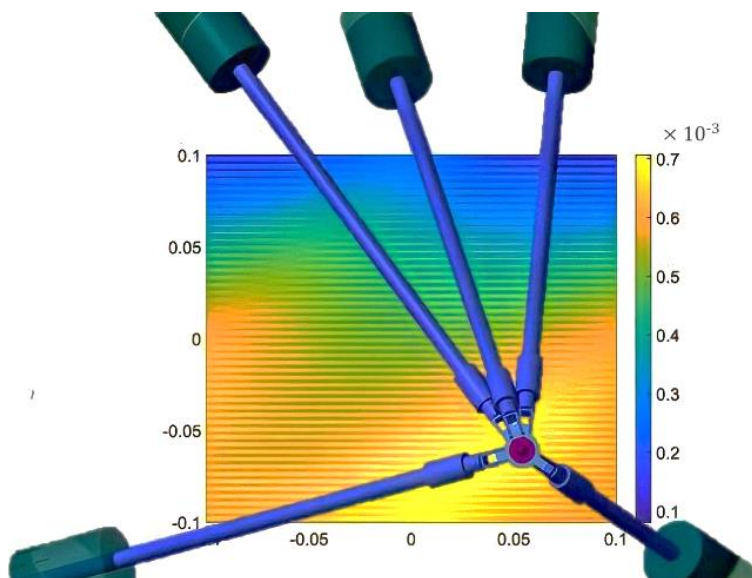
۱۱- نتیجه‌گیری

هدف این پژوهش، تحلیل سینماتیکی و دینامیکی یک ربات موازی ۵ درجه آزادی است که دارای سه درجه آزادی انتقالی و دو درجه آزادی دورانی



الف $\alpha = 51^\circ$

a $\alpha = 51^\circ$



ب $\alpha = 0^\circ$

b $\alpha = 0^\circ$

شکل ۲۴. توزیع شاخص چالاکی در یک فضای مربعی در ارتفاع $z=0.25$ m

Fig. 24. Dexterity index distribution in a square space at a height of $z=0.25$ m

۱۲- فهرست علائم

علائم لاتین

\$	پیچه حرکت	R	ماتریس دوران	w^C	رنج قیدی
K	ماتریس انتقال قید ^۱	J	ماتریس ژاکوبین	w^S	رنج نیروهای خارجی
M^{cg}	ماتریس جرم	DOF	درجه آزادی	w^{Ac}	رنج عملگرها
t	بردار توپست	DI	شاخص چالاکی	V	بردار سرعت خطی
W	ماتریس سرعت زاویه‌ای ^۲ (ماتریسی که ماتریس سرعت زاویه‌ای همه اعضا در آن قرار می‌گیرد).				
T^{Ac}	ماتریس شکل‌دهی رنج عملگرها ^۳				
OM_i	موقعیت قرارگیری مفاصل کروی در دستگاه مختصات بدنه				
AM_i	موقعیت قرارگیری مفاصل کروی در دستگاه مختصات مرجع				

علائم یونانی

Ω	ماتریس سرعت زاویه‌ای	σ_{min}	کمترین مقدار منفرد ماتریس ژاکوبین
λ	بردار رنج قیدی مفاصل ^۴	σ_{max}	بیشترین مقدار منفرد ماتریس ژاکوبین
ω	بردار سرعت زاویه‌ای		
τ	بردار نیرو-گشتاور عملگرها ^۵		
α	زاویه دوران حول محور X		
γ	زاویه دوران حول محور Y		

بالانویس‌ها

A	دستگاه مختصات جهانی	T	ترانهاده
O	دستگاه مختصات بدنی	S	نیروهای استاتیکی
Ac	عملگر	C	نیروهای قیدی
cg	مرکز جرم		

زیرنویس‌ها

ef	مجری نهایی
----	------------

¹ Constraint transfer matrix

² Angular velocity Dayad

³ Actuator-wrench shaping matrix

⁴ Joint-wrench constraint vectors

⁵ Joint actuator torques/forces

11. M. Zamani, M. Fekri, M. Tale Masouleh, Optimal design and fabrication of a 4-DOF quattrotaar parallel robot with singularity-free workspace by ABC and PSO algorithms, *Modares Mechanical Engineering*, 6(6) (2016)149-158. (in persian)
12. Ghaf-Ghanbari, M. Taghizadeh, m. mazare, Kinematic and dynamic performance evaluation of a four degrees of freedom parallel robot, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 53(4) (2021)2055-2072. (in persian)
13. G.F. Bär, G. Weiß, Kinematic analysis of a pentapod robot, *Journal for Geometry and Graphics*, 10(2) (2006) 173-182.
14. J. Borràs, F. Thomas, Singularity-invariant leg substitutions in pentapods, in: 2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, IEEE, 2010, pp. 2766-2771.
15. L. Luo, L. Hou, Q. Zhang, Y. Wei, Y. Wu, Kinematics and workspace analysis of 4SPRR-SPR parallel robots, *Plos one*, 16(1) (2021) e0239150.
16. Q. Guo, G. Cui, F. Zhang, J. Liu, Z. Cheng, Kinematics. Stiffness and Singularity Analysis of 3T2R 5-DOF Parallel Robot Mechanism, in: 2019 IEEE 9th Annual International Conference on CYBER Technology in Automation, Control, and Intelligent Systems (CYBER),IEEE, 2019, pp. 758-763.
17. T. Sun, S.-F. Yang, T. Huang, J.S. Dai, A finite and instantaneous screw based approach for topology design and kinematic analysis of 5-axis parallel kinematic machines, *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 31(1) (2018) 1-10.
18. A. Alagheband, M. Mahmoodi, J.K. Mills, B. Benhabib, Comparative analysis of a redundant pentapod parallel kinematic machine, *Journal of Mechanisms and Robotics*, 7(3) (2015) 034502.
19. M. Mahboubkhah, M.J. Nategh, S. E. Khadem, Inverse Dynamics of Hexapod Machine Tool Table and Comparative Investigation on the Effective Loads. *Modares Mechanical Engineering*, 9(1) (2009) 29-38. (in persian)
20. W. Lin, B. Li, X. Yang, D. Zhang, Modelling and control [1] F. Gao, B. Peng, H. Zhao, W. Li, A novel 5-DOF fully parallel kinematic machine tool, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 31(1) (2006) 201-207.
2. D. Stewart, A platform with six degrees of freedom, *Proceedings of the institution of mechanical engineers*, 180(1) (1965) 371-386.
3. X. Chen, X.-J. Liu, F. Xie, T. Sun, A comparison study on motion/force transmissibility of two typical 3-DOF parallel manipulators: the sprint Z3 and A3 tool heads, *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 11(1) (2014) 5.
4. Z. Huang, Q. Li, Type synthesis of symmetrical lower-mobility parallel mechanisms using the constraint-synthesis method, *The International Journal of Robotics Research*, 22(1) (2003)59-79.
5. S.A. Joshi, L.-W. Tsai, The kinematics of a class of 3-dof, 4-legged parallel manipulators, *J. Mech. Des.*, 125(1) (2003) 52-60.
6. H. Xie, S. Li, Y. Shen, S. Cao, W. Cai, Structural synthesis for a lower-mobility parallel kinematic machine with swivel hinges, *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 30(5) (2014) 413-420.
7. Y. Jin, Z. Bi, H. Liu, C. Higgins, M. Price, W. Chen, T. Huang, Kinematic analysis and dimensional synthesis of exechon parallel kinematic machine for large volume machining, *Journal of Mechanisms and Robotics*, 7(4) (2015) 041004.
8. X. Sheng, L. Xu, Z. Wang, A position-based explicit force control strategy based on online trajectory prediction, *International Journal of Robotics and Automation*, 32(1) (2017) 93-100.
9. B. Siciliano, The Tricept robot: Inverse kinematics, manipulability analysis and closed-loop direct kinematics algorithm, *Robotica*, 17(4) (1999) 437-445.
10. M. Mahboobkhah, N. Jaafarzadeh, Design and analysis of workspace and singularity of a 4 degree of freedom parallel robot, *Modares Mechanical Engineering*, 14(8) (2014) 28-36. (in persian)

23. J. Angeles, Fundamentals of robotic mechanical systems: theory, methods, and algorithms, Springer, 2003.
24. Y. Lou, G. Liu, N. Chen, Z. Li, Optimal design of parallel manipulators for maximum effective regular workspace, in: 2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, IEEE, 2005, pp. 795-800.
25. S. Kucuk, A dexterity comparison for 3-DOF planar parallel manipulators with two kinematic chains using genetic algorithms, *Mechatronics*, 19(6) (2009) 868-877.
- of inverse dynamics for a 5-DOF parallel kinematic polishing machine, *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 10(8) (2013) 314.
21. J. Zhao, H. Zhou, Z. Feng, J. Dai, An algebraic methodology to identify the principal screws and pitches of screw systems, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 223(8) (2009) 1931-1941.
22. A. Taghvaeipour, J. Angeles, L. Lessard, Constraint-wrench analysis of robotic manipulators, *Multibody System Dynamics*, 29(2) (2013) 139-168.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

S. Khosravi, M. Ghassabzadeh Saryazdi, Singularity, dynamics, and kinetics analysis of a 5 degrees of freedom parallel robot using screw theory, *Amirkabir J. Mech Eng.*, 55(8) (2023) 943-970.

DOI: 10.22060/mej.2023.22216.7580



