



Elastostatic Modeling and Optimal Design of Rhombic Compliant Mechanism

Mohammad Saeed Erami Motlagh Armaki, Hamed Ghafarirad , Afshin Taghvaeipour *, Pouya Firuzy Rad

Department of Mechanical Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

ABSTRACT: Compliant mechanisms are designed and used for precise positioning and amplification of piezoelectric actuators Due to their integrated structure. Modelling the kinematic behaviour of these mechanisms has challenges due to their continuous structure and elastic deformation. This article presents a structural matrix-based method called the elastostatic method for static modelling of compliant mechanisms. The innovation of elastostatic modelling reduces calculations by approximating rotation and small displacement. The main goal of this research is to design and optimize the rhombus flexible mechanism using elastostatic modelling. This mechanism is optimized in such a way that, in addition to positioning, it has high magnification and low input stiffness. The rhombus mechanism has an integrated and simple structure and is used for micron positioning and piezoelectric actuator amplification. In this research, the rhombus mechanism has been modeled using the elastostatic method, and its dimensions have been optimized according to the parameters of the mechanism; For this purpose, it is necessary to check the modeling error. The modelling error is compared with simulation in finite element software and experimental results. The results show that the modelling used to design the rhombus mechanism has a 1.5% error compared to experimental results.

Review History:

Received: Jan. 02, 2024

Revised: Jul. 30, 2024

Accepted: Aug. 02, 2024

Available Online: Aug. 19, 2024

Keywords:

Elastostatic Modelling

Compliant Mechanism

Rhombic Mechanism

Optimization

Mechanism Design

1- Introduction

Compliant mechanisms, which transmit motion through the elastic deformation of their components, have gained significant attention due to their high precision and elimination of friction when compared to traditional mechanisms [1]. These advantages make them particularly suitable for applications requiring micro-positioning and actuator amplification [2]. The absence of assembly and lubrication needs further enhances their appeal [3].

The use of compliant mechanisms in various fields, such as micro-electromechanical systems (MEMS), biomedical devices [4], and precision engineering, underscores their importance [5]. The ability to design mechanisms that can achieve significant displacement amplification while maintaining low input stiffness is crucial for applications involving piezoelectric actuators. Piezoelectric materials, which convert electrical energy into mechanical displacement, often require amplification mechanisms to achieve the desired range of motion [6].

This study focuses on the design and optimization of a rhombic-compliant mechanism using elastostatic modelling. The objective is to achieve high [7] magnification and low input stiffness, making the mechanism suitable for precise positioning and amplification applications. Traditional methods often involve complex calculations and extensive

computational resources, but elastostatic modelling offers a more efficient alternative by approximating small displacements and rotations, thus simplifying the overall process.

2- Elastostatic modeling

The methodology focuses on the elastostatic modelling of the rhombic-compliant mechanism. This modelling approach simplifies the calculation process by approximating small displacements and rotations, thus reducing computational complexity. The rhombic mechanism is selected due to its integrated structure, which is advantageous for micron-level positioning and the amplification of piezoelectric actuators. The elastostatic model is constructed by defining the relationship between forces and displacements within the mechanism [8]. The stiffness matrix represents the mechanism's stiffness and deformation characteristics. The process begins with formulating the potential energy of the system, which comprises the elastic strain energy stored in the compliant links as mentioned in Eq (1).

$$V = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} U_i^T & U_j^T \end{bmatrix} Q^T \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix} \quad (1)$$

*Corresponding author's email: ataghvaei@aut.ac.ir



With the evaluation of the strain energy for all flexible links and summing them up the total strain of the system is obtainable. With obtaining the total strain energy the equivalent stiffness matrix equation is obtainable as shown in Eq (2)

$$C_i = \frac{\partial^2 V_i}{\partial F^2} \rightarrow K_i = C_i^{-1} \quad (2)$$

As a result, the motion of the mechanism could be calculated relative to the input force.

For small displacements and rotations, the behaviour of the mechanism can be approximated linearly. This simplification allows for efficient calculations while maintaining accuracy. The small displacement assumption is particularly valid for compliant mechanisms, where deformations are typically within a small range.

The elastostatic method has been implemented on the rhombic mechanism shown in Fig. 1. Then the dimensions of the rhombic mechanism are optimized to ensure high amplification and low input stiffness. This involves determining the optimal length L , width w , and thickness t of the compliant segments. The optimization process aims to maximize the displacement amplification ratio while adhering to design constraints.

3- Experimental Validation

The accuracy of the elastostatic model is validated by comparing the results with finite element simulations and experimental data. The experimental setup involves applying known forces to the mechanism and measuring the resulting displacements. The comparison of the elastostatic model with finite element analysis (FEA) results shows a high degree of correlation, validating the assumptions and simplifications made during the modelling process. The experimental validation further confirms the model's accuracy, with minor discrepancies attributed to manufacturing tolerances and material properties.

4- Results and Discussion

The results of the elastostatic modelling of the rhombic mechanism were compared against finite element simulations and experimental data. The accuracy of the model was confirmed, with an error margin of approximately 1.5% for displacement amplification ratio and 1% for output displacement. The optimization process focused on adjusting the geometric parameters of the rhombic mechanism to maximize its amplification and minimize input stiffness. The optimized dimensions resulted in significant improvements in the performance of the mechanism. The results indicate that the elastostatic model provides a reliable and accurate representation of the rhombic mechanism's performance. The optimized mechanism demonstrates high amplification and low input stiffness, making it suitable for precise positioning and amplification applications.

The comparison of the model with finite element analysis

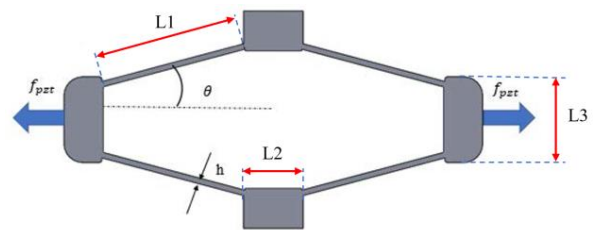


Fig. 1. rhombic mechanism

(FEA) results shows a high degree of correlation, validating the assumptions and simplifications made during the modelling process. The experimental validation further confirms the model's accuracy, with minor discrepancies attributed to manufacturing tolerances and material properties.

5- Conclusions

This research successfully demonstrates the application of elastostatic modelling in the design and optimization of a rhombic-compliant mechanism. The method effectively reduces computational complexity and provides accurate results, with an error margin of around 1.5% compared to experimental data. The optimized mechanism shows significant improvements in magnification and input stiffness, making it suitable for precise positioning and amplification in various applications.

The study highlights the potential of elastostatic modelling as a valuable tool for the design and optimization of compliant mechanisms. Future work may explore further enhancements in modelling accuracy and the application of this approach to other types of compliant mechanisms. Additionally, the integration of this method with other optimization techniques could yield even better performance and broader applicability.

The findings also suggest that the elastostatic modelling approach can be extended to more complex mechanisms and systems, providing a robust framework for the analysis and design of compliant structures. The continued development of this method could lead to significant advancements in the fields of precision engineering, MEMS, and beyond.

References

- [1] G. Ye, W. Li, Y.-q. Wang, X.-f. Yang, L. Yu, Kinematics analysis of bridge-type micro-displacement mechanism based on flexure hinge, in: The 2010 IEEE International Conference on Information and Automation, IEEE, 2010, pp. 66-70.
- [2] C.N. Wang, T.D.-M. Le, Optimization parameter for microgripper based on triple-stair compliant mechanism using GTs-TOPSIS, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 120(11) (2022) 7967-7983.
- [3] K.-q. Qi, Y. Xiang, C. Fang, Y. Zhang, C.-s. Yu, Analysis of the displacement amplification ratio of bridge-type

- mechanism, *Mechanism and Machine Theory*, 87 (2015) 45-56.
- [4] M. Wang, D. Ge, L. Zhang, J.L. Herder, Micro-scale Realization of Compliant Mechanisms: Manufacturing Processes and Constituent Materials—A Review, *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 34(1) (2021) 1-22.
- [5] M. Liu, X. Zhang, S. Fatikow, Design and analysis of a multi-notched flexure hinge for compliant mechanisms, *Precision Engineering*, 48 (2017) 292-304.
- [6] J. Granstrom, J. Feenstra, H.A. Sodano, K. Farinholt, Energy harvesting from a backpack instrumented with piezoelectric shoulder straps, *Smart materials and structures*, 16(5) (2007) 1810.
- [7] X. Shen, L. Zhang, D. Qiu, A lever-bridge combined compliant mechanism for translation amplification, *Precision Engineering*, 67 (2021) 383-392.
- [8] A. Taghvaeipour, J. Angeles, L. Lessard, On the elastostatic analysis of mechanical systems, *Mechanism and Machine Theory*, 58 (2012) 202-216.



مدل سازی الاستوستاتیک و طراحی بهینه مکانیزم منعطف لوزی

محمد سعید ارمی مطلق ارمکی، حامد غفاری راد^{ib}، افشین تقوائی پور^{ib*}، پویا فیروزی راد

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۲/۱۰/۱۲

بازنگری: ۱۴۰۳/۰۵/۰۹

پذیرش: ۱۴۰۳/۰۵/۱۲

ارائه آنلاین: ۱۴۰۳/۰۵/۲۹

کلمات کلیدی:

مدل سازی الاستوستاتیک

مکانیزم منعطف

مکانیزم لوزی

بهینه سازی

طراحی مکانیزم

خلاصه: مکانیزم‌های منعطف به دلیل ساختار یکپارچه‌ای که دارند، برای موقعیت‌دهی دقیق و تقویت دامنه عملگرهای پیژوالکتریک طراحی و استفاده می‌شوند. مدل سازی رفتار سینماتیکی این مکانیزم‌ها به دلیل ساختار پیوسته و تغییر شکل الاستیک دارای چالش‌هایی می‌باشد. در این مقاله ابتدا روشی بر مبنای ماتریس ساختاری به نام روش الاستوستاتیک برای مدل سازی استاتیکی مکانیزم‌های منعطف ارائه می‌گردد. نوآوری این مدل، در کاهش محاسبات، با به کارگیری تقریب چرخش و جابه‌جایی کوچک می‌باشد. به دلیل ساختار یکپارچه و ساده، مکانیزم لوزی برای موقعیت‌دهی میکرونی و تقویت دامنه عملگرهای پیژوالکتریک مورد استفاده قرار می‌گیرد. هدف اصلی، طراحی و بهینه‌سازی ابعادی مکانیزم منعطف لوزی با استفاده از مدل سازی الاستوستاتیک می‌باشد. هدف از بهینه‌سازی ابعادی، دستیابی به بزرگ‌نمایی بالا و سختی ورودی کم می‌باشد تا استفاده از مکانیزم منجر به کاهش دامنه مؤثر پیژوالکتریک نگردد. برای این مکانیزم مدل المان محدود و همچنین مدل تجربی ساخته شده، و در نهایت، خطای مدل سازی الاستوستاتیک با شبیه‌سازی در نرم‌افزار المان محدود و نتایج تجربی مقایسه می‌شود. نتایج گرفته شده از آزمون‌های تجربی نشان می‌دهد که مدل سازی انجام شده برای مکانیزم لوزی حدود ۱/۵ درصد خطا دارد.

۱- مقدمه

مکانیزم‌های منعطف با تغییر شکل الاستیک لولاهای انعطاف‌پذیر حرکت را منتقل می‌کنند. این مکانیزم‌ها به دلیل یکپارچگی، دقت بالا و عدم وجود اصطکاک، توجه بیشتری را نسبت به مکانیزم‌های معمول به خود جلب کرده‌اند [۱]. علاوه بر این، مکانیزم‌های منعطف نیازی به مونتاژ و روانکاری ندارند [۲]. این مکانیزم‌ها در سیستم‌های الکترومکانیکی [۳]، موقعیت‌دهی میکرونی [۴، ۵]، میکرو گریپر [۶، ۷]، برداشت انرژی [۸، ۹]، تعلیق‌های نوسانی [۱۰، ۱۱] و همچنین تقویت‌کننده‌ها [۱۲، ۱۳] استفاده می‌شوند. یکی از محبوب‌ترین کاربردهای مکانیزم‌های منعطف، در موقعیت‌دهی میکرونی برای ایجاد حرکات کوچک و دقیق است [۱۴، ۱۵]. در این کاربرد، معمولاً محرک‌های پیژوالکتریک به دلیل پاسخ سریع، ساختار فشرده و رزولوشن مناسب مورد استفاده قرار می‌گیرند [۱۶، ۱۷]. با این حال، محرک‌های پیژوالکتریک، کرنش کوچکی را در امتداد خود ایجاد می‌کنند؛ بنابراین، مکانیزم‌های منعطف گزینه‌های مناسبی برای تقویت جابه‌جایی

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: ataghvaei@aut.ac.ir

خروجی هستند.

مکانیزم‌های منعطف بر اساس معماری و انواع مفاصل خمشی طبقه‌بندی می‌شوند [۱۸]. مفاصل خمشی به‌طور کلی به‌صورت فیله در گوشه، وی شکل [۱۹]، با مقطع دایره‌ای یا بیضوی [۲۰] ساخته می‌شوند. همچنین برای این مکانیزم‌ها از معماری‌های مختلفی مانند لوزی [۲۱]، پل [۲۲]، لوزی ضعیف شده، اهرم [۲۳]، بیضی [۲۴]، رنگین کمان [۲۵] و ... استفاده شده است. مکانیزم‌ها عمدتاً به‌صورت مسطح با سختی خارج از صفحه کم ساخته می‌شوند. از این رو، این نوع مکانیزم‌ها از خمش خارج از صفحه رنج می‌برند، درحالی‌که نمی‌توان از اعمال نیروهای خارج از صفحه اجتناب کرد [۱۳].

در مرحله طراحی یک سیستم مکانیکی مانند مکانیزم‌های منعطف، نقش مدل سازی اجتناب‌ناپذیر است. پارک و همکارانش تغییر شکل مکانیزم‌های انعطاف‌پذیر را با استفاده از روش انرژی کرنشی تجزیه و تحلیل کردند [۱]. چوبی مکانیزم انعطاف‌پذیر نوع پل را با استفاده از تئوری تیر الاستیک و روش انرژی مدل سازی کرد [۱۳]. اما در این روش‌ها می‌بایست نیروی وارد شده به هر عضو جداگانه محاسبه شود و بنابراین این نوع روش برای



طراحی مکانیزم منعطف لوزی پرداخته شده است. این مدل‌سازی بر اساس فرض جابه‌جایی و چرخش کوچک انجام شده که موجب کاهش درجات آزادی مدل، و بهبود سرعت محاسبات و بهینه‌سازی آسانتر میگردد. در واقع فرض چرخش کوچک، نیاز محاسبه ماتریس سختی برای المان ضخیم با هندسه پیچیده را از بین میبرد و از دشواری و پیچیدگی شدن محاسبات جلوگیری می‌نماید. در این مدل‌سازی به دلیل استفاده از فرم جبری معادلات انرژی، مونتاژ ماتریس سختی کل آسان‌تر می‌باشد. به صورت کلی استفاده از روش الاستواستاتیک و تمهیدات محاسباتی به کاررفته در این روش از هزینه محاسباتی تحلیل میکاهد و این روش را به رویه‌های ایده‌آل برای طراحی و بهینه‌سازی این دسته از مکانیزمها بدل مینماید. نتایج به دست آمده از مدل‌سازی الاستواستاتیک با استفاده از نرم‌افزار المان محدود و نتایج تجربی صحت سنجی شده است. در آخر با بهینه‌سازی ابعاد مکانیزم مطابق با قیدهای مدنظر، ابعاد مکانیزم باز طراحی می‌شود.

۲- روش الاستواستاتیک

اجزای انعطاف‌پذیر مکانیزم، امکان جابه‌جایی با دامنه کوچک را در برابر نیروهای اعمال شده فراهم می‌کند. مدل‌سازی الاستواستاتیک محاسبه این جابه‌جایی‌ها را تسهیل می‌کند. در سیستم‌های رباتیک، به ویژه ربات‌های موازی، تحلیل الاستیک نقش مهمی در مرحله طراحی مفهومی، بهینه‌سازی سازه و کالیبراسیون دارد. از این رو، در دو دهه اخیر، بسیاری از محققان روش‌هایی را برای حل مسئله توسعه داده و از روش‌هایی مانند روش مفصل مجازی^۱ [۳۲]، تحلیل ماتریس ساختاری^۲ [۳۳] و روش اجزای محدود^۳ [۳۴] استفاده کرده‌اند. از آنجایی که یک مکانیزم منعطف یک زنجیره سینماتیک بسته است، می‌توان آن را به عنوان یک ربات موازی انعطاف‌پذیر با پیکربندی ثابت در نظر گرفت که تنها می‌تواند تحت جابه‌جایی‌های دامنه کوچک قرار گیرد.

تحلیل ماتریس ساختاری برای مدل‌سازی کینتواستاتیک مکانیزم‌های منعطف پیشنهاد شده است. مزیت این روش کاهش تعداد گره‌ها و افزایش سرعت محاسبات برای مکانیزم‌های پیچیده است. همچنین، ماتریس سختی کل مکانیزم را می‌توان با گرفتن مشتق دوم انرژی کل کرنش نسبت به بردار جابه‌جایی به صورت جبری به دست آورد [۳۵]. در این مدل‌سازی، کل بدنه الاستیک مکانیزم، از جمله اتصالات انعطاف‌پذیر، با استفاده از تیر

مکانیزم‌های با ساختار پیچیده دشوار است. لی و همکاران با استفاده از روش انرژی و ترکیب آن با فرض جابه‌جایی با دامنه کوچک، محاسبات را کاهش داد و تجزیه و تحلیل مکانیزم منعطف با نوع پل را تسهیل کرد [۱۲]. با این حال، استفاده از این روش‌ها برای مکانیزم ساده‌ای مثل مکانیزم لوزی بسیار پیچیده می‌باشد و در نتیجه این روش‌ها برای مکانیزم‌های سری - موازی که ساختار پیچیده‌ای دارند مناسب نمی‌باشد. هاول در سال ۱۹۹۶ مدل‌سازی بر اساس بدنه شبه صلب ارائه کرد که در این روش یک مفصل الاستیک به عنوان یک مفصل متصل به فنر پیچشی مدل‌سازی می‌شود [۲۶]. همچنین پارامترهای سختی فنر را برای انواع مختلف تیرهای خمشی تحت بارهای نیروی متفاوت ارائه کرد. مزیت استفاده از این مدل‌سازی تبدیل مکانیزم‌های انعطاف‌پذیر به مکانیزم‌های مفصل صلب با اجزای الاستیک گسسته شده است که مدل‌سازی ساده می‌شود. با این حال، از آنجایی که روش مدل‌سازی به شدت به نوع بارگذاری بستگی دارد، برای بارگذاری‌های پیچیده و پیکربندی‌های موازی - سری مکانیزم‌های انعطاف‌پذیر مناسب نیست. در سال ۲۰۱۹، ئوو و همکارانش با استفاده از روش انرژی و جبر ماتریسی [۲۷]، یک تحلیل ساختاری بر روی یک مکانیزم منعطف انجام دادند. در این روش، ماتریس سختی کل مکانیزم با محاسبه انرژی کرنشی کل مکانیزم بر حسب ماتریس سختی اجزا به دست می‌آید. بر این اساس، نیروی داخلی هر عضو نیازی به محاسبه ندارد و رفتار الاستیکی مکانیزم تنها با شناخت نیروهای خارجی قابل تجزیه و تحلیل است. همچنین در سال ۲۰۱۳ کورایم و همکاران با استفاده از همین روش، ماتریس‌های سختی و جرم را برای بازوی انعطاف‌پذیر به صورت پارامتری محاسبه کرده و حداکثر نیروی مورد نیاز برای جابه‌جایی مکانیزم مورد نظر را به دست آورده‌اند [۲۸]. مشابه دیگر سیستم‌های مکانیکی انعطاف‌پذیر، روش اجزای محدود را می‌توان به آسانی برای تحلیل مکانیزم‌های منعطف مورد استفاده قرار داد. با این حال، نمی‌توان آن را به طور موثر برای طراحی و بهینه‌سازی هندسی تحت برخی محدودیت‌ها استفاده کرد [۲۷]. در واقع، روش اجزا محدود در این گونه مسائل هزینه محاسباتی بالا دارند که مانع از آن می‌شود که بتوان روش‌های بهینه‌سازی پیچیده مبتنی بر تکرار را بر روی مسئله پیاده‌سازی نمود. به همین علت روش اجزای محدود بیشتر برای ارزیابی طرح نهایی تحت بارهای خارجی خاص استفاده می‌شود. رویکردهای مدل‌سازی مبتنی بر روش‌های کینتواستاتیک به سه دسته، قضیه کاستیلیانو [۲۹]، تیر الاستیک [۳۰] و مدل‌سازی جسم شبه صلب [۳۱] تقسیم بندی می‌شود.

در این مقاله، با استفاده از مدل‌سازی الاستواستاتیک به تحلیل و

1 Virtual Joint Method
2 Matrix Structural Analysis
3 Finite Element Method

مکانیزم منعطف مسطح است، بردارهای جابه‌جایی و نیرو دویعدی در نظر گرفته می‌شوند، یعنی:

$$U_i = \begin{bmatrix} ui_x \\ ui_y \\ \theta i_z \end{bmatrix}, W_i = \begin{bmatrix} Fi_x \\ Vi_y \\ Mi_z \end{bmatrix} \quad (۴)$$

در این حالت، ماتریس سختی تیر اویلر - برنولی یک ماتریس 6×6 است که شامل بلوک‌های 3×3 است. باتوجه به نیروهای اعمال شده به یک اتصال الاستیک که در شکل ۱ نشان داده شده است، ماتریس سختی محلی با استفاده از معادله انرژی و قضیه دوم کاستیلیانو به صورت زیر می‌باشد، یعنی:

$$V_i = \int_0^L \left(\frac{Fi_x^2}{2EA(x)} + \frac{Mi_z^2}{2EI(x)} \right) dx$$

$$C_i = \frac{\partial^2 V_i}{\partial F^2} \rightarrow K_i = C_i^{-1} \quad (۵)$$

از این رو، بلوک ماتریس سختی محلی برای یک تیر همسانگرد با سطح مقطع مستطیلی یکنواخت به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$K_{ii} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I}{L^2} & \frac{6I}{L} \\ 0 & \frac{6I}{L} & 4I \end{bmatrix},$$

$$K_{ji} = K_{ji}^T = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12I}{L^2} & -\frac{6I}{L} \\ 0 & \frac{6I}{L} & 4I \end{bmatrix}, \quad (۶)$$

$$K_{jj} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12I}{L^2} & \frac{6I}{L} \\ 0 & -\frac{6I}{L} & 4I \end{bmatrix}$$

اویلر - برنولی تقریب زده شده و انرژی پتانسیل برای تمام اجزای کشسان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$V = \frac{1}{2} [U_i^T \quad U_j^T] Q^T \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix} \quad (۱)$$

که در آن انرژی پتانسیل، Q ماتریس دوران، K_{ii} ، K_{ij} و K_{jj} بلوک‌های ماتریس سختی محلی و U_i بردارهای جابه‌جایی هر گره هستند. در واقع، ماتریس سختی محلی یک عضو انعطاف پذیر با توجه به یک قاب مختصات محلی به دست می‌آید. رابطه (۱) فرم ماتریسی رابطه انرژی کرنشی می‌باشد از این رابطه برای تحلیل ربات‌ها با مفاصل صلب استفاده شده است. اما با توجه به پیوستگی در مکانیزم‌های منعطف این رابطه خلاصه شده و با توجه به رابطه (۲) به دست آمده است. این رابطه همان انرژی پتانسیل کششی در فنر می‌باشد. به دلیل اینکه مفاصل الاستیک در زوایای مختلفی قرار می‌گیرند بنابراین نیاز است تا بردار جابه‌جایی آن از مختصات محلی به مختصات کلی دوران پیدا کند

$$F = KU = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix}$$

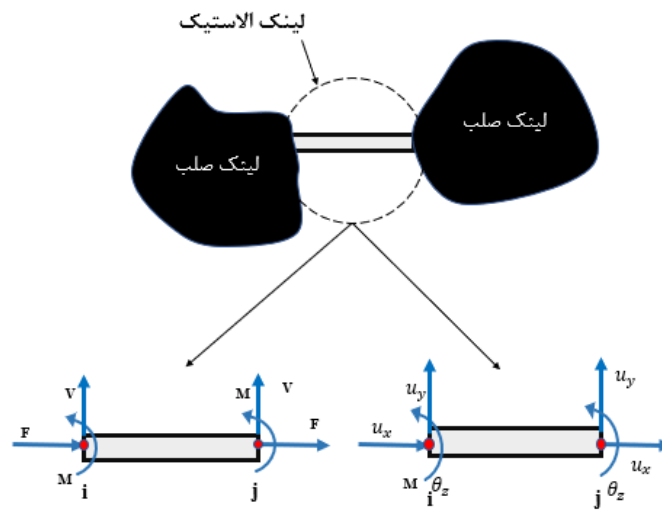
$$\begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix}_{global} = Q \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix}_{local} \quad (۲)$$

$$V = \frac{1}{2} U_{global}^T KU_{global} = \frac{1}{2} \left[Q \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix}_{local} \right]^T KQ \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix}_{local}$$

همان‌طور که گفته شد، طبق قضیه کاستیلیانو، اولین مشتق انرژی پتانسیل ذخیره شده در یک سیستم نسبت به بردار جابه‌جایی گره برابر با نیروهای اعمالی مربوطه است. در نتیجه، مشتق دوم انرژی پتانسیل باتوجه به بردار جابه‌جایی گره منجر به ماتریس سختی کل مکانیزم می‌شود، یعنی:

$$F = \frac{\partial V}{\partial U} \quad K = \frac{\partial^2 V}{\partial U^2} \rightarrow C = K^{-1} \quad (۳)$$

معکوس ماتریس سختی مکانیزم با C نشان داده می‌شود. از آنجایی که



شکل ۱. نیروهای وارد شده به مفصل انعطاف پذیر

Fig. 1. Forces applied to the flexible joint

$$\begin{bmatrix} u_{jx} \\ u_{jy} \\ \theta_{jz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ \theta_{iz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -L \sin \theta * \theta_{iz} \\ L \cos \theta * \theta_{iz} \\ \theta_{iz} \end{bmatrix} \rightarrow \quad (8)$$

$$U_j = U_i + \begin{bmatrix} -L \sin \theta * \theta_{iz} \\ L \cos \theta * \theta_{iz} \\ \theta_{iz} \end{bmatrix}$$

با استفاده از این تقریب، تعداد گره در رابطه (۸) کمتر شده در نتیجه مقدار محاسبات کاهش می‌یابد. در قسمت نتایج به بررسی رفتار صلب لینک‌های ضخیم پرداخته شده است. منظور از افزایش محاسبات، مربوط به محاسبه سختی لینک‌های ضخیم با هندسه پیچیده می‌باشد. در برخی از مکانیزم‌ها، المان‌های ضخیم هندسه پیچیده‌ای دارند و محاسبه ماتریس سختی برای آن مشکل می‌باشد.

۲-۲- پارامترهای طراحی

همان‌طور که قبلاً ذکر شد، محرک‌های پیزوالکتریک می‌توانند در جهتی که قطبش اتفاق می‌افتد، کرنش کوچکی ایجاد کنند. از این‌رو، مکانیزم‌های منعطف برای تقویت جابه‌جایی و موقعیت‌دهی عملگرهای پیزوالکتریک

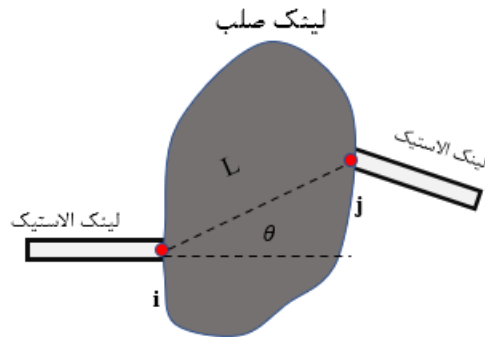
ماتریس دوران که برای انتقال مختصات محلی به قاب مختصات جهانی استفاده می‌شود، به صورت زیر می‌باشد.

$$Q = \begin{bmatrix} T & O_{3*3} \\ O_{3*3} & T \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۲-۱- فرض چرخش و جابه‌جایی کوچک

در مکانیزم‌های منعطف اتصالات الاستیک، حرکتی بسیار کوچک دارند که بسیار کمتر از ابعاد مکانیزم است. از طرفی در این مکانیزم‌ها اجزای ضخیمی وجود دارد که تقریباً هیچ انرژی کشسانی در خود ذخیره نمی‌کنند و از این‌رو می‌توان آن‌ها را به صورت اجسام صلب تقریب زد. با توجه به حرکت ایجاد شده در مقایسه با ابعاد یک مکانیزم منعطف، فرض چرخش با دامنه کوچک می‌تواند برای پیوندهای صلب صادق باشد. از این‌رو، بردارهای جابه‌جایی دو گره روی یک پیوند صلب (شکل ۲) را می‌توان به صورت زیر مرتبط کرد:



شکل ۲. تقریب فرض جابه‌جایی و چرخش کوچک

Fig. 2. Approximation of small displacement and rotation assumption

زیاد، دامنه حرکت پیزوالکتریک را کاهش می‌دهد. از این رو، با توجه به معادله (۱۱)، مکانیزمی با سختی ورودی کمتر مطلوب است.

$$U_{eff} = \frac{K_{pzt}}{K_{pzt} + K_{Input}} U_{pzt} \quad (11)$$

طراحی و تولید می‌شوند؛ بنابراین، نسبت تقویت یک ویژگی مهم مکانیزم منعطف است که به صورت رابطه (۹) تعریف می‌شود.

$$R = \frac{U_{out}}{U_{inp}} \quad (9)$$

۲-۳- مدل‌سازی بر اساس روش الاستوستاتیک

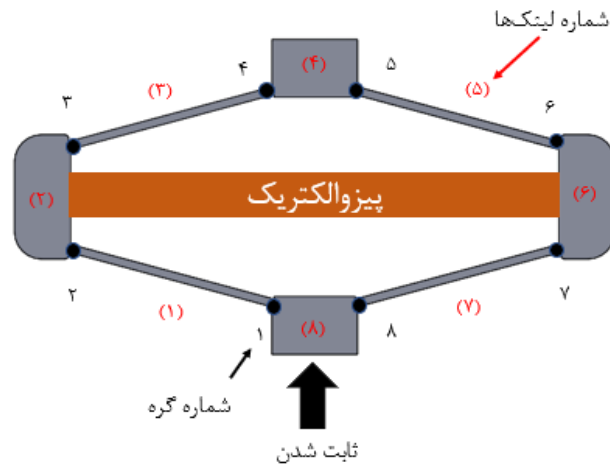
در این قسمت با استفاده از روش الاستوستاتیک مکانیزم لوزی مدل‌سازی شده است. در مکانیزم لوزی با توجه به ضخامت لینک‌ها، ۴ لینک الاستیک و ۴ لینک صلب وجود دارد که با توجه به آن که مکانیزم از زیر ثابت می‌شود، گره شماره ۱ و ۸ زمین می‌باشد و بردار جابه‌جایی آن صفر است، به واسطه استفاده از فرض جابه‌جایی کوچک ۴ گره از محاسبات کاسته شده است.

در شکل ۱ لینک‌های ۲، ۴، ۶، ۸ صلب در نظر گرفته شده و حرکت این لینک‌ها با استفاده از فرض جابه‌جایی کوچک تقریب زده شده و همچنین رابطه (۸) برای آن نوشته نمی‌شود، یعنی انرژی پتانسیل آن صفر می‌باشد. برای بقیه لینک‌ها که نازک‌تر هستند، دارای تغییر شکل الاستیک می‌باشد و رابطه (۱۲) برای ۴ المان الاستیک نوشته شده است.

که در آن U_{out} جابه‌جایی خروجی و U_{inp} جابه‌جایی ورودی است. علاوه بر این، مکانیزم‌های منعطف سختی متفاوتی در برابر جابه‌جایی ورودی دارند، که به طراحی، ابعاد و مواد سازنده بستگی دارد. سختی یک مکانیزم منعطف به عنوان مقدار نیروی اعمال شده توسط پیزو f_{pzt} به مکانیزم تقسیم بر جابه‌جایی ورودی U_{inp} تعریف می‌شود، یعنی:

$$K_{Input} = \frac{f_{pzt}}{U_{inp}} \quad (10)$$

همچنین بر همین اساس طول مؤثر پیزوالکتریک با معادله (۱۱) به دست می‌آید. که در آن K_{pzt} سختی پیزوالکتریک، K_{Input} سختی ورودی مکانیزم و U_{pzt} جابه‌جایی پیزوالکتریک در حالت آزاد است. سختی ورودی



شکل ۳. شماره گره ها و لینک های مکانیزم لوزی

Fig. 3. Node numbers and links of the rhombus mechanism

رابطه (۱) برای تمامی لینکها نازک و الاستیک نوشته شده و باهم جمع می شود، در آخر مطابق با رابطه (۳) از انرژی پتانسیل نسبت به بردار جابه جایی مشتق گرفته شده و ماتریس سختی کل مکانیزم به دست می آید

$$V^T = V^{(2)} + V^{(4)} + V^{(6)} + V^{(8)}$$

$$U = [U_2 \quad U_4 \quad U_6]$$

$$K = \frac{\partial^2 V}{\partial U^2} \quad (14)$$

$$U = K^{-1} W$$

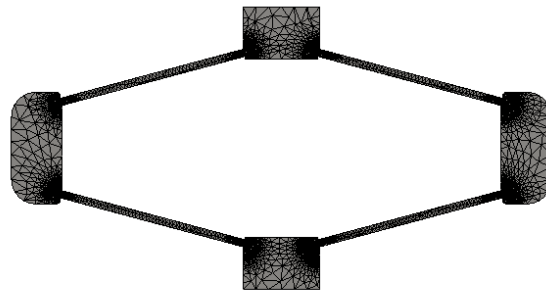
برای به دست آوردن نسبت تقویت و سختی، جابه جایی خروجی مکانیزم به ورودی تقسیم می شود که در مکانیزم لوزی جابه جایی ورودی مطابق شکل ۳ بصورت رابطه (۱۵) می باشد.

$$R = \frac{u_{4y}}{(u_{2x} - u_{6x})}, K_{input} = \frac{f_{pzl}}{u_{2x}} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= \frac{1}{2} [U_1^T \quad U_2^T] Q \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} Q^T \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \\ V^{(3)} &= \frac{1}{2} [U_3^T \quad U_4^T] Q \begin{bmatrix} K_{33} & K_{34} \\ K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} Q^T \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \\ V^{(5)} &= \frac{1}{2} [U_3^T \quad U_4^T] Q \begin{bmatrix} K_{33} & K_{34} \\ K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} Q^T \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \\ V^{(7)} &= \frac{1}{2} [U_3^T \quad U_4^T] Q \begin{bmatrix} K_{33} & K_{34} \\ K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} Q^T \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

مطابق با رابطه (۸) جابه جایی گره ها در لینکهای ۲، ۴ و ۶ به صورت رابطه زیر دست آمده و در رابطه (۱۲) جایگزین می شود. در این فرآیند ماتریس سختی ۲۱×۲۱ به ماتریس سختی ۹×۹ تبدیل شده است، در نتیجه محاسبات کاهش یافته و سرعت بهینه سازی بیشتر می گردد.

$$\begin{aligned} U_3 &= U_2 + \begin{bmatrix} -L \sin \theta * \theta_{2z} \\ L \cos \theta * \theta_{2z} \\ \theta_{2z} \end{bmatrix} \\ U_5 &= U_4 + \begin{bmatrix} -L \sin \theta * \theta_{i4} \\ L \cos \theta * \theta_{i4} \\ \theta_{i4} \end{bmatrix} \\ U_7 &= U_6 + \begin{bmatrix} -L \sin \theta * \theta_{i6} \\ L \cos \theta * \theta_{i6} \\ \theta_{i6} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$



شکل ۴. مش بندی مکانیزم لوزی در نرم افزار المان محدود

Fig. 4. Meshing of the rhombus mechanism in finite element software

جدول ۱. خواص مواد و مقدار پارامترهای هندسی مکانیزم لوزی برای شبیه سازی در نرم افزار

Table 1. Material properties and geometric parameter values of the rhombus mechanism for software simulation

مقدار	پارامتر	مقدار	پارامتر
۰/۳	l	۸۷۰۴۳	تعداد کل المان‌ها
۲۰۰	مدول الاستیک (گیگاپاسکال)	۱۰۰	\int_{pzt} (نیوتن)
۷۸۰۰	چگالی (کیلوگرم بر مترمکعب)	۱۵/۵۲	$L1$ (میلی‌متر)
۱۵	θ (درجه)	۵/۲	$L2$ (میلی‌متر)
پایین مکانیزم ثابت	شرایط مرزی	۸	$L3$ (میلی‌متر)

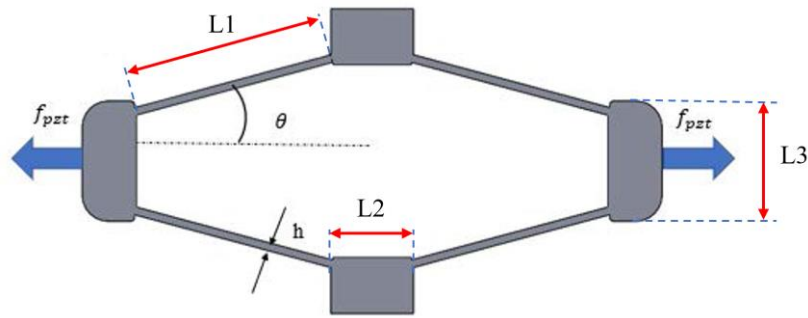
۳- نتایج

میلی‌متر می‌باشد. همان‌طور که در شکل ۴ دیده می‌شود، با استفاده از ابزار مش کنترل در نقاطی که تمرکز تنش وجود دارد اندازه المان‌ها برابر $0/0588$ میلی‌متر در نظر گرفته شده تا شبیه‌سازی دقت مناسب‌تری داشته باشد. همچنین برای تحلیل دقیق‌تر مفاصل انعطاف‌پذیر، اندازه هر المان $0/293$ میلی‌متر در نظر گرفته شده است. جنس مکانیزم فولاد می‌باشد که خواص آن در جدول ۱ آمده است.

برای شرایط مرزی پایین مکانیزم ثابت شده است و نیروی پیزوالکتریک

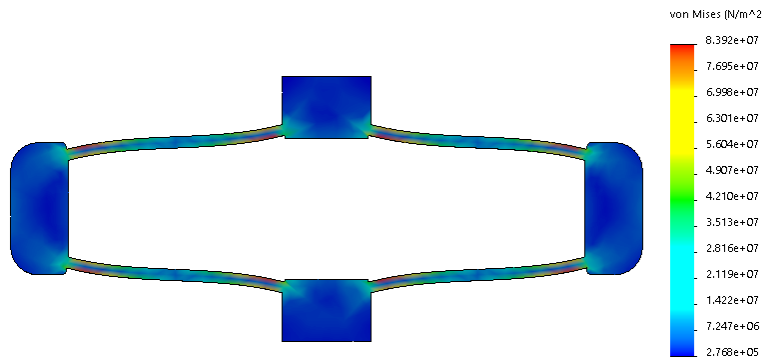
در این قسمت نتایج رویکرد پیشنهاد شده برای مکانیزم لوزی با استفاده از نرم‌افزار المان محدود و نتایج آزمایش مقایسه شده است. مکانیزم لوزی در نرم‌افزار سالیدورکس طراحی و شبیه‌سازی شده که در شکل ۴ شبیه‌سازی استاتیکی مکانیزم نشان داده شده است.

این شبیه‌سازی با تعداد 87043 المان و 141354 گره از نوع سالید انجام می‌شود. اندازه هر المان برای اعضای که ضخیم‌تر هستند، $0/986$



شکل ۵. ابعاد مکانیزم لوزی

Fig. 5. Dimensions of the rhombus mechanism



شکل ۶. تحلیل المان محدود مکانیزم لوزی و بررسی رفتار صلب لینک های ضخیم

Fig. 6. Finite element analysis of the rhombus mechanism and investigation of the rigid behavior of thick links

خواص ماده بستگی ندارد [۳۶].

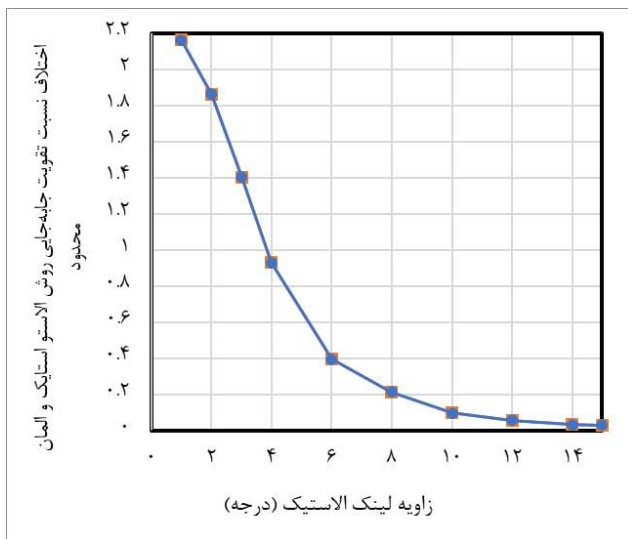
$$R_{amp} = \frac{(L^2 - h^2) \cos\theta \sin\theta}{L^2 \sin^2\theta + h^2 \cos^2\theta} \quad (۱۶)$$

شکل ۷ مقایسه بین نسبت تقویت جابه‌جایی برحسب زاویه لینک‌های الاستیک در مکانیزم لوزی می‌باشد که با استفاده از نرم افزار المان محدود، مدل‌سازی الاستوستاتیک و فرمول لینگ محاسبه شده است. همان‌طور که دیده می‌شود در مدل‌سازی الاستوستاتیک در زاویه‌های کمتر خطای بیشتری وجود دارد، ولی با افزایش زاویه لینک‌ها این خطا کمتر می‌شود و به حدود ۰/۵۴ درصد می‌رسد. صلب در نظر گرفتن لینک‌های ضخیم این خطا

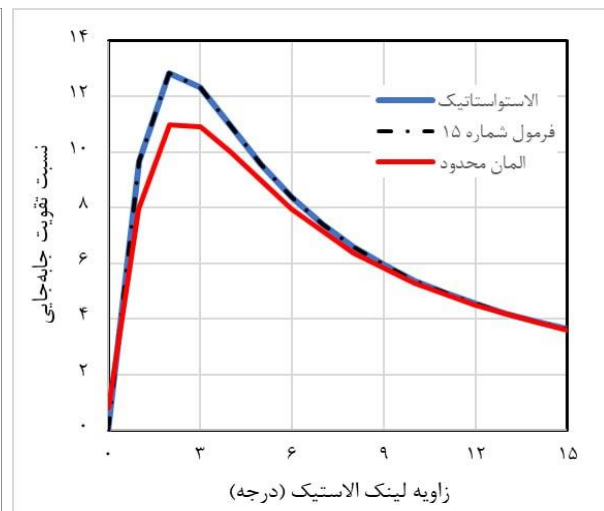
مطابق شکل ۵ به مکانیزم وارد شده است. همچنین ابعاد دیگر مکانیزم در جدول ۱ آورده شده است.

همان‌طور که در شکل ۶ دیده می‌شود، لینک‌های ضخیم رفتار صلب دارند زیرا تنش فون میزز وارد شده به لینک‌های ضخیم‌تر مطابق شکل ۶ صفر می‌باشد. این یعنی لینک‌های ضخیم‌تر تغییر شکل الاستیک نداشته و می‌توان برای تقریب جابه‌جایی این لینک‌ها از رابطه (۸) استفاده کرد.

برای محاسبه نسبت تقویت جابه‌جایی مکانیزم لوزی، لینگ رابطه (۱۶) را براساس تیر الاستیک پیشنهاد داده که باتوجه به پارامترهای هندسی مکانیزم لوزی می‌توان نسبت تقویت جابه‌جایی را محاسبه نمود. در این رابطه طول مفصل الاستیک، ضخامت مفصل و \$\theta\$ زاویه مفصل می‌باشد. همان‌طور که در رابطه زیر دیده می‌شود پارامتر نسبت تقویت جابه‌جایی به



(ب)



(الف)

شکل ۷. نمودار نسبت تقویت جابه‌جایی بر حسب زاویه لینک با استفاده از مدل‌سازی الاستوستاتیک، فرمول (۱۶) و روش المان محدود

Fig. 7. Displacement amplification ratio diagram with respect to link angle using elastostatic modeling, formula (15), and finite element method

مکانیزم همان‌طور که گفته شد مقدار بار واردشده از طرف پی‌زو به مکانیزم تقسیم‌بر جابه‌جایی مکانیزم در نقطه ورودی می‌باشد، بدین ترتیب و مطابق آنچه گفته‌شد، در این روش با افزایش زاویه خطا کمتر شده است.

در جدول ۲ مقایسه‌ای بین شبیه‌سازی و مدل‌سازی الاستوستاتیک انجام‌شده که در این بررسی مکانیزم لوزی در زاویه ۱۵ درجه قرار دارد و خواص مواد و ابعاد مکانیزم مطابق جدول ۱ می‌باشند. در این بررسی نسبت تقویت جابه‌جایی مکانیزم و همچنین خروجی عمودی مکانیزم با مقدار ضخامت لینک الاستیک ۰.۶ میلی‌متر مقایسه شده است.

همچنین این مقایسه برای مکانیزم با مقدار ضخامت لینک الاستیک ۰/۸ میلی‌متر نیز در جدول ۳ تکرار شده است.

همان‌طور که دیده می‌شود خطای روش پیشنهادی با روش المان محدود ۱/۴۱ درصد و با فرمول پیشنهادی لینک برابر می‌باشد.

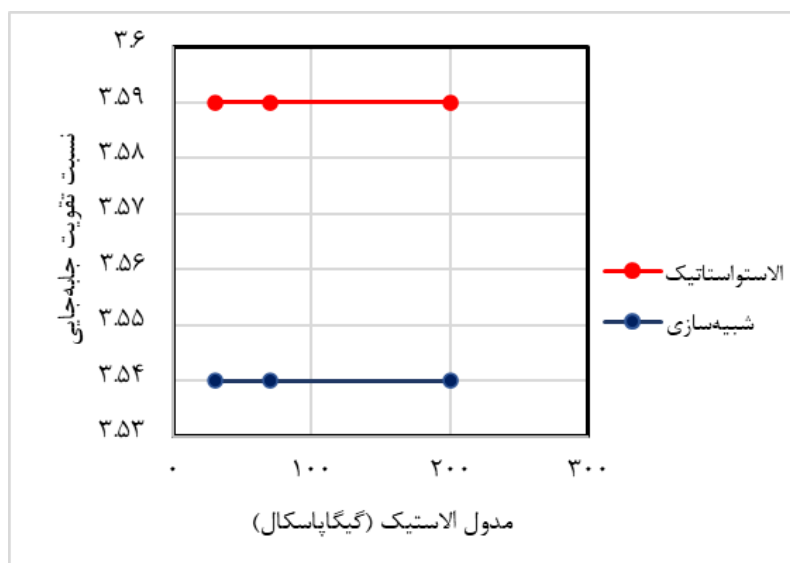
۳-۱- نتایج تجربی

شکل ۸ نشان می‌دهد که خواص ماده هیچ تاثیری بر پارامتر نسبت تقویت جابه‌جایی ندارد. از این رو، در این مرحله، اولین نمونه اولیه مکانیزم لوزی با استفاده از یک چاپگر سه بعدی از مواد پی ال

را در زوایایی کم ایجاد می‌کند. در حقیقت، تغییر شکل مفاصل الاستیک در زوایای کم، کاهش یافته و هم اندازه با تغییر شکل بسیار کوچک لینک‌های ضخیم می‌شود. در تئوری الاستوستاتیک لینک‌های ضخیم با استفاده از فرض چرخش کوچک مدل‌سازی شده و جابه‌جایی الاستیک آن صرف نظر شده است، ولی در واقعیت این لینک‌های که صلب در نظر گرفته شده‌اند جابه‌جایی کمی دارند و اثر این جابه‌جایی در زوایای کوچک تاثیر می‌گذارد.

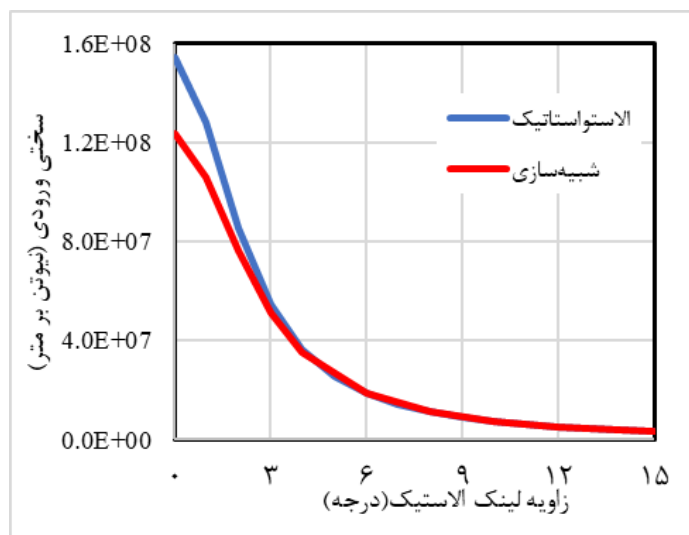
شکل ۷، مقدار نسبت تقویت جابه‌جایی به دست آمده از مدل‌سازی الاستوستاتیک با روش پیشنهادی لینک برابر می‌باشد، زیرا در روش به کار گرفته شده توسط لینک از تئوری تیر الاستیک استفاده شده است. اما مزیت مدل‌سازی الاستوستاتیک در پیاده‌سازی راحتی بر روی مکانیزم می‌باشد و نیازی به بررسی نیروی وارد شده به هر عضو مکانیزم لوزی نمی‌باشد. همچنین در فرمول لینک پارامتر نسبت تقویت مستقل از خواص ماده می‌باشد و به دلیل انطباق این فرمول با مدل‌سازی الاستوستاتیک، در این مدل‌سازی نیز خواص ماده تاثیری بر مقدار نسبت تقویت ندارد. شکل ۸ مقایسه بین نسبت تقویت بر حسب مدل الاستیک می‌باشد، همان‌طور که دیده می‌شود با در نظر گرفتن خواص متفاوت مقدار آن تغییر نمی‌کند.

شکل ۹ سختی مکانیزم را بر حسب زاویه لینک‌ها نشان می‌دهد. سختی



شکل ۸. بررسی تاثیر مدول الاستیک بر نسبت تقویت جابه‌جایی

Fig. 8. Investigation of the effect of elastic modulus on the displacement amplification ratio



شکل ۹. سختی مکانیزم لوزی برحسب زاویه لینک با روش های المان محدود و الاستواستاتیک

Fig. 9. Stiffness of the rhombus mechanism with respect to link angle by finite element and elastostatic methods

جدول ۲. مقایسه پارامترهای مکانیزم لوزی با در نظر گرفتن ضخامت ۰/۶ میلی‌متر برای لینک‌های الاستیک

Table 2. Comparison of parameters of the rhombus mechanism considering a thickness of 0.6 mm for elastic links

جابه‌جایی ورودی (میکرومتر)	جابه‌جایی خروجی (میکرومتر)	نسبت تقویت جابه‌جایی	
۲۹/۶۹	۲۱/۵۸	۳/۶۳	شبیه‌سازی
۲۹/۵۸	۲۱/۶۰	۳/۶۵	مدل‌سازی
٪ ۰/۳۷	٪ ۰/۰۹	٪ ۰/۴۵	خطا
-	-	۳/۶۵	مقاله لینگ [۳۶]

جدول ۳. مقایسه پارامترهای مکانیزم لوزی با در نظر گرفتن ضخامت ۰/۸ میلی‌متر برای لینک‌های الاستیک

Table 3. Comparison of parameters of the rhombus mechanism considering a thickness of 0.8 mm for elastic links

جابه‌جایی ورودی (میکرومتر)	جابه‌جایی خروجی (میکرومتر)	نسبت تقویت جابه‌جایی	
۱۲/۷۱	۹۰/۰۵	۳/۵۴	شبیه‌سازی
۱۲/۶۸	۹۱/۰۷	۳/۵۹	مدل‌سازی الاستواستاتیک
٪ ۰/۱۸	٪ ۱	٪ ۱/۴۱	خطا
-	-	۳/۵۹	مقاله لینگ [۳۶]



شکل ۱۰. نحوه‌ی ارتباط اجزای آزمایش

Fig. 10. Method of connecting the experimental components

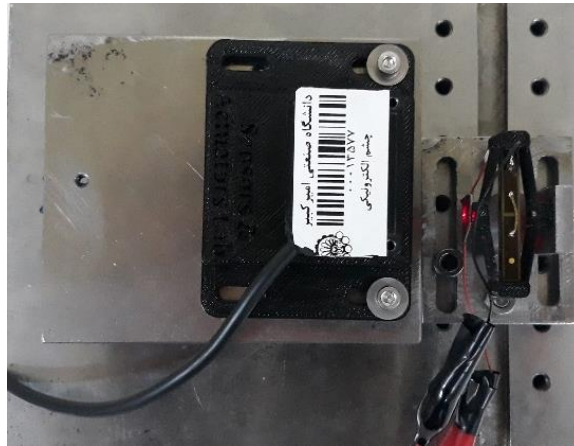
ای^۱ ساخته می‌شود. در مرحله بعد، یک محرک پیزوالکتریک^۲ در داخل مکانیزم قرار می‌گیرد که توسط تقویت کننده ولتاژ^۳، همانطور که در شکل ۱۰ نشان داده شده است، هدایت می‌شود. همچنین، یک سنسور لیزری جابجایی^۴ برای اندازه‌گیری جابجایی خروجی استفاده می‌شود. به دلیل اینکه خروجی سنسور به صورت شدت جریان میباشد و از طرفی برای جمع‌آوری داده‌های مورد نیاز، از یک کارت داده برداری^۵ استفاده می‌شود که ورودی ولتاژ دارد، نیاز است تا از مبدل شدت جریان به ولتاژ^۶ استفاده گردد. ارتباط بین اجزا آزمایش در شکل ۱۰ نشان داده شده است.

در این آزمایش ابتدا جابه‌جایی عمودی خروجی و سپس جابه‌جایی افقی ورودی به دست آورده می‌شود و با دانستن آن، مقدار نسبت تقویت جابه‌جایی مشخص می‌شود. شکل ۱۱ نشان‌دهنده ستاپ اندازه‌گیری جابجایی خروجی مکانیزم منعطف توسط سنسور لیزری است. همان‌طور در شکل ۱۱ دیده می‌شود برای اندازه‌گیری جابه‌جایی از یک حسگر لیزری استفاده شده است.

سیگنال ولتاژ داده شده به پیزو مطابق شکل ۱۲ می‌باشد و دوره تناوب این سیگنال برابر با ۱۰ ثانیه است. این دسته از سیگنال‌های شبه‌استاتیکی معمولاً برای نمایش دادن رفتار هیستریزس مکانیزم استفاده می‌شوند. دوره تناوب این سیگنال معمولاً بالا است تا رفتار دینامیکی سیستم با رفتار هیستریزس ساختار ادغام نشود. این موج به دلیل متقارن بودن می‌تواند

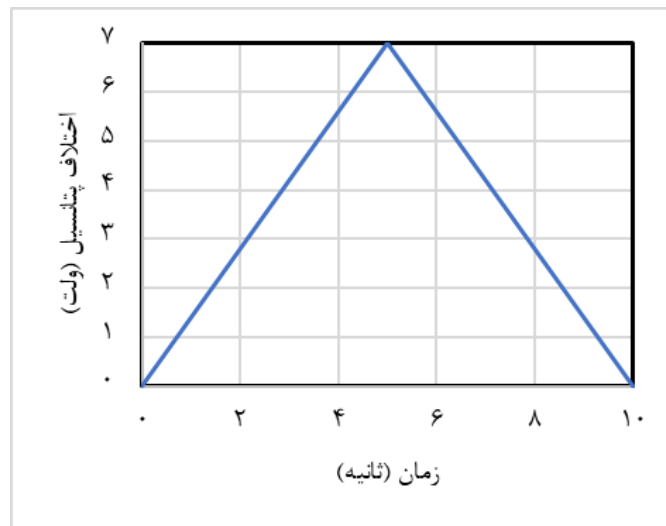
در این آزمایش ابتدا جابه‌جایی عمودی خروجی و سپس جابه‌جایی افقی ورودی به دست آورده می‌شود و با دانستن آن، مقدار نسبت تقویت جابه‌جایی مشخص می‌شود. شکل ۱۱ نشان‌دهنده ستاپ اندازه‌گیری جابجایی خروجی مکانیزم منعطف توسط سنسور لیزری است. همان‌طور در شکل ۱۱ دیده می‌شود برای اندازه‌گیری جابه‌جایی از یک حسگر لیزری استفاده شده است.

- 1 PLA
- 2 SA050536
- 3 Pdu150
- 4 CD22-15AM12
- 5 NI6052E
- 6 ziegler TI816



شکل ۱۱. نحوه‌ی قرار گیری حسگر در مقابل مکانیزم

Fig. 11. Placement of the sensor in front of the mechanism



شکل ۱۲. سیگنال داده شده به پیزو الکتریک

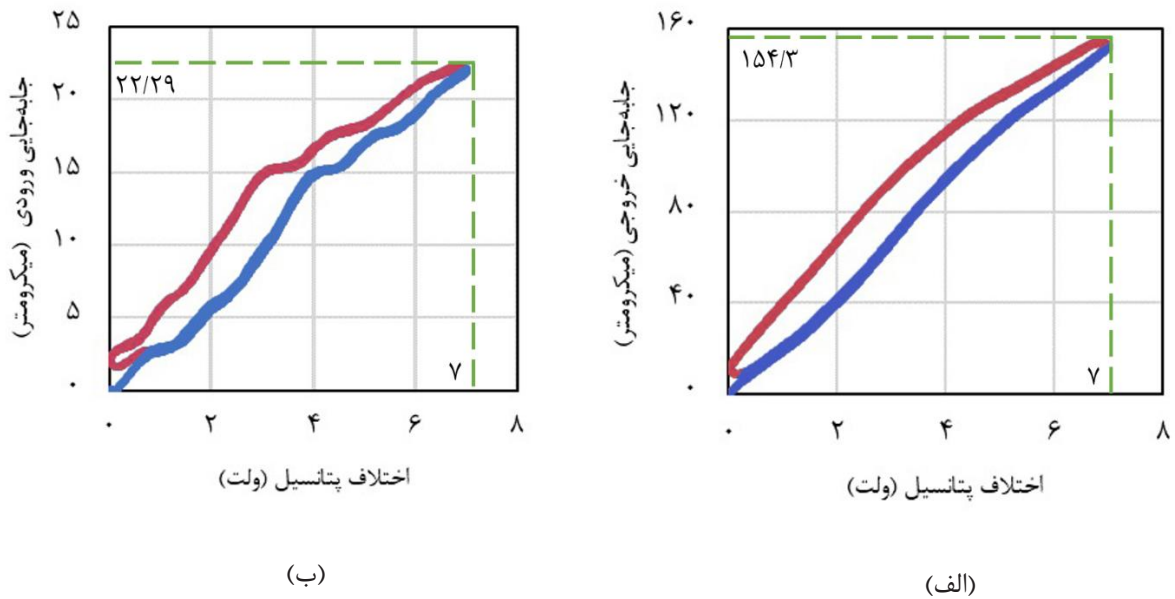
Fig. 12. Signal applied to the piezoelectric

همچنین در بیشترین مقدار ولتاژ، جابه‌جایی ورودی برابر با ۲۲/۲۹ میکرومتر و جابه‌جایی خروجی برابر با ۱۵۴/۳ میکرومتر می‌باشد. همان طور که در قسمت (ب) دیده می‌شود نمودار جابه‌جایی ورودی به هم ریختگی بیشتری نسبت به جابه‌جایی ورودی دارد که این به دلیل حرکت نقطه ورودی مکانیزم در دو راستای عمودی و افقی می‌باشد. ولی در قسمت (الف) به دلیل تقارن مکانیزم جابه‌جایی خروجی به هم ریختگی کمتری دارد.

در شکل ۱۴ جابه‌جایی‌های ورودی و خروجی مکانیزم برحسب زمان

تغییر رفتار سیستم در رفت و برگشت را به‌خوبی نمایش دهد. عامل به وجود آورنده این پدیده خواص خود ماده مکانیزم و پیزوالکتریک می‌باشد. به دلیل مشخص نبودن خواص ماده پی ال ای در این آزمایش فقط پارامتر نسبت تقویت جابه‌جایی با مدل‌سازی و شبیه‌سازی مقایسه می‌گردد.

در شکل ۱۳ نمودار جابه‌جایی خروجی و ورودی مکانیزم برحسب ولتاژ داده‌شده به پیزو نشان داده‌شده است. همان طور که دیده می‌شود، به دلیل رفتار هیستریزیس پیزو الکتریک، مسیر رفت بر روی مسیر برگشت قرار ندارد.



شکل ۱۳. جابه‌جایی ورودی و خروجی مکانیزم برحسب ولتاژ ورودی به پیزوالکتریک. الف. جابه‌جایی خروجی مکانیزم. ب. جابه‌جایی ورودی مکانیزم

Fig. 13. Input and output displacement of the mechanism with respect to input voltage to the piezoelectric. a. Output displacement of the mechanism. b. Input displacement of the mechanism

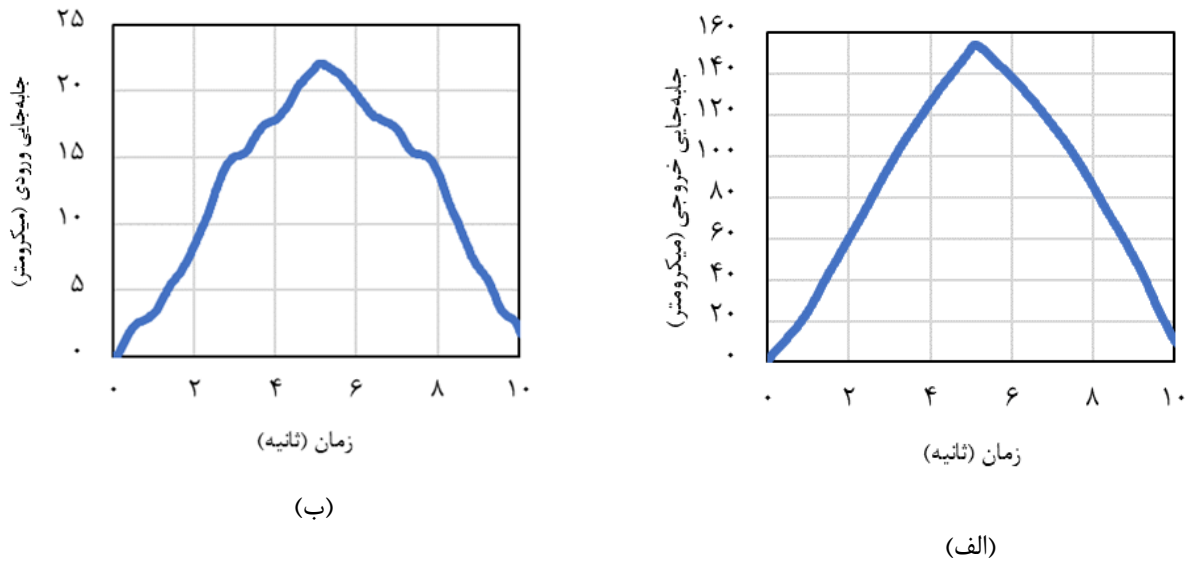
نسبت تقویت جابه‌جایی مکانیزم مقایسه شده است، ولی مقادیر جابه‌جایی ورودی و خروجی به دلیل مشخص نبودن خواص ماده مقایسه نمی‌شوند. همان‌طور که دیده می‌شود، خطای مدل‌سازی الاستواستاتیک و شبیه‌سازی المان محدود با نمونه ساخته شده ۴/۰۵ درصد می‌باشد که این خطا ناشی از به هم ریختگی نمودار جابه‌جایی ورودی می‌باشد.

باتوجه به اینکه مکانیزم ساخته شده در این پژوهش مطابق ابعاد جدول ۱ ساخته شده است. بنابراین خطای مدل‌سازی و المان محدود بسیار ناچیز می‌باشد. از طرفی مکانیزم ساخته شده با توجه به این که نسبت طول لینک (۱۵/۵ میلی‌متر) به ضخامت لینک (۰٫۸ میلی‌متر) بیشتر از ۱۰ می‌باشد مطابق با فرض‌های تیر اویلر برنولی است همچنین این مکانیزم در زاویه ۱۵ درجه طراحی و ساخته شده است بنابراین مطابق شکل ۷ خطای تیر اویلر برنولی نسبت به المان محدود در کمترین حالت ممکن می‌باشد. از طرفی اگر مکانیزم ساخته شده نسبت مطابق این فرض طراحی نشود می‌بایست از ماتریس سختی تیر تیموشینکو استفاده گردد

نشان داده شده‌اند. در این نمودار نیز به دلیل وجود حرکت هم در راستای عمودی و هم در راستای افقی، نمودار کمی به هم ریخته‌تر از نمودار جابه‌جایی خروجی می‌باشد.

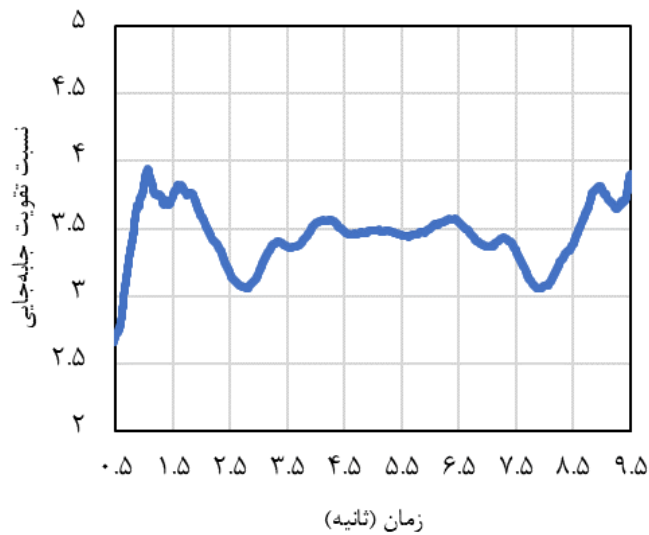
با توجه به مقادیر جابه‌جایی ورودی و خروجی مکانیزم لوزی می‌توان با استفاده از رابطه (۱۵) مقدار نسبت تقویت جابه‌جایی را محاسبه نمود. در شکل ۱۵ نسبت تقویت جابه‌جایی برحسب زمان شروع و پایان آزمایش بر اساس مقادیر شکل ۱۴ نشان داده شده است. مطابق این نمودار، در زمان‌های ۰/۵ ثانیه تا ۹/۵ ثانیه نسبت تقویت جابه‌جایی مکانیزم ساخته شده در محدوده نسبت تقویت ۳/۴۵ می‌باشد که در واقع این عدد متوسط نسبت تقویت است که از میانگین گرفتن نقاط موجود در شکل ۱۵ به دست می‌آید.

در جدول ۴ مقایسه‌ای بین نتایج شبیه‌سازی المان محدود، مدل‌سازی الاستواستاتیک و نتایج آزمایشگاهی با نمونه پی‌ال‌ای انجام شده است. در این بررسی ابعاد مکانیزم لوزی مطابق جدول ۱ می‌باشد. در این بررسی



شکل ۱۴. جابه‌جایی خروجی و ورودی مکانیزم برحسب زمان انجام آزمایش

Fig. 14. Output and input displacement of the mechanism with respect to the time of the experiment



شکل ۱۵. نسبت تقویت برحسب زمان شروع آزمایش تا پایان

Fig. 15. Amplification ratio with respect to the start time to the end of the experiment

جدول ۴. نسبت تقویت جابه‌جایی به دست آمده از روش الاستواستاتیک، شبیه‌سازی المان محدود و نمونه ساخته شده

Table 4. Displacement amplification ratio obtained from elastostatic method, finite element simulation, and fabricated sample

نمونه ساخته شده	الاستواستاتیک	شبیه‌سازی	
۳/۴۵	۳/۵۹	۳/۵۴	نسبت تقویت جابه‌جایی
-	۴/۰.۰۵	۲/۰.۶۶	خطا نسبت به نتایج تجربی

۴- بهینه‌سازی هندسی

همان‌طور که قبلاً ذکر شد، عملکرد یک مکانیزم منعطف به نسبت تقویت جابه‌جایی و سختی بستگی دارد. در این مکانیزم‌ها، سختی کمتر منجر به حرکت دامنه بیشتر پیزوالکتریک می‌شود. از طرف دیگر، مقدار سختی نمی‌تواند بسیار کم باشد؛ زیرا مکانیزم باید در برابر محرک پیزو واکنش نشان دهد و مکانیزم عملکرد را تحت فشار قرار دهد؛ بنابراین، طراحی مکانیزمی با مقدار سختی مناسب یک هدف مهم است که بهینه‌سازی هندسی را می‌طلبد. در واقع، یک تکنیک بهینه‌سازی هندسی، مجموعه‌ای از ابعاد مناسب را باتوجه به نسبت تقویت جابه‌جایی موردنیاز و در محدوده سختی مجاز پیدا می‌کند؛ بنابراین، تابع هزینه به‌عنوان مجذور اختلاف بین نسبت تقویت جابه‌جایی و مقدار موردنظر تعریف می‌شود، یعنی:

$$\frac{F}{U_{inp(L1,L3,h,\theta)}} < K_{max}, \quad \frac{F}{U_{inp(L1,L3,h,\theta)}} > K_{min} \quad (18)$$

برای ساده‌سازی فرایند بهینه‌سازی لازم است مسئله بهینه‌سازی مقید را به یک مسئله نامقید تبدیل شود. در این راستا با استفاده از روش پنالتی مطابق معادله (۱۹)، محدودیت‌های موردنظر برای تابع هزینه اعمال می‌شود تا یک مسئله بهینه‌سازی نامقید به دست آید.

$$\begin{aligned} \psi &= \varphi + r \left(\sum g_i^2 \right) \\ g_i &= \max(0, G_i) \\ G_i &< 0 \end{aligned} \quad (19)$$

باتوجه به دو معادله (۱۷)، تابع هزینه برای بهینه‌سازی هندسی مکانیزم به‌صورت معادله (۱۸) تعریف شده است.

$$\varphi(L1, L3, h, \theta) = \left(\frac{U_{out}(L1, L3, h, \theta)}{U_{inp}(L1, L3, h, \theta)} - R \right)^2 \quad (17)$$

که در آن LF و h نشان‌دهنده طول و ضخامت مفصل الاستیک است. همچنین θ و LR زاویه و طول پیوندهای صلب هستند. تابع هزینه فوق‌الذکر باید تحت محدودیت‌های زیر به حداقل برسد:

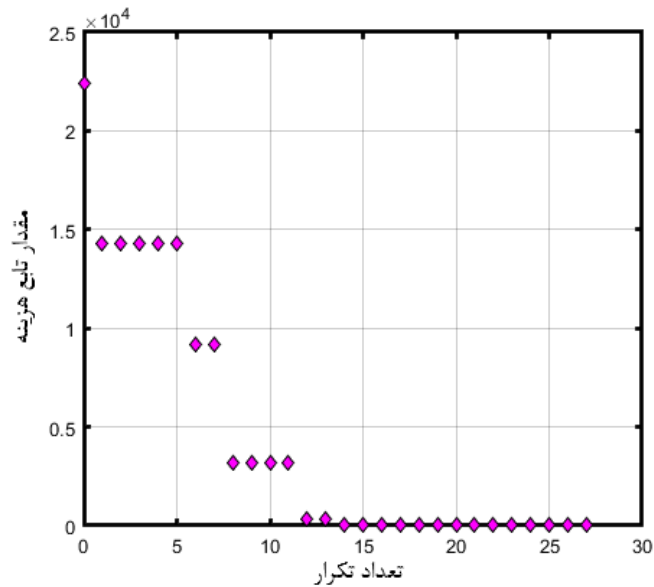
$$\begin{aligned} \psi &= \left(\frac{U_{out}}{U_{inp}} - R \right)^2 + r \left(\max \left(0, \frac{F}{U_{inp}} - K_{max} \right) \right)^2 \\ &+ \max \left(0, -\frac{F}{U_{inp}} + K_{min} \right)^2 \end{aligned} \quad (20)$$

در این مطالعه، نسبت تقویت ۶ برابر، هدف بهینه‌سازی قرار داده شده

جدول ۵. ابعاد بهینه شده با استفاده از روش پناستی و الاستواستاتیک بر اساس نسبت تقویت جابه‌جایی مدنظر

Table 5. Optimized dimensions using the penalty method and elastostatic method based on the desired displacement amplification ratio

ضخامت مکانیزم (میلی‌متر)	زاویه مفاصل (درجه)	L (میلی‌متر)	h (میلی‌متر)	
۱۰	۱۰	۱۰	۰/۵	نقطه شروع
۷/۴۳	۱۳/۷۰	۱۱/۲۶	۰/۴۲	ابعاد بهینه به‌دست‌آمده



شکل ۱۶. نمودار همگرایی تابع هزینه و مقدار تابع در مرحله آخر

Fig. 16. Convergence diagram of the cost function and function value at the final stage

به مجموعه‌ای از ابعاد بهینه در جدول ۴ همگرا می‌شود. این بهینه‌سازی با دو تکرار انجام می‌گیرد.

در شکل ۱۶ نشان می‌دهد ۲۷ تکرار برای همگرایی به نقطه بهینه مورد نیاز است و در تکرارهای دوم به دلیل همگرا شدن به نقطه بهینه در مرحله اول، مقدار تغییر تابع هزینه کمتر از حد تعیین شده است.

با استفاده از ابعاد جدول ۵ مکانیزم موردنظر شبیه‌سازی شده است. در جدول ۶ مقایسه‌ای بین پارامترهای مکانیزم لوزی با به کار گیری ابعاد بهینه شده و نشده صورت گرفته و نتایج نشان می‌دهد با استفاده از بهینه‌سازی

است، درحالی‌که سختی مکانیزم بالاتر از ۲ نیوتن بر میکرومتر و کمتر از ۴ نیوتن بر میکرومتر در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین تابع هدف زیر تعریف می‌شود.

مسئله بهینه‌سازی با روش سیمپلکس از طریق متلب حل شده است. روش پناستی تکرار شونده می‌باشد و نیاز به نقطه شروع دارد. در الگوریتم فعلی در هر مرحله مقدار پارامتر r ۱۰ برابر می‌شود و نقطه بهینه به‌دست‌آمده، نقطه شروع مرحله بعدی می‌شود. این تکرار زمانی متوقف می‌شود که تفاوت مقدار تابع هزینه نسبت به مرحله قبل کمتر از مقدار معین باشد. این بهینه‌سازی

جدول ۶. مقایسه پارامترهای مکانیزم لوزی با ابعاد بهینه شده و نشده

Table 6. Comparison of parameters of the rhombus mechanism with optimized and non-optimized dimensions

ابعاد	نسبت تقویت	سختی (نیوتن بر میکرومتر)
ابعاد بهینه شده	۶	۲/۷۳
ابعاد بهینه نشده	۳/۶۳	۳/۳۶

از مکانیزم‌ها با سرعت بیشتری انجام می‌شود. در سایر پژوهش‌ها مانند مدل‌سازی شبه صلب به دلیل تقریب لولای منعطف با فنر پیچشی خطای مدل‌سازی نسبت به روش الاستواستاتیک ۱۲ درصد افزایش یافته و همچنین پیاده‌سازی روش شبه صلب برای مکانیزم‌های با هندسه متفاوت نسبت به روش پیشنهادی پیچیده می‌باشد. با توجه به نتایج به دست آمده مدل‌سازی الاستواستاتیک خطای مشابهی در مقایسه با مدل‌سازی تیر الاستیک داشته که دلیل آن به کاری گیری ماتریس سختی تیر الاستیک در روش الاستواستاتیک می‌باشد؛ اما به دلیل پیاده‌سازی آسان، سریع و همچنین عدم نیاز به محاسبه ماتریس سختی لینک‌های صلب این روش جایگزین مناسبی می‌باشد. هدف اصلی پژوهش طراحی مکانیزم لوزی مطابق با پارامترهای مدنظر می‌باشد. پارامترهای مکانیزم لوزی سختی ورودی و بزرگ‌نمایی می‌باشد که هرچه بزرگ‌نمایی بیشتر و سختی ورودی کمتر باشد مکانیزم مورد قبول می‌باشد. به دلیل طراحی مکانیزم لوزی با استفاده از مدل‌سازی الاستواستاتیک نیاز است که خطای مدل‌سازی بررسی شود؛ بنابراین خطای مدل‌سازی الاستواستاتیک با نتایج شبیه‌سازی و تجربی مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد که خطای مدل‌سازی در مقایسه با شبیه‌سازی محدوده برای نسبت تقویت جابه‌جایی ۱/۵ درصد و برای جابه‌جایی خروجی ۱ درصد می‌باشد. در آخر برای طراحی مکانیزم‌های منعطف بهینه‌سازی هندسی به کار گرفته شد و مکانیزم لوزی باز طراحی شد. با استفاده از این بهینه‌سازی پارامترهای مکانیزم لوزی مانند بزرگ‌نمایی مکانیزم ۵۰ درصد و سختی ورودی تقریباً ۱۹ درصد بهینه شد.

بزرگ‌نمایی مکانیزم ۵۰ درصد و سختی ورودی ۱۹ درصد بهینه شده است. نتایج زیر با استفاده از شبیه‌سازی به دست آمده است. همان‌طور که انتظار می‌رفت مطابق شکل ۱۶ مقدار تابع هزینه بعد از ۲۷ تکرار به کمترین مقدار رسیده است و همگرایی در کمترین زمان صورت گرفت است. با توجه به خواسته‌ها مدنظر، سختی ورودی بیشتر از ۲ نیوتن بر میکرومتر و کمتر از ۴ نیوتن بر میکرومتر به دست آمده است و نسبت تقویت جابجایی مورد نیاز مطابق تابع هزینه رابطه (۲۰) مقدار ۶ به دست آمده است. مطابق با ابعاد به دست آمده، مکانیزم بهینه شده، با سختی ورودی کمتری که دارد نسبت تقویت جابه‌جایی بیشتری می‌تواند داشته باشد. بدون در نظر گرفتن این مراحل، طراحی این نوع از مکانیزم‌ها با چنین مشخصات و شرایط، زمانبر و سخت می‌شود. بدین ترتیب با استفاده از روش فوق می‌توان ابعاد مکانیزم‌هایی با پیچیدگی و درجات آزادی بیشتر را مطابق با خواسته‌های مدنظر طراحی کرد.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله از روش الاستواستاتیک برای تحلیل و مدل‌سازی مکانیزم منعطف لوزی استفاده شد. مدل‌سازی به روش ماتریس ساختاری می‌باشد. مزیت این روش نسبت به سایر روش‌ها در نحوه مونتاز ماتریس سختی کل مکانیزم می‌باشد که ساده‌تر از روش‌های موجود است. در این مدل‌سازی به منظور کاهش محاسبات تقریب چرخش کوچک به دلیل رفتار صلب لینک‌های ضخیم به کار گرفته شد. در این روش طراحی اولیه این نوع

7967-7983.

- [7] R. Bharanidaran, T. Ramesh, A modified post-processing technique to design a compliant based microgripper with a plunger using topological optimization, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 93(1) (2017) 103-112.
- [8] H.A. Sodano, D.J. Inman, G. Park, A review of power harvesting from vibration using piezoelectric materials, *Shock and Vibration Digest*, 36(3) (2004) 197-206.
- [9] J. Granstrom, J. Feenstra, H.A. Sodano, K. Farinholt, Energy harvesting from a backpack instrumented with piezoelectric shoulder straps, *Smart materials and structures*, 16(5) (2007) 1810.
- [10] X. Sun, B. Yang, A new methodology for developing flexure-hinged displacement amplifiers with micro-vibration suppression for a giant magnetostrictive micro drive system, *Sensors and Actuators A: Physical*, 263 (2017) 30-43.
- [11] G. Song, V. Sethi, Vibration Control of Civil Structures using Piezoceramic Smart Materials, *Engineering, Construction, and Operations in Challenging Environments: Earth and Space 2004*, (2004) 546-553.
- [12] K.-q. Qi, Y. Xiang, C. Fang, Y. Zhang, C.-s. Yu, Analysis of the displacement amplification ratio of bridge-type mechanism, *Mechanism and Machine Theory*, 87 (2015) 45-56.
- [13] K.-B. Choi, J.J. Lee, G.H. Kim, H.J. Lim, S.G. Kwon, Amplification ratio analysis of a bridge-type mechanical amplification mechanism based on a fully compliant model, *Mechanism and Machine Theory*, 121 (2018) 355-372.
- [14] J. Khurana, B. Hanks, M. Frecker, Design for additive manufacturing of cellular compliant mechanism using thermal history feedback, in: *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, American Society of Mechanical Engineers, 2018, pp. V02AT03A035.
- [15] M. Wang, D. Ge, L. Zhang, J.L. Herder, Micro-scale Realization of Compliant Mechanisms: Manufacturing

تاییدیه‌های اخلاقی

نویسندگان در تهیه و تنظیم این مقاله رعایت کامل اصول اخلاقی را مدنظر قرار داده‌اند.

حمایت‌های مالی

نویسندگان اعلام می‌کنند که هیچ کمک مالی، کمک مالی یا حمایت دیگری در طول آماده‌سازی این مقاله دریافت نکرده‌اند. تمامی آزمایش‌های مقاله در آزمایشگاه «حسگرها و عملگرهای مبتنی بر مواد هوشمند، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر» انجام شده است.

تعارض منافع

تمامی مطالب مذکور توسط نویسندگان انجام شده و هیچ فرد یا نهادی در تهیه آن نقش نداشته‌اند.

منابع

- [1] S. Park, S. Yang, A mathematical approach for analyzing ultra precision positioning system with compliant mechanism, *Journal of Materials Processing Technology*, 164 (2005) 1584-1589.
- [2] J.S. Cuellar, G. Smit, D. Plettenburg, A. Zadpoor, Additive manufacturing of non-assembly mechanisms, *Additive Manufacturing*, 21 (2018) 150-158.
- [3] S. Kota, J. Joo, Z. Li, S.M. Rodgers, J. Sniegowski, Design of compliant mechanisms: applications to MEMS, *Analog integrated circuits and signal processing*, 29(1) (2001) 7-15.
- [4] A.J. Fleming, Y.K. Yong, An ultrathin monolithic XY nan positioning stage constructed from a single sheet of piezoelectric material, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 22(6) (2017) 2611-2618.
- [5] P. Ouyang, R. Tjjiptoprodo, W. Zhang, G. Yang, Micro-motion devices technology: The state of arts review, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 38(5) (2008) 463-478.
- [6] C.N. Wang, T.D.-M. Le, Optimization parameter for microgripper based on triple-stair compliant mechanism using GTs-TOPSIS, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 120(11) (2022)

- [25] G. Haertling, Compositional study of PLZT Rainbow ceramics for piezo actuators, in: Proceedings of 1994 IEEE International Symposium on Applications of Ferroelectrics, IEEE, 1994, pp. 313-318.
- [26] L.L. Howell, A. Midha, T.W. Norton, Evaluation of equivalent spring stiffness for use in a pseudo-rigid-body model of large-deflection compliant mechanisms, (1996).
- [27] S. Wu, Z. Shao, H. Su, H. Fu, An energy-based approach for kinetostatic modeling of general compliant mechanisms, *Mechanism and Machine Theory*, 142 (2019) 103588.
- [28] M. Korayem, H. Rahimi, A. Nikoobin, M. Nazemizadeh, Maximum allowable dynamic payload for flexible mobile robotic manipulators, *Latin American applied research*, 43(1) (2013) 29-35.
- [29] T. Yeom, T.W. Simon, M. Zhang, M.T. North, T. Cui, High frequency, large displacement, and low power consumption piezoelectric translational actuator based on an oval loop shell, *Sensors and Actuators A: Physical*, 176 (2012) 99-109.
- [30] F. Ma, G. Chen, Modeling large planar deflections of flexible beams in compliant mechanisms using chained beam-constraint-model, *Journal of Mechanisms and Robotics*, 8(2) (2016).
- [31] X. Pei, J. Yu, G. Zong, S. Bi, An effective pseudo-rigid-body method for beam-based compliant mechanisms, *Precision Engineering*, 34(3) (2010) 634-639.
- [32] E. Abele, S. Rothenbücher, M. Weigold, Cartesian compliance model for industrial robots using virtual joints, *Production Engineering*, 2(3) (2008) 339-343.
- [33] S. Shi, H. Wu, Y. Song, H. Handroos, M. Li, Y. Cheng, B. Mao, Static stiffness modelling of EAST articulated maintenance arm using matrix structural analysis method, *Fusion Engineering and Design*, 124 (2017) 507-511.
- [34] S. Grazioso, G.D. Gironimo, L. Rosati, B. Siciliano, Modeling and simulation of hybrid soft robots using finite element methods: Brief overview and benefits, in: *International Symposium on Advances in Robot Kinematics*, Springer, 2020, pp. 335-340.
- Processes and Constituent Materials—A Review, *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 34(1) (2021) 1-22.
- [16] R. Clement, J. Huang, Z. Sun, J. Wang, W. Zhang, Motion and stress analysis of direct-driven compliant mechanisms with general-purpose finite element software, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 65(9) (2013) 1409-1421.
- [17] W. Bejgerowski, J.W. Gerdes, S.K. Gupta, H.A. Bruck, Design and fabrication of miniature compliant hinges for multi-material compliant mechanisms, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 57(5) (2011) 437-452.
- [18] M. Liu, X. Zhang, S. Fatikow, Design and analysis of a multi-notched flexure hinge for compliant mechanisms, *Precision Engineering*, 48 (2017) 292-304.
- [19] Y. Tian, B. Shirinzadeh, D. Zhang, Closed-form compliance equations of filleted V-shaped flexure hinges for compliant mechanism design, *Precision Engineering*, 34(3) (2010) 408-418.
- [20] N. Lobontiu, J.S. Paine, E. Garcia, M. Goldfarb, Design of symmetric conic-section flexure hinges based on closed-form compliance equations, *Mechanism and machine theory*, 37(5) (2002) 477-498.
- [21] J. Chen, C. Zhang, M. Xu, Y. Zi, X. Zhang, Rhombic micro-displacement amplifier for piezoelectric actuator and its linear and hybrid model, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 50 (2015) 580-593.
- [22] G. Ye, W. Li, Y.-q. Wang, X.-f. Yang, L. Yu, Kinematics analysis of bridge-type micro-displacement mechanism based on flexure hinge, in: *The 2010 IEEE International Conference on Information and Automation*, IEEE, 2010, pp. 66-70.
- [23] X. Shen, L. Zhang, D. Qiu, A lever-bridge combined compliant mechanism for translation amplification, *Precision Engineering*, 67 (2021) 383-392.
- [24] H. Wu, L. Lai, L. Zhu, Analytical model and experimental verification of an elliptical bridge-type compliant displacement amplification mechanism, *Review of Scientific Instruments*, 92(5) (2021) 055109.

mathematical modeling of the displacement amplification ratio for piezoelectric compliant mechanisms, *Smart Materials and Structures*, 25(7) (2016) 075022.

[35] A. Taghvaeipour, J. Angeles, L. Lessard, On the elastostatic analysis of mechanical systems, *Mechanism and Machine Theory*, 58 (2012) 202-216.

[36] M. Ling, J. Cao, M. Zeng, J. Lin, D.J. Inman, Enhanced

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. S. Erami Motlagh Armaki, H. Ghafarirad, A. Taghvaeipour, P. Firusy Rad, *Elastostatic Modeling and Optimal Design of Rhombic Compliant Mechanism*, *Amirkabir J. Mech Eng.*, 56(4) (2024) 543-566.

DOI: [10.22060/mej.2024.22905.7691](https://doi.org/10.22060/mej.2024.22905.7691)

