



دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
( پلی تکنیک تهران )

دوره ۴۸، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۵، صفحه ۴۰۱ تا ۴۱۰  
Vol. 48, No. 4, Winter 2017, pp. 401-410



نشریه علمی پژوهشی امیرکبیر - مهندسی مکانیک

AmirKabir Journal of Science & Research  
Mechanical Engineering  
ASJR-ME

## شبیه‌سازی رفتار ناحیه آسیب نوک ترک مواد اورتوتروپیک با استفاده از مدل ویسکوالاستیک

مهدی فکور<sup>۱\*</sup>، نبی مهری‌خوانساری<sup>۲</sup>

۱- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشکده علوم و فنون جدید، دانشگاه تهران  
۲- دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، دانشکده علوم و فنون جدید، دانشگاه تهران

(دریافت: ۱۳۹۴/۴/۹ پذیرش: ۱۳۹۴/۸/۱۹)

### چکیده

در فرایند شکست قطعات اورتوتروپیک، اغلب در نواحی اطراف نوک ترک، ناحیه‌ای با عنوان ناحیه آسیب پدید می‌آید که این ناحیه در مواد شبه شکننده به ناحیه فرآوری شکست معروف است. این ناحیه شامل انبوهی از میکروترک‌ها است که به دلایل متعدد، تحلیل و بررسی فرایند شکست در این گونه مواد را دشوار کرده است. تعیین خواص مکانیکی این ناحیه، می‌تواند به پیش‌بینی میزان و یا حتی جهت رشد ترک موجود در قطعات اورتوتروپیک کمک کند. تاکنون مدل‌هایی به منظور تعیین خواص مکانیکی این ناحیه ارائه شده است اما به دلیل پیچیدگی‌های بسیار زیاد این ناحیه، نتایج حاصله به درستی مبین رفتار این ناحیه نبوده است. همچنین مدل‌های موجود با روش‌های تجربی و عددی مقایسه و صحت‌سنجی نشده است. در این مقاله، سعی بر آن است تا با ارائه یک مدل عددی جدید بر اساس تئوری ویسکوالاستیک و با استناد به سری‌های پرونی، خواص مکانیکی ناحیه آسیب شبیه‌سازی شود. این روش جدید که بر مبنای نتایج المان محدود و تجربی است، می‌تواند رفتار ناحیه آسیب را با دقت مناسبی تخمین بزند.

### کلمات کلیدی:

خواص مکانیکی، ناحیه آسیب، میکروترک، ویسکوالاستیک

Please cite this article using:

Fakoor, M., Mehri Khansari, N., 2017. "Simulation of Orthotropic Damaged Zone Behavior Using Viscoelastic Models". *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 48(4), pp. 401-410.

نویسنده مسئول و عهده‌دار مکاتبات: Email: mfakoor@ut.ac.ir



## ۱- مقدمه

فرایند شکست در قطعات اورتوتروپ و شبه شکننده<sup>۱</sup> اغلب با پیدایش یک ناحیه آسیب<sup>۲</sup> موسوم به ناحیه فرآوری شکست<sup>۳</sup> در نوک ترک همراه است [۱]. این ناحیه شامل تعداد بیشماری میکروتکرک است که هر کدام دارای اندازه و جهت مخصوص به خود هستند. شناخت رفتار این ناحیه، می‌تواند به پیش‌بینی میزان و یا حتی جهت رشد ترک موجود در قطعات اورتوتروپیک کمک کند. همچنین، حضور چنین ساختارهایی در این ناحیه باعث بروز رفتار ویسکوالاستیک شده به نحوی که تاکنون مدل‌هایی به منظور تعیین رفتار نواحی نوک ترک ارائه شده است. عمده این تحقیقات، از سال ۱۸۶۵ تا سال ۲۰۰۹ بوده است که در ادامه به بررسی برخی از این مدل‌ها، پرداخته خواهد شد.

در سال ۱۸۶۵ و در خلال انجام آزمایش‌های تجربی در دانشگاه گلاسگو، مشاهدات غیر منتظره‌ای از رفتار مکانیکی مواد فلزی و غیر فلزی در دماهای مختلف توسط تامسون و همکارانش دیده شد [۲]. پیش از این نیز در مقالات منتشر شده تا سال ۱۸۴۸ توسط افرادی چون تاملینسون، رابرت هارلی، گرپس آدام، مالت و کاکلیز و دیگران، وابستگی رفتار مکانیکی فلزات و غیر فلزات به زمان و دما تا حد بسیار زیادی بررسی شده بود. این مشاهدات فقط با دو عبارت ویسکوزیته و مدول الاستیسیته قابل توصیف بود که بعدها با عنوان ویسکوالاستیسیته رواج یافت. بارنبلات در سال ۱۹۶۲، با مد نظر قرار دادن زمانی غیر حقیقی و با استفاده از تئوری ویسکوالاستیسیته خطی، روشی به منظور محاسبه مدول ویسکوالاستیک نوک ترک ارائه کرد [۳]. در سال ۱۹۶۸، یک روش عددی به منظور تحلیل تنش مواد ویسکوالاستیک ارائه شد که در حقیقت ایده اولیه استفاده از سری‌های پرونی و معادلات دیفرانسیل مربوط به آن است [۴]. رابرت‌ال. تیلور و همکاران یک الگوریتم محاسباتی برای حل مسائل مقادیر شبه‌استاتیکی مواد جامد با رفتار ویسکوالاستیک خطی با دما و تغییر شکل مکانیکی ارائه دادند [۵]. برخلاف مفید بودن روش ارائه شده، به دلیل محاسبات عددی بسیار پیچیده در این روش، عملاً استفاده از آن محدود شد. شجیدید و همکاران رفتار یک ماده کامپوزیتی چوبی را در گستره‌های طولانی از زمان، با مدلسازی ویسکوالاستیک خطی شبیه‌سازی کردند [۶]. این فرض، می‌توانست پدیده رشد ترک در این مواد را تا حد زیادی تسهیل کند. پس از وی، شاپری به بررسی رشد ترک خزشی با پرداخت [۷]. گوپان و لاریک رشد ترک خستگی را در ساختارهای چوبی با استفاده از روش ویسکوالاستیسیته بررسی کردند [۸-۹]. چهار سال بعد یعنی در سال ۱۹۹۶، ترگارد و هاتچینسون، برای نخستین بار با بکارگیری مدل ناحیه چسبندگی<sup>۴</sup> و استفاده از قانون جداسازی بردار تنش مستقل<sup>۵</sup> از زمان، مقاومت در برابر رشد ترک را برای مواد با بارگذاری خارج صفحه بررسی کردند [۱۰]. پس از آنها،

روشهای متعددی به منظور مدلسازی شکست ویسکوالاستیک در نواحی اطراف ترک مورد بررسی قرار گرفت که از جمله آنها می‌توان به مدل بردلی در سال ۱۹۹۸ اشاره کرد [۱۱]. کاربرد روش بردلی نیز، به دلیل نادیده گرفتن پارامترهای اساسی مدلسازی ویسکوالاستیک، محدود شد. دیوید الن و همکاران مدلی میکرومکانیکی بر مبنای مدلی فیزیکی و مکانیک محیط پیوسته به منظور بررسی ناحیه ویسکوالاستیک اطراف ترک ارائه دادند [۱۲]. در همین راستا، جاو نو و جان وایتکمب یک روش المان محدود به منظور بررسی تأثیر ترک روی مدول آسایش<sup>۶</sup> لمینیت‌های ویسکوالاستیک خطی انجام دادند [۱۳]. پتی و همکاران فرایندی عددی و تحلیلی را بر مبنای تحلیل‌های المان محدود<sup>۷</sup> و انتگرال مستقل مسیر<sup>۸</sup> به منظور بررسی شکست در مود ترکیبی مواد اورتوتروپیک (با رفتار ویسکوالاستیک) ارائه دادند. در این روش از قانون محافظه کارانه‌ای بر مبنای انتگرال مستقل مسیر استفاده شد که در آن، مودهای مجزای شکست بدون استفاده از گسسته‌سازی المان محدود انجام می‌گرفت [۱۴]. همین امر باعث ایجاد خطا در محاسبات می‌شد. گیسپ و همکاران با استفاده از مدل ویسکوالاستیک-اورتوتروپیک و المان‌های چسبنده<sup>۹</sup>، رشد ترک در سازه‌های چوبی لایه‌ای<sup>۱۰</sup> ترک‌دار را با بارگذاری کوتاه مدت و بارگذاری بلند مدت در حضور مقادیر ثابت دما و رطوبت شبیه‌سازی کردند [۱۵]. در این تحقیق مدل ارائه شده به دلیل نادیده گرفتن پدیده رشد ترک و المان‌های تخریب<sup>۱۱</sup>، چندان کاربردی نشد.

همان‌طور که اشاره شد، تاکنون مدل‌های ویسکوالاستیک محدودی به منظور تبیین خواص مکانیکی ناحیه آسیب نوک ترک ارائه شده است اما به دلیل نادیده گرفتن اثر مهم حضور میکروتکرک‌ها بر رفتار ناحیه آسیب و همچنین، نبود صحت‌سنجی با نتایج تجربی، از چنین مدل‌هایی به منظور بررسی خواص مکانیکی ناحیه آسیب استفاده نشده است. در تحقیق حاضر، یک مدل جدید عددی بر مبنای روش‌های ویسکوالاستیک و با بکارگیری سری‌های پرونی (به دلیل داشتن مزایایی از جمله، محاسبات آسان، جامعیت و تغییر مناسب با شرایط) به منظور شبیه‌سازی رفتار پیچیده ناحیه آسیب نوک ترک ارائه شده است.

## ۲- مواد و روش‌ها

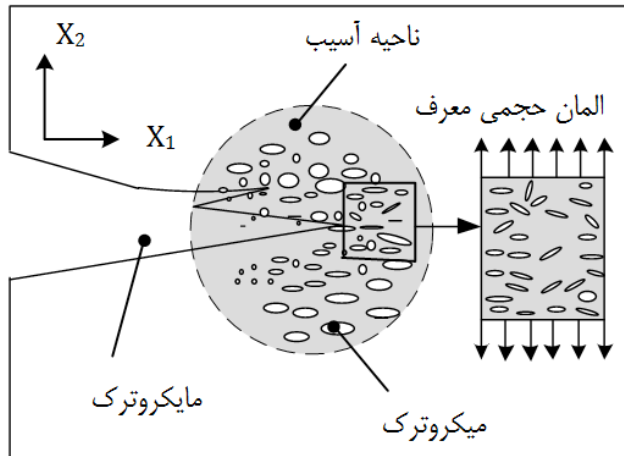
## ۲-۱- اصول کلی مدلسازی ناحیه آسیب با روابط ویسکوالاستیک

به طور کلی موادی دارای ویژگی ویسکوالاستیک هستند که اولاً رفتاری وابسته به زمان داشته باشند و ثانیاً دارای تغییر شکل دائمی باشند [۱۶]. دو مدل ساده فیر-مستهلک‌کننده، مدل ماکسول<sup>۱۲</sup> و مدل کلونین-ویت<sup>۱۳</sup> هستند که در آنها، مدل ماکسول، یک سیال ویسکوالاستیک را

- 6 Relaxation Modulus
- 7 Finite Element Analysis
- 8 Independent Integral
- 9 Cohesive Element
- 10 Glued Laminated Timber
- 11 Collapsed Element
- 12 Maxwell's Model
- 13 Kelvin-Voigt Model

- 1 Quasi-Brittle
- 2 Damaged Zone
- 3 Fracture Process Zone
- 4 Cohesive Zone Model
- 5 Independent Traction Separation Law

محاسبه این پارامتر در واقع مدول الاستیسیته محاسبه می‌شود. شکل ۱ ناحیه آسیب نوک ترک را نشان می‌دهد که شامل تعداد بیشماری میکروترک است که هرکدام دارای اندازه، جهت و عمق مخصوص به خود هستند. وجود میکروترک در این ناحیه باعث بروز رفتار پیچیده در ناحیه می‌شود.



شکل ۱: ناحیه آسیب در مقابل نوک ترک

علت عمده این رفتار را می‌توان ناشی از حضور زمینه بدون میکروترک در کنار بخشی که مربوط به میکروترک است دانست. بدین ترتیب که به ازای انرژی ورودی به ناحیه آسیب، ناشی از بارگذاری) زمینه بدون میکروترک، رفتار الاستیک خطی و زمینه شامل میکروترک، رفتاری ویسکوز (اتلاف‌کننده انرژی به صورت افزایش طول میکروترک) نشان خواهند داد. البته این حقیقت با در نظر گرفتن المان حجمی معرف (یک میکروترک و محیط اطراف آن) نیز قابل دیدن است.

از این رو، رشد و نمو میکروترک‌ها در نواحی نوک ترک، نه فقط باعث پیچیدگی فرایند تخمین استحکام شکست ماده می‌شود بلکه متناسب با ویژگی‌های هندسی و موقعیت قرار گیری تا نوک ترک، می‌تواند رفتاری دوگانه نشان دهند، به این معنی که می‌تواند باعث افزایش یا کاهش سرعت رشد ترک شوند. به همین دلیل، باید به دنبال راهکاری مناسب به منظور شبیه‌سازی این قبیل ساختارها در ماده بود تا اثرات حضور آنها (که اغلب نامطلوب است) تا حد امکان پیش‌بینی شود. یکی از این راهکارها، استفاده از سری‌های پرونی است.

بنابراین، در تحقیق حاضر، سعی بر آن است تا با ارائه یک مدل عددی جدید بر مبنای تئوری ویسکوالاستیک و با استناد به سری‌های پرونی، رفتار ناحیه آسیب با مدنظر قرار دادن میکروترک‌ها شبیه‌سازی شود. در این روش، به منظور شبیه‌سازی رفتار ناحیه آسیب، از مدل‌های ترکیبی کلین‌ویت و ماکسول استفاده می‌شود. برخی مدل‌های ترکیبی به کار رفته به منظور بیان رفتار جامدات که اغلب ترکیبی از مدل‌های استاندارد کلین‌ویت و ماکسول هستند در جدول ۱ آورده شده‌اند.

توصیف می‌کند، اما مدل کلین‌ویت یک جامد ویسکوالاستیک را نشان می‌دهد [۱۶]. در صورتی که رفتار ماده توسط دو مدل کلین‌ویت و ماکسول قابل تفسیر نباشد، از ترکیب این مدل‌ها استفاده می‌شود.

با فرض تعادل ترمودینامیکی، رفتار ویسکوالاستیک خطی می‌توانست به وسیله معادله بولتزمن ارائه شود. همچنین با فرض خطی بودن روابط، تنش ( $\epsilon_{ij}$ ) و کرنش ( $\sigma_{kl}$ ) می‌توانند به صورت وابسته به زمان و انتگرالی بیان شوند [۱۷]. در دو بعد، تابع کرنش اولین بار توسط بتن ارائه شد. همچنین، روابط تنش-کرنش برای مواد ویسکوالاستیک به صورت زیر نوشته می‌شود [۱۸]:

$$\epsilon_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t J(t-\tau) \frac{d\sigma_{ij}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (1)$$

که در آن،  $J(t)$  و  $\tau$  به ترتیب نرمی خزشی (کرنش به ازای واحد تنش اعمالی) و تاخیر زمانی نامیده می‌شوند. این معادلات به منظور تعیین پاسخ آسودگی (که در آن، تنش ( $\sigma$ ) نسبت به کرنش داده شده ( $\epsilon$ ) محاسبه می‌شود) یا پاسخ خزش (که در آن کرنش ( $\epsilon$ ) نسبت به تنش ( $\sigma$ ) داده شده محاسبه می‌شود) استفاده می‌شوند [۱۶].

$$p \sigma = Q(\epsilon)$$

که در آن،  $P$  و  $Q$  به صورت زیر بیان می‌شود:

$$p \sigma = \sum_{m=0}^M P_m \frac{d^m}{dt^m} \quad (2)$$

$$Q \epsilon = \sum_{n=0}^N q_n \frac{d^n}{dt^n}$$

که در آن ضرایب  $q_n$  و  $p_m$  بر حسب ثابت‌های فتر و مستهلک‌کننده مربوط به مدل، تعیین می‌شوند. نظر به اینکه معادله (۲) یک معادله دیفرانسیل مرتبه  $M$  برای پاسخ آسودگی (و همچنین یک معادله دیفرانسیل مرتبه  $N$  برای پاسخ خزش) است، باید مقادیر اولیه  $M$  و  $N$  تعیین شود. این مقادیر از شرایط مرزی مسأله به دست می‌آیند که عبارتند از:

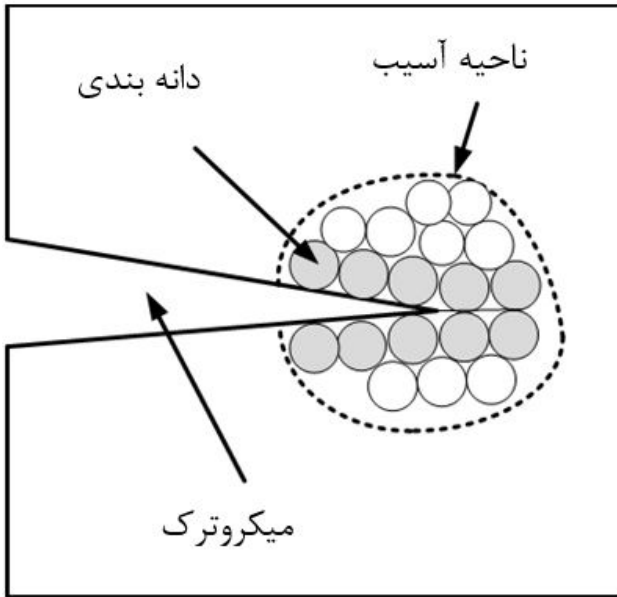
$$\sigma(0) = \sigma_0, \dot{\sigma}(0) = \dot{\sigma}_0, \dots, \left( \frac{d^{N-1} \sigma}{dt^{N-1}} \right)_{t=0} = \sigma_0^{N-1} \quad (3)$$

$$\epsilon(0) = \epsilon_0, \dot{\epsilon}(0) = \dot{\epsilon}_0, \dots, \left( \frac{d^{M-1} \epsilon}{dt^{M-1}} \right)_{t=0} = \epsilon_0^{M-1}$$

در رابطه فوق،  $\epsilon$  و  $\sigma$  به ترتیب مقادیر کرنش و تنش هستند. در تحقیق حاضر با توجه به بار اعمالی به نمونه و دمای ثابت محیط، کرنش به صورت تابعی از تنش و برحسب زمان متغیر است بنابراین، می‌توان فرایند را خزش در نظر گرفت. در این صورت، معادله کلی (۲) به صورت زیر تغییر می‌کند:

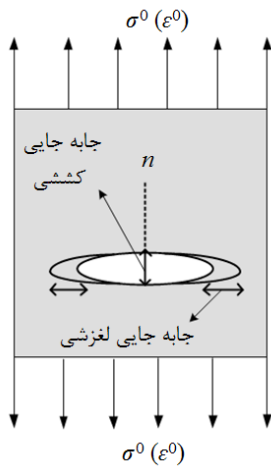
$$\epsilon(t) = J(t) \sigma_0 \quad (4)$$

از آنجا که نرمی خزشی عکس مدول الاستیسیته است بنابراین، با



شکل ۲: شماتیک غلبه بر نیروهای بین مولکولی نوک ترک

که در آن مطابق شکل ۳،  $\epsilon_i$ ،  $\gamma_i$  و  $n_i$  به ترتیب نشان‌دهنده بردارهای جابه‌جایی باز شدن میکروتُرک در جهت عمود بر صفحه<sup>۲</sup>، در راستای ترک<sup>۳</sup> و عمود بر  $i$  امین میکروتُرک هستند.



شکل ۳: بردارهای جابه‌جایی باز شدن میکروتُرک در دو راستا

رابطه (۹) می‌تواند به صورت زیر نیز بازنویسی شود:

$$\epsilon_{ij}^{-c} = K_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (9)$$

که در آن،  $K_{ijkl}$  تانسور نرمی غیر الاستیک (ویسکوز) مربوط به زمینه شامل میکروتُرک است. همانطور که در شکل فوق دیده می‌شود، جابه‌جایی لغزشی ناشی از افزایش طول ترک و جابه‌جایی کششی ناشی از رفتار الاستیک زمینه است. به عبارت دیگر، جابه‌جایی لغزشی ناشی از جذب انرژی و افزایش طول ترک است (استهلاک انرژی)، حال آنکه، جابه‌جایی کششی ناشی از رفتار الاستیک زمینه بوده که به مرور زمان

جدول ۱: مدل‌های ترکیبی استاندارد به کار رفته به منظور بیان رفتار جامدات [۱۴، ۱۶ و ۱۹]

مدل	پاسخ خزش	شماتیک مدل
دو المانی (سه پارامتری)	$\epsilon(t) = \sigma \left( \frac{K_2 + K_1(1 - e^{-t/\tau})}{K_1 K_2} \right)$	
سه المانی (چهار پارامتری)	$\epsilon(t) = \sigma_0 \left[ \frac{k_2 k_1}{k_1 k_2} \left( 1 - e^{-t/\tau} \right) + \frac{\sigma_0}{k_1} + \frac{\sigma_0 t}{\eta_1} \right]$	
سه المانی (پنج پارامتری)	$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0 (k_1 k_2)}{k_1 k_2} + \frac{\sigma_0 t}{\eta_1} + \frac{\sigma_0}{k_1 k_2} \left[ 1 - e^{-\frac{k_1 k_2}{\eta_1} t} \right]$	

### ۲-۲- کرنش ناحیه آسیب

در حین بارگذاری، تانسور کرنش کلی ناحیه آسیب به دو بخش کرنش ماتریس (بستر چسبنده<sup>۱</sup>) و کرنش ناشی از حضور میکروتُرک‌های توزیع شده در ماتریس تقسیم می‌شود. از این رو تانسور کرنش کلی ناحیه آسیب را می‌توان به صورت زیر نوشت [۲۰]:

$$\epsilon_d = \epsilon_c + \sum \epsilon_m \quad (5)$$

که در آن،  $\epsilon_c$ ،  $\epsilon_m$  و  $\epsilon_d$  به ترتیب نشان‌دهنده کرنش ناحیه آسیب، کرنش بستر چسبنده و کرنش ناشی از حضور میکروتُرک‌ها هستند. بنابراین، بنابر آنچه میکروتُرک‌ها در چه نوع بستری رشد کنند،  $\epsilon_c$  می‌تواند متغیر باشد. در تحقیق حاضر، از آنجا که زمینه اپوکسی است، از این رو می‌توان  $\epsilon_c$  را الاستیک در نظر گرفت. از طرف دیگر مطابق شکل ۲ چون انرژی وارد شده به میکروتُرک‌ها اغلب صرف غلبه بر نیروهای بین مولکولی و باز شدن ترک می‌شود، بنابراین می‌توان کرنش ناشی از حضور میکروتُرک‌ها را به دو بخش کرنش الاستیک خطی  $\epsilon_{ij}^{-e}$  و کرنش غیر الاستیک غیر خطی  $\epsilon_{ij}^{-i}$  تقسیم کرد [۲۰]:

$$\epsilon_m = \epsilon_{ij}^{-e} + \epsilon_{ij}^{-i} \quad (6)$$

کرنش ماتریس (بستر چسبنده) با فرض اعمال تنش به قطعه به صورت معادله زیر مشخص می‌شود [۲۰]:

$$\epsilon_{ij}^{-e} = D_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (7)$$

که در آن،  $D_{ijkl}$  و  $\sigma_{kl}$  به ترتیب نشان‌دهنده تانسور نرمی الاستیک و تنش اعمالی به ناحیه آسیب است. درحالی‌که، کرنش ناشی از حضور میکروتُرک‌های توزیع شده در ماتریس به صورت زیر توزیع می‌شود [۲۰]:

$$\epsilon_i^{-c} = \sum_{i=1}^N \left[ \epsilon_i n_i \otimes n_i + \text{sym} \gamma_i \otimes n_i \right] \quad (8)$$

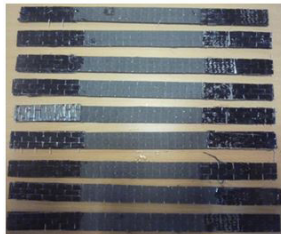
2 Extension  
3 Sliding

1 Cohesive Base

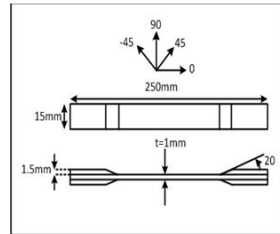
### ۳- شبیه‌سازی رفتار ناحیه آسیب

#### ۳-۱- تعیین تجربی خواص کامپوزیت پایه پلیمری

در تحقیق حاضر، از ماده کامپوزیت چهارلایه تک‌جهته<sup>۲</sup> کربن اپوکسی استفاده شد. بدین منظور نمونه‌های کامپوزیت چهارلایه تک‌جهته کربن اپوکسی مطابق استاندارد ASTM-D3039 آزمایش کشش و به روش قالب‌گیری انتقال رزین به کمک خلاء<sup>۳</sup> مطابق شکل ۵ ساخته شدند.



(ب)



(ف)

شکل ۵: نمونه (الف) استاندارد ASTM-D3039 [۲۳] (ب) کربن-اپوکسی مورد استفاده در این تحقیق

الزامات ساخت کامپوزیت طبق استاندارد ASTM-D3039 در جدول ۲ آمده است.

جدول ۲: الزامات ساخت کامپوزیت طبق استاندارد ASTM-D3039 (ابعاد بر حسب میلی‌متر)

جهت الیاف	عرض	طول	ضخامت	ضخامت تب
۰ درجه	۱۵	۲۵۰	۱	۱/۵

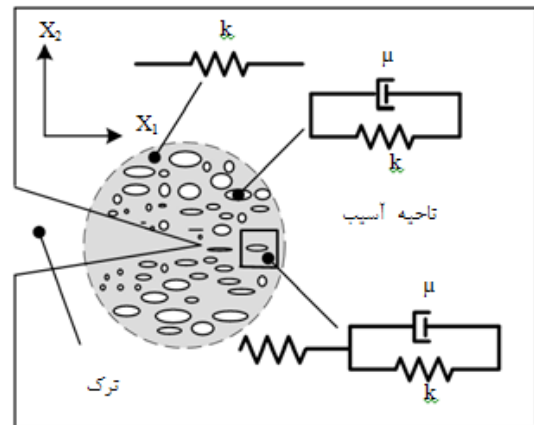
در آزمایش انجام‌شده از الیاف کربن تک‌جهته ۱۵۰ گرم بر متر مربع و به ضخامت ۰/۲۵ میلی‌متر استفاده شد. برای مواد اورتوتروپیک با سه صفحه تقارن به منظور محاسبه ماتریس نرمی<sup>۴</sup> به ۹ پارامتر مستقل شامل سه مدول کششی  $E_1, E_2, E_3$  در جهات اورتوتروپیک، سه مدول برشی  $G_{12}, G_{23}, G_{31}$  و سه ضریب پواسون  $\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{31}$  نیاز است [۲۱]. مقادیر  $E_{11}, E_{22}, E_{33}$  از آزمایش نمونه در راستای الیاف و عمود بر الیاف با استفاده از دستگاه تست کشش به ترتیب ۵۵/۵، ۱۰/۵ و ۱۰ گیگاپاسکال محاسبه شدند. همچنین، ضریب پواسون  $\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{31}$  بنابر کرنش‌های در جهت الیاف و یا عمود بر الیاف، به ترتیب ۰/۲۸، ۰/۲۷ و ۰/۶ محاسبه شد. علاوه بر آن، به منظور محاسبه مدول برشی، از معادلات مربوط به یک ورق تخت استفاده شد [۲۲]:

$$G_{12} = \frac{\sin^2 Q \cos^2 Q}{\frac{1}{E_x} - \frac{\cos^4 Q}{E_1} - \frac{\sin^4 Q}{E_2} + \left( \frac{\nu_{21}}{E_1} + \frac{\nu_{12}}{E_2} \right) \sin^2 Q \cos^2 Q}$$

$$G_{23} = \frac{\sin^2 Q \cos^2 Q}{\frac{1}{E_x} - \frac{\cos^4 Q}{E_2} - \frac{\sin^4 Q}{E_3} + \left( \frac{\nu_{32}}{E_2} + \frac{\nu_{23}}{E_3} \right) \sin^2 Q \cos^2 Q}$$

- 2 Unidirectional(UD)
- 3 Vacuum Assisted Resin Transfer Molding (VARTM)
- 4 Compliance Matrix

باعث پیدایش ترک‌های بسیارریز در زمینه می‌شود. از این رو، ناحیه آسیب می‌تواند مطابق شکل ۴ به صورت جمله‌های ویسکوالاستیک (ترکیب فنر و مستهلک کننده) بیان شود.



شکل ۴: مدل‌سازی ویسکوالاستیک میکروترک

نحوه ترکیب فنر و مستهلک‌کننده مطلوب به منظور شبیه‌سازی ناحیه آسیب، به خواص مکانیکی ناحیه آسیب بستگی دارد.

#### ۳-۲- تانسور نرمی کل

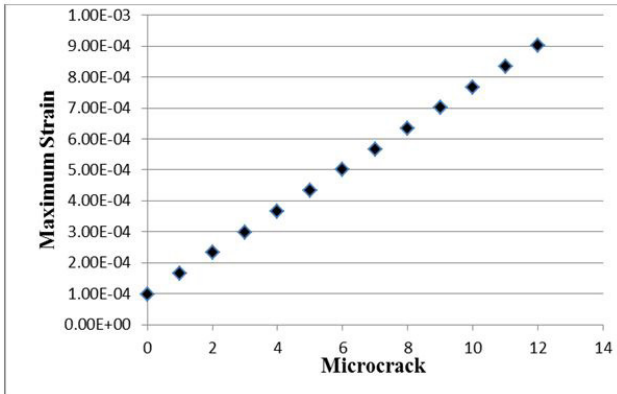
مواد کامپوزیت پایه پلیمری<sup>۱</sup> انواع متعددی دارند. یکی از پرکاربردترین این مواد در صنعت، کربن اپوکسی است. هر لایه در کامپوزیت‌های تک‌لایه‌ای، چهار خاصیت مستقل مرتبط با ماده دارد که رفتار مکانیکی درون صفحه‌ای را بیان می‌کند. هر یک از این خواص می‌توانند به صورت تابعی از زمان، دما و تنش بیان شوند [۲۱]. این خواص در قالب ماتریس نرمی و به صورت زیر محاسبه می‌شوند [۲۲]:

$$s \ t = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} = (J \ t)^{-1} [a] \quad (10)$$

که در آن،  $[a]$  و  $J(t)$  به ترتیب ماتریس سازگاری کل کامپوزیت و تانسور نرمی ویسکوالاستیک بوده که در آن،  $[a]$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

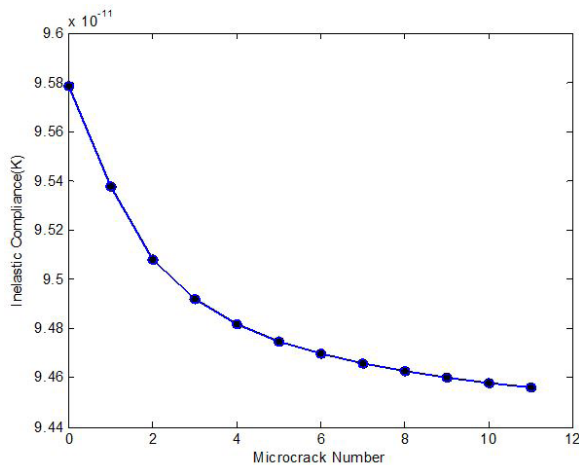
$$a = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (11)$$

همچنین،  $J(t)$  نیز تانسور نرمی ویسکوالاستیک بوده که به مدل ویسکوالاستیک انتخابی بستگی دارد.



شکل ۷: تغییرات کرنش حداکثری (در راستای الیاف) ناحیه آسیب به ازای افزایش تعداد میکروترک

بنابراین، تانسور نرمی غیرالاستیک ( $K$ ) به صورت زیر تغییر می‌کند:

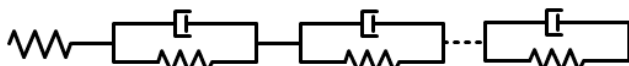


شکل ۸: تغییرات نرمی غیرالاستیک ( $K$ ) به ازای افزایش تعداد میکروترک

با توجه به نحوه تغییرات تنش و کرنش به ازای تغییرات میکروترک (و یا تغییرات  $K$ )، مناسب‌ترین ترکیب فنر مستهلک‌کننده با استفاده از سری‌های پرونی و با توجه به جدول ۱ به صورت زیر انتخاب می‌شود: که در آن، مقدار تنش ثابت اعمال شده به ناحیه آسیب است.

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left( \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) + \frac{1}{k_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) \quad (13)$$

همچنین برای تعداد بیشماری از میکروترک‌ها از سری‌های پرونی مطابق شکل ۹ استفاده می‌شود.



شکل ۹: شماتیک کلی میکروترک‌ها در ناحیه آسیب

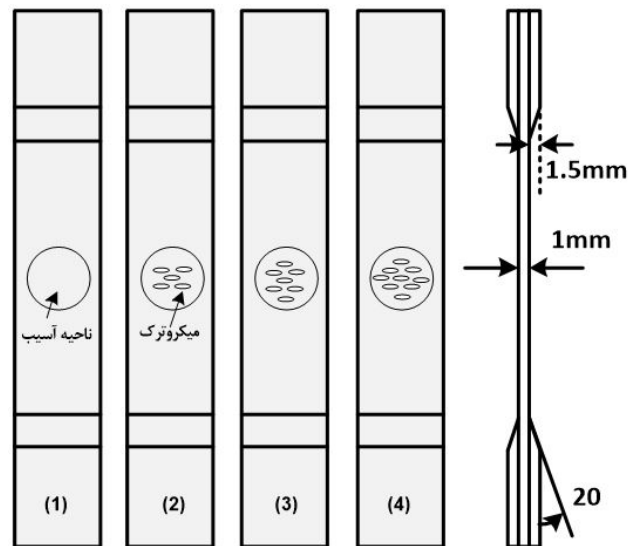
بنابراین، به منظور بیان رفتار ناحیه آسیب که در آن، تعداد نامحدود میکروترک وجود داشته و میکروترک‌ها از ۱ تا  $n$  تغییر کنند، می‌توان رابطه بین تنش و کرنش را به صورت زیر بیان کرد:

$$G_{31} = \frac{\sin^2 Q \cos^2 Q}{\frac{1}{E_x} - \frac{\cos^4 Q}{E_3} - \frac{\sin^4 Q}{E_1} + \left( \frac{\nu_{13}}{E_3} + \frac{\nu_{31}}{E_1} \right) \sin^2 Q \cos^2 Q} \quad (12)$$

که در آن،  $E_x$  و  $Q$  به ترتیب، مقدار مدول کششی در راستای زاویه  $45^\circ$  ( $E_{+45}$ ) و  $45^\circ$  درجه هستند (با آزمایش در راستای  $45^\circ$  درجه، مقدار  $E_x$  برابر  $23/5$  گیگا پاسکال محاسبه شد). بنابراین طبق روابط فوق، سه مدول برشی  $G_{12}$ ،  $G_{23}$ ،  $G_{31}$  به ترتیب  $66/53$ ،  $18/51$  و  $12/27$  محاسبه شدند.

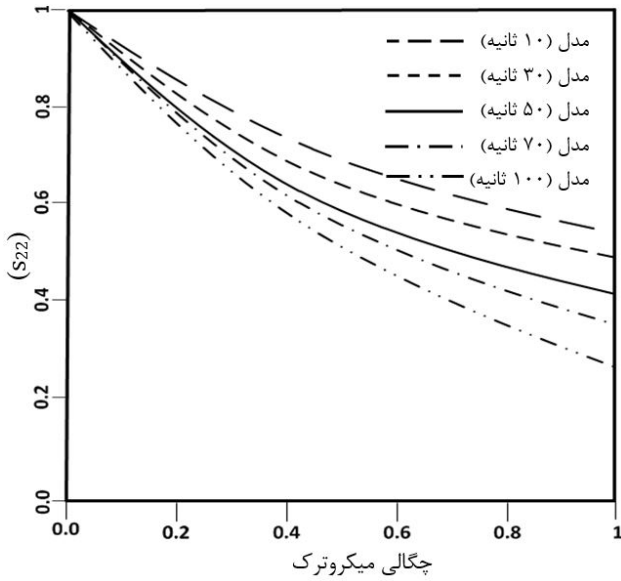
### ۳-۲- شبیه‌سازی رفتار ناحیه آسیب با روش المان محدود

در این روش، ابتدا مطابق نتایج حاصل از روش تجربی، استاندارد کشش ASTM-D3039 در نرم‌افزار المان محدود آباکوس<sup>۱</sup> مدل شد. سپس، به منظور شبیه‌سازی ناحیه آسیب در نرم‌افزار المان محدود، مطابق شکل ۶ میکروترک‌های بیضی‌شکل (با توجه به اینکه اکثر میکروترک‌ها بیضی‌شکل هستند) در ناحیه آسیب تقریبی با ابعاد مشخص، ایجاد شدند. بدین منظور، ابتدا نمونه بدون میکروترک و سپس نمونه‌های میکروترک‌دار به ترتیب افزایش تعداد میکروترک (چگالی میکروترک) مورد آزمایش قرار گرفته و میزان تنش و کرنش حداکثری آنها ثبت شد. در پایان، میزان تغییرات نرمی غیرالاستیک ( $K$ )، محاسبه و در نهایت مدل پرونی متناسب با آن انتخاب شد.

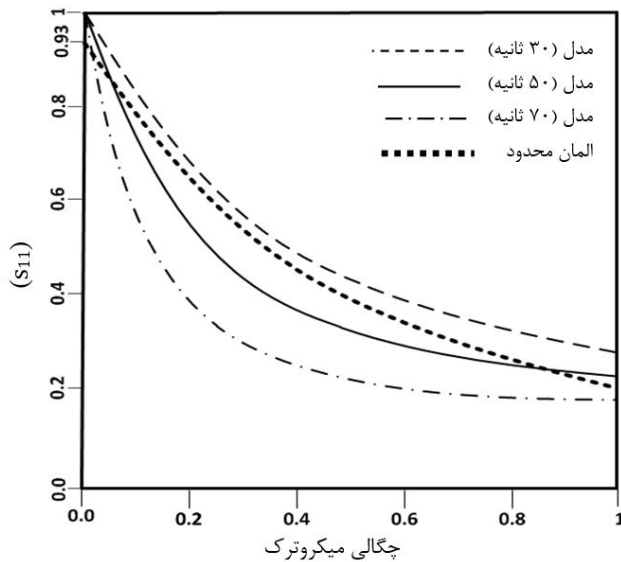


شکل ۶: شماتیک افزایش تعداد میکروترک در نمونه استاندارد D3039-ASTM

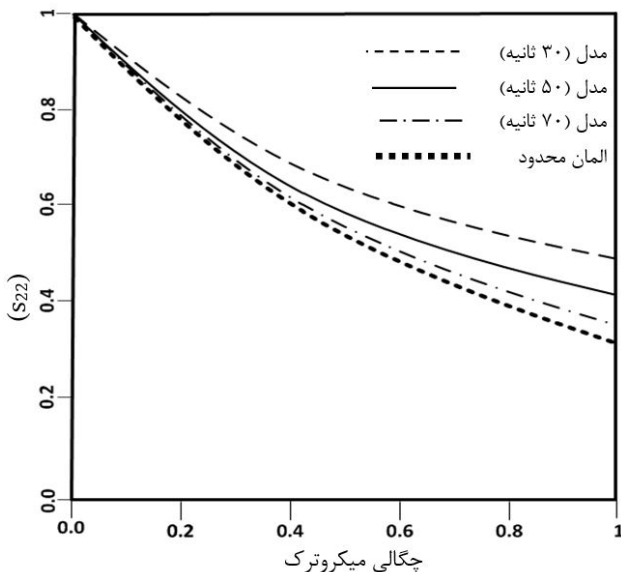
همانطور که دیده می‌شود، نمونه (۱) بدون میکروترک بوده و به ترتیب در نمونه‌ها تعداد آن افزایش می‌یابد. شکل ۷، تغییرات حداکثر کرنش به ازای افزایش تعداد میکروترک را (افزایش چگالی میکروترک) نشان می‌دهد.



شکل ۱۱: نرمی در راستای الیاف به ازای افزایش چگالی میکروتُرک



شکل ۱۲: مقایسه مقادیر نرمی روش ویسکوالاستیک و المان محدود



شکل ۱۳: نرمی در راستای عمود بر الیاف به ازای افزایش چگالی میکروتُرک

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left( \frac{1}{k_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \right) \quad (14)$$

بدین ترتیب، توابع نرمی اصلی ویسکوالاستیک طبق روابط (۱۰) و (۱۴) به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

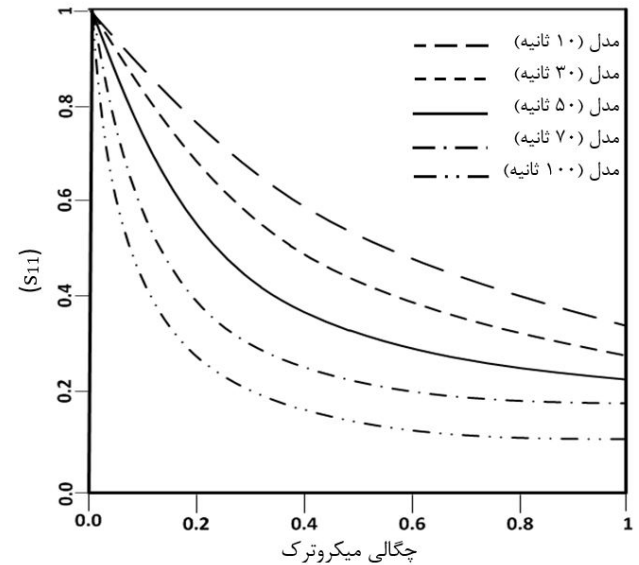
$$s_{11} = \left( \frac{1}{k_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \right)^{-1} \left( \frac{1}{E_{11}} \right)$$

$$s_{22} = \left( \frac{1}{k_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \right)^{-1} \left( \frac{1}{E_{22}} \right) \quad (15)$$

$$s_{33} = \left( \frac{1}{k_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \right)^{-1} \left( \frac{1}{E_{22}} \right)$$

### ۳-۳- صحت‌سنجی روابط ویسکوالاستیک با مدل عددی

در این بخش، توابع نرمی به‌دست‌آمده از رابطه (۱۶)، در دو راستای الیاف  $(s_{11})$  و عمود بر الیاف  $(s_{22})$ ، با قرار دادن مقادیر حاصل از نتایج تجربی (مدول الاستیسیته  $E_{11}=55/5$  و  $E_{22}=10/5$ ) و با در نظر گرفتن مقادیر تاخیر زمانی  $(\tau)$  از ۱۰ تا ۱۰۰ ثانیه که به صورت پیدایش و رشد



شکل ۱۴: نرمی در راستای عمود بر الیاف به ازای افزایش چگالی میکروتُرک

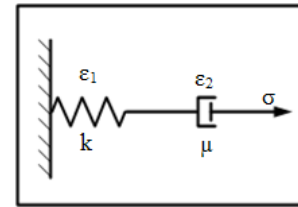
میکروتُرک در ناحیه آسیب است مطابق شکل‌های ۱۰ تا ۱۳ رسم شد. نتایج حاصل را می‌توان مطابق شکل ۱۲ با مقادیر حاصل شده از روش المان محدود مقایسه کرد.

نتایج فوق را می‌توان برای راستای الیاف  $(s_{22})$  نیز مطابق شکل ۱۰ تقریب زد.

۴- ضمیمه

۴-۱- المان ماکسول [۱۶]

المان ماکسول در ساده‌ترین حالت، از ترکیب سری یک المان فنرالاستیک خطی با یک المان مستهلک‌کننده مطابق شکل ۱۴ تشکیل شده است.



شکل ۱۴: المان ماکسول

روابط مربوط به این المان عبارتند از:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \sigma &= \sigma_1 = \sigma_2 \end{aligned} \quad (16)$$

که در آن  $\varepsilon_1$  و  $\varepsilon_2$  به ترتیب، نشان‌دهنده کرنش در فنر و مستهلک‌کننده است. مقادیر آنها به ترتیب زیر است:

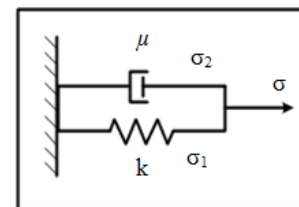
$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{k} \sigma \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \frac{1}{\mu} \sigma \end{aligned} \quad (17)$$

با جاگذاری مقادیر فوق در رابطه (۱۷) برای حالت خزش و استفاده از تبدیل لاپلاس داریم:

$$\varepsilon t = \sigma \left( \frac{1}{\mu} t + \frac{1}{k} \right) \quad (18)$$

۴-۲- المان کلون-ویت [۱۶]

در شکل ۱۵ ساده‌ترین حالت المان کلون-ویت شامل یک المان فنرالاستیک خطی و یک المان مستهلک‌کننده نشان داده شده است.



شکل ۱۵: المان کلون ویت

$$\begin{aligned} s &= s_1 + s_2 \\ e &= e_2 = e_1 \end{aligned} \quad (19)$$

که در آن  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  به ترتیب، تنش در فنر و مستهلک‌کننده است. همچنین  $k$  و  $\mu$  به ترتیب سختی مربوط به فنر و مستهلک‌کننده هستند. در نهایت با اعمال تبدیل لاپلاس معکوس، مقدار کرنش بر حسب زمان محاسبه می‌شود.

$$\varepsilon t = \frac{\sigma_0}{k} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (20)$$

۵- نتیجه‌گیری

تاکنون مدل‌های ویسکوالاستیک محدودی به‌منظور تبیین خواص مکانیکی ناحیه نوک ترک در مواد ایزوتروپیک و اورتوتروپیک ارائه شده است اما به‌دلیل نادیده گرفتن اثر مهم حضور میکروتُرک‌ها بر رفتار ناحیه آسیب و همچنین، نبود صحت‌سنجی با نتایج تجربی، از چنین مدل‌هایی به‌منظور بررسی خواص مکانیکی ناحیه آسیب استفاده نشده است. همچنین چنین مدل‌هایی، اغلب به دلیل محاسبات سنگین و وقت‌گیر و بعضاً نامفهوم قابلیت اجرایی شدن نداشته و نمی‌توان از آنها به‌منظور تبیین خواص مکانیکی ناحیه آسیب در نوک ترک استفاده کرد. در تحقیق حاضر، یک مدل جدید بر مبنای روش‌های ویسکوالاستیک به‌منظور شبیه‌سازی رفتار پیچیده ناحیه آسیب استفاده شد. این روش جدید که بر مبنای نتایج عددی و تجربی است، می‌تواند با دقت مناسبی رفتار ناحیه آسیب را شبیه‌سازی کند.

۶- مراجع

- [1] A.R. Gowhari Anaraki, M. Fakoor. 2010. "Mixed mode fracture criterion for wood based on a reinforcement microcrack", *Materials Science and Engineering A*, p. 6.
- [2] W.Thomson, 1865. "On the elasticity and viscosity of metals". *Proceedings of the Royal Society of London*, 289-297.
- [3] G. I. Barenblatt, 1962. "The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture". *Advances in applied mechanics*, 7(55-129), 104.
- [4] O. C., Zienkiewicz, M., Watson, & King, I. P., 1968. "A numerical method of visco-elastic stress analysis". *International Journal of Mechanical Sciences*, 10(10), 807-827.
- [5] R. L., Taylor, K. S., Pister, & G. L. Goudreau, 1970., "Thermomechanical analysis of viscoelastic solids". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2(1), 45-59.
- [6] A.P. Schniewind, and J.D. Barret, 1972. "Wood as a linear orthotropic viscoelastic material". *Wood Science and Technologies* 6, 43-57.
- [7] R. A. Schapery, 1975. "A theory of crack initiation and growth in viscoelastic media". *International Journal of Fracture*, 11(1), 141-159.
- [8] G. Guyon, 1987. "Prévisions de la rupture différée du pin maritime en flexion", Doctoral dissertation, ANRT.



- Using A 3d Orthotropic-Viscoelastic Model And Cohesive Elements*". In Proceedings of the 7th Solid Mechanics Conference, Lisbon, Portugal.
- [16] J. N. Reddy, "An introduction to continuum mechanics". s.l. : Cambridge University Press, 2008.
- [17] R.M. Christensen, 1982. "Theory of viscoelasticity: an Introduction". Academic Press.
- [18] Betten, J., 1981. "Creep theory of anisotropic solids". *Journal of Rheology* (1978-present), 25(6), 565-581.
- [19] N. W. Tschoegl, 2012. "The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior: an introduction". Springer Science & Business Media.
- [20] L. Gambarotta, S. Lagomarsino, "A microcrack damage model for brittle materials", *International Journal of Solids and Structures*, pp. 177-198, 1993.
- [21] K. C., Gramoll, D. A., Dillard, & , H. F. Brinson, 1989. "A stable numerical solution method for in-plane loading of nonlinear viscoelastic laminated orthotropic materials". *Composite Structures*, 13(4), 251-274.
- [22] F. Dubois, C. Chazal, , & C. Petit, 2002. "Viscoelastic crack growth process in wood timbers: an approach by the finite element method for mode I fracture". *International journal of fracture*, 113(4).
- [23] Standard, A. S. T. M. (2008). D3039. D3039M-08.
- [9] P. Larricq, 1992. "Une méthode d'estimation des caractéristiques de rupture différée d'un matériau viscoélastique orthotrope". Application au bois. These, (738).
- [10] V., Tvergaard, & J. W. Hutchinson, 1996. "Effect of strain-dependent cohesive zone model on predictions of crack growth resistance". *International Journal of Solids and Structures*, 33(20), 3297-3308.
- [11] W., Bradley, W. J., Cantwell, & H. H. Kausch, 1997. "Viscoelastic creep crack growth: a review of fracture mechanical analyses". *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 1(3), 241-268.
- [12] D. H., Allen, & C. R. Searcy, 2001. "A micromechanical model for a viscoelastic cohesive zone". *International Journal of Fracture*, 107(2), 159-176.
- [13] J., Noh, & J. Whitcomb, 2003. "Effect of transverse matrix cracks on the relaxation moduli of linear viscoelastic laminates". *Journal of composite materials*, 37(6), 543-558.
- [14] R. M., Pitti, F. Dubois, , C., Petit, & N. Sauvat, 2007. "Mixed mode fracture separation in viscoelastic orthotropic media: numerical and analytical approach by the  $M\theta v$ -integral". *International Journal of Fracture*, 145(3), 181-193.
- [15] G., Zagari, S., Fortino, & G., Dill-Langer, 2009., "Fem Simulation Of Crack Growth In Glulam By

