Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 55(12) (2024) 313-316
DOI: 10.22060/mej.2024.22724.7664

Investigating the nonlinear coupled vibrations of elastic blade of helicopter and analysis of flutter frequencies

Mousa rezaee , Mojtaba rezayi*

Department of Mechanical Engineering, Tabriz University, Tabriz, Iran

ABSTRACT: Aeroelastic instability in blades is one of the most important sources of instability in helicopter rotors, and the most critical of these instabilities is flutter. In this paper, in order to investigate the blade flutter and its relationship with the rotor structural parameters, using the Hamilton's principle and considering the Euler-Bernoulli beam theory, the coupled nonlinear partial differential equations governing the rotating elastic blade of a helicopter in the hover flight mode are extracted and converted into a set of ODEs by applying Galerkin method. Then the obtained equations for small perturbations are linearized around the steady state conditions. assuming the harmonic response, the natural frequencies of the blade in three motion axes are calculated and the relationship between the natural frequency and flutter frequency of the blade with structural and aerodynamic parameters are shown. Using numerical simulation, the results for two types of soft and stiff blades with given characteristics in terms of different parameters such as blade twist angle, pre-cone angle and rotation speed of rotor for the first mode shape are extracted. Finally, the effect of each of the mentioned parameters on the flutter frequency and also, the blade stability region is analyzed. It is shown that by increasing the blade stiffness, the flutter frequency will increase and the system will be stable.

Review History:

Received: Oct. 05, 2023
Revised: Mar. 07, 2024
Accepted: Mar. 19, 2024
Available Online: Apr. 18, 2024

Keywords:

Elastic Blade
Flutter
Helicopter Rotor
Aeroelastic
Instability

1- Introduction

The flutter phenomenon is the most dangerous type of instability in the helicopter rotor and occurs in various reasons. Hodges and Ormiston [1] investigated the stability of elastic flap bending, lead-lag bending, and torsion of uniform and untwisted cantilever rotor blades with variable structural coupling in hover flight mode. Pardo et al. [2] have presented the development mathematical modeling and analysis of the natural frequencies and mode shapes of coupled flap-lag-torsion of non-uniform rotor blades based on the Lagrange equations of motion. Kaya and Ozdemir [3] analyzed flutter stability of a uniform hingeless rotor blade in hover with structural coupling and demonstrated the effects of pitch angle and blade rotation speed. analyzing the aeroelastic stability of the curved composite hingeless rotor blade in the hover flight mode has been investigated by Amoozgar and Shahverdi [4]. Sarker and Chakravarty [5] have investigated of the coupled, steady-state dynamic response of the hingeless helicopter rotor blade at forward flight.

In this paper, the coupled nonlinear partial differential equations of the rotating elastic blade of a helicopter in the hover flight mode are extracted using the Hamilton's principle and considering the blade as a Euler-Bernoulli beam and converted into a set of ODEs by applying Galerkin method. the obtained equations are linearized around the steady state conditions for small perturbations and the flutter frequencies of the blade are analyzed.

2- Equations of motion

The coordinate system of an untwisted blade before and after deflections is considered as follows:

by applying the Galerkin method to the nonlinear variable coefficient equations and linearizing them around small perturbations, the governing equations of the blade in the dimensionless form are as follows [1]:

$$\begin{aligned}
\delta v_i :& \sum_{j=1}^{N}\Bigg\{ v_j \left\{ D_{ij} + \left[\Lambda_2 - (\Lambda_2-\Lambda_1)\sin^2(\theta)\right]\beta_j^4\delta_{ij} - \delta_{ij} \right\} + w_j \frac{\sin(2\theta)}{2}(\Lambda_2-\Lambda_1)\beta_j^4\delta_{ij} \\
&+(\Lambda_2-\Lambda_1)\sum_{k=1}^{N} K_{jki}\phi_j\left[-v_k\sin(2\theta)+w_k\cos(2\theta)\right] \\
&-2\beta_{pc}\delta_{ij}\dot{w}_j + 2\sum_{k=1}^{N}(F_{ikj}-F_{jki})v_k\dot{v}_j - 2\sum_{k=1}^{N}F_{jki}w_k\dot{w}_j \\
&+\delta_{ij}\ddot{v}_j + \frac{\gamma}{6}\left[\begin{array}{l} \bar{v}_i I_{ij}\phi_j + (2\frac{cd_0}{a}E_{ij} + \theta\bar{v}_i\delta_{ij} + \bar{v}_i\sum_{k=1}^{N}\phi_k H_{ijk})\dot{v}_j \\ +(2\bar{v}_i\delta_{ij} - \theta E_{ij} - \sum_{k=1}^{N}\phi_k G_{ijk})\dot{w}_j \end{array}\right]\Bigg\} \\
&= \frac{\gamma}{6}(\bar{v}_i^2 A_i - \frac{cd_0}{a}C_i + \bar{v}_i\theta B_i)
\end{aligned} \tag{1}$$

*Corresponding author's email: m_rezaee@tabrizu.ac.ir

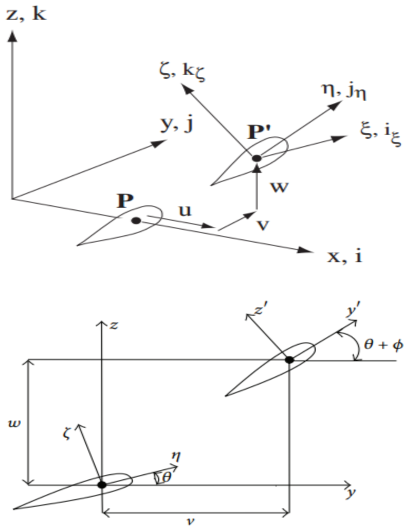


Fig. 1. Coordinate system of rotating helicopter blade cross section before and after deformation [1, 6]

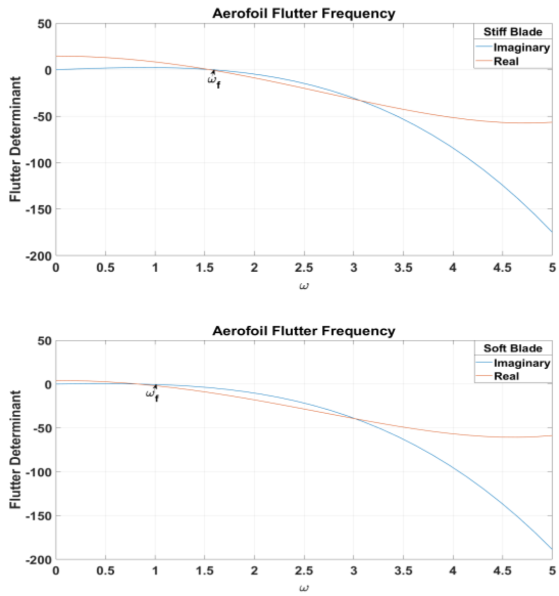


Fig. 2. flutter determinant Vs. frequency for $\Omega = 100\, {}^{rad}\!/_{s}$ **and** $\theta = 8^\circ, \beta_{pc} = 5^\circ$

$$\begin{aligned}
\delta w_i : \sum_{j=1}^{N} \Bigg\{ & w_j \left\{ D_{ij} + \left[\Lambda_1 + (\Lambda_2 - \Lambda_1)\sin^2(\theta) \right] \beta_j^4 \delta_{ij} \right\} + v_j \frac{\sin(2\theta)}{2} (\Lambda_2 - \Lambda_1) \beta_j^4 \delta_{ij} \\
& + (\Lambda_2 - \Lambda_1) \sum_{k=1}^{N} K_{jki} \phi_j \left[v_k \cos(2\theta) + w_k \sin(2\theta) \right] + 2\beta_{pc} \delta_{ij} \dot{v}_j \\
& + 2 \sum_{k=1}^{N} F_{ikj} w_k \dot{v}_j + \ddot{w}_j \left(1 + \frac{\gamma \bar{c}}{24}\right) \delta_{ij} \\
& + \frac{\gamma}{6} \left[\begin{array}{l} -J_{ij} \phi_j + \sum_{k=1}^{N} L_{ijk} v_j w_j + \beta_{pc} E_{ij} v_j - \frac{\bar{c}}{2} O_{ij} w_j \\ -(2\theta E_{ij} + 2 \sum_{k=1}^{N} \phi_k G_{ijk} - \bar{v}_i \delta_{ij}) \dot{v}_j + E_{ij} \dot{w}_j - \frac{3\bar{c}}{4} I_{ij} \dot{\phi}_j \end{array} \right] \Bigg\} \\
= & -\beta_{pc} B_i + \frac{\gamma}{6} \left(-\bar{\mathrm{v}}_i B_i + \theta C_i + \frac{\bar{c}}{2} \beta_{pc} B_i \right)
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\delta \phi_i : \sum_{j=1}^{N} \Bigg\{ & \phi_j \left\{ \mu^2 K N_{ij} + \left[k \gamma_j^2 + (\mu_2^2 - \mu_1^2) \cos(2\theta) \right] \delta_{ij} \right\} \\
& + (\Lambda_2 - \Lambda_1) \sum_{k=1}^{N} K_{ijk} \left[\frac{\sin(2\theta)}{2} (w_j w_k - v_j v_k) + \cos(2\theta) v_j w_k \right] \\
& + \mu^2 \delta_{ij} \ddot{\phi}_j + \frac{\gamma \bar{c}^2}{48} M_{ij} \dot{\phi} \Bigg\} \\
= & -(\mu_2^2 - \mu_1^2) \frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{2} \gamma_i}
\end{aligned} \tag{3}$$

In order to investigating of the flutter, the response is assumed to be harmonic and so from equations (1) to (3) it can be written as follows:

$$-\omega^2 [M] + i\omega [D] + [K] = 0 \tag{4}$$

M, D, K are mass, damping and stiffness matrices.

3- Results and Discussion

flutter determinant variations with frequency and dimensionless flutter frequency (ω_f) for a blade with given parameters [1] are shown in “figure 2”.

As shown in “Figure 2”, for a stiff blade, the flutter frequency (intersection of imaginary part with the zero axis) is about 1.57 and since the imaginary part intersects the zero axis in the negative region of the real part, the system will stable and the stability region is placed after the frequency point of 1.55 and also, for the flexible blade, the flutter frequency is about 0.82 and the stability region is placed after 0.826. it can be concluded that with increasing of the blade stiffness, the flutter occurred later and the system will be stable.

the flutter determinant variations with blade rotation speed, pitch angle θ and precone angle β_{pc} are shown in “Figure 3” and “Figure 4”.

As it can be seen from “Figure 3,4” with increasing of the rotation speed, the flutter frequency decreases. as well as with increasing of the pitch angle, the flutter frequency will increases and increasing the pre-cone angle decreses the flutter frequency slightly.

4- Conclusions

1- By increasing the stiffness of the blade, the flutter frequency increases and the flutter occurs later and since the flutter frequency is placed in the negative region of the real values, the system will be stable.

2- By increasing the rotation speed of the rotor, while the flutter frequency decreases, the system is stable.

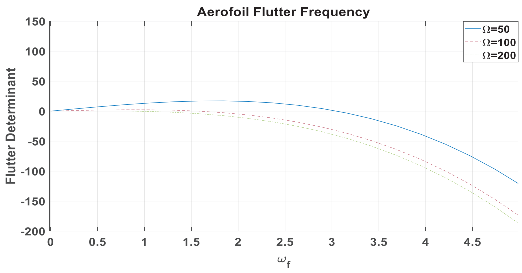


Fig. 3. flutter frequency variations with rotor speed for $\theta = 8^{\circ}, \beta_{pc} = 5^{\circ}$

3- As the pre-cone angle increases, the flutter frequency is slightly reduced and with increasing of pitch angle, the flutter frequency increases.

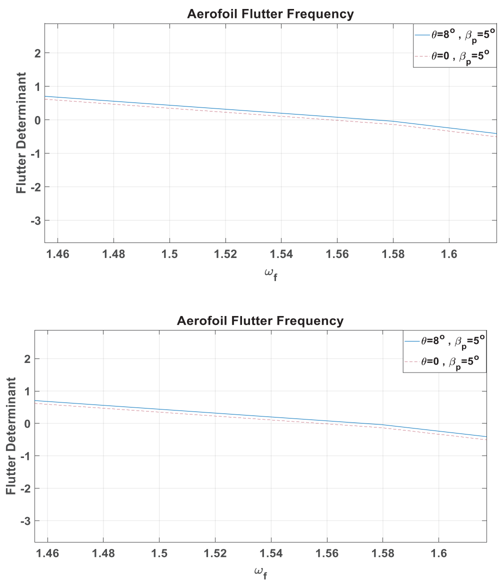


Fig. 4. flutter frequency variations for pitch angle θ and precone angle β_{pc}

References

[1] D.H. Hodges, R.A. Ormiston, Stability of elastic bending and torsion of uniform cantilever rotor blades in hover with variable structural coupling. NASA TN D-8192, NASA Technical note, Washington, DC, (1976).

[2] A. Castillo Pardo, I. Goulos, V. Pachidis, Modelling and analysis of coupled flap-lag-torsion vibration characteristics helicopter rotor blades, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering, 231(10) (2017) 1804-1823.

[3] O.O. Ozgumus, M.O. Kaya, Formulation for flutter and vibration analysis of a hingeless helicopter blade in hover: part II. Results of flutter stability and vibration analysis of a hingeless helicopter blade in hover, Aircraft Engineering and Aerospace Technology, 79(3) (2007) 231-237.

[4] M. Amoozgar, H. Shahverdi, Aeroelastic stability analysis of curved composite blades in hover using fully intrinsic equations, International Journal of Aeronautical and Space Sciences, 20 (2019) 653-663.

[5] P. Sarker, U.K. Chakravarty, On the dynamic response of a hingeless helicopter rotor blade, Aerospace Science and Technology, 115 (2021) 106741.

[6] I. Chopra, A. Datta, Helicopter dynamics, ENAE, 633 (2011) 79-114.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

M. rezaee, M. rezayi, Investigating the nonlinear coupled vibrations of elastic blade of helicopter and analysis of flutter frequencies, Amirkabir J. Mech Eng., 55(12) (2024) 313-316.

DOI: 10.22060/mej.2024.22724.7664

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۵، شماره ۱۲، سال ۱۴۰۲، صفحات ۱۴۸۳ تا ۱۴۹۸
DOI: 10.22060/mej.2024.22724.7664

بررسی ارتعاشات غیرخطی کوپل پره الاستیک روتور بالگرد و تحلیل فرکانسهای فلاتر

موسی رضائی*، مجتبی رضایی

دانشکده مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۴۰۲/۰۷/۱۳
بازنگری: ۱۴۰۲/۱۲/۱۷
پذیرش: ۱۴۰۲/۱۲/۲۹
ارائه آنلاین: ۱۴۰۳/۰۱/۳۰

کلمات کلیدی:
پره انعطاف پذیر
فلاتر
روتور بالگرد
ناپایداری
آیروالاستیکی

خلاصه: ناپایداری آیروالاستیکی در پرهها از مهمترین عوامل و منابع ناپایداری در روتور بالگردها محسوب می‌شوند که از جمله این ناپایداریها، فلاتر می‌باشد. در این مقاله به منظور بررسی فلاتر پره و ارتباط آن با پارامترهای سازهای روتور، معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی کوپل حاکم بر پره الاستیک دوار روتور بالگرد با فرض تیر اویلر-برنولی تحت اثر نیروهای آیرودینامیکی در حالت هاور با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده و با اعمال روش گالرکین به معادلات دیفرانسیل غیرخطی معمولی تبدیل می‌شوند و سپس معادلات بدست آمده برای مقادیر اغتشاشی کوچک حول شرایط حالت دائم خطی می‌گردند. با فرض اینکه پاسخ بصورت هارمونیک باشد، فرکانسهای طبیعی پره در سه محور حرکتی محاسبه شده و ارتباط فرکانس طبیعی و فرکانس فلاتر پره با پارامترهای سازهای و آیرودینامیکی نشان داده می‌شود. با استفاده از شبیه سازی عددی، نتایج برای دو نوع پره سفت و پره نرم با مشخصات معین برحسب پارامترهای مختلف از جمله زاویه پیچش پره، زاویه پیش مخروطی و سرعت چرخش روتور برای شکل مود اول ترسیم شده و اثر هر کدام از پارامترهای مذکور بر روی فرکانس فلاتر و نیز ناحیه پایداری پره مورد تجزیه و تحلیل قرارمی‌گیرد. نشان داده می‌شود با افزایش صلبیت پره، فرکانس فلاتر افزایش یافته و سیستم پایدار خواهد بود.

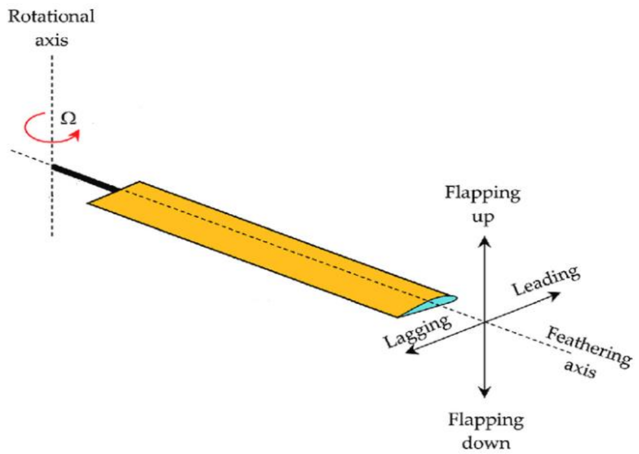
۱- مقدمه

عمده‌ترین ناپایداری در بالگردها، ناپایداری آیروالاستیکی ناشی از برهم‌کنش بین نیروهای مکانیکی، آیرودینامیکی و نیروهای گریز از مرکز بر روی پره‌های[1] انعطاف‌پذیر چرخان روتور می‌باشد و از جمله مهم‌ترین این ناپایداری‌ها می توان فلاتر را نام برد. فلاتر در واقع نوعی ناپایداری آیروالاستیکی خود تحریک با منبع خارجی جریان هوا می‌باشد که در نتیجه برهم کنش متقابل بین نیروهای آیرودینامیکی، استحکام و اینرسی بر روی سازه ایجاد می‌شود. حرکت پره‌های چرخان انعطاف‌پذیر باعث ناپایداری آیروالاستیکی پره گردیده و در صورت عدم کنترل و کاهش آن سبب فلاتر و یا واگرایی[2] می‌گردد. پدیده فلاتر خطرناک‌ترین نوع ناپایداری در روتور بالگرد بوده و بطور کلی فلاتر در روتور بالگرد به دلایل مختلفی ایجاد می‌گردد که انواع آن عبارتند از: فلاتر فلپ- لگ که در این حالت مودهای فلپینگ و لکینگ به همراه نیروهای آیرودینامیکی ناپایدار، باعث ایجاد ناپایداری در محورهای فلپ و لگ شده و بواسطه نیروهای کوریولیس و آیرودینامیکی باهم کوپل می‌گردند. فلاتر فلپ-پیچش، بدلیل کوپل مودهای خمشی و پیچشی در محورهای فلپ و پیچ و فلاتر پیچش-لگ بدلیل کوپل مودهای پیچشی و خمشی در محورهای پیچ و لکینگ اتفاق می‌افتد و فلاتر فلپ-لگ-پیچش بدلیل کوپل در هر سه محور خمشی فلپ و لکینگ و محور پیچش اتفاق می‌افتد. حرکت پره در یک روتور بالگرد شامل حرکت در جهت چرخش شفت با سرعت Ω و سه راستای حرکتی در محورهای وتر پره (لکینگ)، خمش در محور عمود بر وتر پره (فلپینگ) و پیچش حول محور پره (گام) در شکل ۱ نشان داده شده است.

پایداری آیروالاستیکی و فلاتر تیرها و پره‌های چرخان ازجمله موضوعاتی هستند که توسط محققین زیادی مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته و مقالات زیادی در این باره ارائه شده است. هوبولت و بروکس [۱] معادلات دیفرانسیل حرکت برای خمش در جهت محور فلپ و خمش در جهت محور وتر و پیچش جفت‌شده یک پره روتور غیریکنواخت پیچ‌خورده که تحت بارهای آیرودینامیکی خطی قرار داشت را توسعه دادند. نظریه آنها

1 Blades
2 Divergency

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: m_rezaee@tabrizu.ac.ir



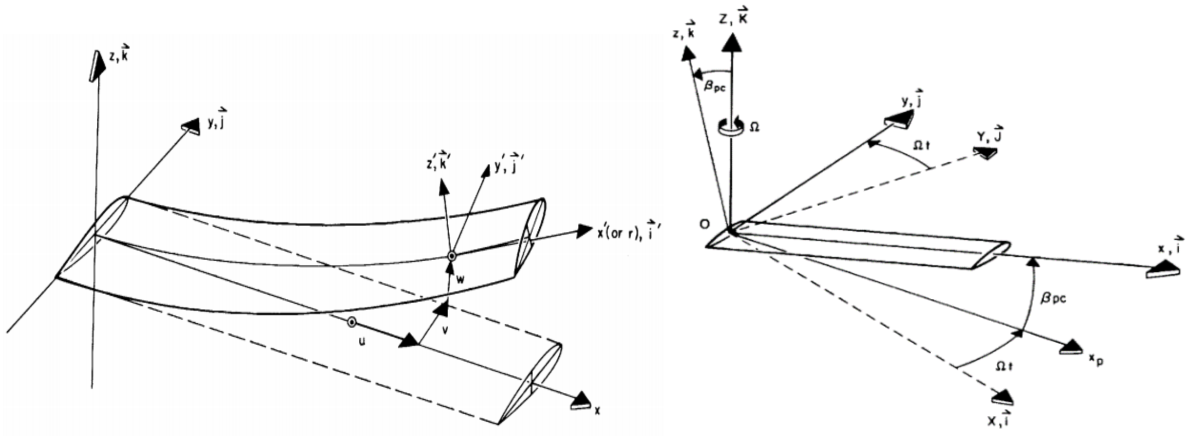
شکل ۱. شماتیکی از یک پره چرخان با سرعت چرخشی Ω در سه راستای لگینگ، فلپینگ و گام

Fig. 1. Schematic of a rotating blade with rotational speed in three directions: lagging, flapping and pitch

بر اساس تئوری کلاسیک تیر مهندسی و چشم‌پوشی از تغییر شکل برشی بود. هادز و ارمیستون [۲, ۳] معادلات دیفرانسیلی خطی و همچنین معادلات دیفرانسیلی جزئی غیرخطی تیر صلب یکسر گیردار چرخان با دو درجه آزادی در محورهای فلپینگ و لگینگ را استخراج نموده و پس از خطی نمودن این معادلات، پایداری پره‌های یکنواخت روتور بالگرد بدون لولا را در حالت هاور مطالعه و بررسی کردند. هادز و داول [۴] معادلات غیرخطی حرکت برای خمش الاستیک و پیچش پره‌های روتور غیر یکسان پیچ خورده را با استفاده از اصل همیلتون و روش نیوتن با فرض تیر باریک و همگن استخراج کرده و هادز و ارمیستون [۵] پایداری پره‌های روتور یکسر گیردار یکنواخت و غیر پیچ خورده در محورهای خمشی فلپینگ و لگینگ و محور پیچشی با کوپل سازه‌ای متغیر را در حالت هاور بررسی نموده و اثر پارامترهای مختلف سازه‌ای و آیرودینامیکی را بر روی پایداری پره‌های روتور مطالعه و تحلیل نموده‌اند. ارتعاشات غیر خطی و پایداری پره‌های پیچیده شامل اثرات کوریولیس توسط کازا و همکاران[۶] و همچنین پایداری آیروالاستیکی پره‌های روتور بدون لولا با کوپل خمشی فلپ-لگ-پیچش در پرواز رو به جلو با استفاده از روش المان محدود بر اساس اصل همیلتون توسط پاندا و چوپرا [۷] مورد بررسی قرار گرفته است. پاردو و همکاران [۸] یک فرمول ریاضی را برای مدلسازی فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای کوپل خمشی فلپینگ-لگینگ و پیچش پره‌های روتور غیریکنواخت مبتنی بر معادلات حرکت لاگرانژ ارائه نموده‌اند. فنق و همکاران [۹] ارتعاشات پره‌های چرخشی با کوپل خمشی- خمشی-محوری-پیچش را بر اساس مدل تیر اویلر-برنولی با تمرکز بر تأثیر بخش‌های وابسته به سرعت در معادلات از قبیل عبارت گریز از مرکز استاتیکی، عبارت گریز از مرکز دینامیکی و عبارت کوپل ژیروسکوپی را تحلیل و بررسی نموده، کایا و اوزدمیر [۱۰, ۱۱] معادلات ارتعاشی فلاتر را استخراج و پایداری فلاتر پره یکنواخت بدون لولا با کوپل سازه‌ای در حالت حرکت عمودی[۱] را بررسی و اثرات زاویه گام و سرعت چرخش پره را نشان داده‌اند. ژین و همکاران [۱۲] مدلسازی دینامیکی تیرهای چرخشی با مقاطع پیچ‌خورده را بررسی و ویژگیهای کوپلینگ خمشی- خمشی-محوری-پیچش را مورد بحث و بررسی قرار داده و هان و همکاران [۱۳] ارتعاشات آزاد تیر کامپوزیتی تیموشنکو چرخان با کوپل خمشی-پیچشی را تحلیل کرده‌اند. تجزیه و تحلیل پایداری آیروالاستیکی پره روتور بدون لولای کامپوزیتی دارای انحناء در حالت هاور توسط آموزگار و شاهوردی [۱۴] بررسی شده است. سارکر و چاکراوارتی [۱۵] پاسخ دینامیکی کوپل حالت پایا را برای پره روتور هلیکوپتر بدون لولا در پرواز رو به جلو مورد بررسی قرار داده‌اند.

در مقالات و بررسی‌های انجام شده عمدتاً بر روی تأثیر و ارتباط پارامترهای مرتبط از قبیل سرعت چرخش پره و زاویه گام و غیره با فرکانس‌های طبیعی سازه و یا شکل مودها تحلیل و بحث شده و به فرکانس‌های فلاتر و ارتباط آن با پارامترهای مذکور کمتر توجه شده است. در این مقاله معادلات دینامیکی دیفرانسیل غیرخطی حاکم با مدنظر قرار دادن اثر کوپل ژیروسکوپی برای پره الاستیک دوار بالگرد با روتور بدون

1 Hover



شکل ۲. سیستم مختصات پره بالگرد دوار قبل و بعد از تغییر شکل [۴]

Fig. 2. Coordinate system of rotating helicopter blade before and after deformation

لولا تحت اثر نیروهای آیرودینامیکی در حالت هاور با در نظر گرفتن پره به صورت تیر اویلر-برنولی با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده و با استفاده از روش گالرکین به معادلات دیفرانسیل غیرخطی معمولی تبدیل می‌شوند و سپس معادلات بدست آمده برای مقادیر اغتشاشی کوچک حول شرایط حالت دائم خطی می‌گردند. در نهایت، با حل معادلات بدست آمده فرکانس‌های فلاتر پره و ارتباط آن با پارامترهای سازه‌ای و آیرودینامیکی و سایر پارامترهای پره مورد بررسی قرار می‌گیرد.

برای استخراج و بررسی معادلات حرکت حول شرایط حالت دائم، فرض می‌شود که پره دارای جرم و سفتی یکنواخت بدون پیچش اولیه[1] بوده و وتر پره نسبت به محور الاستیک، محور کشش و مرکز جرم آن انحراف نداشته باشد. همچنین برای استخراج معادلات آیرودینامیکی از تئوری نوار[2] برای ایرفویل دو بعدی استفاده می‌شود.

به منظور بررسی فلاتر، پاسخ بصورت هارمونیک فرض شده و با تشکیل مسأله مقدار ویژه متناظر، مقادیر ویژه بدست آمده و در نهایت نتایج برای نوعی پره با مشخصات معین برحسب پارامترهای مختلف از قبیل زاویه پیچش، زاویه پیش مخروطی و سرعت چرخش روتور برای شکل مود اول ترسیم و تحلیل می‌گردند.

۲- معادلات حرکت

به منظور استخراج معادلات حرکت حاکم بر حرکت پره یکنواخت و بدون پیچش اولیه، سیستم مختصات پره قبل و بعد از تغییر شکل بصورت شکل ۲ در نظر گرفته می‌شوند [۴, ۵]

فرض می‌شود نقطه اختیاری P با مختصات $(x\,,y\,,z\,)$ مطابق شکل ۳ پس از تغییر شکل به نقطه P' با مختصات (ξ,η,ζ) برسد.

هر نقطه اختیاری بر روی محور الاستیک پره پس از تغییر شکل پره بصورت زیر نوشته می‌شود:

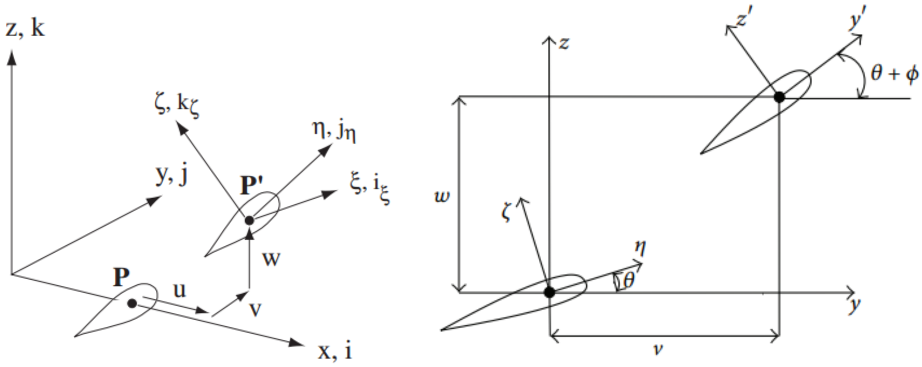
$$\bar{r} = (x + u)\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} \qquad (۱)$$

با فرض اینکه سطح مقطع در طول تغییر شکل ثابت بوده و بصورت صفحه باقی می‌ماند از زوایای اویلر اصلاح شده، معادلات حرکت برای یک تیر یکسر درگیر چرخان را می‌توان با استفاده از اصل همیلتون بدست آورد. این معادلات برای یک پره با فرض تیر باریک و طویل همگن و ایزوتروپیک نیز معتبر می‌باشند. برای یک سیستم غیرپایستار، اصل همیلتون بصورت زیر می‌باشد [۵, ۱۶]:

$$\delta\Pi_b = \int_{t_1}^{t_2} (\delta U - \delta T - \delta W)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad (۲)$$

δU تغییرات مجازی انرژی پتانسیل، δT تغییرات مجازی انرژی جنبشی و δW تغییرات مجازی کار انجام شده توسط نیروهای خارجی

1 Pre-twist
2 Strip theory



شکل ۳. شکل سطح مقطع پره قبل و بعد از تغییر شکل [۱٦ ,۵]

Fig. 3. The cross-section of the blade before and after the deformation

می‌باشد.

۲- ۱- انرژی پتانسیل

اگر پره بصورت تیر باریک بلند و ایزوتروپیک در نظر گرفته شود می‌توان تنش‌های اعمالی بر روی آنرا محوری فرض نموده و ارتباط بین تنش و کرنش کلاسیک را به صورت زیر نوشت [۵، ۱۶]:

$$\begin{aligned}&\sigma_{yy}=\sigma_{yz}=\sigma_{zz}=0\ ,\ \sigma_{xx}=E\,\varepsilon_{xx}\ ,\\&\sigma_{x\eta}=G\,\varepsilon_{x\eta}\ ,\ \sigma_{x\zeta}=G\,\varepsilon_{x\zeta}\end{aligned}\qquad(۳)$$

ε_{xx} کرنش محوری $\varepsilon_{x\eta}$ و $\varepsilon_{x\zeta}$ کرنش برشی بوده و تغییرات انرژی پتانسیل پره بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\delta \mathrm{U_b}=\int_0^R\iint_A(E\,\varepsilon_{xx}\,\delta\varepsilon_{xx}+G\,\varepsilon_{x\eta}\delta\varepsilon_{x\eta}+G\,\varepsilon_{x\zeta}\delta\varepsilon_{x\zeta})\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}x\qquad(۴)$$

که در آن

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}&=\mathrm{u}'_{\mathrm{e}}-\lambda_{\mathrm{T}}(\hat\phi''+\mathrm{w}'\mathrm{v}''')\\&+(\eta^2+\zeta^2)(\theta'\hat\phi'+\theta'\mathrm{w}'\mathrm{v}''+\frac{\hat\phi'^2}{2}+\frac{\mathrm{w}'^2\mathrm{v}''^2}{2}+\hat\phi'\mathrm{w}'\mathrm{v}'')\\&-\mathrm{v}''[\eta\cos(\theta+\hat\phi)-\zeta\sin(\theta+\hat\phi)]\\&-\mathrm{w}''[\eta\sin(\theta+\hat\phi)+\zeta\cos(\theta+\hat\phi)]\\\varepsilon_{x\eta}&=-\zeta(\hat\phi'+\mathrm{w}'\mathrm{v}'')\\\varepsilon_{x\zeta}&=\eta\,(\hat\phi'+\mathrm{w}'\mathrm{v}'')\end{aligned}\qquad(۵)$$

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon_{xx}&=\delta u'_e-\lambda_T(\delta\hat\phi''+w'\delta v''+v''\delta w''+v'''\delta w'+w''\delta v'')\\&(\eta^2+\zeta^2)[(\theta'\delta\hat\phi'+\theta'w'\delta v''+\theta'v''\delta w'\\&+(\hat\phi'+w'v'')(\delta\hat\phi'+w'\delta v''+v''\delta w')]\\&-[\eta\cos(\theta+\hat\phi)-\zeta\sin(\theta+\hat\phi)]\delta v''\\&+[\eta\sin(\theta+\hat\phi)+\zeta\cos(\theta+\hat\phi)]v''\delta\hat\phi\\&-[\eta\sin(\theta+\hat\phi)+\zeta\cos(\theta+\hat\phi)]\delta w''\\&-[\eta\cos(\theta+\hat\phi)-\zeta\sin(\theta+\hat\phi)]w''\delta\hat\phi\\\delta\varepsilon_{x\eta}&=-\zeta(\delta\hat\phi'+w'\delta v''+v''\delta w')\\\delta\varepsilon_{x\zeta}&=\eta\,(\delta\hat\phi'+w'\delta v''+v''\delta w')\end{aligned}\qquad(۶)$$

$()'=\dfrac{\partial}{\partial r}()$ بوده، و فرض می‌شود $\theta=\theta_{tw}$ که θ_{tw} زاویه پیچش ثابت و اولیه پره بوده و $\hat\phi$ زاویه چرخش الاستیکی برحسب ϕ مقدار پیچش الاستیکی پره به صورت زیر می‌باشد [۵]:

$$\hat\phi=\phi-\int_0^r w'v''\mathrm{d}r\qquad(۷)$$

u_e مقدار افزایش طول محور الاستیک، λ_T تابع تابیدگی سطح مقطع پره می‌باشد. بنابراین تغییرات انرژی پتانسیل پره در فرم بی‌بعد و با صرفنظر کردن از عبارات بالاتر از مرتبه دوم عبارت است از:

$$\begin{aligned}\frac{\delta U_b}{m\Omega^2R^3}&=\int_0^1((...)\delta u'_e+(...)\delta v'+(...)\delta w'\\&+(...)\delta v''+(...)\delta w''+(...)\delta\hat\phi)\mathrm{d}x\end{aligned}\qquad(۸)$$

R طول پره، Ω سرعت چرخش و m جرم واحد طول پره هستند.

۲- ۲- انرژی جنبشی

سرعت هر نقطه بر روی پره بصورت زیر نوشته می‌شود

$$\bar{V}_b = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial t} + \bar{\Omega} \times \bar{r} \tag{۹}$$

$$\bar{\Omega}\mathbf{K} = \Omega \sin\beta_p \mathbf{i} + \Omega \cos\beta_p \mathbf{k} \tag{۱۰}$$

β_p زاویه پیش ساخته در راستای فلپینگ بوده و

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \dot{x}_1 \mathbf{i} + \dot{y}_1 \mathbf{j} + \dot{z}_1 \mathbf{k} \tag{۱۱}$$

اگر مختصات یک نقطه اختیاری بر روی پره پس از تغییر شکل بصورت زیر در نظر گرفته شود [۲, ۴, ۱۶]

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{Bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} (x+u) & v & w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda_T \phi' & \eta & \zeta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{i}_\varsigma \\ \mathbf{j}_\eta \\ \mathbf{k}_\zeta \end{Bmatrix} = \\ & \left\{ \begin{bmatrix} (x+u) & v & w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda_T \phi' & \eta & \zeta \end{bmatrix} \mathrm{T_{DU}} \right\} \begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{۱۲}$$

$\mathrm{T_{DU}}$ ماتریس انتقال بوده و تغییرات انرژی جنبشی برای پره بطول R بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\delta \mathrm{T_b} = \int_0^R \iint_A \rho \bar{V}_b . \delta \bar{V}_b \, d\eta \, d\zeta \, dx \tag{۱۳}$$

ρ جرم واحد طول پره بوده و

$$\begin{aligned} \bar{V}.\delta\bar{V} &= \dot{x}_1 \delta\dot{x}_1 - y_1 \cos\beta_p \delta\dot{x}_1 - \\ & \dot{x}_1 \cos\beta_p \delta y_1 + y_1 \cos^2\beta_p \delta y_1 + \dot{y}_1 \delta\dot{y}_1 \\ & + x_1 \cos\beta_p \delta\dot{y}_1 - z_1 \sin\beta_p \delta\dot{y}_1 \\ & + \dot{y}_1 \cos\beta_p \delta x_1 + x_1 \cos^2\beta_p \delta x_1 \\ & - z_1 \sin\beta_p \cos\beta_p \delta x_1 - \dot{y}_1 \sin\beta_p \delta z_1 \\ & - x_1 \cos\beta_p \sin\beta_p \delta z_1 + z_1 \sin^2\beta_p \delta z_1 \\ & + \dot{z}_1 \delta\dot{z}_1 + y_1 \sin\beta_p \delta\dot{z}_1 \\ & + \dot{z}_1 \sin\beta_p \delta y_1 + y_1 \sin^2\beta_p \delta y_1 \end{aligned} \tag{۱۴}$$

که تمامی سرعت‌ها نسبت به ΩR بی‌بعد شده و $\dot{()} = \frac{\partial}{\partial \psi}()$ بوده و $\psi = \Omega t$ زاویه پیشروی پره می‌باشد. با انتگرال‌گیری از عبارت بالا در زمان، از اصل همیلتون خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \bar{V}.\delta\bar{V} &= -\ddot{x}_1 \delta x_1 + 2\dot{y}_1 \cos\beta_p \delta x_1 \\ & + y_1 \cos^2\beta_p \delta y_1 - \ddot{y}_1 \delta y_1 - 2\dot{x}_1 \cos\beta_p \delta y_1 \\ & + 2\dot{z}_1 \sin\beta_p \delta y_1 + x_1 \cos^2\beta_p \delta x_1 \\ & - z_1 \sin\beta_p \cos\beta_p \delta x_1 - 2\dot{y}_1 \sin\beta_p \delta z_1 \\ & - x_1 \cos\beta_p \sin\beta_p \delta z_1 + z_1 \sin^2\beta_p \delta z_1 \\ & - \ddot{z}_1 \delta z_1 + y_1 \sin^2\beta_p \delta y_1 \end{aligned} \tag{۱۵}$$

بنابراین عبارت تغییرات انرژی جنبشی بی‌بعد بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathrm{T_b}}{m\Omega^2 R^3} &= \int_0^1 m \{ (\ldots)\delta u_e + (\ldots)\delta v + (\ldots)\delta w \\ & + (\ldots)\delta v' + (\ldots)\delta w' + (\ldots)\delta\hat{\phi} \} dx \end{aligned} \tag{۱۶}$$

۲- ۳- کار مجازی

با در نظر گرفتن بارهای آیرودینامیکی و سایر بارهای اعمالی بر روی پره، کار نیروهای خارجی را می‌توان بصورت ذیل نوشت [۵, ۱۶, ۱۷]:

$$\begin{aligned} \delta \mathrm{W_b} &= \int_0^1 (L_u \delta u + L_v \delta v + L_w \delta w + M_{\hat{\phi}} \delta\hat{\phi}) dx \\ & + \int_0^1 (F_x \delta u + F_y \delta v + F_z \delta w + M_x \delta\hat{\phi} \\ & - M_y \delta w' + M_z \delta v') \delta(x - x_f) dx \end{aligned} \tag{۱۷}$$

L_u، L_v و L_w بترتیب نیروهای آیرودینامیکی در جهات x، y و z

بوده و $M_{\hat{\phi}}$ ممان الاستیکی حول محور الاستیک و F_x ، F_y ، F_z ، M_x ، M_y و M_z نیروها و ممانهای متمرکز بر روی پره در نقطه $x = x_f$ می‌باشند. با توجه به عدم وجود نیروها و ممانهای متمرکز بر روی پره در بحث جاری از این نیروها و ممانها صرفنظر می‌شود. با فرض ناچیز بودن نیروهای آیرودینامیکی در محور کشش ($L_u = ۰$) و جایگذاری L_v و L_w و $M_{\hat{\phi}}$ از [۵] معادلات کلی حرکت پره در فرم بی‌بعد در سه محور بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\delta v:\left\{\begin{aligned}&-\left[\bar{v}'\int_{\bar{x}}^{l}(\bar{x}+2\dot{\bar{v}})\,\mathrm{d}\bar{x}\right]'+\Lambda_2\bar{v}''''\\&-(\Lambda_2-\Lambda_1)\sin^2(\theta)\bar{v}''''+(\Lambda_2-\Lambda_1)\frac{\sin(2\theta)}{2}\bar{w}''''\\&+(\Lambda_2-\Lambda_1)[-\sin(2\theta)(\phi\bar{v}'')''+\cos(2\theta)(\phi\bar{w}'')'']\\&-2\beta_{pc}\dot{\bar{w}}-2\bar{v}'\int_0^{\bar{x}}(\bar{v}'\dot{\bar{v}}'+\bar{w}'\dot{\bar{w}}')\,\mathrm{d}\bar{x}\\&+\ddot{\bar{v}}-\bar{v}+\frac{\gamma}{6}\left\{\begin{aligned}&\bar{x}\bar{v}_i\phi+\left[2\frac{c_{d_0}}{a}\bar{x}+(\theta+\phi)\bar{v}_i\right]\dot{\bar{v}}\\&+[2\bar{v}_i-\bar{x}(\theta+\phi)]\dot{\bar{w}}\end{aligned}\right\}\end{aligned}\right\}=$$

$$\frac{\gamma}{6}(\bar{\mathrm{v}}_i^2-\frac{c_{d_0}}{a}\bar{x}^2+\bar{x}\bar{v}_i\theta) \quad (۱۸)$$

$$\begin{aligned}\delta w:\{&-\left[\bar{w}'\int_{\bar{x}}^{l}(\bar{x}+2\dot{\bar{v}})\,\mathrm{d}\bar{x}\right]'+\Lambda_1\bar{w}''''\\&-(\Lambda_2-\Lambda_1)\sin^2(\theta)\bar{w}''''+(\Lambda_2-\Lambda_1)\frac{\sin(2\theta)}{2}\bar{v}''''\\&+(\Lambda_2-\Lambda_1)[\cos(2\theta)(\phi\bar{v}'')''+\sin(2\theta)(\phi\bar{w}'')'']\\&+2\beta_{pc}\dot{\bar{v}}+\ddot{\bar{w}}(1+\frac{\gamma\bar{c}}{24})+\frac{\gamma}{6}\{-\bar{x}^2(\phi+\int_0^{\bar{x}}\bar{v}'\bar{w}''\mathrm{d}\bar{x})\\&+\bar{x}\bar{v}(\beta_{pc}+\bar{w}')-\frac{\bar{c}}{2}\bar{x}\bar{w}'\\&-\left[2\bar{x}(\theta+\phi)-\bar{v}_i\right]\dot{\bar{v}}+\bar{x}\dot{\bar{w}}-3\frac{\bar{c}}{4}\bar{x}\dot{\phi}\}\}\\&=-\beta_{pc}\bar{x}+\frac{\gamma}{6}(\bar{\mathrm{x}}\mathrm{v}_i+\bar{x}^2\theta+\frac{\bar{c}}{2}\bar{x}\beta_{pc})\end{aligned} \quad (۱۹)$$

$$\delta\phi:\left\{\begin{aligned}&-\frac{\mu^2\mathrm{K}}{2}[(1-\bar{x}^2\phi)']'-\mathrm{k}\,\phi''\\&+(\Lambda_2-\Lambda_1)\left[\frac{\bar{w}''^2-\bar{v}''^2}{2}\sin(2\theta)+\bar{v}''\bar{w}''\cos(2\theta)\right]\\&+\frac{\gamma\bar{c}^2}{48}\bar{x}\dot{\phi}+\mu^2\ddot{\phi}+(\mu_2^2-\mu_1^2)\phi\cos(2\theta)\end{aligned}\right\}=$$

$$-(\mu_2^2-\mu_1^2)\frac{\sin(2\theta)}{2} \quad (۲۰)$$

که در معادلات اخیر

$$\left.\begin{aligned}&\bar{x}=\frac{x}{R} && \bar{v}=\frac{v}{R} && \bar{w}=\frac{w}{R}\\&\bar{c}=\frac{c}{R} && \bar{v}_i=\frac{v_i}{R} && K=\frac{k_A^2}{k_m^2}\\&\mu=\frac{k_m}{R} && \mu_1=\frac{k_{m1}}{R} && \mu_2=\frac{k_{m2}}{R}\\&\Lambda_1=\frac{EI_{Y'}}{m\Omega^2R^4} && \Lambda_2=\frac{EI_{Z'}}{m\Omega^2R^4} && k=\frac{GJ}{m\Omega^2R^4}\\&\gamma=\frac{3\rho acR}{m} && ()'=\frac{\partial}{\partial\bar{x}}() && \dot{()}=\frac{\partial}{\partial\psi}=\frac{\partial}{\Omega\partial t}()\end{aligned}\right\} \quad (۲۱)$$

و

$$\begin{aligned}v_i&=\mathrm{sgn}[\theta+\phi_0(0.75R)]\Omega\\&\times R\,\frac{\pi\sigma}{8}(\sqrt{1+\frac{12}{\pi\sigma}\left|\theta+\phi_0(0.75R)\right|}-1)\ ,\quad \sigma\\\sigma&=\frac{bc}{\pi R}\end{aligned} \quad (۲۲)$$

σ صلبیت روتور، b تعداد پره‌های روتور و c وتر پره می‌باشند و v_i بیانگر سرعت القائی پره است.

معادلات بدست آمده غیرخطی با ضرایب متغیر و مشتقات جزئی-انتگرالی می‌باشند و برای تبدیل آنها به معادلات دیفرانسل معمولی با استفاده از روش گالرکین داریم [۵، ۱۸]:

$$\begin{aligned}\bar{v}&=\sum_{j=1}^{N}v_j(\psi)\psi_j(\bar{x})\\\bar{w}&=\sum_{j=1}^{N}w_j(\psi)\psi_j(\bar{x})\\\phi&=\sum_{j=1}^{N}\phi_j(\psi)\theta_j(\bar{x})\end{aligned} \quad (۲۳)$$

$\bar{x}=x/R$ ، $\bar{v}=v/R$ و $\bar{w}=w/R$ بترتیب طول بی‌بعد، انحراف خمشی بدون بعد می‌باشند. برای سادگی محاسبات، شکل مودها برای یک تیر یکنواخت غیرچرخشی با شرایط مرزی زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{cases}\psi(\bar{x})=0, \dfrac{d\psi(\bar{x})}{d\bar{x}}=0, \bar{x}=0\\[2mm] \dfrac{d\,\psi(\bar{x})}{d\bar{x}}=0, \dfrac{d\,\psi(\bar{x})}{d\bar{x}}=0, \bar{x}=L\end{cases} \qquad (۲۴)$$

بنابراین شکل مودهای خمشی و پیچشی برای یک تیر یکنواخت یکسر گیردار غیرچرخشی و غیرکوپل بصورت زیر خواهد بود [۵, ۸, ۱۹]:

$$\begin{cases}\psi_j(\bar{x})=\cosh(\beta_j\bar{x})-\cos(\beta_j\bar{x})\\ -\alpha_j[\sinh(\beta_j\bar{x})-\sin(\beta_j\bar{x})]\\ \alpha_j=\dfrac{\cos(\beta_j\bar{x})+\cosh(\beta_j\bar{x})}{\sin(\beta_j\bar{x})+\sinh(\beta_j\bar{x})}\ ,\\ \beta_j^4=\dfrac{\omega_j^2 m}{EI}\end{cases} \qquad (۲۵)$$

β_j زاویه خمشی بوده و با فرض همسان بودن شکل مود خمشی برای هر دو حالت خمش، فرکانسهای طبیعی در راستای v و w عبارت است از:

$$\begin{aligned}&\psi_{vj}(\bar{x})=\psi_{wj}(\bar{x})=\psi_j(\bar{x})\ ,\ \beta_{vj}=\beta_{wj}=\beta_j\\ &\omega_{vj}=(\beta_j L)^2\sqrt{\frac{EI_z}{mL^4}}\quad,\quad \omega_{wj}=(\beta_j L)^2\sqrt{\frac{EI_y}{mL^4}}\ ,\\ &\beta_j L=(2j-1)\pi/2\end{aligned} \qquad (۲۶)$$

برای بررسی مودهای ارتعاشی پیچشی، شرایط مرزی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{cases}\theta(\bar{x})=0, \bar{x}=0\\ \dfrac{d\theta(\bar{x})}{d\bar{x}}=0, \bar{x}=L\end{cases} \qquad (۲۷)$$

بنابراین شکل مودهای پیچشی و فرکانس‌های طبیعی پیچشی برای تیر یکسر گیردار بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases}\theta_j(\bar{x})=\sqrt{2}\sin(\gamma_j\bar{x})\\ \omega_{\phi j}=(\gamma_j L)\sqrt{\dfrac{GJ}{IL^2}}\end{cases}\quad ,\quad \gamma_j=\pi(j-1/2) \qquad (۲۸)$$

که در آن γ_j زوایه پیچش می‌باشد.

بمنظور خطی‌سازی معادلات و تحلیل و بررسی فلاتر، پاسخ را ترکیبی از مقادیر حالت دائم و مقادیر کوچک حالت اغتشاشی بصورت زیر فرض می‌کنیم [۵, ۶, ۹]:

$$\begin{aligned}&v_j(\psi)=v_{0j}+\Delta v_j(\psi)\\ &w_j(\psi)=w_{0j}+\Delta w_j(\psi)\\ &\phi_j(\psi)=\phi_{0j}+\Delta\phi_j(\psi)\end{aligned} \qquad (۲۹)$$

که v_{0j}، w_{0j} و ϕ_{0j} مقادیر حالت دائم و Δv_j، Δw_j و $\Delta\phi_j$ می‌باشند. پس از جایگذاری معادلات مقادیر (۲۹) در معادلات (۱۸) تا (۲۰) و اعمال انتگرال گالرکین، معادلات کلی حرکت برای حالت اغتشاشی به صورت بی‌بعد بصورت زیر در می‌آیند [۵]:

$$\begin{aligned}\delta v_i:\ &\sum_{j=1}^{N}\Big\{v_j\Big\{D_{ij}+\big[\Lambda_2-(\Lambda_2-\Lambda_1)\sin^2(\theta)\big]\beta_j^4\delta_{ij}-\delta_{ij}\Big\}\\ &+w_j\frac{\sin(2\theta)}{2}(\Lambda_2-\Lambda_1)\beta_j^4\delta_{ij}\\ &+(\Lambda_2-\Lambda_1)\sum_{k=1}^{N}K_{jki}\phi_j\left[-v_k\sin(2\theta)+w_k\cos(2\theta)\right]\\ &-2\beta_{pc}\delta_{ij}\dot{w}_j+2\sum_{k=1}^{N}(F_{ikj}-F_{jki})v_k\dot{v}_j-2\sum_{k=1}^{N}F_{jki}w_k\dot{w}_j\\ &+\delta_{ij}\ddot{v}_j+\frac{\gamma}{6}[\bar{v}_i I_{ij}\phi_j+(2\frac{c_{d_0}}{a}E_{ij}+\theta\bar{v}_i\delta_{ij}\\ &+\bar{v}_i\sum_{k=1}^{N}\phi_k H_{ijk})\dot{v}_j+(2\bar{v}_i\delta_{ij}-\theta E_{ij}-\sum_{k=1}^{N}\phi_k G_{ijk})\dot{w}_j]\\ &=\frac{\gamma}{6}(\bar{v}_i^2 A_i-\frac{c_{d_0}}{a}C_i+\bar{v}_i\theta B_i)\end{aligned} \qquad (۳۰)$$

$$\begin{aligned}\delta w_i:\ &\sum_{j=1}^{N}\Big\{w_j\Big\{D_{ij}+\big[\Lambda_1+(\Lambda_2-\Lambda_1)\sin^2(\theta)\big]\beta_j^4\delta_{ij}\Big\}\\ &+v_j\frac{\sin(2\theta)}{2}(\Lambda_2-\Lambda_1)\beta_j^4\delta_{ij}\\ &+(\Lambda_2-\Lambda_1)\sum_{k=1}^{N}K_{jki}\phi_j\left[v_k\cos(2\theta)+w_k\sin(2\theta)\right]\\ &+2\beta_{pc}\delta_{ij}\dot{v}_j+2\sum_{k=1}^{N}F_{ikj}w_k\dot{v}_j+\ddot{w}_j(1+\frac{\gamma\bar{c}}{24})\delta_{ij}\end{aligned} \qquad (۳۱)$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\gamma}{6}[-J_{ij}\phi_j+\sum_{k=1}^{N}L_{ijk}v_jw_j+\beta_{pc}E_{ij}v_j-\frac{\bar{c}}{2}O_{ij}w_j\\
&-\frac{\bar{c}}{2}O_{ij}w_j-(2\theta E_{ij}+2\sum_{k=1}^{N}\phi_k G_{ijk}-\bar{v}_i\delta_{ij})\dot{v}_j\\
&+E_{ij}\dot{w}_j-\frac{3\bar{c}}{4}I_{ij}\dot{\phi}_j]\Big\}=\\
&-\beta_{pc}B_i+\frac{\gamma}{6}(-\bar{v}_i B_i+\theta C_i+\frac{\bar{c}}{2}\beta_{pc}B_i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\phi_i:\ &\sum_{j=1}^{N}\Big\{\phi_j\left\{\mu^2KN_{ij}+\left[k\gamma_j^2+(\mu_2^2-\mu_1^2)\cos(2\theta)\right]\delta_{ij}\right\}\\
&+(\Lambda_2-\Lambda_1)\sum_{k=1}^{N}K_{ijk}\left[\frac{\sin(2\theta)}{2}(w_jw_k-v_jv_k)+\cos(2\theta)v_jw_k\right]\\
&+\mu^2\delta_{ij}\ddot{\phi}_j+\frac{\gamma\bar{c}^2}{48}M_{ij}\dot{\phi}\Big\}=-(\mu_2^2-\mu_1^2)\frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{2}\gamma_i}
\end{aligned}
\tag{۳۲}
$$

معادلات بدست آمده (۳۰) تا (۳۲) را می‌توان با تفکیک اثرات ژیروسکوپی به صورت عمومی ماتریسی زیر نوشت [۵, ۲۰]:

$$
[\mathrm{M}]\{\ddot{\mathrm{X}}\}+[\mathrm{D}+\mathrm{G}]\{\dot{\mathrm{X}}\}+[\mathrm{K}]\{\mathrm{X}\}=\{\mathrm{F}\}
\tag{۳۳}
$$

$\{\mathrm{X}\}=\{\mathrm{v_j}\quad \mathrm{w_j}\quad \phi_{\mathrm{j}}\}^{\mathrm{T}}$ بوده و M، D، G، K بترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی ویسکوز، میرایی ژیروسکوپی، سفتی و F نیروهای وارد بر سیستم بوده که بصورت زیر می‌باشند:

$$
[M]=\left[\begin{array}{c:c:c}
\delta_{ij} & 0 & 0\\ \hdashline
0 & \delta_{ij}(1+\frac{\gamma\bar{c}}{24}) & 0\\ \hdashline
0 & 0 & \mu^2\delta_{ij}
\end{array}\right]
\tag{۳۴}
$$

که

$$
\left.
\begin{array}{lll}
A_i=\int_0^1\psi_i d\bar{x} & B_i=\int_0^1\bar{x}\psi_i d\bar{x} & C_i=\int_0^1\bar{x}^2\psi_i d\bar{x}\\
D_{ij}=\int_0^1(\frac{1-\bar{x}^2}{2})\psi_i'\psi_j' d\bar{x} & E_{ij}=\int_0^1\bar{x}\psi_i\psi_j d\bar{x} & F_{ijk}=-\frac{1}{\beta_k^4}\int_0^1\psi_i'\psi_j'\psi_k''' d\bar{x}\\
G_{ijk}=\int_0^1\bar{x}\psi_i\psi_j\theta_k d\bar{x} & H_{ijk}=\int_0^1\psi_i\psi_j\theta_k d\bar{x} & I_{ij}=\int_0^1\bar{x}\psi_i\theta_j d\bar{x}\\
J_{ij}=\int_0^1\bar{x}^2\psi_i\theta_j d\bar{x} & K_{ijk}=\int_0^1\theta_i\psi_i''\psi_k'' d\bar{x} & L_{ijk}=\int_0^1\bar{x}\psi_i\psi_j\psi_j' d\bar{x}-\int_0^1\bar{x}^2\psi_i\int_0^1\psi_i'(\bar{x}_1)\psi_k''(\bar{x}_1)d\bar{x}_1 d\bar{x}\\
M_{ij}=\int_0^1\bar{x}\theta_i\theta_j d\bar{x} & N_{ij}=\int_0^1(\frac{1-\bar{x}^2}{2})\theta_i'\theta_j' d\bar{x} & O_{ij}=\int_0^1\bar{x}\psi_i\psi_j' d\bar{x}\\
\multicolumn{3}{c}{\delta_{ij}=\int_0^1\psi_i\psi_j d\bar{x}=\int_0^1\theta_i\theta_j d\bar{x}=\begin{Bmatrix}0,i\neq j\\1,i=j\end{Bmatrix}}
\end{array}
\right\}
$$

$$[D]=\begin{bmatrix} \begin{array}{l} 2\sum_{k=1}^{N}(F_{ikj}-F_{jki})v_{0k} \\ +\frac{\gamma}{6}\left(2\frac{c_{d_0}}{a}E_{ij}+\theta\bar{v}_i\delta_{ij}+\bar{v}_i\sum_{k=1}^{N}H_{ijk}\phi_{0k}\right) \end{array} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{6}E_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma\bar{c}^2}{48}M_{ij} \end{bmatrix} \tag{۳۵}$$

$$[G]=\begin{bmatrix} 0 & \begin{array}{l} -2\left(\beta_{pc}\delta_{ij}+\sum_{k=1}^{N}F_{jki}w_{0k}\right) \\ +\frac{\gamma}{6}\left(2\bar{v}_i\delta_{ij}-\theta E_{ij}-\sum_{k=1}^{N}G_{ijk}\phi_{0k}\right) \end{array} & 0 \\ \begin{array}{l} 2\left(\beta_{pc}\delta_{ij}+\sum_{k=1}^{N}F_{ikj}w_{0k}\right) \\ +\frac{\gamma}{6}\left(-2\theta E_{ij}+\bar{v}_i\delta_{ij}-2\sum_{k=1}^{N}G_{ijk}\phi_{0k}\right) \end{array} & 0 & -\frac{\gamma\bar{c}}{8}I_{ij} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۳۶}$$

$$\begin{aligned}
K_{11} &= D_{ij}+\left[\Lambda_2-(\Lambda_2-\Lambda_1)\sin^2(\theta)\right]\beta_j^4\delta_{ij} \\
&\quad -\delta_{ij}-(\Lambda_2-\Lambda_1)\sin(2\theta)\sum_{k=1}^{N}K_{kji}\phi_{0k} \\
K_{12} &= \frac{\sin(2\theta)}{2}(\Lambda_2-\Lambda_1)\beta_j^4\delta_{ij} \\
&\quad +(\Lambda_2-\Lambda_1)\cos(2\theta)\sum_{k=1}^{N}K_{kji}\phi_{0k} \\
K_{13} &= (\Lambda_2-\Lambda_1)\sum_{k=1}^{N}K_{jki}\left[-v_{0k}\sin(2\theta)+w_{0k}\cos(2\theta)\right]+\frac{\gamma}{6}\bar{v}_i I_{ij} \\
K_{21} &= \frac{\sin(2\theta)}{2}(\Lambda_2-\Lambda_1)\beta_j^4\delta_{ij}+(\Lambda_2-\Lambda_1)\cos(2\theta)\times \\
&\quad \sum_{k=1}^{N}K_{kji}\phi_{0k}+\frac{\gamma}{6}\left(\beta_{pc}E_{ij}+\sum_{k=1}^{N}L_{ijk}w_{0k}\right) \\
K_{22} &= D_{ij}+\left[\Lambda_1+(\Lambda_2-\Lambda_1)\sin^2(\theta)\right]\beta_j^4\delta_{ij} \\
&\quad +(\Lambda_2-\Lambda_1)\sin(2\theta)\sum_{k=1}^{N}K_{kji}\phi_{0k}-\frac{\gamma}{6}\left(\frac{\bar{c}}{2}O_{ij}-\sum_{k=1}^{N}L_{ikj}v_{0k}\right) \\
K_{23} &= (\Lambda_2-\Lambda_1)\sum_{k=1}^{N}K_{jki}\left[v_{0k}\cos(2\theta)+w_{0k}\sin(2\theta)\right]-\frac{\gamma}{6}J_{ij} \\
K_{31} &= (\Lambda_2-\Lambda_1)\sum_{k=1}^{N}K_{ijk}\left[-v_{0k}\sin(2\theta)+w_{0k}\cos(2\theta)\right] \\
K_{32} &= (\Lambda_2-\Lambda_1)\sum_{k=1}^{N}K_{ijk}\left[v_{0k}\cos(2\theta)+w_{0k}\sin(2\theta)\right] \\
K_{33} &= \mu^2\mathrm{KN}_{ij}+\left[k\gamma_j^2+(\mu_2^2-\mu_1^2)\cos(2\theta)\right]\delta_{ij}
\end{aligned} \tag{۳۷}$$

$$[F]=\begin{bmatrix} \frac{\gamma}{6}\left(\bar{v}_i^2A_i-\frac{c_{d_0}}{a}C_i+\bar{v}_i\theta B_i\right) \\ -\beta_{pc}B_i+\frac{\gamma}{6}\left(-\bar{v}_iB_i+\theta C_i+\frac{\bar{c}}{2}\beta_{pc}B_i\right) \\ -(\mu_2^2-\mu_1^2)\frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{2}\gamma_i} \end{bmatrix} \tag{۳۸}$$

۳- بررسی فلاتر

برای بررسی فلاتر در معادلات (۳۳) نیروهای خارجی را صفر در نظر گرفته و پاسخ به شکل زیر فرض می‌شود:

$$\{\mathrm{X}\}=\{\mathrm{X}_0\}e^{i\omega t} \tag{۳۹}$$

بنابراین از معادله (۳۳) خواهیم داشت:

$$\left|-\omega^2[\mathrm{M}]+i\omega[\mathrm{D}+\mathrm{G}]+[\mathrm{K}]\right|=0 \tag{۴۰}$$

برای بررسی فلاتر و ارتباط فرکانس فلاتر با پارامترهای مورد نظر برای شکل مود اول($i=j=k$)، داده‌های اولیه برای نوعی پره بدون لولا در حالت حرکتی عمودی مطابق جدول ۱ فرض شده [۵] و نتایج عددی براساس آن برای سرعت‌های مختلف روتور ترسیم و تحلیل می‌شوند.

۴- نتایج و بحث

در شکل زیر نمودار تغییرات دترمینان فلاتر با فرکانس و فلاتر بدون بعد (ω_f) برای مقادیر جدول ۱ ترسیم گردیده است. محل تقاطع قسمت موهومی نمودار با محور صفر بیانگر فرکانس فلاتر بوده و محل تقاطع بخش حقیقی با محور صفر بیانگر ریشه‌های حقیقی می‌باشد [۲۱].

همانگونه که در شکل ۴ نشان داده شده است برای پره صلب، بخش حقیقی محور صفر را در نقطه ۱/۵۵ و بخش موهومی آنرا در نقطه ۱/۵۷ قطع نموده‌اند که بیانگر فرکانس فلاتر حدود ۱/۵۷ می‌باشد. از آنجا که مثبت بودن علامت بخش حقیقی نشان‌دهنده ناپایداری و منفی بودن علامت بخش حقیقی نشان‌دهنده پایداری حرکت می‌باشد و با توجه به اینکه بخش موهومی محور صفر را بعد از بخش حقیقی و در ناحیه منفی آن قطع نموده،

جدول ۱. مقادیر عددی پارامترهای اولیه برای یک پره نمونه

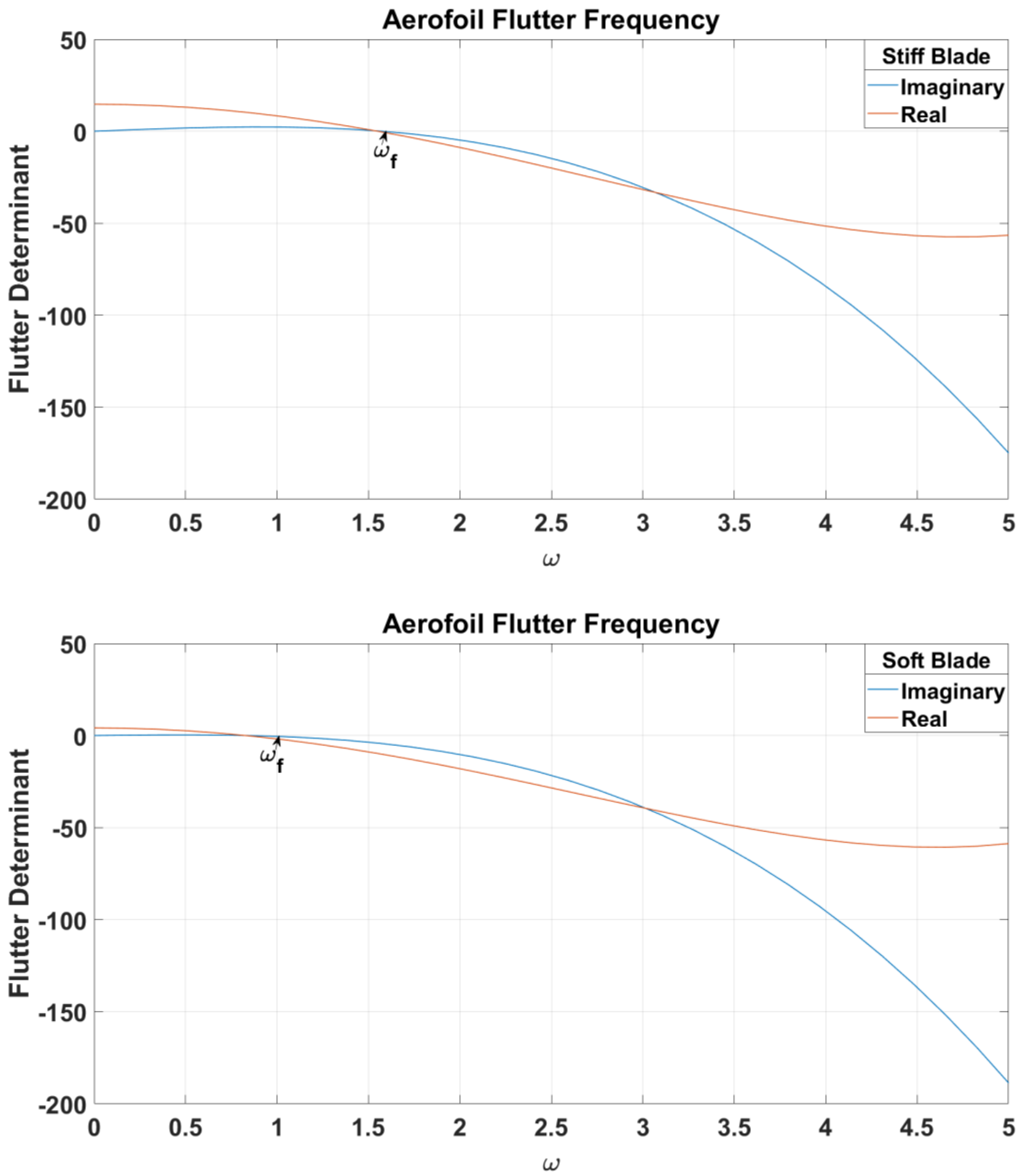
Table 1. Numerical values of initial parameters for a sample blade

پارامتر(واحد)	مقدار	علامت
طول پره(متر)	۱	R
سرعت پایه چرخش روتور (رادیان بر ثانیه)	۱۰۰	Ω_0
زاویه پیچ پره(درجه)	۰ و ۸	θ
زاویه پیش مخروطی(درجه)	۰ و ۵	β_{pc}
مقدار بی‌بعد وتر پره	$\frac{\pi}{۴۰}$	c/R
صلبیت روتور	۰/۱	σ
عدد لاک پره	۵	γ
شعاع ژیراسیون جرمی بی‌بعد	۰/۰۲۵	μ
شعاع ژیراسیون جرمی بی‌بعد	۰	μ_1
شعاع ژیراسیون جرمی بی‌بعد	۰/۰۲۵	μ_2
پارامتر بی‌بعد	۱	K
صلبیت پیچشی بی‌بعد	۱/۵	k
نسبت ضریب درگ به شیب منحنی لیفت ایرفویل	$\frac{۰/۰۱}{۲\pi}$	c_{d_0}/a
	$۲/۱۴\times۱۰^{۸}$	E_y
مدول الاستیسیته برای پره سفت (نیوتن بر متر مربع)	$۳/۶۵\times۱۰^{۷}$	E_z
مدول الاستیسیته برای پره نرم(نیوتن بر متر مربع)	$۲/۱۴\times۱۰^{۸}$	
	۸×۱۰^{۶}	
مدول برشی (نیوتن بر متر مربع)	$۱/۳\times۱۰^{۸}$	G
ممان اینرسی حول محور فلیپنگ (m^4)	۱×۱۰^{-۵}	I_y
ممان اینرسی حول محور لکینگ (m^4)	۱×۱۰^{-۴}	I_z
ممان اینرسی پیچشی (m^4)	۱×۱۰^{-۶}	J

لذا سیستم پایدار بوده و محدوده پایداری ناحیه بعد از نقطه فرکانسی ۱/۵۵ می‌باشد. همچنین برای پره انعطاف‌پذیر، فرکانس فلاتر حدود ۰/۸۲ و محدوده پایداری سیستم بعد از نقطه ۰/۸۲۶ می‌باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش صلبیت پره، فلاتر دیرتر اتفاق افتاده و با توجه به اینکه نقطه فلاتر در بخش منفی مقادیر حقیقی اتفاق می‌افتد لذا سیستم پایدار خواهد بود.

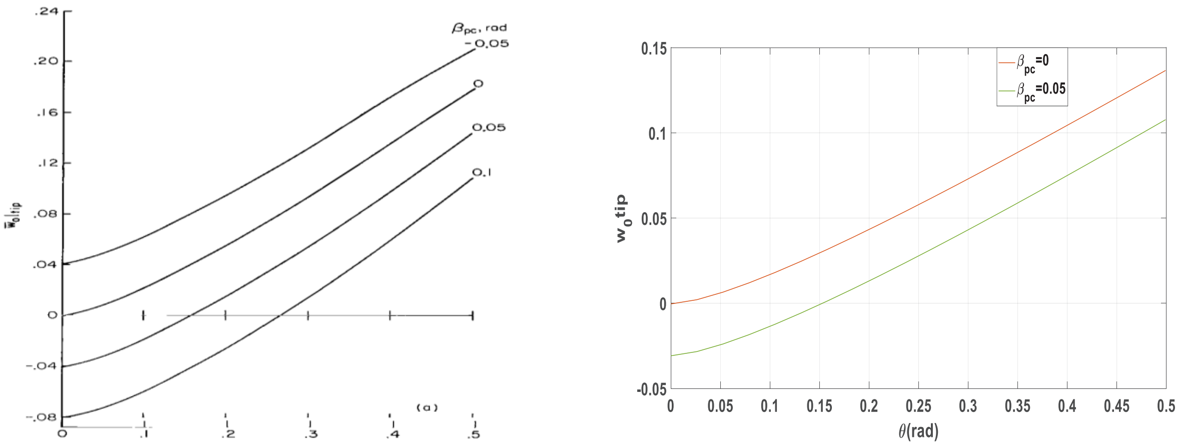
به منظور صحت‌سنجی نتایج، تغییرات خیز در محور فلیپنگ برای حالت دائم مستخرج از مقاله حاضر در شکل زیر ترسیم و با نمودارهای مشابه در مرجع [۵] مقایسه گردیده است.

همانگونه که از شکل ۵ مشاهده می‌شود، رفتار خیز در هر دو نمودار مشابه بوده و اختلاف مقدار عددی به علت تفاوت در برخی پارامترها از جمله طول پره و سرعت چرخش می‌باشد. همچنین از معادلات (۲۶) و (۲۸) فرکانس‌های طبیعی شکل مود اول برای پره انعطاف‌پذیر برابر $\omega_v \simeq ۰/۷$، $\omega_w \simeq ۱/۱۵$، $\omega_\phi \simeq ۵$ و برای پره صلب برابر $\omega_v \simeq ۱/۵$، $\omega_w \simeq ۱/۱۵$، $\omega_\phi \simeq ۵$ بدست می‌آیند که با فرکانس‌های بدست آمده از مرجع [۵] مطابقت دارد.



شکل ۵. نمودار تغییرات دترمینان فلاتر با فرکانس برای $\theta = ۸^\circ$ ، $\Omega = ۱۰۰ \, {}^{rad}/_{s}$ **و** $\beta_{pc} = ۵^\circ$

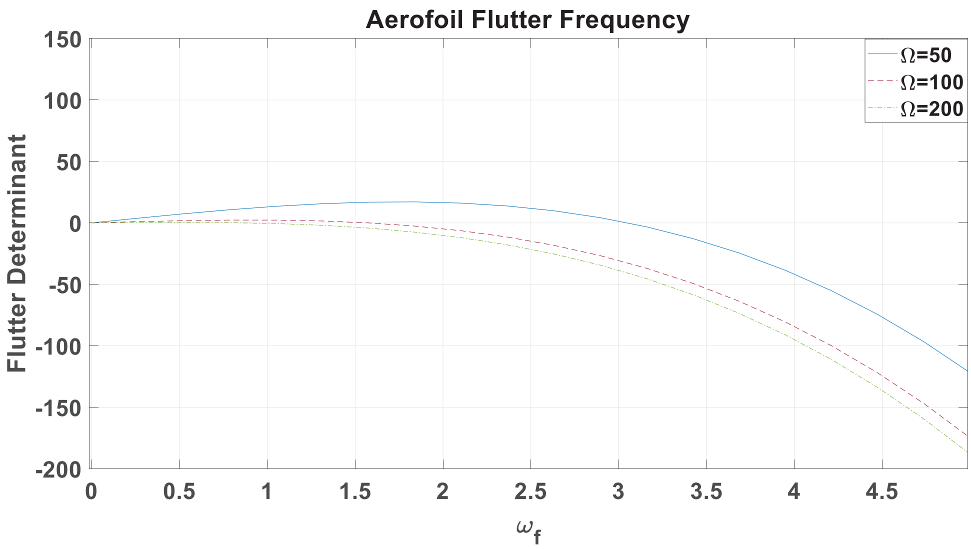
Fig. 4. flutter determinant Vs. frequency for $\Omega = 100 \, {}^{rad}/_{s}$ **and** $\theta = 8^\circ, \beta_{pc} = 5^\circ$



(ب) (الف)

شکل ۵. مقایسه تغییرات حالت دائم خیز نوک پره در جهت فلپینگ با زاویه گام (θ) برای $\beta_{pc}=۰$ و $\beta_{pc}=۰/۰۵$ بدست آمده از روش حاضر (سمت راست) و نمودار مرجع [۵] (سمت چپ)

Fig. 5. Comparison of the blade tip's steady state deflection in the flapping direction with the pitch angle (θ) for $\beta_{pc}=0$ and $\beta_{pc}=0.05$ obtained from the present method (right side) and reference diagram [5] (left side)



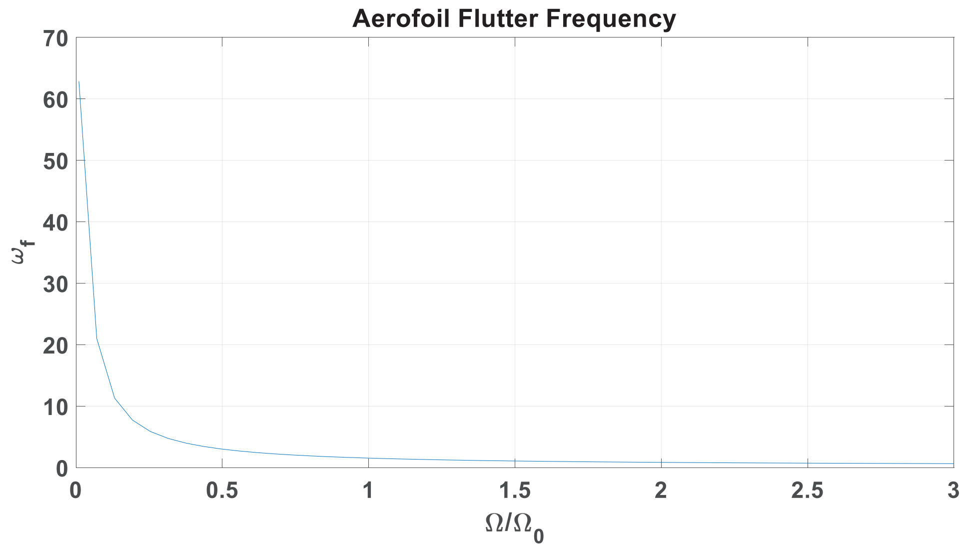
شکل ۶. تغییرات فرکانس فلاتر با سرعت چرخش روتور برای $\theta=۸^\circ$ و $\beta_{pc}=۵^\circ$

Fig. 6. flutter frequency variations with rotor speed for $\theta=8^\circ, \beta_{pc}=5^\circ$

می‌توان نتیجه گرفت که برای پره انعطاف‌پذیر $\omega_\nu < \omega_w$ بوده و لذا فلاتر ابتدا در محور لگ اتفاق می‌افتد و برای پره صلب $\omega_\nu > \omega_w$ بوده و لذا فلاتر ابتدا در محور فلپ و در فرکانس ۱/۵۷ اتفاق می‌افتد. در عمل همیشه $\omega_\nu > \omega_w$ می‌باشد لذا در بررسی‌های بعدی پره را صلب در نظر قرار خواهیم گرفت. در نمودارهای زیر تغییرات فرکانس فلاتر با سرعت چرخش روتور برای پره صلب نشان داده شده است.

تغییرات فرکانس فلاتر برحسب گستره نسبت سرعت چرخش روتور به سرعت چرخش پایه در شکل ۷ ترسیم شده است.

همانگونه که از شکل ۶ و ۷ مشخص است با افزایش سرعت چرخش روتور فرکانس فلاتر کاهش می‌یابد بعبارتی فلاتر زودتر اتفاق می‌افتد.



شکل ۷. تغییرات فرکانس فلاتر برحسب سرعت چرخش روتور برای $\theta=8^\circ$ **و** $\beta_{pc}=5^\circ$

Fig. 7. flutter frequency changes with rotor rotation speed for $\theta=8^\circ, \beta_{pc}=5^\circ$

تغییرات فرکانس فلاتر بر اساس زاویه پیش مخروطی (β_{pc}) برای زوایای مختلف پیچ (θ) در مقدار سرعت چرخش ثابت روتور $\Omega=100$ در شکل ۸ ترسیم شده است.

از شکل ۸ مشاهده می‌شود که افزایش زاویه پیش مخروطی، تأثیر خاصی بر روی فرکانس فلاتر نداشته ولی با افزایش زاویه پیچش، فرکانس فلاتر نیز افزایش می‌یابد.

۵- نتیجه‌گیری

با تحلیل نتایج عددی فلاتر پره بر اساس مقادیر اولیه جدول ۱ برای مود ارتعاشی اول، می‌توان آنها را بصورت ذیل جمع‌بندی و نتیجه‌گیری نمود:

۱- با افزایش صلبیت پره، فرکانس فلاتر افزایش یافته و بعبارتی فلاتر دیرتر اتفاق می‌افتد و با توجه به اینکه نقطه فلاتر در بخش منفی مقادیر حقیقی قرار می‌گیرد لذا سیستم پایدار خواهد بود.

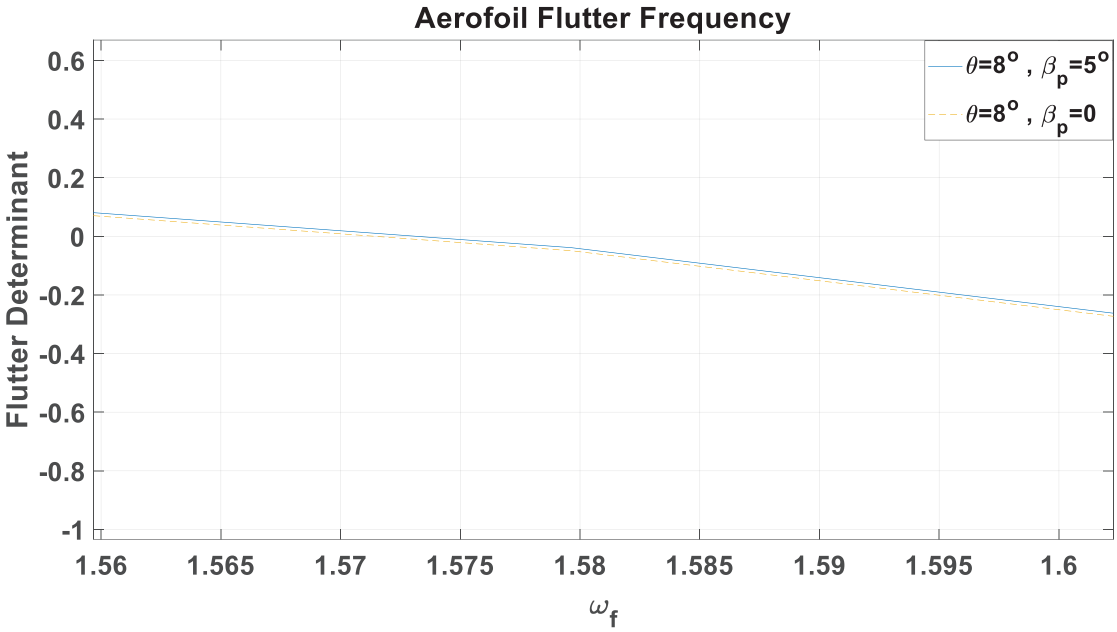
۲- برای پره انعطاف‌پذیر $\omega_v<\omega_w$ بوده و لذا فلاتر ابتدا در محور لگ اتفاق می‌افتد و برای پره صلب $\omega_v>\omega_w$ بوده و لذا فلاتر ابتدا در محور فلپ و در فرکانس ۱/۵۷ اتفاق افتاده و برای پایداری سیستم، باید بخش موهومی محور صفر را در ناحیه منفی بخش حقیقی قطع کند و در عین حال فرکانس فلاتر بزرگتر شود که لازمه آن، صلبیت پره می‌باشد.

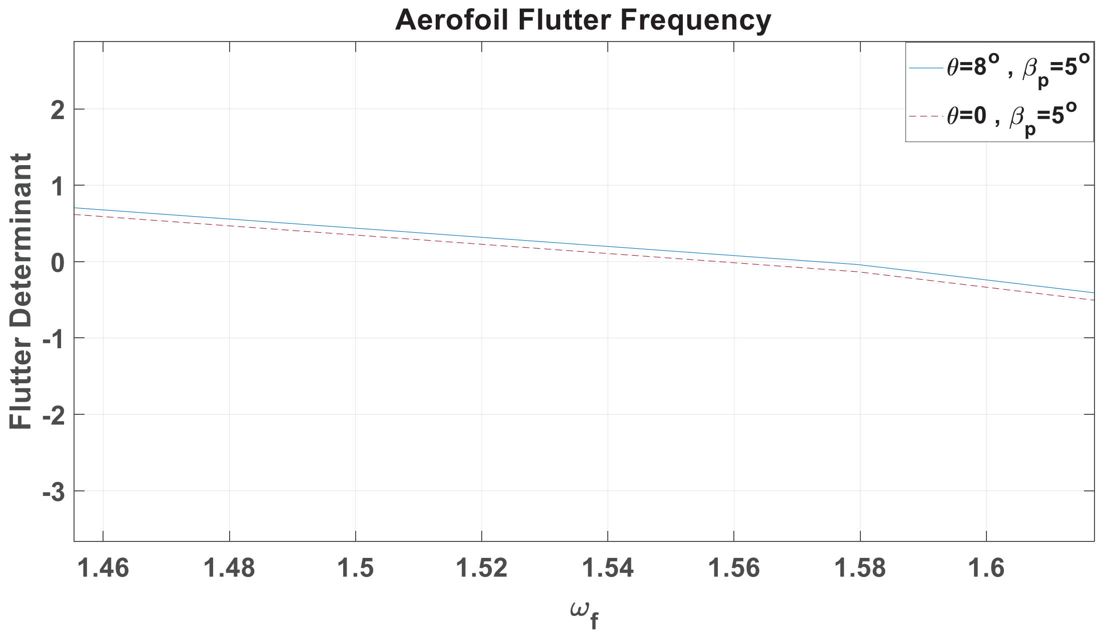
۳- با افزایش سرعت چرخش روتور در عین اینکه فرکانس فلاتر کاهش می‌یابد ولی سیستم پایدار می‌باشد.

۴- با افزایش زاویه پیش مخروطی، فرکانس فلاتر کاهش یافته و با افزایش زاویه پیچش، فرکانس فلاتر افزایش می‌یابد.

همانگونه که از یافته‌های مقاله آشکار می‌گردد و روشن است که افزایش صلبیت پره، باعث افزایش فرکانس می‌شود و از آنجا که سفتی در محور فلپینگ نسبت به سایر محورها پایین‌تر می‌باشد لذا فلاتر ابتدا در این محور اتفاق خواهد افتاد. همچنین با افزایش زاویه پیش‌مخروطی، تراکنش بین نیروهای آیرودینامیکی و نیروهایی گریز از مرکز سبب بروز ناپایداری سیستم گردیده و فلاتر زودتر اتفاق می‌افتد. افزایش زاویه گام بر نیروهای موثر بر محورهای لکینگ و پیچش اثر گذاشته و باعث افزایش سفتی در محور فلپینگ می‌شود بنابراین فرکانس فلاتر افزایش می‌یابد به عبارتی، افزایش زاویه گام سبب تأخیر در فلاتر می‌شود.

در ادامه تحقیق حاضر، بررسی ارتعاشات و فلاتر پره با توزیع جرم، سفتی و شکل هندسی غیریکنواخت برای دو حالت حرکتی هاور و رو به جلو بالگرد پیشنهاد می‌گردد.





شکل ۸. تغییرات فرکانس فلاتر بر اساس زاویه پیش مخروطی (β_{pc}) و زوایای مختلف پیچ (θ)

Fig. 8. flutter frequency variations for pitch angle (θ) and precone angle (β_{pc})

۶- فهرست علائم

علائم انگلیسی

A مساحت مقطع پره، m^2

a شیب منحنی لیفت ایرفویل

b تعداد پره‌های روتور

c وتر پره، m

c_{d_0} ضریب درگ

E مدول الاستیسیته پره، $\mathrm{N/m^2}$

F_x، F_y، F_z نیروهای متمرکز

G مدول برشی، $\mathrm{N/m^2}$

I_x, I_y, I_z ممان اینرسی بترتیب حول محورهای پیچ، فلپ و لکینگ (m^4)

J ممان اینرسی پیچشی (m^4)

k_A شعاع ژیراسیون قطبی سطح مقطع پره، m

k_m شعاع ژیراسیون جرمی سطح مقطع پره، m

L طول پره، m

L_u، L_v و L_w نیروهای آیرودینامیکی

m جرم واحد طول، kg/m

M ممان حول محورها

R شعاع روتور، m

T انرژی پتانسیل، $\mathrm{N-m}$

t زمان، ثانیه

u, v, w بترتیب انحراف در محورهای طولی، لکینگ و فلپ، m

U انرژی پتانسیل، $\mathrm{N-m}$

v_i سرعت القائی، m/s

V سرعت یک نقطه بر روی پره، m/s

δW کار مجازی، $\mathrm{N-m}$

x, y, z سیستم مختصات قبل از تغییر شکل

علائم یونانی

θ زاویه پیچ پره، درجه

Ω سرعت چرخش روتور، $\mathrm{rad/s}$

β_{pc} زاویه پیش مخروطی، درجه(رادیان)

β_j زاویه خمشی، درجه(رادیان)

σ صلبیت روتور

γ عدد لاک پره

μ شعاع ژیراسیون جرمی، بی‌بعد

ϕ پیچش الاستیکی پره حول محور طولی، رادیان

$\hat{\phi}$ زاویه چرخش الاستیکی بره، رادیان

ψ زمان، بی‌بعد

ω فرکانس طبیعی، $\mathrm{rad/s}$

ρ جرم واحد طول پره

Λ_1, Λ_2 استحکام خمشی بی‌بعد

ξ, η, ζ سیستم مختصات پس از تغییر شکل

$\sigma_{x\eta}, \sigma_{x\zeta}, \sigma_{xx}$ مولفه‌های تنش مهندسی، $\mathrm{N/m}$

$\varepsilon_{x\eta}, \varepsilon_{x\zeta}, \varepsilon_{xx}$ کرنش‌های محوری و برشی

λ_T تابع تابیدگی سطح مقطع پره

زیرنویس

f فلاتر

بالانویس

- بی‌بعد شده

منابع

[1] J.C. Houbolt, G.W. Brooks, Differential equations of motion for combined flapwise bending, chordwise bending, and torsion of twisted nonuniform rotor blades, National Advisory Committee for Aeronautics, 1957.

[2] R.A. Ormiston, D.H. Hodges, Linear Flap-Lag Dynamics of Hingeless Helicopter Rotor Blades in Hover, Journal of the American Helicopter Society, 17(2) (1972) 2-14.

[3] D.H. Hodges, R.A. Ormiston, Nonlinear equations for bending of rotating beams with application to linear flap-lag stability of hingeless rotors. NASA TM X-2770, NASA Technical Memorandum, Washington, DC, (1973).

[4] D.H. Hodges, E.H. Dowell, Nonlinear equations of motion for the elastic bending and torsion of twisted nonuniform rotor blades. NASA TN D-7818, NASA Technical note, Washington, DC, (1974).

[5] D.H. Hodges, R.A. Ormiston, Stability of elastic bending and torsion of uniform cantilever rotor blades in hover with variable structural coupling. NASA TN D-8192, NASA Technical note, Washington, DC, (1976).

[6] K. Subrahmanyam, K. Kaza, G. Brown, C. Lawrence, Nonlinear vibration and stability of rotating, pretwisted,

preconed blades including coriolis effects, Journal of aircraft, 24(5) (1987) 342-352.

[7] B. Panda, I. Chopra, Dynamic stability of hingeless and bearingless rotors in forward flight, Computers & Mathematics with Applications, 12(1) (1986) 111-130.

[8] A. Castillo Pardo, I. Goulos, V. Pachidis, Modelling and analysis of coupled flap-lag-torsion vibration characteristics helicopter rotor blades, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering, 231(10) (2017) 1804-1823.

[9] F. Liang, Z. Li, X.-D. Yang, W. Zhang, T.-Z. Yang, Coupled bending–bending–axial–torsional vibrations of rotating blades, Acta Mechanica Solida Sinica, 32 (2019) 326-338.

[10] O. Ozdemir Ozgumus, M.O. Kaya, Formulation for flutter and vibration analysis of a hingeless helicopter blade in hover: Part I, Aircraft Engineering and Aerospace Technology, 79(2) (2007) 177-183.

[11] O.O. Ozgumus, M.O. Kaya, Formulation for flutter and vibration analysis of a hingeless helicopter blade in hover: part II. Results of flutter stability and vibration analysis of a hingeless helicopter blade in hover, Aircraft Engineering and Aerospace Technology, 79(3) (2007) 231-237.

[12] J. Zeng, C. Zhao, H. Ma, B. Wen, Dynamic modeling and coupling characteristics of rotating inclined beams with twisted-shape sections, Frontiers of Mechanical Engineering, 15 (2020) 374-389.

[13] H. Han, D. Cao, L. Liu, J. Gao, Y. Li, Free vibration analysis of rotating composite Timoshenko beams with bending-torsion couplings, Meccanica, 56 (2021) 1191-1208.

[14] M. Amoozgar, H. Shahverdi, Aeroelastic stability analysis of curved composite blades in hover using fully intrinsic equations, International Journal of Aeronautical and Space Sciences, 20 (2019) 653-663.

[15] P. Sarker, U.K. Chakravarty, On the dynamic response of a hingeless helicopter rotor blade, Aerospace Science and Technology, 115 (2021) 106741.

[16] I. Chopra, A. Datta, Helicopter dynamics, ENAE, 633 (2011) 79-114.

[17] A. Datta, Fundamental understanding, prediction and validation of rotor vibratory loads in steady-level flight, University of Maryland, College Park, 2004.

[18] A.H. Nayfeh, D.T. Mook, Nonlinear oscillations, John Wiley & Sons, 2008.

[19] L. Meirovitch, Fundamentals of vibrations, Waveland Press, 2010.

[20] D.J. Inman, Vibration with control, John Wiley & Sons, 2017.

[21] E.H. Dowell, A modern course in aeroelasticity, Springer Nature, 2021.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. rezaee, M. rezayi, Investigating the nonlinear coupled vibrations of elastic blade of helicopter and analysis of flutter frequencies, Amirkabir J. Mech Eng., 55(12) (2024) 1483-1498.

DOI: 10.22060/mej.2024.22724.7664