

# Formulation and Topology optimization of flexure joints with small deformations based on strain energy criteria

Qaem Maloonezhadabsardi, Behrooz Hassani \* , Nima Yaghoobi

Faculty of Engineering, Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

**ABSTRACT:** Flexure joints are one of the most widely used and crucial elements in the design of precision mechanisms. Owing to their monolithic and elastic structure, these joints facilitate highly precise movements. In this study, we present a kinetoelastic model for designing various types of flexure joints with single and multiple degrees of freedom. To reduce computational costs, two beneficial approaches for defining the objective function and constraints are presented, based solely on the strain energy criterion and predetermined displacements. The resulting self-adjoint optimization problem exhibits computational efficiency and improved convergence. The topology optimization problem utilizes the Finite Element Method and the Solid Isotropic Material with a Penalization model, employing the Method of Moving Asymptotes to solve and identify the optimal topology. A comprehensive mathematical framework, including the relevant two-dimensional boundary conditions and sensitivity analysis, is meticulously developed and extensively examined. For this purpose, MATLAB code is developed for designing two-dimensional flexure joints with single and multiple degrees of freedom. Finally, the results obtained from the comparison of two optimization approaches presented in this study are discussed. In these joints, the stiffness ratio of the structure has increased significantly, up to 208 times, indicating the practicality and effectiveness of this method in the topology optimization of flexure joints.

## Review History:

Received: Apr. 24, 2024

Revised: Jun. 29, 2024

Accepted: Jul. 13, 2024

Available Online: Jul. 21, 2024

## Keywords:

Flexure Joints

Topology Optimization

Strain Energy

The Method of Moving Asymptotes

Predetermined Displacements

## 1- Introduction

Topology optimization is a branch of structural optimization that focuses on determining the optimal structure by adjusting the number, location, and shape of voids, and the way members of the structure interact. It's used in continuous structural problems [1] and in designing flexible mechanisms like flexure joints, critical in engineering and robotics [2].

Flexure joints allow relative motion via elastic deformation, needing minimal maintenance due to their monolithic build and lack of internal friction [3]. The design of flexure joints must ensure that these mechanisms create specific relative motions between rigid links while maintaining desirable stiffness. Degrees of freedom enable the desired movement, whereas constraints restrict it [4].

This research applies topology optimization to enhance flexure joint performance, emphasizing stiffness optimization, motion range, stress control, fatigue resistance, and manufacturing sensitivity. It focuses on joints with small displacements, using linear elasticity for structural relationships.

## 2- Methodology

A flexure joint within a design domain  $\Omega$  made of linear elastic isotropic material is considered. The design domain is represented as in Figure 1 and includes a white optimization region and blue rigid links on the left and right. The contact areas between the flexure joint and the rigid links

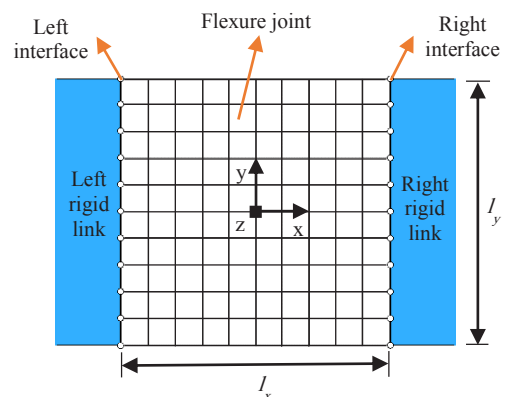
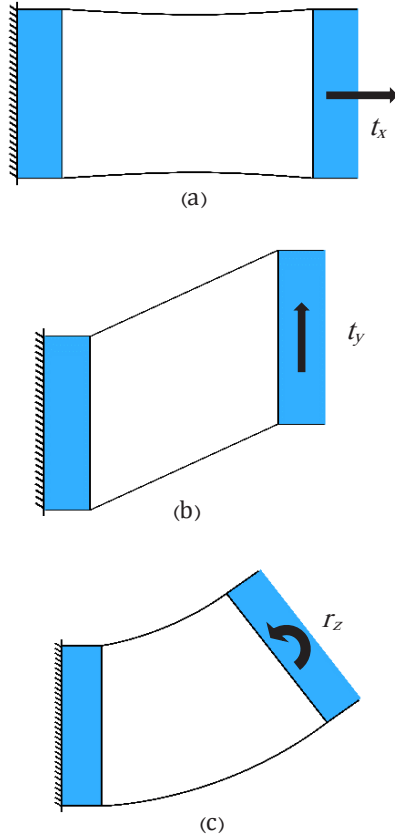


Fig. 1. The design domain for topology optimization of flexure joints in a 2D space

\*Corresponding author's email: b\_hassani@um.ac.ir





**Fig. 2. Three independent motion patterns used for the design of 2D flexure joints. (a) Relative translational motion along the x-axis (tx), (b) Relative translational motion along the y-axis (ty), and (c) Rotation about the z-axis (rz).**

are called interfaces. Circles indicate common nodes where predetermined displacements apply various motion patterns to the joint.

This research uses predetermined displacements as boundary conditions, unlike previous studies that used fixed loads. In a 2D space, the motion patterns  $\mathbb{M} = \{t_x, t_y, r_z\}$  include two translational (x and y axes) and one rotational (z-axis) movement, as shown in Figure 2. Subsets  $\mathbb{C} \subset \mathbb{M}$  and  $\mathbb{F} = \mathbb{M} \setminus \mathbb{C}$  represent constrained and free motion patterns, respectively. Table 1 details the numbering and nodal displacement values for the three defined motion patterns.

Two methods for formulating the topology optimization problem are presented below. The first approach formulates the topology optimization problem by maximizing the strain energy function for constrained motion patterns while assigning specific values to the strain energies from free motion patterns. This function's negative is minimized for standard optimization.

In the second approach, a function is derived from strain energies due to applied motion patterns for both constrained and free degrees of freedom. The objective is to maximize constrained motion pattern energies and minimize free motion

**Table 1. Predetermined displacement values**

Motion pattern	Number	$u$	$v$
$t_x$	1	1	0
$t_y$	2	0	1
$r_z$	3	1	$u = -\frac{2y}{l_y}$

pattern energies simultaneously while maintaining a specified minimum ratio between the energies of constrained and free motion patterns. Like the first approach, the optimization problem is formulated in a standard manner rather than maximizing constrained motion pattern energies directly. The formulation of the proposed problem is as follows:

$$\begin{aligned}
 & \text{find } \boldsymbol{\rho} = [\rho_1 \quad \rho_2 \quad \dots \quad \rho_n]^T \\
 & \min f(\mathbf{U}(\boldsymbol{\rho})) = \sum_{i=1}^{n_c} -U_i(\boldsymbol{\rho}) + \sum_{j=1}^{n_f} U_j(\boldsymbol{\rho}) \\
 & \text{s.t. } \frac{U_i(\boldsymbol{\rho})}{U_j(\boldsymbol{\rho})} \geq e_{\min}, \quad i \in \mathbb{F}, j \in \mathbb{C} \\
 & V(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\rho}_k^T \mathbf{v}_k - \bar{V} \leq 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

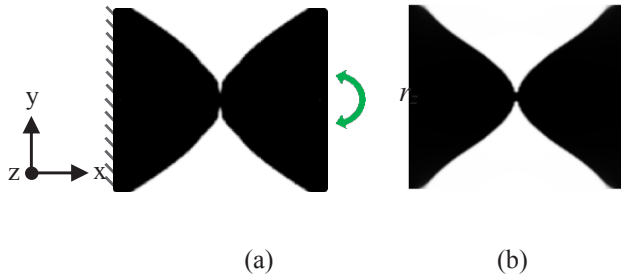
The dimensionless objective function  $f$  depends on strain energies  $U_i$  and  $U_j$  with  $e_{\min}$  indicating the minimum relative stiffness ratio between constrained and free degrees of freedom's strain energies.  $V$  denotes the permissible material volume.

Topology optimization involves calculating successive structural responses (objective function and constraints) and analyzing their sensitivity to design variables. In this research, the optimization problem aims to minimize negative strain energy in constrained degrees of freedom. Consequently, the sensitivity analysis of the objective function in this optimization problem is expressed as follows:

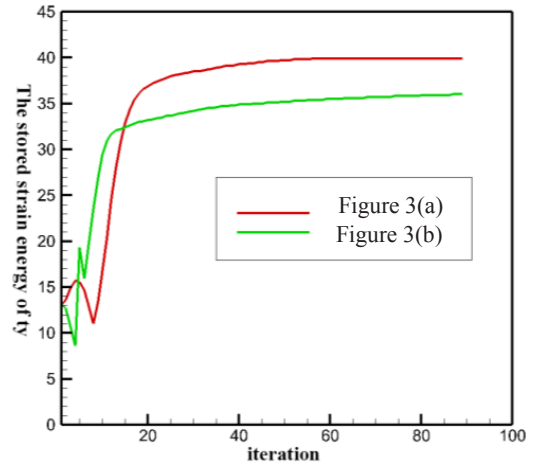
$$F = -U_a \rightarrow -\frac{\partial U_a}{\partial \rho_e} = -\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{u} \tag{2}$$

### 3- Results and Discussion

In this section, an example of a rotational flexure joint along with its validation is presented. A rotational flexure joint can only rotate about the z-axis and has no translational motion along the x and y axes. Sets of free and constrained motion



**Fig. 3. Optimized flexure joints capable of rotation about the z-axis resulting from (a) current research and (b) the design proposed by [6]**



**Fig. 4. Comparison of convergence plot of strain energy values for the rotational joints presented in Figures 3(a) and 3(b)**

patterns denoted as  $\mathbb{F} = \{r_z\}$  and  $\mathbb{C} = \{t_x, t_y\}$ , respectively, are considered. The minimum relative stiffness of the constrained degrees of freedom relative to the free degree of freedom is considered to be 50 ( $e_{\min} = 50$ ). The optimized topology depicted in Figure 3(a) represents the output of the optimization problem, and for a better comparison, the topology generated by Koppen [5] is presented in Figure 3(b).

For the validation of the quantitative research conducted, the stored strain energy in two rotational hinge joints depicted in Figures 3(a) and 3(b) is calculated under the application of translational movement patterns  $t_x$  and  $t_y$  with identical inputs. Under these uniform conditions, the hinge joint derived from the approach presented in this study preserves 10.83% and 1.85% more strain energy for the constraint degrees  $t_y$  and  $t_x$ , respectively, compared to the hinge joint proposed by [6]. The convergence plot illustrating  $t_y$  the comparison is shown in Figure 4. The output results of these two optimization problems are presented in Table 2.

The validation confirmed the accuracy of finite element calculations and the optimization algorithm. A computer program was then developed to identify more complex rotational flexure joints. These optimized topologies reduce material at their centers, enhancing resistance to torsional loads and enabling rotational movement around their centers when fixed on one side and subjected to rotational force on the other.

The optimization method proposed in this study is based on strain energy criteria and has significant advantages. The first advantage is its self-adaptive nature, which increases the solution speed and reduces computational volume to the extent that it can be executed on a home computer. The second advantage is its capability to generate numerous optimal topologies, whereas previous methods only produced a single optimal topology. The third advantage lies in the use of a gradient-based optimization approach, which facilitates rapid convergence of the objective function and constraints, thereby reducing the time to achieve optimal topologies.

**Table 2. Strain energy values stored in rotational joints of Figures 3(a) and 3(b)**

Optimized flexure joint	(N.mm)		
	$t_x$	$t_y$	$r_z$
Figure 3(a)	110	39.9	0.851
Figure 3(b)	108	36	0.851

#### 4- Conclusions

This research establishes a comprehensive framework for the design of flexure joints, significantly simplifying the process by requiring minimal parameters and computational effort. Utilizing MATLAB and gradient-based methods, this framework effectively optimizes both single and multi-degree-of-freedom joints within the linear elastic range. Notably, some designs achieved a stiffness-to-weight ratio of up to 208 times. The framework also has potential applications in three-dimensional and nonlinear elastic problems and can incorporate constraints such as stress and fatigue, making it highly practical and versatile for future advancements in the field.

#### References

- [1] N. Yaghoobi, B. Hassani, Topological optimization of vibrating continuum structures for optimal natural eigenfrequency, *International Journal of Optimization in Civil Engineering*, 7(1) (2017) 1-12.
- [2] T. Wu, Z. Liu, B. Wang, Z. Ma, D. Ma, X. Deng, A versatile topology-optimized compliant actuator for soft robotic gripper and walking robot, *Soft Robotics*, 11(1)

(2024) 157-170.

- [3] L.L. Howell, Compliant mechanisms, in: 21st century kinematics: The 2012 NSF Workshop, Springer, (2013) 189-216.
- [4] M.Y. Wang, A kinetoelastic formulation of compliant mechanism optimization, *Journal of Mechanisms and Robotics*, 1(2) (2009) 1-10.
- [5] S. Koppen, M. Langelaar, F. van Keulen, A simple and versatile topology optimization formulation for flexure synthesis, *Mechanism and Machine Theory*, 172(1) (2022) 1-15.



## رابطه‌سازی و بهینه‌سازی توپولوژی مفصل‌های خمشی با تغییرشکل‌های کوچک بر اساس معیار انرژی کرنشی

قائم معلونژاد آبرسدی، بهروز حسینی<sup>ID\*</sup>، نیما یعقوبی

دانشکده مهندسی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران.

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۳/۰۲/۰۵

بازنگری: ۱۴۰۳/۰۴/۰۹

پذیرش: ۱۴۰۳/۰۴/۲۳

ارائه آنلاین: ۱۴۰۳/۰۴/۳۱

### کلمات کلیدی:

مفصل‌های خمشی

بهینه‌سازی توپولوژی

انرژی کرنشی

حرکت مجانب‌های متحرک

جابه‌جایی‌های ازپیش تعیین شده

**خلاصه:** مفصل‌های خمشی یکی از پرکاربردترین و مهم‌ترین المان‌های طراحی در طراحی سازوکارهای دقیق هستند. این مفصل‌ها به دلیل ساختار یک‌پارچه و ارتجاعی خود امکان ایجاد حرکت‌های دقیق را فراهم می‌کنند. در این پژوهش یک مدل کینتوالاستیک برای طراحی انواع مفصل‌های خمشی یک و چند درجه آزادی ارائه شده است. برای کاهش هزینه محاسباتی، دو رویکرد رابطه‌سازی مفید برای بیان تابع هدف و قیدهای مسئله ارائه شده‌اند که تنها بر اساس معیار انرژی کرنشی و جابه‌جایی‌های ازپیش تعیین شده تعریف شده‌اند. این روش دارای خاصیت خودالحاقی است که با کاهش حجم محاسبات برای تحلیل حساسیت، همگرایی بالایی را نیز به همراه دارد. برای یافتن پاسخ‌های مسئله بهینه‌سازی از تحلیل اجزای محدود، مدل‌سازی مواد با استفاده از روش جامد همسان‌گرد با جرمه و روش مبتنی بر گرادیان حرکت مجانب‌های متحرک استفاده شده است. مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی در نرم‌افزار متلب برنامه‌نویسی و مثال‌های متعددی برای طراحی مفصل‌های خمشی یک و چند درجه آزادی در فضای دوبعدی حل شده است. در نهایت نتایج به دست آمده از دو رویکرد بهینه‌سازی ارائه شده در این پژوهش با یکدیگر مقایسه شده‌اند. نتایج به دست آمده از این پژوهش انواع مختلف مفصل‌های خمشی در فضای دوبعدی را پوشش می‌دهد. در برخی از این مفصل‌ها، نسبت سفتی سازه به میزان قابل توجهی، تا ۲۰۸ برابر، افزایش یافته است که این امر نشان‌دهنده کاربردی بودن و اثربخشی این روش در بهینه‌سازی توپولوژی مفصل‌های خمشی است.

### ۱- مقدمه

بهینه‌سازی توپولوژی یکی از شاخه‌های بهینه‌سازی سازه‌ای است که به تعیین تعداد، مکان، شکل حفره‌ها و نحوه ارتباط بین اعضای سازه می‌پردازد. این روش در زمینه‌های مختلفی از جمله مسائل سازه‌ای پیوسته [۱، ۲] استفاده شده است. یکی از جدیدترین کاربردهای بهینه‌سازی توپولوژی، استفاده از این روش برای دستیابی به سازوکارهای منعطف بهینه است. به طور دقیق‌تر، بهینه‌سازی توپولوژی برای طراحی و بهبود مفصل‌های خمشی، که از جمله سازوکارهای انعطاف‌پذیر هستند، به کار گرفته می‌شود. این مفصل‌ها در بسیاری از کاربردهای مهندسی و رباتیک [۳] اهمیت ویژه‌ای دارند. پژوهش حاضر به طراحی این نوع مفصل‌ها با استفاده از روش بهینه‌سازی توپولوژی می‌پردازد تا عملکرد این سازوکارها بهبود یابد.

### ۱-۱- مقدمه مفصل خمشی

یک مفصل خمشی<sup>۱</sup> نوعی سازوکار<sup>۲</sup> منعطف است که از قسمت‌های انعطاف‌پذیر یک‌پارچه‌ای تشکیل شده است. این مفصل‌ها با قرارگیری بین دو یا چند پیوند صلب<sup>۳</sup> امکان حرکت‌های نسبی بین آن‌ها را فراهم می‌کنند و دامنه حرکت خود را از طریق تغییرشکل ارتجاعی به دست می‌آورند. همچنین به دلیل داشتن پیکربندی یک‌پارچه و عدم وجود اصطکاک بین قسمت‌های مختلف به ندرت به تعمیر و نگهداری نیاز دارند و در صورت استفاده در محدوده‌ی حرکتی مجاز، عمر بالایی دارند [۴]. مفصل‌های خمشی به‌ویژه برای دستگاه‌های مکانیکی در مقیاس میکرو مناسب هستند؛ زیرا می‌توان از دشواری ساخت اتصال‌های لولایی جسم صلب در مقیاس کوچک که اغلب کاری پرهزینه و دشوار است، جلوگیری کرد [۵].

طراحی مفصل‌های خمشی باید به گونه‌ای باشد که این سازوکارها

- 1 Flexure joint
- 2 Compliant mechanism
- 3 Rigid link

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: b\_hassani@um.ac.ir

کرنش-جابه‌جایی به کمک الاستیسیته خطی به دست می‌آیند.

#### ۱-۲- بررسی مختصر تاریخچه پژوهش

طراحی مفصل‌های خمشی قدیمی اغلب بر اساس رویکردهای آزمون و خطا انجام می‌شد و طراحان با تکیه بر تجربه و دانش خود اقدام به تعیین ساختار این مفصل‌ها می‌کردند. پاروس و ویزبوردر [۱۰]، در سال ۱۹۶۵ میلادی، برای اولین بار یک رابطه‌سازی دقیق برای محاسبه نرمی مفصل خمشی دایره‌ای<sup>۸</sup> ارائه کردند. در ادامه مفصل‌های شکاف‌دار جدید و متفاوت‌تری طراحی شدند. اشمیت و همکاران [۱۱]، یک مفصل خمشی ساده با سطح مقطع بیضی<sup>۹</sup> ارائه و انعطاف‌پذیری را با استفاده از روابط فرم بسته<sup>۱۰</sup> تحلیلی حل کردند.

یکی از مشکلات مشترک در میان رابطه‌سازی‌های بیان شده، طراحی این مفصل‌های خمشی با استفاده از یک طرح بهینه آغاز نمی‌شود. برای رفع این مشکلات، در ادامه دو رویکرد کلی برای مدل‌سازی مفصل‌های خمشی با عنوان رابطه‌سازی کینتواستاتیک<sup>۱۱</sup> و کینتوالاستیک<sup>۱۲</sup> ارائه شده است که این نام‌گذاری برای اولین بار توسط ونگ [۵] انجام شد.

روش کینتواستاتیک به تعیین نیروهایی می‌پردازد که بر المان‌های یک سازوکار عمل می‌کنند، با توجه به این که مجموعه مکانیکی به عنوان یک ساختار ساکن عمل می‌کند [۱۲]. هدف اصلی رابطه‌سازی‌های کینتواستاتیک، اغلب به طور هم‌زمان به حداکثر رساندن انتقال انرژی بین درگاه‌های ورودی و خروجی و همچنین سفتی سازوکار است [۵]. اگرچه هیچ رابطه پذیرفته‌شده کلی و جامعی وجود ندارد، اما نشان داده شده است که اغلب این رابطه‌ها توپولوژی‌های مشابهی را برای مفصل‌های خمشی بهینه تولید کرده‌اند [۱۳]. برای طراحی مفصل‌های خمشی به کمک رابطه‌سازی کینتواستاتیک، ژو و همکاران [۱۴] و پینسکیبر و همکاران [۱۵] به طور مستقل رویکردهای ساده‌ای را برای طراحی اتصال‌های یک درجه آزادی دوبعدی انتقالی و چرخشی پیشنهاد کردند. رابطه‌سازی ژو و همکاران [۱۴] برای محاسبه غیرخطی هندسی [۱۶، ۱۷]، قیدهای تنش [۱۸]، توزیع تنش و نرمی [۱۹، ۷]، سفتی ازپیش تعیین شده [۲۰] و یک بازوی منعطف رباتیک [۲۱] گسترش یافته است.

برخلاف رابطه‌سازی‌های کینتواستاتیک، رابطه‌سازی‌های کینتوالاستیک،

حرکت‌های نسبی مشخصی بین پیوندهای صلب ایجاد کنند و دارای سفتی مطلوبی باشند. این حرکت‌های نسبی، به عنوان الگوهای حرکتی<sup>۱</sup> شناخته می‌شوند. درجه‌های آزادی سازوکار<sup>۲</sup>، الگوهای حرکتی هستند که در آن‌ها سازوکار خمشی می‌تواند با داشتن سفتی مشخصه مطلوب، آزادانه حرکت کند. از سوی دیگر، درجه‌های قید سازوکار<sup>۳</sup> الگوهای حرکتی هستند که سازوکار در آن جهت‌ها سفتی بسیار بالایی دارد و بنابراین قادر به حرکت نیست [۵].

روش‌های اصولی زیادی برای طراحی مفصل‌های خمشی وجود دارد که از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به روش‌های سینماتیک<sup>۴</sup> یا بلوک‌های سازنده<sup>۵</sup>، جایگزینی جسم صلب<sup>۶</sup> و توپولوژی آزاد و محدودیت<sup>۷</sup> اشاره کرد [۶]. اگرچه مفصل‌های خمشی متنوعی با استفاده از این روش‌ها طراحی شده‌اند؛ اما این روش‌ها از تمام امکانات طراحی مانند طراحی بهینه برای کنترل مواد مصرف‌شده و ایجاد انعطاف‌پذیری انتخابی استفاده نمی‌کنند. از طرفی این روش‌ها اغلب برای پیاده‌سازی نیاز به محاسبات ریاضی پیچیده دارند.

در سال‌های اخیر، به روش‌های بر پایه گرادینان در بهینه‌سازی ساختاری، به‌ویژه برای طراحی مفصل‌های خمشی بهینه، توجه زیادی شده است [۷]. یکی از این روش‌ها بهینه‌سازی توپولوژی است که برای مشخص کردن تعداد، موقعیت و شکل حفره‌ها در یک سازه و همچنین تعیین چگونگی اتصال اجزای آن به کار می‌رود [۸]. روش بهینه‌سازی توپولوژی امکان افزایش آزادی عمل در فرآیند طراحی را فراهم می‌کند، درحالی‌که نسبت به روش‌های طراحی ذکرشده، نیاز به دانش حداقلی طراح در تعریف مفاهیم پیچیده در زمینه سازوکارهای خمشی دارد و در نهایت منجر به تولید سازوکار خمشی بهینه می‌شود [۹].

اولین و مهم‌ترین نیاز طراحی در زمینه مفصل‌های خمشی پیشینه شدن سفتی نسبی بین درجه‌های آزادی و قید سازوکار است. نیازهای بعدی افزایش دامنه حرکت، کنترل پیشینه تنش ایجادشده، طراحی برای مقاومت در برابر خستگی و در نظر گرفتن حساسیت طرح نهایی به روش‌های ساخت است. هدف از این پژوهش ارائه روشی برای برطرف کردن مهم‌ترین نیاز طراحی در زمینه مفصل‌های خمشی است. این پژوهش بر روی مفصل‌های خمشی با جابه‌جایی‌های کوچک تمرکز دارد و روابط ساختاری مانند تنش-کرنش و

- 1 Motion Patterns (MPs)
- 2 Degrees of Freedom (DOFs)
- 3 Degrees of Constraint (DOCs)
- 4 Kinematic
- 5 Building block
- 6 Rigid-body replacement
- 7 freedom and constraint topology

- 8 Circular flexure hinge
- 9 Elliptic cross section
- 10 Closed-form equations
- 11 Kinetostatic
- 12 Kinetoelastic



## ۲- تعریف مسئله بهینه‌سازی

برای تعریف مسئله بهینه‌سازی توپولوژی، نیاز به مفاهیمی چون دامنه طراحی شرایط مرزی مانند نحوه تعریف نیروها، تکیه‌گاه‌ها و محدودیت‌های فیزیکی اعمال شده به سازه، روش حل شامل روش‌های عددی برای پیدا کردن توزیع بهینه ماده و پاسخ‌های سازه، تابع هدف و محدودیت‌های مختلف و در نهایت، الگوریتم بهینه‌سازی برای یافتن بهترین توزیع ماده با توجه به تابع هدف و قیود به کار گرفته می‌شود. در ادامه بخش هر کدام از این مفاهیم به صورت جداگانه توضیح داده شده است.

### ۲-۱- دامنه طراحی

یک مفصل خمشی در دامنه‌ی طراحی  $\Omega$  در نظر گرفته که از یک ماده ارتجاعی خطی همسان‌گرد تشکیل شده است. دامنه طراحی به صورت شکل ۱ در نظر گرفته می‌شود. قسمت سفید رنگ دامنه‌ی طراحی مسئله بهینه‌سازی است و در قسمت آبی رنگ در سمت چپ و راست همان پیوندهای صلبی هستند که مفصل خمشی آن‌ها را به هم متصل می‌کند. به ناحیه‌هایی که مفصل خمشی با پیوندهای صلب چپ و راست در تماس است، فصل مشترک چپ و راست گفته می‌شود. گره‌های مشترک بین مفصل خمشی و پیوندهای صلب که جابه‌جایی‌های از پیش تعیین شده روی آن‌ها اعمال می‌شوند، با دایره نشان داده شده‌اند و برای اعمال الگوهای حرکتی مختلف به مفصل خمشی استفاده می‌شوند.

یکی از فرض‌های مسئله این است که فصل مشترک بین پیوندهای صلب و مفصل خمشی، صلب باشند و این فرض زمانی برآورده می‌شود که پیوندهای صلب در مقایسه با مفصل خمشی بسیار سخت‌تر فرض شوند؛ بر اساس این فرض الگوهای حرکتی دقیقاً برابر با حرکت‌های نسبی صلب بین پیوندهای صلب خواهد بود.

### ۲-۲- شرایط مرزی مسئله بهینه‌سازی

در این پژوهش جابه‌جایی‌های از پیش تعیین شده به عنوان ورودی شرایط مرزی در نظر گرفته می‌شوند. به همین دلیل یک مجموعه با نام  $M$  تعریف می‌شود که شامل تمام الگوهای حرکتی مستقل ممکن برای درجه‌های آزادی و درجه‌های قید است. برای مثال، مجموعه‌ی الگوهای حرکتی در فضای دوبعدی به صورت دو الگوی حرکتی انتقالی در راستای محور  $X$  ( $t_x$ ) و محور  $Y$  ( $t_y$ ) و یک الگوی چرخشی حول محور  $Z$  ( $r_z$ ) تعریف می‌شوند. این مجموعه الگوهای حرکتی دوبعدی به صورت

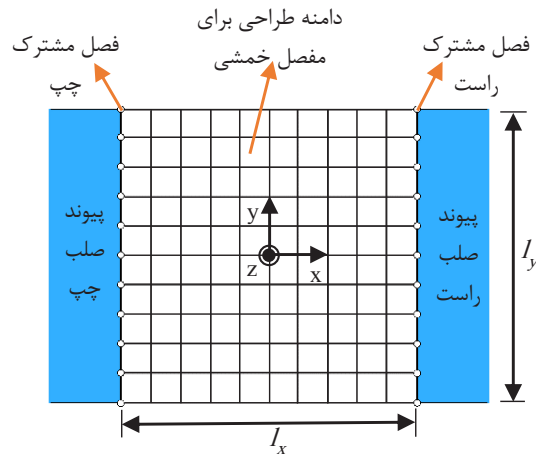
تابع‌های حرکتی سازوکار را به عنوان بخشی جدایی‌ناپذیر از خواص ارتجاعی ساختار پیوسته در نظر می‌گیرند و به دنبال یافتن مفصل‌های خمشی با خواص ذاتی مطلوب هستند [۵، ۲۲]. ماتریس سختی سازوکار، به کمک روش تراکم استاتیکی ماتریس سختی کلی به مجموعه کوچکی از جابه‌جایی‌های گره‌ای تبدیل می‌شود که می‌تواند الگوهای حرکتی را توصیف کند [۲۳، ۲۴]. این رابطه‌سازی به طور موثر برای طراحی اتصال‌های انتقالی مسطح [۵، ۲۵، ۲۶] و اتصال‌های چرخشی [۲۷] استفاده شده است.

هاس و کامپنیل [۲۸]، از فلسفه طراحی شیپ مورفینگ<sup>۱</sup>، یک رابطه‌سازی کینتو الاستیک را برای طراحی سازوکارهای منعطف با نرمی انتخابی به کمک شکل‌دهی به ویژگی‌های مودال ماتریس سختی سازوکار (حالت‌های ویژه و مقدارهای ویژه) پیشنهاد کردند. این روش در پژوهش‌های [۲۹، ۳۰] بهبود یافته و در پژوهش [۳۱] به طراحی سازوکارهای منعطف با چند درجه آزادی نیز گسترش داده شده است.

برخلاف توجهی که به بهینه‌سازی توپولوژی مفصل‌های خمشی شده است، رابطه‌های کینتو الاستیک پیشنهادی قبلی دارای عیب‌هایی هستند و چالش‌هایی دارند [۱۴، ۱۵، ۳۲]. در مقابل، رابطه‌های کینتو الاستیک برای مسائل گوناگونی استفاده می‌شوند، اما به طور کلی برای اجرا پیچیده‌تر هستند [۵، ۲۸]. بسیاری از این رابطه‌ها دارای توابع پاسخ‌هایی هستند که به صورت غیرخطی به جابه‌جایی گره‌ها وابسته هستند [۵، ۱۵] یا از سختی مصنوعی و پارامترهای اضافی تعریف شده توسط کاربر [۱۴] استفاده می‌کنند که می‌تواند درک و استفاده را دشوار کند. در نتیجه هیچ کدام از رابطه‌های پیشنهادی قبلی برای درک، پیاده‌سازی کارآمد نیستند.

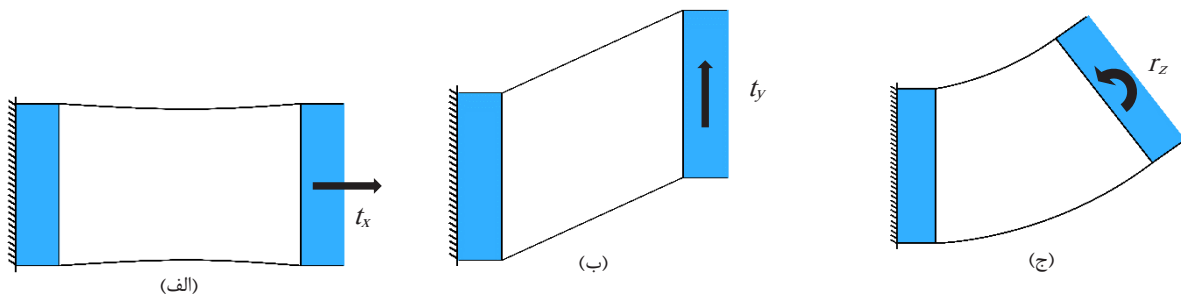
برای رفع چالش‌های بیان شده، در این پژوهش به توسعه یک مدل کینتو الاستیک برای طراحی مفصل‌های خمشی یک درجه و چند درجه آزادی می‌پردازیم که مهم‌ترین نیاز طراحی در این زمینه را شامل می‌شود. به این منظور دو رویکرد برای بهینه‌سازی تابع هدف ارائه می‌شود که فقط بر اساس معیارهای انرژی کرنشی و جابجایی‌های از پیش تعیین شده هستند. این رویکردها به خاطر دارا بودن خاصیت خودالحاقی، حجم محاسبات را به میزان زیادی کاهش و سرعت همگرایی را افزایش می‌دهند. علاوه بر این، روابط ریاضی مربوط به شرایط مرزی دوبعدی و تجزیه و تحلیل تابع هدف و قیدها نیز به طور کامل استخراج شده‌اند.

- 1 Mechanism stiffness matrix
- 2 Shape Morphing



شکل ۱. دامنه طراحی مسئله بهینه‌سازی توپولوژی مفصل‌های خمشی در فضای دوبعدی

Fig. 1. The design domain for topology optimization of flexure joints in a 2D space



شکل ۲. سه الگوی حرکتی مستقل استفاده‌شده برای طراحی مفصل‌های خمشی دوبعدی. شکل (الف) حرکت انتقالی نسبی در امتداد محور x (\$t\_x\$)، (ب) حرکت انتقالی نسبی در امتداد محور y (\$t\_y\$) و (ج) چرخش حول محور z (\$r\_z\$)

Fig. 2. Three independent motion patterns used for the design of 2D flexure joints. (a) Relative translational motion along the x-axis (\$t\_x\$), (b) Relative translational motion along the y-axis (\$t\_y\$), and (c) Rotation about the z-axis (\$r\_z\$).

به گونه‌ای که فرض می‌شود تمام گره‌های فصل مشترک بین پیوند صلب سمت راست و مفصل خمشی دارای جابجایی‌های عمودی مثبت یک (+۱) است. برای توصیف جابجایی افقی از یک تابع درونیابی خطی استفاده شده است؛ به گونه‌ای که اولین گره از پایین دارای مقدار مثبت یک (+۱) و بالاترین گره دارای مقدار منفی یک (-۱) است و گره‌های میانی به صورت خطی درونیابی می‌شوند. تابع درونیابی خطی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u = -\frac{2y}{l_y}, \quad -\frac{l_y}{2} \leq y \leq \frac{l_y}{2} \quad (1)$$

در نظر گرفته می‌شود که در شکل ۲ نشان داده شده است. همچنین زیرمجموعه‌های  $\mathbb{C} \subset \mathbb{M}$  و  $\mathbb{F} = \mathbb{M} \setminus \mathbb{C}$  نیز تعریف می‌شوند که به ترتیب شامل الگوهای حرکتی درجه‌های قید و الگوهای حرکتی درجه‌های آزادی هستند.

مقدار جابجایی‌های ورودی در این پژوهش به گونه‌ای در نظر گرفته شده است که مفصل خمشی دارای جابجایی‌های انتقالی با اندازه واحد در جهت محور X و محور Y باشد. به دلیل کوچک بودن جابجایی‌ها نسبت به ابعاد هندسی مفصل خمشی، الگوی حرکتی چرخشی ( $r_z$ ) نشان داده شده در شکل ۲ (ج) به کمک جابجایی‌های انتقالی تقریب زده شده است؛



جدول ۱. مقادیر جابه‌جایی‌های ازپیش تعیین شده

Table 1. predetermined displacement values

شماره الگوی حرکتی	مقدار جابه‌جایی افقی بر حسب میلی‌متر ( $u$ )	مقدار جابه‌جایی عمودی بر حسب میلی‌متر ( $v$ )	الگوی حرکتی
۱	۱	۰	$t_x$
۲	۰	۱	$t_y$
۳	$u = -\frac{2y}{l_y}$	۱	$r_z$

است. مقدار جابه‌جایی‌های گرهی با استفاده از روش تراکم استاتیکی<sup>۱</sup> رابطه (۳) و به صورت زیر بدست می‌آیند. بر اساس این روش جابه‌جایی‌های گرهی به سه بخش مجزا تقسیم می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{rr} & \mathbf{K}_{rl} & \mathbf{K}_{rs} \\ \mathbf{K}_{rl}^T & \mathbf{K}_{ll} & \mathbf{K}_{ls} \\ \mathbf{K}_{rs}^T & \mathbf{K}_{ls}^T & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{r,k} \\ \mathbf{u}_{l,k} \\ \mathbf{u}_{s,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{r,k} \\ \mathbf{f}_{l,k} \\ \mathbf{f}_{s,k} \end{bmatrix} \quad (۴)$$

که  $u_{r,k}$  جابه‌جایی‌های گرهی در فصل مشترک بین پیوند صلب سمت راست و مفصل خمشی،  $u_{l,k}$  جابه‌جایی‌های گرهی در فصل مشترک بین پیوند صلب سمت چپ و مفصل خمشی،  $u_{s,k}$  جابه‌جایی‌های گرهی قسمت داخلی مفصل خمشی،  $f_{r,k}$  نشان‌دهنده نیروی عکس‌العمل فصل مشترک بین پیوند صلب سمت راست و مفصل خمشی،  $f_{l,k}$  نیروی عکس‌العمل فصل مشترک بین پیوند صلب سمت چپ و مفصل خمشی و  $f_{s,k}$  نیروی اعمال شده به مفصل خمشی در الگوی حرکتی  $k$ ام است. همانطور که بیان شد، الگوهای حرکتی تنها با جابه‌جایی‌های گرهی ازپیش تعیین شده در پیوندهای صلب بدون در نظر گرفتن بارهای اعمال شده اضافی تعیین می‌شوند. یعنی  $f_{s,k}$  برای همه الگوهای حرکتی برابر صفر است. با توجه به این که جابه‌جایی در فصل مشترک بین پیوند صلب سمت چپ و مفصل خمشی برابر صفر است؛ در نتیجه جابه‌جایی‌های گرهی مفصل خمشی از رابطه زیر قابل محاسبه هستند:

که  $u$  مقدار جابجایی عمودی نقطه‌ای به مختصات  $y$  و  $l_y$  ارتفاع مفصل خمشی است. جدول ۱ نحوه شماره‌گذاری و مقدار جابجایی گرهی سه الگوی حرکتی بیان شده را نشان می‌دهد.

۲-۳- اصول انرژی و روابط اجزای محدود

فرض می‌شود همه مفصل خمشی طراحی شده در این پژوهش از جنس ماده استفاده شده در دامنه‌ی طراحی  $\Omega$  باشد. در اثر ایجاد حرکت نسبی بین پیوندهای صلب چپ و راست، انرژی کرنشی در مفصل خمشی ذخیره می‌شود. این انرژی کرنشی در اثر اعمال الگوی حرکت  $k$ ام به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U_k = \frac{1}{2} \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{K} \mathbf{u}_k, \quad \forall k \in \mathbb{M} \quad (۲)$$

که در آن  $\mathbf{K}$  نشان‌دهنده ماتریس سختی متقارن و  $\mathbf{u}_k$  نشان‌دهنده بردار جابجایی گره‌های الگوی حرکتی  $k$ ام است. برای محاسبه  $\mathbf{u}_k$  از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_k = \mathbf{f}_k \quad (۳)$$

که  $f_k$  بردار نیروهای وارد شده بر سازه و  $K$  ماتریس سختی کل سازه

1 Static condensation method

۲-۵- رویکرد دوم رابطه‌سازی مسئله بهینه‌سازی توپولوژی

در این رویکرد تابعی از انرژی کرنشی‌های بوجود آمده در اثر اعمال الگوهای حرکتی درجه‌های قید و آزادی تشکیل می‌شود که هدف بیشینه‌سازی انرژی کرنشی درجه‌های قید و کمینه‌سازی انرژی کرنشی درجه‌های آزادی به صورت هم‌زمان است؛ درحالی‌که نسبت انرژی کرنشی الگوهای حرکتی درجه‌های قید به انرژی کرنشی الگوهای حرکتی درجه‌های آزادی از یک مقدار کمتر نشود. مشابه رویکرد اول، به جای بیشینه‌سازی انرژی کرنشی درجه‌های قید، مسئله بهینه‌سازی به شکل استاندارد نوشته می‌شود. رابطه‌سازی مسئله‌ی پیشنهادی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{find } \boldsymbol{\rho} &= [\rho_1 \quad \rho_2 \quad \dots \quad \rho_n]^T \\ \min f(\mathbf{U}(\boldsymbol{\rho})) &= \sum_{i=1}^{n_c} -U_i(\boldsymbol{\rho}) + \sum_{j=1}^{n_f} U_j(\boldsymbol{\rho}) \\ \text{s.t. } \frac{U_i(\boldsymbol{\rho})}{U_j(\boldsymbol{\rho})} &\geq e_{\min}, \quad i \in \mathbb{F}, j \in \mathbb{C} \\ V(\boldsymbol{\rho}) &= \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\rho}_k^T \mathbf{v}_k - \bar{V} \leq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

که تابع هدف بدون بعد  $f$  تابعی از انرژی کرنشی‌های  $U_i$  و  $U_j$ ، عبارت  $e_{\min}$  حداقل مقدار سختی نسبی بین انرژی کرنشی درجه‌های قید و انرژی کرنشی درجه‌های آزادی،  $\bar{V}$  حجم ماده مصرفی مجاز،  $n_c$  تعداد درجه‌های قید و  $n_f$  تعداد درجه‌های آزادی مسئله بهینه‌سازی توپولوژی موردنظر است. روابط انرژی کرنشی استفاده شده برای این رویکرد مانند روابط استفاده شده در رویکرد اول است. هدف از ارائه این رویکرد مشارکت دادن انرژی کرنشی‌های درجه‌های آزادی برای بهینه‌سازی تابع هدف و همچنین استفاده از یک نسبت برای ایجاد سختی نسبی بین درجه‌های قید و آزادی است که باعث فهم راحت‌تر در رابطه‌سازی مسئله بهینه‌سازی می‌شود. بر خلاف روش کمینه‌سازی نرمی کلاسیک تحت بارهای اعمال شده [۳۳]، کمینه کردن انرژی کرنشی تحت جابه‌جایی‌های ازپیش‌تعیین‌شده منجر به حداقل شدن سختی موردنظر می‌شود [۳۴]؛ یعنی حداکثر کردن سختی تحت بارهای اعمال‌شده معادل به حداقل رساندن جابه‌جایی‌های متناظر است؛ اما در جابه‌جایی‌های ازپیش‌تعیین‌شده، حداکثر کردن سختی، معادل به حداکثر رساندن بارهای عکس‌العمل متناظر است.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{rs}^T \mathbf{u}_{r,k} + \mathbf{K}_{ls}^T \mathbf{u}_{l,k} + \mathbf{K}_{ss} \mathbf{u}_{s,k} &= \mathbf{0} \rightarrow \\ \mathbf{u}_{s,k} &= -\mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{rs}^T \mathbf{u}_{r,k}, \quad \forall k \in \mathbb{M} \end{aligned} \quad (5)$$

۲-۴- رویکرد اول رابطه‌سازی مسئله بهینه‌سازی توپولوژی

ایده‌ی اصلی این رویکرد رابطه‌سازی این است که یک تابع از انرژی کرنشی‌های بوجود آمده در اثر اعمال الگوهای حرکتی درجه‌های قید بیشینه شود؛ درحالی‌که برای انرژی‌های کرنشی بوجود آمده در اثر اعمال الگوهای حرکتی درجه‌های آزادی یک مقدار مشخص در نظر گرفته شود. در این پژوهش به جای بیشینه‌سازی این تابع، منفی آن کمینه می‌شود تا به صورت مسئله استاندارد بهینه‌سازی نوشته شود. رابطه‌سازی مسئله‌ی بهینه‌سازی غیرخطی مقید پیشنهادی برای طراحی مفصل‌های خمشی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{find } \boldsymbol{\rho} &= [\rho_1 \quad \rho_2 \quad \dots \quad \rho_n]^T \\ \min f(\mathbf{U}(\boldsymbol{\rho})) &= -\sum_{i=1}^{n_c} \frac{1}{2} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_i \\ \text{s.t. } \frac{1}{2} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_j - \bar{U}_j &\leq 0, \quad j \in \mathbb{F} \\ V(\boldsymbol{\rho}) &= \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\rho}_k^T \mathbf{v}_k - \bar{V} \leq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

که تابع هدف بدون بعد  $f$  تابعی از انرژی کرنشی‌های  $\mathbf{U}$  است و عبارت  $\bar{U}_j$  حداکثر انرژی کرنشی مجاز در اثر اعمال الگوی حرکتی درجه آزادی  $j$ ،  $\bar{V}$  مقدار حجم ماده مصرفی مجاز،  $n_c$  تعداد درجه‌های قید مسئله بهینه‌سازی توپولوژی موردنظر و  $n$  تعداد کل المان‌ها است. حداکثر انرژی کرنشی مجاز برای الگوهای حرکتی درجه‌های آزادی  $\bar{U}_j$  نیاز اولیه‌ی طراحی است که باید مقدار آن تعیین شود. این انرژی‌ها در صورت مجهول بودن، می‌توانند از دامنه حرکتی مورد نیاز برای یک بیشینه نیروی تحریک یا برعکس از نیروی تحریک مورد نیاز برای دامنه حرکتی داده‌شده به دست آیند.

### ۳- تحلیل حساسیت مسئله مورد نظر

و حجم محاسبات را تا حد زیادی کاهش داد. معادله الحاقی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}^T - \boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{0} \rightarrow \boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{2} \mathbf{u} \quad (11)$$

با قرار دادن رابطه (۱۱) در رابطه (۱۰) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_a}{\partial \rho_e} &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{u} + \mathbf{f}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_e} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_e} = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{u} + \mathbf{f}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_e} + \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_e} \end{aligned} \quad (12)$$

دو عبارت آخر در سمت راست رابطه (۱۲) برابر صفر هستند؛ زیرا بردار بار  $\mathbf{f}$  فقط در گره‌های با جابه‌جایی ازپیش تعیین شده مقدار دارد و در بقیه‌ی گره‌ها به دلیل عدم وجود بارهای وزن و بارهای خارجی برابر صفر است. از طرفی در گره‌هایی که جابه‌جایی ازپیش تعیین شده اعمال شده است؛ مقدار  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_e}$  برابر صفر است. در نتیجه دو عبارت آخر در همه گره‌ها صفر می‌شوند و تحلیل حساسیت برای انرژی کرنشی به صورت زیر است:

$$\frac{\partial U_a}{\partial \rho_e} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{u} \quad (13)$$

مسئله بهینه‌سازی این پژوهش منفی انرژی کرنشی در درجه‌های قید را کمینه می‌کند؛ در نتیجه تحلیل حساسیت تابع هدف این مسئله بهینه‌سازی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F = -U_a \rightarrow -\frac{\partial U_a}{\partial \rho_e} = -\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{u} \quad (14)$$

تمام پاسخ‌های موجود در مسئله بهینه‌سازی توپولوژی این پژوهش صورت خودالحاقی هستند زیرا تابع هدف و قید از جنس انرژی کرنشی هستند و می‌توان حساسیت‌ها را بر اساس اطلاعات موجود محاسبه کرد.

بهینه‌سازی توپولوژی نیازمند محاسبه‌ی متوالی پاسخ‌های ساختاری (تابع هدف و قیدها) و تحلیل حساسیت آن‌ها نسبت به متغیرهای طراحی است. تابع هدف و قیدها به بردار جابه‌جایی گرهی وابسته‌اند، و هر عضو این بردار تابعی ضمنی از متغیرهای طراحی (چگالی المان‌ها) است؛ بنابراین، تحلیل حساسیت با استفاده از مشتق زنجیره‌ای انجام می‌شود که نیازمند تحلیل‌های اجزای محدود و هزینه‌ی محاسباتی بالاست. برای پاسخ‌های بهینه‌سازی خاص مانند نرمی سازه یا انرژی کرنشی، مسئله به اصطلاح «خود الحاقی» است [۳۵]. در این مسائل هزینه محاسباتی کاهش می‌یابد و این مزیت فقط در حالت خطی قابل استفاده است. برای تحلیل حساسیت ابتدا انرژی کرنشی و بر اساس ضرایب لاگرانژ به یک تابعی<sup>۱</sup> تبدیل می‌شود:

$$U_a = U + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}) \quad (8)$$

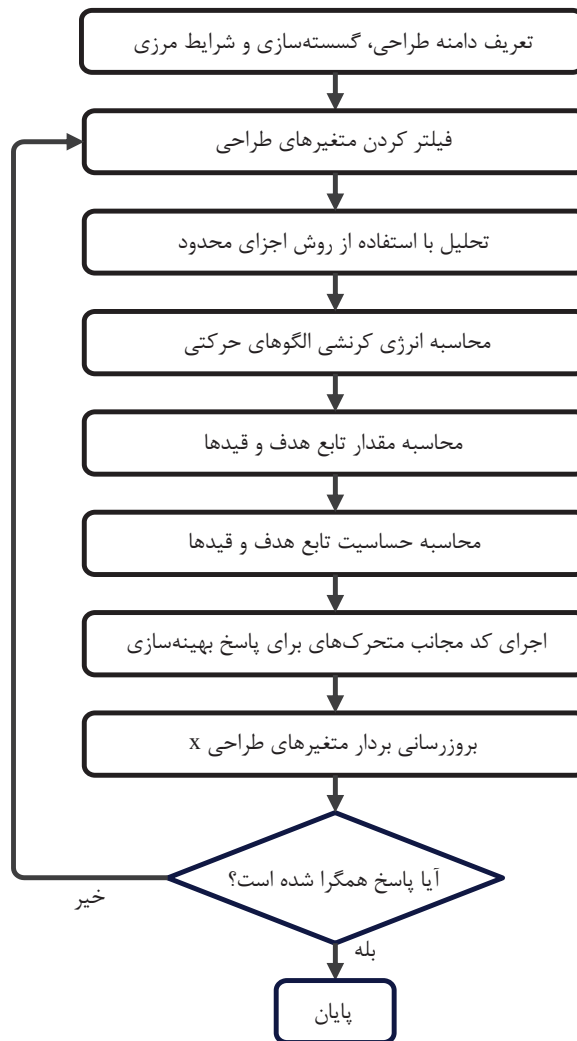
که  $\boldsymbol{\lambda}$  بردار ضرایب لاگرانژ است. با مشتق‌گیری از رابطه (۸) نسبت به متغیرهای طراحی هر المان ( $\rho_e$ ) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_a}{\partial \rho_e} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \rho_e} \mathbf{u} + \mathbf{f}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_e} \right) \\ &+ \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}^T}{\partial \rho_e} (\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}) + \boldsymbol{\lambda}^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_e} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \rho_e} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

رابطه (۹) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_a}{\partial \rho_e} &= \left( \frac{1}{2} \mathbf{u}^T - \boldsymbol{\lambda}^T \right) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \rho_e} \\ &+ \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{u} + \mathbf{f}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_e} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_e} \end{aligned} \quad (10)$$

مقادیر ضرایب لاگرانژ دلخواه و ثابت است. در نتیجه برای جلوگیری از محاسبه عبارت  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \rho_e}$  می‌توان ضریب این عبارت را برابر صفر در نظر گرفت



شکل ۳. نمودار جریان مسئله بهینه‌سازی توپولوژی مورد نظر

Fig. 3. Flowchart of the desired topology optimization problem

[۹] مدل‌سازی شده و متغیرهای طراحی با فیلتر خطی ارائه شده توسط تورتورلی [۳۶] فیلتر می‌شوند. نمودار جریانی روند حل مسئله این پژوهش در شکل ۳ ارائه شده است.

به طور کلی نرمال‌سازی تابع هدف به گونه‌ای سودمند است که دارای یک مقدار معقول (در مقایسه با قیدها) باشد [۳۷]. برای این کار انرژی کرنشی ذخیره‌شده در اثر هر الگوی حرکتی به مقدار انرژی کرنشی آن در اولین تکرار بهینه‌سازی تقسیم می‌شود؛ یعنی:

#### ۴- نحوه پیاده‌سازی مسئله بهینه‌سازی

برای حل مسئله بهینه‌سازی توپولوژی، باید روش‌های مختلفی از جمله رابطه‌سازی تابع هدف و قیدها، فیلتر کردن متغیرهای طراحی، درون‌یابی مواد و بهینه‌سازی مبتنی بر گرادیان در نظر گرفته شود. پاسخ سازه (جابه‌جایی‌های گرهی) با استفاده از روش اجزای محدود و المان‌های مربعی چهار گرهی استاندارد و حل رابطه (۵) به دست می‌آید. سپس ماده ارتجاعی درون دامنه طراحی با روش جامد همسانگرد با جریمه بهبودیافته<sup>۱</sup>

1 Solid isotropic material with penalization (SIMP)

جدول ۲. پارامترهای ثابت در حل مثال‌ها

Table 2. Constant parameters in the solved examples

مقدار	توضیح نماد	نماد
$10^{-9}$	حداقل سفتی ممکن برای حفره	$E_{\min}$
$0/3$	نسبت پواسون	$\nu$
۳	توان جریمه	$p$
۲	شعاع فیلتر (برحسب المان واحد)	$r$
$10^{-3}$	حداکثر تغییر طراحی	$\epsilon$
$0/5$	مقدار اولیه و همگن برای متغیرهای طراحی	$x^{(0)}$

مفصل خمشی جدید طراحی و ارائه شده است. تمام مثال‌های عددی ارائه شده این بخش با در نظر گرفتن ثابت‌های پیش فرض موجود در جدول ۲ تولید شده‌اند. دامنه طراحی مسئله بهینه‌سازی همان ناحیه سفید رنگ گسسته شده در شکل ۱ است که دارای ابعاد ۲۰۰ میلی‌متر در ۲۰۰ میلی‌متر است و با ۴۰۰۰۰ المان چهار وجهی چهار گرهی گسسته شده است. شرایط مرزی مسئله به صورت مجموعه‌ای (مطابق با الگوهای حرکتی نشان داده شده در شکل ۲) در نظر گرفته می‌شود که به فصل مشترک بین پیوندهای صلب و مفصل خمشی وارد می‌شوند. این جابه‌جایی‌های از پیش تعیین شده شامل دو حرکت انتقالی نسبی و یک حرکت چرخشی حول مرکز مفصل خمشی است و دارای مقداری برابر با مقادیر نشان داده شده در جدول ۱ هستند.

۵-۱- مفصل‌های خمشی یک درجه آزادی ارائه شده در ادبیات گذشته مفصل‌های خمشی یک درجه آزادی به دو دسته‌ی کلی انتقالی و چرخشی تقسیم می‌شوند. در ادبیات پژوهشی گذشته یک مفصل خمشی انتقالی توسط ونگ [۲] و یک مفصل خمشی چرخشی توسط کوپن [۲۲] با استفاده از رابطه‌سازی‌های متفاوت تولید شده‌اند که در ادامه به بازتولید آن‌ها با استفاده از رویکردهای ارائه شده در این پژوهش پرداخته شده است.

۵-۱-۱- مفصل خمشی انتقالی در راستای محور  $y$

برای تولید یک مفصل خمشی انتقالی که تنها در راستای محور افقی  $y$  حرکت کند و برای حرکت انتقالی در راستای محور  $x$  و چرخش حول

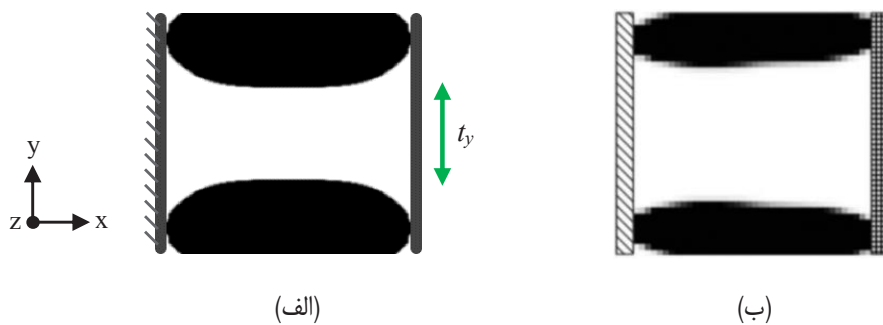
$$\beta_i^{(k)} := \frac{U_i^{(k)}}{U_i^{(0)}} \quad (15)$$

که  $\beta$  انرژی کرنشی نرمال شده در مرحله  $k$ ام بهینه‌سازی است. دو رویکرد رابطه‌سازی مسئله بهینه‌سازی غیرخطی در یک تحلیل و طراحی تودرتو حل شده‌اند. متغیرهای طراحی به طور مکرر توسط یک طرح بهینه‌سازی تقریبی متوالی بروز می‌شوند. در این پژوهش از روش مجانب‌های متحرک<sup>۱</sup> ارائه شده توسط سوانبرگ [۳۷] استفاده شده است. مقادیر ضرایب استفاده شده در مسئله بهینه‌سازی به کمک روش مجانب‌های متحرک همان مقادیر پیشنهاد شده توسط سوانبرگ است. از طرفی فرآیند بهینه‌سازی زمانی خاتمه می‌یابد که تغییری در توپولوژی نهایی بدست آمده صورت نپذیرد و حداکثر مقدار تغییر در طراحی کوچک‌تر از یک مقدار تعیین شده باشد. تمام مفصل‌های خمشی یک درجه آزادی و چند درجه آزادی ارائه شده در این پژوهش توسط برنامه‌نویسی در محیط نرم‌افزار متلب طراحی و تولید شده‌اند.

۵- نتایج عددی و تحلیل آن‌ها

این بخش به حل مسائل بهینه‌سازی ارائه شده در این پژوهش اختصاص دارد. برای صحت‌سنجی نتایج، ابتدا مسائل مربوط به مفصل‌های خمشی در ادبیات گذشته بررسی شده و سپس با اعمال شرایط مرزی مختلف، چند

1 The method of moving asymptotes (MMA)



شکل ۴. مفصل‌های خمشی بهینه با توانایی حرکت در راستای محور y حاصل از (الف) رویکرد اول، (ب) طرح ارائه شده توسط [۵]

Fig. 4. Optimized flexure joints capable of motion along the y-axis resulting from (a) the first approach, (b) the design proposed by [5]

با قرار دادن مقدار ۱۱۰ برای حداقل سفتی نسبی درجه‌های قید نسبت به درجه آزادی ( $e_{\min} = 110$ ) مسئله بهینه‌سازی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{find } \boldsymbol{\rho} &= [\rho_1 \quad \rho_2 \quad \dots \quad \rho_n]^T \\ \min \quad & -\frac{1}{2} \{ \mathbf{u}_{tx} \cdot \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_{tx} + \mathbf{u}_{tz} \cdot \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_{tz} \} \\ & + \frac{1}{2} \mathbf{u}_{ty} \cdot \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_{ty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } \quad & \frac{U_{tx}(\boldsymbol{\rho})}{U_{ty}(\boldsymbol{\rho})} \geq e_{\min} \\ & \frac{U_{tz}(\boldsymbol{\rho})}{U_{ty}(\boldsymbol{\rho})} \geq e_{\min} \\ & V(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{k=1}^n \rho_k^T \mathbf{v}_k - \bar{V} \leq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

با حل این مسئله بهینه‌سازی خروجی مشابه شکل ۴(الف) بدست می‌آید که در شکل ۵ نمایش داده شده است. با مقایسه شکل‌های ۴(الف) و ۵ با شکل ۴(ب) مشخص است که توپولوژی‌های درستی برای این شرایط مرزی بدست آمده‌اند. همانطور که از این توپولوژی‌ها مشخص است، نحوه توزیع ماده (مشکی رنگ) به گونه‌ای است که این مفصل‌ها مقاومت زیادی در راستای محور X و چرخش حول

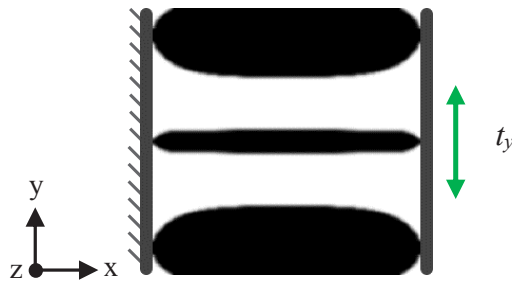
محور Z از خود مقاومت زیادی نشان بدهد، مجموعه‌های الگوهای حرکتی آزاد و مقید به ترتیب برابر با  $\mathbf{F} = \{ty\}$  و  $\mathbf{C} = \{tx, rz\}$  در نظر گرفته می‌شوند. این مفصل خمشی در ادبیات گذشته توسط ونگ [۵] و به کمک یک مدل کینتوالاتیک طراحی شده است. برای حل این مسئله با استفاده از رویکرد ارائه شده در بخش ۴-۲، مقدار حد بالا برای انرژی کرنشی درجه آزادی برابر با ۰/۸ نیوتن میلی‌متر ( $\bar{U}_{ty} = 0.8 \text{ N.mm}$ ) به عنوان ورودی این مسئله بهینه‌سازی در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه مسئله بهینه‌سازی مورد نظر به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{find } \boldsymbol{\rho} &= [\rho_1 \quad \rho_2 \quad \dots \quad \rho_n]^T \\ \min \quad & -\frac{1}{2} \{ \mathbf{u}_{tx} \cdot \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_{tx} + \mathbf{u}_{tz} \cdot \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_{tz} \} \\ \text{s.t. } \quad & \frac{1}{2} \mathbf{u}_{ty} \cdot \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_{ty} - \bar{U}_{ty} \leq 0 \\ & V(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{k=1}^n \rho_k^T \mathbf{v}_k - \bar{V} \leq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

با حل مسئله بهینه‌سازی فوق، توپولوژی بهینه بدست می‌آید که به صورت شکل ۴(الف) نشان داده می‌شود. همچنین برای بهتر نشان دادن درستی توپولوژی تولیدشده، مفصل خمشی تولیدشده توسط [۵] نیز در شکل ۴(ب) نشان داده شده است.

به طور مشابه با بکارگیری رویکرد دوم که در بخش ۵-۲ معرفی شد،





شکل ۵. توپولوژی نهایی یک مفصل انتقالی تولیدشده توسط رویکرد دوم رابطه‌سازی مسئله بهینه‌سازی

Fig. 5. Final topology of a translational joint generated by the second approach of the optimization problem formulation

جدول ۳. مقادیر انرژی کرنشی ذخیره‌شده در مفصل‌های انتقالی شکل‌های ۴(الف) و ۵

Table 3. Strain energy values stored in translational joints of Figs 4(a) and 5

مقدار انرژی کرنشی ذخیره‌شده در اثر اعمال الگوی حرکتی برحسب نیوتن میلی‌متر (N.mm)			مفصل بهینه
$t_z$	$t_y$	$t_x$	
۸۸/۸	۰/۸	۱۴۶	شکل ۴(الف)
۸۷/۸	۰/۸	۱۶۶	شکل ۵

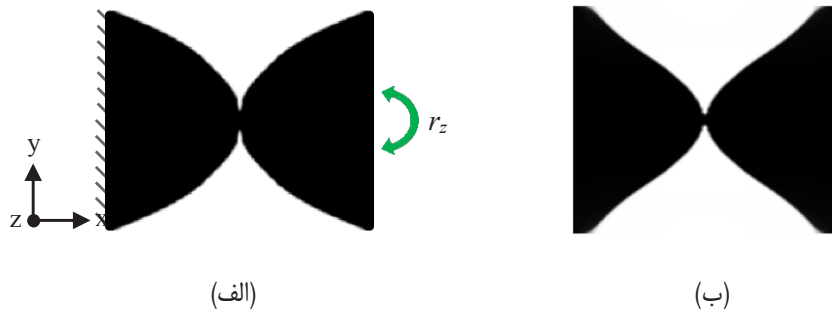
پژوهش و بهره‌گیری از الگوریتم بهینه‌سازی مبتنی بر گرادیان، برنامه‌ی رایانه‌ای نوشته‌شده دارای سرعت اجرا و همگرایی بالایی در حل مسئله است.

#### ۵-۲- مفصل خمشی چرخشی حول محور Z

یک مفصل خمشی چرخشی تنها می‌تواند حول محور Z بچرخد و در راستای محور X و Y حرکت انتقالی نداشته باشد. برای تولید این مفصل با استفاده از رویکرد ارائه‌شده در بخش ۴-۲، مجموعه‌های الگوهای حرکتی آزاد و مقید به ترتیب برابر با  $t_z$  و  $t_x$  در نظر گرفته می‌شوند. ورودی‌های مسئله بهینه‌سازی برای انرژی کرنشی درجه آزادی برابر با ۱ نیوتن میلی‌متر ( $\bar{U}_{Tz} = 1 \text{ N.mm}$ ) در نظر گرفته می‌شود. توپولوژی نشان داده‌شده در شکل ۶(الف) خروجی مسئله بهینه‌سازی است و برای مقایسه بهتر، توپولوژی تولیدشده توسط کوپن [۲۲] در شکل ۶(ب) ارائه شده است.

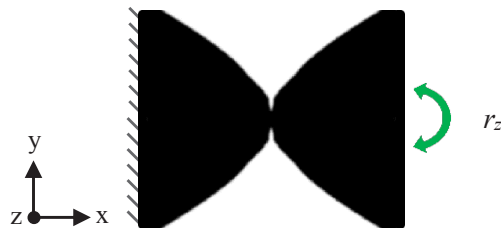
محور Z دارند. با ثابت نگه داشتن پیوند صلب سمت چپ و اعمال جابجایی واحد به پیوند صلب سمت راست این مفصل‌ها در راستای محور Y حرکت می‌کنند. در جدول ۳ تمام مقادیر انرژی کرنشی بوجود آمده در اثر اعمال الگوهای حرکتی به این مفصل‌ها ارائه شده است.

از مقایسه مقدار انرژی کرنشی‌های ارائه‌شده در جدول ۳ مشخص است که نسبت انرژی کرنشی در اثر اعمال الگوی حرکتی  $t_x$  به انرژی کرنشی در اثر اعمال الگوی حرکتی  $t_y$  در رویکرد دوم به میزان ۱۳/۷ درصد بیشتر از همین نسبت در رویکرد اول است؛ اما نسبت انرژی کرنشی در اثر اعمال الگوی حرکتی  $t_z$  به انرژی کرنشی در اثر اعمال الگوی حرکتی  $t_y$  در رویکرد دوم به میزان ۱/۸ درصد کمتر از همین نسبت در رویکرد اول است. در نتیجه برای طراحی این نوع عضو منعطف استفاده از رویکرد دوم مناسب‌تر از رویکرد اول است. از طرفی به علت خودالحاقی بودن رابطه‌سازی‌های این



شکل ۶. مفصل‌های خمشی بهینه با توانایی چرخش حول محور z حاصل از (الف) رویکرد اول و (ب) طرح ارائه‌شده توسط [۲۲]

Fig. 6. Optimized flexure joints capable of rotation about the z-axis resulting from (a) the first approach and (b) the design proposed by [22]



شکل ۷. توپولوژی بهینه تولیدشده یک مفصل چرخشی توسط رویکرد دوم رابطه‌سازی مسئله بهینه‌سازی

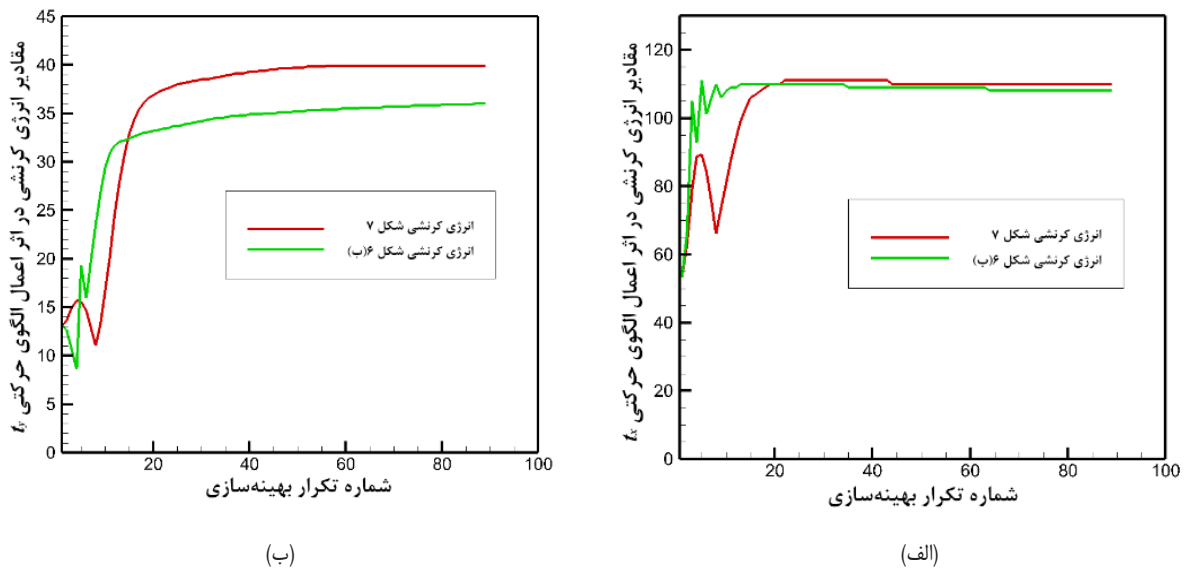
Fig. 7. Optimized topology of a rotational joint generated by the second approach of the optimization problem formulation.

برنامه رایانه‌ای نوشته شده برای یافتن مفصل‌های خمشی پیچیده‌تر ارتقا یافته است. همانطور که مشخص است این توپولوژی‌ها از نظر توپولوژیکی بهینه هستند و کاهش مقدار ماده در مرکز آن‌ها باعث می‌شود که در برابر چرخشی مقاومتی نداشته باشند و با ثابت کردن سمت چپ و اعمال حرکت چرخشی در سمت راست، حول مرکز خود بچرخند. در نتیجه رویکردهای ارائه‌شده در بخش‌های ۲-۴ و ۲-۵ به درستی رابطه‌سازی شده‌اند. در جدول ۴، اطلاعات مربوط به خروجی حل این دو مسئله بهینه‌سازی ارائه شده است. مشابه مفصل‌های انتقالی در بخش قبل، مفصل چرخشی تولیدشده توسط رویکرد اول چه برای انجام حرکت در جهت درجه آزادی و چه درجه قیدها، سفتی بیشتری دارد اما مفصل چرخشی حاصل از رویکرد دوم نسبت سفتی بیشتری از خود نشان می‌دهد و برای انجام حرکت چرخشی نیز مقاومت کمتری از خود نشان می‌دهد.

به طور مشابه اگر با استفاده از رویکرد ارائه‌شده در بخش ۲-۵ یک مفصل چرخشی بهینه طراحی شود، با تنظیم شدن حداقل سفتی نسبی درجه‌های قید نسبت به درجه آزادی برابر با ۵۰ ( $e_{\min} = 50$ ) توپولوژی ارائه شده در شکل ۷ نتیجه خواهد شد.

با رسم نمودارهای همگرایی انرژی کرنشی درجه‌های قید  $t_x$  و  $t_y$  برای شکل ۶ (الف)، شکل ۷ مشاهده می‌شود که با در نظر گرفتن شرایط یکسان، مفصل خمشی حاصل از رویکرد ارائه‌شده در بخش ۲-۵ برای درجه‌های قید  $t_x$  و  $t_y$  به ترتیب به میزان  $10/83$  و  $1/85$  درصد مقدار انرژی کرنشی بیشتری نسبت به مفصل خمشی ارائه‌شده توسط [۲۲] در خود ذخیره می‌کند. در شکل ۸ این نمودارهای همگرایی نشان داده شده‌اند.

با انجام این صحت‌سنجی، درستی محاسبات برای یافتن پاسخ اجزای محدود و همچنین الگوریتم پایه‌ی بهینه‌سازی نیز تایید شده و پس از آن



شکل ۸. مقایسه نمودارهای همگرایی مقادیر انرژی کرنشی درجه قید مفصل‌های چرخشی ارائه شده در شکل‌های ۶(ب) و ۷

Fig. 8. Comparison of convergence plots of strain energy values for the rotational joints presented in Figs 6(b) and 7

جدول ۴. مقادیر انرژی کرنشی ذخیره شده در مفصل‌های چرخشی شکل‌های ۶(الف) و ۷

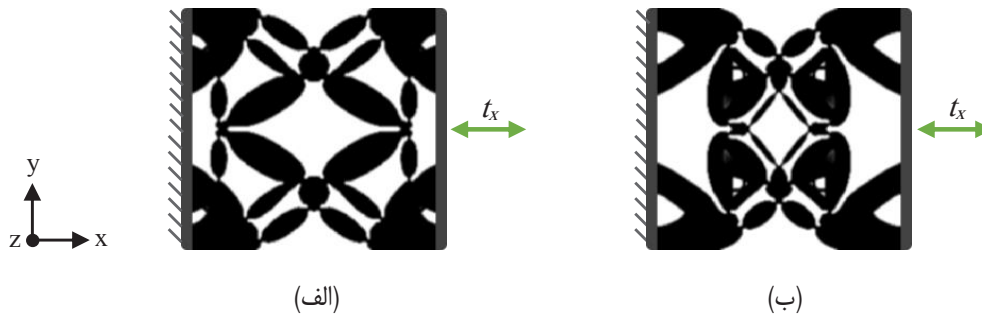
Table 4. Strain energy values stored in rotational joints of Figs 6(a) and 7

مقدار انرژی کرنشی ذخیره شده در اثر اعمال الگوی حرکتی برحسب نیوتن میلی‌متر (N.mm)			مفصل بهینه
$t_z$	$t_y$	$t_x$	
۱	۴۰/۴	۱۱۱	شکل ۶(الف)
۰/۸۵۱	۳۹/۹	۱۱۰	شکل ۷

ترتیب برابر با  $F = \{tx\}$  و  $C = \{ty, rz\}$  در نظر گرفته می‌شوند. برای مسئله بهینه‌سازی بخش ۴-۲، حد بالای انرژی کرنشی درجه آزادی برابر با ۲/۵ نیوتن میلی‌متر ( $\bar{U}_{tx} = 2.5 \text{ N.mm}$ ) تنظیم می‌شود. همچنین برای حل مسئله با استفاده از رویکرد بخش ۵-۲، حداقل سفتی نسبی درجه‌های قید نسبت به درجه آزادی را ( $e_{\min} = 8$ ) در نظر گرفته می‌شود. با حل این دو رویکرد به صورت جداگانه، توپولوژی‌های بهینه تولید شده در شکل ۹ نشان داده شده‌اند.

۵-۳ طراحی دو مفصل خمشی جدید در ادامه این بخش به طراحی یک مفصل انتقالی و یک مفصل دو درجه آزادی جدید با استفاده از دو رویکرد ارائه شده در این پژوهش پرداخته خواهد شد.

۵-۳-۱ طراحی مفصل خمشی انتقالی در راستای محور X در این بخش یک مفصل خمشی انتقالی در راستای محور X طراحی می‌شود که برای این کار مجموعه‌های الگوهای حرکتی آزاد و مقید به



شکل ۹. مفصل‌های خمشی بهینه انتقالی با توانایی حرکت در جهت محور x حاصل از (الف) رویکرد اول و (ب) رویکرد دوم

Fig. 9. Optimized translational flexure joints capable of motion along the x-axis resulting from (a) the first approach and (b) the second approach

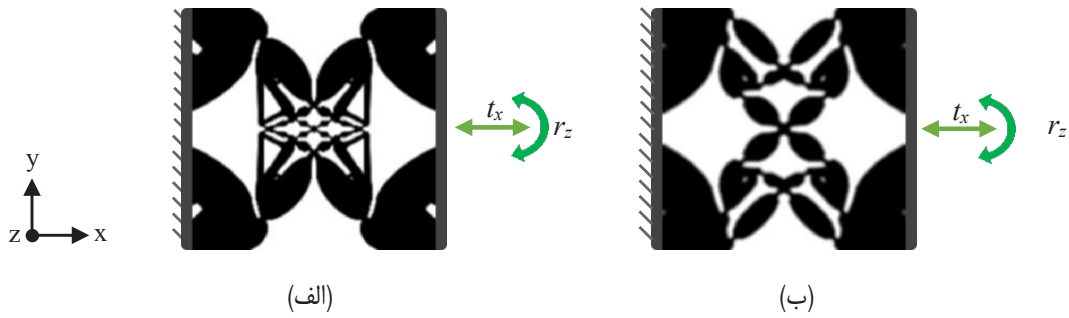
جدول ۵. مقادیر انرژی کرنشی ذخیره‌شده در مفصل‌های انتقالی شکل‌های ۹(الف) و ۹(ب)

Table 5. Strain energy values stored in translational flexure joints of Fig.s 9(a) and 9(b)

مقدار انرژی کرنشی ذخیره‌شده در اثر اعمال الگوی حرکتی برحسب نیوتن میلی‌متر (N.mm)			مفصل بهینه
$t_z$	$t_y$	$t_x$	
۱۵/۱	۲۴/۱	۲/۵	شکل ۹(الف)
۱۷/۵	۲۱/۸	۱/۳۱	شکل ۹(ب)

۵-۳-۲- طراحی یک مفصل خمشی دو درجه آزادی با حرکت در راستای محور X و چرخش حول محور Z در این بخش نیز یک مفصل خمشی دو درجه آزادی طراحی و ارائه می‌شود که در راستای محور X حرکت انتقالی و حول محور Z حرکت چرخشی دارد و برای حرکت انتقالی در راستای محور Y سفت شده است. برای این کار مجموعه‌های الگوهای حرکتی آزاد و مقید به ترتیب برابر با  $F = \{t_x, r_z\}$  و  $C = \{t_y\}$  در نظر گرفته می‌شوند. برای مسئله بهینه‌سازی بخش ۴-۲، انرژی کرنشی درجه آزادی ۱/۱ نیوتن میلی‌متر (  $\bar{U}_{tx} = 1.1 \text{ N.mm}$  ) فرض می‌شود. همچنین با در نظر گرفتن مقدار  $e_{\min} = 20$  برای حداقل سفتی نسبی درجه‌های قید نسبت به درجه آزادی

همانطور که از نحوه چیدمان ماده و زاویه‌ی قرارگیری عضوهای این مفصل‌ها مشخص است؛ این مفصل‌ها تنها در راستای محور X حرکت انتقالی دارند و برای حرکت در راستای محور Y و چرخش حول محور Z مقاومت زیادی از خود نشان می‌دهند. جدول ۵ نشان‌دهنده اطلاعات خروجی حاصل از حل مسئله بهینه‌سازی این دو مفصل خمشی است. با مشاهده مقادیر انرژی کرنشی ذخیره‌شده در دو مفصل خمشی تولیدشده نتیجه می‌شود که هر دوی این مفصل‌ها سفتی به درستی طراحی شده‌اند. مفصل تولیدشده توسط رویکرد اول سفتی کلی بیشتری دارد (چه برای درجه آزادی و چه برای درجه‌های قید) اما مفصل تولیدشده توسط رویکرد دوم نسبت سفتی بیشتری را از خود نشان می‌دهد.



شکل ۱۰. مفصل‌های خمشی بهینه دو درجه آزادی حاصل از (الف) رویکرد اول و (ب) رویکرد دوم

Fig. 10. Optimized two degree of freedom flexure joints resulting from (a) the first approach and (b) the second approach

جدول ۶. مقادیر انرژی کرنشی ذخیره شده در مفصل‌های چرخشی شکل‌های ۱۰(الف) و ۱۰(ب)

Table 6. Strain energy values stored in two degree of freedom flexure joints of Figures 10(a) and 10(b)

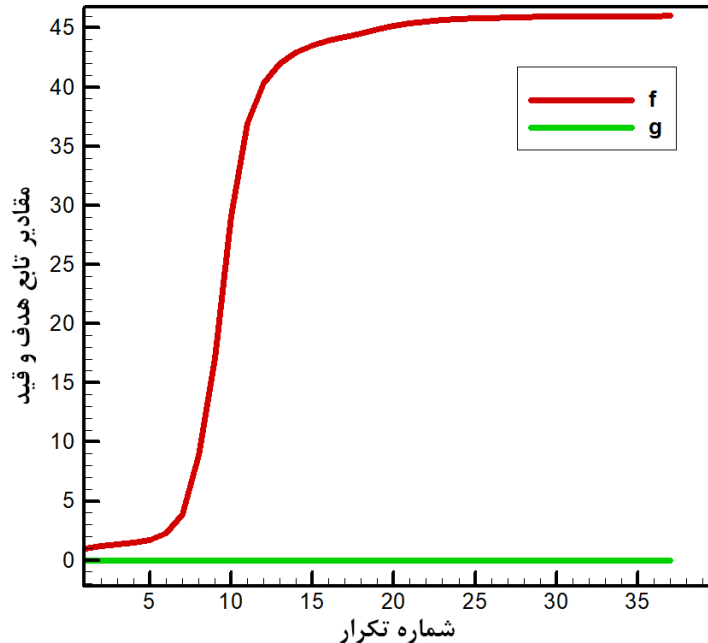
مقدار انرژی کرنشی ذخیره شده در اثر اعمال الگوی حرکتی برحسب نیوتن میلی‌متر (N.mm)			مفصل بهینه
$r_z$	$t_y$	$t_x$	
۰/۲۵	۲۳/۶	۱/۱	شکل ۱۰(الف)
۰/۳۴۶	۲۱/۴	۱/۰۷	شکل ۱۰(ب)

در آن  $f$  تابع هدف نرمال شده و  $g$  قید مسئله بهینه‌سازی است. این تاریخچه همگرایی نشان می‌دهد که قیدهای مسئله بهینه‌سازی به سرعت همگرا شده و تابع هدف نیز پیوسته در حال افزایش است و در تعداد تکرار محدودی همگرا می‌شود. توپولوژی‌های حاصل، نشان‌دهنده درستی اصول رابطه‌سازی پیشنهادی را تایید می‌کنند.

روش بهینه‌سازی ارائه شده در این پژوهش که بر اساس معیارهای انرژی کرنشی است، برتری‌های فراوانی دارد. برتری اول، خاصیت خودالحاقی این روش است که سرعت حل مسئله را افزایش داده و حجم محاسبات را کاهش می‌دهد؛ به طوری که با یک رایانه خانگی نیز قابل اجرا است. برتری دوم این است که این روش قادر به تولید تعداد زیادی توپولوژی بهینه است؛ در حالی

برای رویکرد بخش ۵-۲، مسئله بهینه‌سازی حل می‌شود. توپولوژی‌های بهینه طراحی شده توسط این دو رویکرد در شکل ۱۰ ارائه شده‌اند. افزایش درجه‌های قید و درجه‌های آزادی اغلب منجر به توپولوژی‌های پیچیده‌تر (افزایش تعداد اعضا و نقاط چرخش) و همچنین جدید می‌شود. همانطور که از نتایج رابطه‌سازی این پژوهش مشخص است، توپولوژی‌های بهینه به دست آمده با اصول طراحی در مهندسی مکانیک و تئوری الاستیسیته همخوانی دارند. در جدول ۶ اطلاعات مربوط به میزان انرژی ذخیره شده در هر کدام از مفصل‌های خمشی آورده شده است.

تاریخچه همگرایی پاسخ‌ها برای یک مسئله بهینه‌سازی دوبعدی با مجموعه پارامترهای ورودی مشخص در شکل ۱۱ نشان داده شده است که



شکل ۱۱. نمودار همگرایی مفصل خمشی بهینه نشان داده شده در شکل ۹(الف)

Fig. 11. Convergence plot of the optimized flexure joint shown in Fig. 9(a)

داد. محدودیت دیگر این است که مفصل‌های خمشی بهینه شده (به عنوان مثال شکل ۹) اغلب دارای نواحی کوچک وجود ماده هستند که در اثر اعمال الگوهای حرکتی، مقدار انرژی کرنشی بالایی در این نواحی ذخیره می‌شوند. در نتیجه، این مفصل‌های خمشی دامنه حرکتی کمی دارند که توسط تنش بحرانی محدود شده‌اند و عملکرد و کارایی آن‌ها نسبت به خطاهای ساخت حساس است. برای استفاده عملی از طرح‌های حاصل، حداکثر تنش مجاز و همچنین عدم قطعیت‌های ساخت باید در نظر گرفته شود که خارج از محدوده‌ی این پژوهش است.

#### ۶- نتیجه گیری

پژوهش‌های مختلفی در زمینه بهینه‌سازی توپولوژی مفصل‌های خمشی انجام شده است؛ اما تا کنون یک رابطه‌سازی جامع برای طراحی این مفصل‌ها ارائه نشده است و رابطه‌سازی‌های انجام شده تنها برای طراحی مفصل‌های خاصی پیاده‌سازی شده‌اند. این پژوهش به نقطه عطفی در این زمینه تبدیل شده است، به گونه‌ای که از نظر درک و پیاده‌سازی ساده و به

که روش‌های قبلی تنها یک مفصل خمشی بهینه تولید می‌کردند. برتری سوم در استفاده از روش بهینه‌سازی مبتنی بر گرادیان حرکت مجانب‌های متحرک که باعث همگرایی سریع تابع هدف و قیدها شده و زمان رسیدن به توپولوژی‌های بهینه را کاهش می‌دهد.

اگرچه دو رویکرد رابطه‌سازی تابع هدف و قیدها همگی بر اساس انرژی کرنشی نوشته شده‌اند اما در مفهوم کمی با یکدیگر متفاوت هستند و به همین دلیل است که از نظر توپولوژیکی مفصل‌های متفاوتی تولید کرده‌اند. رویکرد اول مفصل با سفتی کلی بیشتری تولید می‌کند اما در رویکر دوم مفصل کمی در حالت کلی سفتی کم‌تری دارد اما نسبت سفتی بین درجه‌های قید و آزادی بیشتر است که این امر به دلیل دخیل کردن مقدار انرژی کرنشی درجه‌های آزادی در فرآیند بهینه‌سازی است.

این رابطه‌سازی محدودیت‌هایی نیز دارد که از جمله آن‌ها می‌توان به آن اشاره کرد که خاصیت خودالحاقی تنها در محدوده الاستیسیته خطی برقرار است و برای افزایش دامنه این مفصل‌های خمشی باید مجدد با استفاده از روابط حاکم در محدوده الاستیسیته غیرخطی رابطه‌سازی را انجام



نیروی اعمال شده به مفصل خمشی در اثر اعمال الگوی حرکتی $k$ ام	$f_{s,k}$	دلیل خاصیت خودالحاقی، تلاش محاسباتی کمی نیاز دارد. این رابطه‌سازی، مبتنی بر مفاهیم انرژی کرنشی و جابه‌جایی‌های ازپیش‌تعیین‌شده است که طراحی‌های مفصل‌های خمشی را به طرز چشمگیری ساده‌تر می‌کند این رابطه‌سازی به حداقل پارامترهای لازم برای تولید مفصل‌های خمشی نیاز دارد. با استفاده از کد نوشته شده در محیط نرم‌افزار متلب، چندین نمونه طراحی برای مفصل‌های خمشی یک درجه آزادی و چند درجه آزادی با موفقیت حل شده است. این کد به طور خاص از روش‌های مبتنی بر گرادیان حرکت مجانب‌های متحرک بهره می‌برد، که همگرایی سریع برای دستیابی به راه‌حل‌های بهینه را تضمین می‌کند.
مجموعه الگوهای حرکتی درجه‌های آزادی	$\mathbb{F}$	
ماتریس سفتی کل سازه	$\mathbf{K}$	نتایج دوبعدی بدست آمده در این پژوهش انواع مفصل‌های خمشی در فضای دوبعدی را پوشش می‌دهد. از طرفی در برخی مفصل‌های ارائه‌شده نسبت سفتی سازه به ۲۰۸ برابر نیز رسیده است که نشان‌دهنده کاربردی بودن این رابطه‌سازی است. این رابطه‌سازی در محدوده الاستیک خطی قابل کاربرد است و پتانسیل گسترش برای استفاده از قیدهایی نظیر تنش، خستگی و سایر قیدهایی مورد نیاز در مسائل بهینه‌سازی را دارد. از طرفی گسترش این رابطه‌سازی برای مسائل سه‌بعدی مفید است. همچنین، امکان گسترش این چارچوب به مسائل در محدوده الاستیک غیرخطی وجود دارد، که یکی از ارزشمندترین گسترش‌ها برای ادامه پژوهش حاضر است.
شماره الگوی حرکتی	$k$	
ارتفاع مفصل خمشی	$l_y$	
مجموعه تمام الگوهای حرکتی مستقل	$\mathbb{M}$	
تعداد کل گره‌های دامنه طراحی گسسته	$n$	
تعداد درجه‌های قید مسئله بهینه‌سازی توپولوژی	$n_c$	
تعداد درجه‌های آزادی مسئله بهینه‌سازی توپولوژی	$n_f$	
تعداد کل المان‌های دامنه طراحی گسسته	$N$	
الگوی حرکتی چرخشی حول محور Z	$r_z$	
الگوی حرکتی انتقالی در راستای محور X	$t_x$	
الگوی حرکتی انتقالی در راستای محور Y	$t_y$	
ماتریس مقادیر جابجایی‌های گرهی در اثر اعمال سه الگوی حرکتی	$\mathbf{u}$	
بردار تغییرشکل‌های گرهی الگوی حرکتی $k$ ام	$\mathbf{u}_k$	
بردار جابه‌جایی‌های گرهی در فصل مشترک بین پیوند صلب سمت چپ و مفصل خمشی در اثر اعمال الگوی حرکتی $k$ ام	$\mathbf{u}_{l,k}$	
جابه‌جایی‌های گرهی در فصل مشترک بین پیوند صلب سمت چپ و مفصل خمشی در اثر اعمال الگوی حرکتی $k$ ام	$\mathbf{u}_{r,k}$	
جابه‌جایی‌های گرهی قسمت داخلی مفصل خمشی در اثر اعمال الگوی حرکتی $k$ ام	$\mathbf{u}_{s,k}$	
انرژی کرنشی	$U$	
انرژی کرنشی افزوده	$U_a$	
حد بالای انرژی کرنشی الگوی حرکتی آزاد $j$	$\bar{U}_j$	

## ۷- فهرست علائم

مجموعه الگوهای حرکتی درجه‌های قید	$\mathbb{C}$
کمترین نسبت سفتی مجاز بین درجه قید و آزادی	$e_{\min}$
تابع هدف بدون بعد	$f$
ماتریس بارهای گرهی در اثر اعمال سه الگوی حرکتی	$\mathbf{f}$
بردار بارهای گرهی الگوی حرکتی $k$ ام	$\mathbf{f}_k$
بردار نیروی عکس‌العمل فصل مشترک بین پیوند صلب سمت چپ و مفصل خمشی در اثر اعمال الگوی حرکتی $k$ ام	$\mathbf{f}_{l,k}$
بردار نیروی عکس‌العمل فصل مشترک بین پیوند صلب سمت راست و مفصل خمشی در اثر اعمال الگوی حرکتی $k$ ام	$\mathbf{f}_{r,k}$

based mechanisms, in: 2018 International Conference on Manipulation, Automation and Robotics at Small Scales, 4(8) (2018) 1-5.

- [8] B. Hassani, E. Hinton, Homogenization and structural topology optimization: theory, practice and software, Springer Science & Business Media, (2012) 1-38.
- [9] M.P. Bendsøe, O. Sigmund, M.P. Bendsøe, O. Sigmund, Topology optimization by distribution of isotropic material, Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications, (2004) 1-69.
- [10] P. Weisbord, How to design flexure hinges, Machine Design, 10(3) (1965) 151-156.
- [11] S.T. Smith, V.G. Badami, J.S. Dale, Y. Xu, Elliptical flexure hinges, Review of Scientific Instruments, 68(3) (1997) 1474-1483.
- [12] R.H. Burns, F. Crossley, Kinetostatic synthesis of flexible link mechanisms, in: Mechanical Engineering, 190(4) (1968) 67-86.
- [13] S.R. Deepak, M. Dinesh, D.K. Sahu, G. Ananthasuresh, A comparative study of the formulations and benchmark problems for the topology optimization of compliant mechanisms, 1(1) (2009) 1-10.
- [14] B. Zhu, X. Zhang, S. Fatikow, Design of single-axis flexure hinges using continuum topology optimization method, Science China Technological Sciences, 57(3) (2014) 560-567.
- [15] J. Pinskiar, B. Shirinzadeh, M. Ghafarian, T.K. Das, A. Al-Jodah, R. Nowell, Topology optimization of stiffness constrained flexure-hinges for precision and range maximization, Mechanism and Machine Theory, 150 (2020) 103874.
- [16] M. Liu, X. Zhang, S. Fatikow, Topology optimization of large-displacement flexure hinges, in: International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, American Society of Mechanical Engineers, 5(39) (2015) 11-20.
- [17] N.T. Tran, M.P. Dang, T.-P. Dao, A new optimal design synthesis method for flexure-based mechanism: recent advance of metaheuristic-based artificial intelligence

$\mathbf{x}$  بردار متغیر طراحی

علایم یونانی

$\beta_i^{(k)}$  انرژی کرنشی نرمال شده

$\lambda$  بردار ضرایب لاگرانژ

$\rho$  بردار متغیر فیلترشده

$\rho_e$  چگالی فیلترشده المان شماره  $e$

$\Omega$  دامنه‌ی طراحی

## منابع

- [1] N. Yaghoobi, B. Hassani, Topological optimization of vibrating continuum structures for optimal natural eigenfrequency, International Journal of Optimization in Civil Engineering, 7(1) (2017) 1-12.
- [2] V. Shobeiri, B. Ahmadi-Nedushan, Topology optimization of pretensioned concrete beams considering material nonlinearity, International Journal of Optimization in Civil Engineering, 9(4) (2019) 629-650.
- [3] T. Wu, Z. Liu, B. Wang, Z. Ma, D. Ma, X. Deng, A versatile topology-optimized compliant actuator for soft robotic gripper and walking robot, Soft Robotics, 11(1) (2024) 157-170.
- [4] L.L. Howell, Compliant mechanisms, in: 21st century kinematics: The 2012 NSF Workshop, Springer, (2013) 189-216.
- [5] M.Y. Wang, A kinetoelastic formulation of compliant mechanism optimization, Journal of Mechanisms and Robotics, 1(2) (2009) 1-10.
- [6] J.A. Gallego, J. Herder, Synthesis methods in compliant mechanisms: An overview, in: International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, 7(33) (2009) 193-214.
- [7] M. Liu, J. Zhan, B. Zhu, X. Zhang, Topology optimization of flexure hinges with distributed stress for flexure-

- and Structures, 18(11) (2009) 115-134.
- [29] A. Hasse, M. Franz, K. Mauser, Synthesis of compliant mechanisms with defined kinematics, *Microactuators and Micromechanisms*, 25(4) (2017) 227-238.
- [30] S. Kirmse, L.F. Campanile, A. Hasse, Synthesis of compliant mechanisms with selective compliance—An advanced procedure, *Mechanism and Machine Theory*, 157(6) (2021) 164-184.
- [31] S. Seltmann, L.F. Campanile, A. Hasse, Topology-optimization based design of multi-degree-of-freedom compliant mechanisms (mechanisms with multiple pseudo-mobility), *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 34(5) (2023) 609-628.
- [32] J. Pinski, B. Shirinzadeh, Topology optimization of leaf flexures to maximize in-plane to out-of-plane compliance ratio, *Precision Engineering*, 55(6) (2019) 397-407.
- [33] M.P. Bendsøe, Optimal shape design as a material distribution problem, *Structural optimization*, 1(4) (1989) 193-202.
- [34] A. Klarbring, N. Strömberg, Topology optimization of hyperelastic bodies including non-zero prescribed displacements, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 47(5) (2013) 37-48.
- [35] G. Rozvany, O. Sigmund, T. Lewiński, D. Gerdes, T. Birker, Exact optimal structural layouts for non-self-adjoint problems, *Structural optimization*, 5(3) (1993) 204-206.
- [36] T.E. Bruns, D.A. Tortorelli, Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190(27) (2001) 3443-3459.
- [37] K. Svanberg, The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization, *International journal for numerical methods in engineering*, 24(2) (1987) 359-373.
- [38] X. Zhang, B. Zhu, X. Zhang, B. Zhu, Topology optimization of flexure hinges, *Topology Optimization of Compliant Mechanisms*, 3(2) (2018) 25-80.
- for precision micropositioning system, *Microsystem Technologies*, 30(1) (2024) 1-31.
- [18] M. Liu, X. Zhang, S. Fatikow, Design of flexure hinges based on stress-constrained topology optimization, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 231(24) (2017) 4635-4645.
- [19] M. Liu, J. Zhan, X. Zhang, Topology optimization of distributed flexure hinges with desired performance, *Engineering Optimization*, 52(3) (2020) 405-425.
- [20] M. Liu, X. Zhang, S. Fatikow, Design and analysis of a high-accuracy flexure hinge, *Review of Scientific Instruments*, 87(5) (2016) 1-15.
- [21] G. Li, J. Yu, J. Pan, X. Pei, Design of a Novel Flexible Spherical Hinge and Its Application in Continuum Robot, *Journal of Mechanisms and Robotics*, 16(6) (2024) 16-31.
- [22] S. Koppen, M. Langelaar, F. van Keulen, A simple and versatile topology optimization formulation for flexure synthesis, *Mechanism and Machine Theory*, 172(1) (2022) 1-15.
- [23] R.J. Guyan, Reduction of stiffness and mass matrices, *AIAA journal*, 3(2) (1965) 380-380.
- [24] B.M. Irons, K.J. Draper, Inadequacy of nodal connections in a stiffness solution for plate bending, *AIAA journal*, 3(5) (1965) 961-961.
- [25] M.Y. Wang, Mechanical and geometric advantages in compliant mechanism optimization, *Frontiers of Mechanical Engineering in China*, 4(2) (2009) 229-241.
- [26] M.Y. Wang, S. Chen, Compliant mechanism optimization: analysis and design with intrinsic characteristic stiffness, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 37(2) (2009) 183-200.
- [27] L. Li, X. Zhu, Design of compliant revolute joints based on mechanism stiffness matrix through topology optimization using a parameterization level set method, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 60(7) (2019) 1475-1489.
- [28] A. Hasse, L.F. Campanile, Design of compliant mechanisms with selective compliance, *Smart Materials*

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

Q. Maloonezhadabsardi, B.Hassani, N. Yaghoobi, *Formulation and Topology optimization of flexure joints with small deformations based on strain energy criteria*, *Amirkabir J. Mech Eng.*, 56(3) (2024) 371-394.

DOI: [10.22060/mej.2024.23134.7721](https://doi.org/10.22060/mej.2024.23134.7721)

