



Application of Gain and Phase Margins for Designing Robust Controllers within Quantitative Feedback Theory

Mohammadreza Hadipour, Ali Jamali, Nader Nariman-zadeh*, Behnam Miripour Fard

Faculty of Mechanical Engineering, University of Guilan, Rasht, Iran

ABSTRACT: Modeling uncertainty in the form of additional gain and phase and calculating robustness margins based on them is one of the standard methods in designing robust control systems and comparing their robustness. On the other hand, one of the prevalent methods of robust control in the frequency domain is “Quantitative Feedback Theory”, which, due to modeling uncertainty in the form of parametric uncertainty with a specified range, faces challenges such as the inability to compare controllers and non-automated design. Additionally, the system’s conditions for parametric uncertainty values outside the design range are unknown. This research addresses these issues using uncertainty modeling in the form of gain and phase within the quantitative feedback theory method. To this end, a combined margin consisting of gain and phase is introduced and calculated using a modified Nichols chart and inequalities related to design criteria in the quantitative feedback theory method. The position control of a DC motor is selected as a case study, and an optimal and robust proportional-derivative controller is designed for it. The results are examined both numerically and experimentally which show that the proposed method effectively overcomes the shortcomings of the quantitative feedback theory method. The controller designed in this manner gains more favorable results than the controller designed using the conventional quantitative feedback theory method and even maintains its performance better for parametric uncertainty values higher than the design range.

Review History:

Received: Jun. 07, 2024
Revised: Sep. 15, 2024
Accepted: Oct. 28, 2024
Available Online: Nov. 23, 2024

Keywords:

Robust Control
Uncertainty
Gain Margin
Phase Margin
Quantitative Feedback Theory

1- Introduction

Uncertainty is an inseparable part of modeling and control engineering. A variety of approaches has been developed under the title of “Robust control” to confront this issue. One of these methods is Quantitative Feedback Theory or QFT introduced by Isaac Horowitz in 1959[1]. This method applies different constraints to evaluate the stability and performance of control systems. If a system is feasible according to these constraints, then it is said to have robust stability or performance. To evaluate the feasibility of the system its parameters are supposed to be uncertain and a set of random parameters is used. The calculations take happen in the frequency domain. If a system satisfies a constraint along the whole frequency domain and for all these parameters, it is said to be robust from the point of view of that constraint. QFT is an applicable robust method that has been used in industry and academia [2].

On the other hand, the classical approach to evaluate the robustness of a control system is to calculate the gain and phase margins. The gain margin is the amount of gain added to the system to make it unstable. The phase margin is the amount of phase added to the output signal when the gain is constant before the system becomes unstable. Some

studies are focused on presenting hybrid margins which simultaneously use gain and phase to evaluate the robustness. Disk margin is one of these methods which calculates a hybrid margin based on disk space [3, 4]. In fact, the margin is the radius of a disk that contains the nominal point. This area is illustrated in Fig. 1.

The main aim of this article is to find a way to use these margins in the QFT approach to help it calculate the feasibility of the constraints more easily and make it possible to compare different control setups. To achieve this goal the representation of uncertainty in QFT structure has to change.

The new method, called robustness margin-based quantitative feedback theory or RMQFT, uses the added gain and phase to apply the effect of uncertainties in the system. Therefore, the conventional parametric uncertainty is not used in this approach. A hybrid margin can be determined using the gain and phase.

2- Methodology

In the presented method, unlike the conventional QFT, a combined gain/phase variation is used for uncertainty modeling. Consider a 2-DOF control structure as plotted in Fig. 2. Control Structure of the introduced method:

*Corresponding author’s email: nnzadeh@guilan.ac.ir



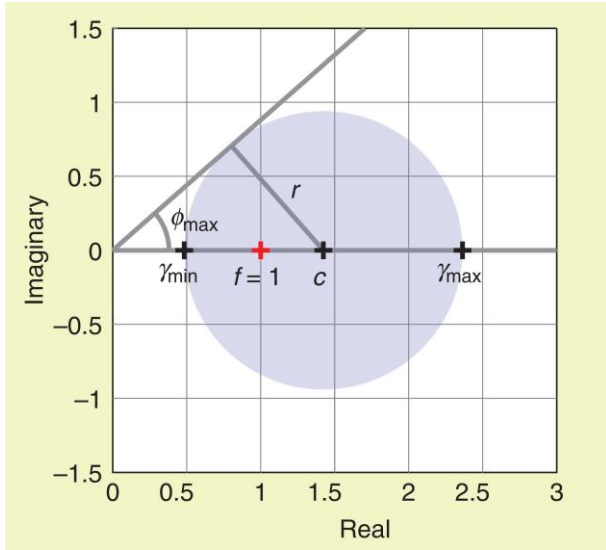


Fig. 1. Disk area to calculate disk margin[3]

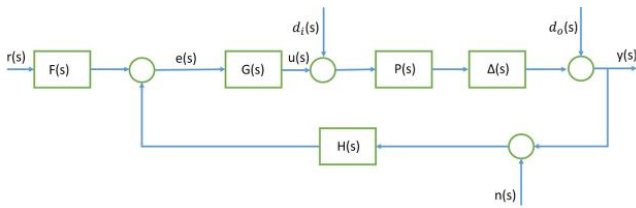


Fig. 2. Control Structure of the introduced method

The output, error, and control signals can be calculated as follows:

$$y = \frac{P\Delta GF}{1+P\Delta GH} r + \frac{1}{1+P\Delta GH} (P\Delta d_i + d_o) - \frac{P\Delta GH}{1+P\Delta GH} n \quad (1)$$

$$e = \frac{F}{1+P\Delta GH} r + \frac{H}{1+P\Delta GH} (P\Delta d_i + d_o) - \frac{H}{1+P\Delta GH} n \quad (2)$$

$$u = \frac{GF}{1+P\Delta GH} r + \frac{GH}{1+P\Delta GH} (P\Delta d_i + d_o) - \frac{GH}{1+P\Delta GH} n \quad (3)$$

Using these signals different measures can be defined. These measures are the upper or lower bound transfer functions of the systems. The most important ones, including the stability, control effort, and tracking measures can be calculated as follows:

$$T_1(\omega) = \left| \frac{y(j\omega)}{F(j\omega)r(j\omega)} \right| = \left| \frac{P(j\omega)G(j\omega)}{1+P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_1(\omega) = W_s, \omega \in \Omega \quad (4)$$

$$T_2(\omega) = \left| \frac{y(j\omega)}{F(j\omega)r(j\omega)} \right| = \left| \frac{G(j\omega)}{1+P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_2(\omega), \omega \in \Omega_2 \quad (5)$$

$$\delta_{3_{\omega}}(\omega) \leq T_3(\omega) = \left| \frac{y(j\omega)}{r(j\omega)} \right| = \left| \frac{P(j\omega)G(j\omega)F(j\omega)}{1+P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_{3_{sup}}(\omega), \omega \in \Omega_3 \quad (6)$$

3- Results and Discussion

In order to investigate the performance of the proposed method it is applied to control the position of a DC motor both numerically and experimentally. The experimental setup is shown in Fig. 3:

In this step, two control setups based on QFT and RMQFT methods are designed. The design constraints include the stability (SM) and tracking (LTM & UTM) measures. The controllers' coefficients and the value of measures are represented in Table 1:

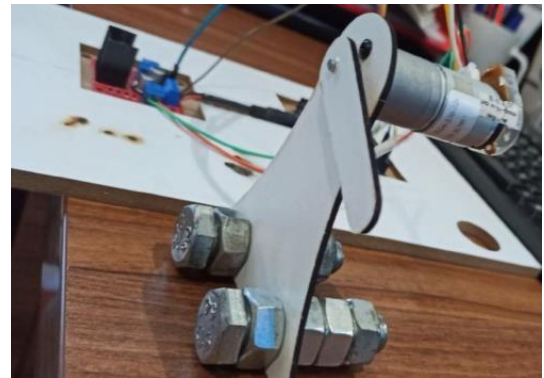


Fig. 3. The experimental setup

Table 1. Controllers' coefficients and robustness margins

Controller	K _p	K _d	SM	LTM	UTM
QFT	0.025	0.019	5.98	1.86	0.96
RMQFT	0.047	0.017	4.42	2.14	3.06

It is expected that the RMQFT-designed setup has better tracking performance whereas the QFT-designed one has better stability. These setups are examined both numerically and experimentally and the results are illustrated in Fig. 4 and Figure 5:

The results show that the RMQFT design has better tracking performance as expected and the probability of failure in this design is less than the conventional QFT approach. It can be said that the robustness margins are effective measures to investigate the robust stability and performance of the system.

4- Conclusion

In this paper, the concept of gain and phase margin is applied to calculate robustness margins for the stability and performance measures of the QFT approach. These margins make it possible to compare different control setups. They are applied to design controllers to control the position of a DC motor. The numerical and experimental results show that the new method can lead to better control setups that have better performance.

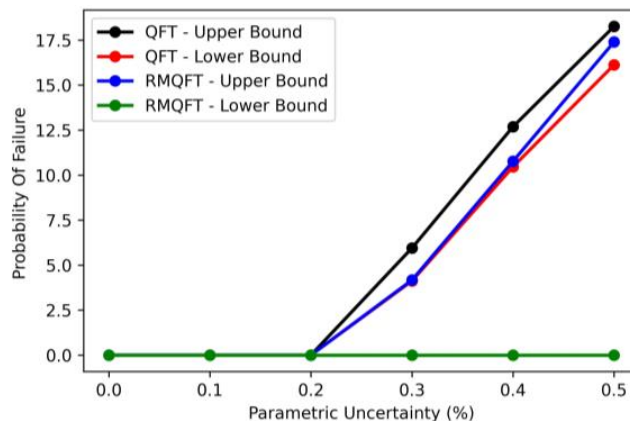


Fig. 4. Probability of failure in tracking for QFT and RMQFT setups

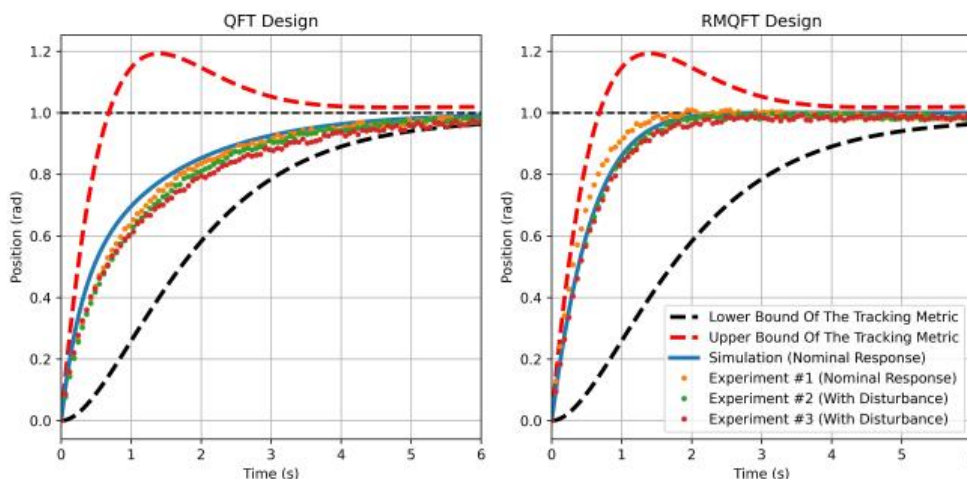


Fig. 5. Experimental results for QFT and RMQFT approaches

References

[1] I. Horowitz, Fundamental theory of automatic linear feedback control systems, *IRE Transactions on Automatic Control*, 4(3) (1959) 5-19.

[2] M. Garcia-Sanz, *Robust control engineering: practical QFT solutions*, CRC press, 2017.

[3] P. Seiler, A. Packard, P. Gahinet, An introduction to disk margins [lecture notes], *IEEE Control Systems Magazine*, 40(5) (2020) 78-95.

[4] F. Somers, C. Roos, F. Sanfedino, S. Bennani, V. Preda, Extension of probabilistic gain, phase, disk and delay margins for multi-input multi-output space control systems, in: *12th International Conference on Guidance, Navigation & Control Systems*, 2023.



استفاده از حاشیه‌های بهره و فاز برای طراحی کنترل‌کننده‌های مقاوم به وسیله تئوری بازخورد کمی

محمدرضا هادی‌پور، علی جمالی، نادر نریمان‌زاده*، بهنام میری‌پور فرد

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۳/۰۳/۱۸
بازنگری: ۱۴۰۳/۰۶/۲۵
پذیرش: ۱۴۰۳/۰۸/۰۷
ارائه آنلاین: ۱۴۰۳/۰۹/۰۳

کلمات کلیدی:

کنترل مقاوم
عدم قطعیت
حاشیه بهره
حاشیه فاز
تئوری بازخورد کمی

خلاصه: مدلسازی عدم قطعیت در قالب بهره و فاز اضافی و محاسبه حاشیه‌های مقاومت بر اساس آن‌ها یکی از روش‌های متداول طراحی مقاوم سیستم‌های کنترلی و مقایسه مقاومت آن‌هاست. از طرفی یک روش مرسوم کنترل مقاوم در حوزه‌ی فرکانس، تئوری بازخورد کمی است که به علت مدلسازی عدم قطعیت در قالب نامعینی پارامتری با محدوده‌ی مشخص، با چالش‌هایی از جمله عدم امکان مقایسه‌ی کنترل‌کننده‌ها و طراحی غیر خودکار همراه است. همچنین شرایط سیستم به ازای مقادیر نامعینی پارامتری خارج از بازه طراحی مشخص نیست. در این پژوهش با استفاده از مدلسازی عدم قطعیت در قالب بهره و فاز در روش تئوری بازخورد کمی این مشکلات مرتفع شده است. به این منظور حاشیه‌ای ترکیبی، متشکل از بهره و فاز، معرفی شده که با استفاده از نمودار نیکولز اصلاح‌شده و نامعادلات مرتبط با معیارهای تئوری بازخورد کمی، محاسبه می‌شود. کنترل موقعیت یک موتور جریان مستقیم به عنوان نمونه‌ی مطالعاتی انتخاب شده و برای آن کنترل‌کننده‌ی تناسبی-مشتمل‌گیر بهینه و مقاومی طراحی شده است. بررسی نتایج به دو شیوه عددی و تجربی صورت پذیرفته است. نتایج نشان می‌دهد روش پیشنهادی توانسته است به خوبی نواقص روش تئوری بازخورد کمی را رفع نماید. کنترل‌کننده‌ی طراحی شده در این حالت نسبت به کنترل‌کننده طراحی شده به روش مرسوم تئوری بازخورد کمی نتایج مطلوب‌تری داشته و حتی به ازای مقادیر نامعینی پارامتری بالاتر از محدوده‌ی طراحی، توانسته است عملکرد خود را به نحو بهتری حفظ نماید.

۱- مقدمه

عدم قطعیت^۱ قسمتی جدایی‌ناپذیر از مدل‌سازی ریاضی سیستم‌های واقعی است. این پدیده باعث به وجود آمدن خطاهای گوناگون در روند مدل‌سازی می‌شود و ممکن است منجر به شرایطی شود که یک مدل قابل اطمینان نباشد [۱]. عدم پایداری، حساسیت بالای پاسخ و عدم کارکرد و بهره‌وری مناسب از جمله اثرات حضور عدم قطعیت مدلسازی در سیستم‌های کنترلی هستند که ممکن است از منابع مختلفی نظیر نامعینی‌های پارامتری، نویزها، اغتشاشات خارجی، رفتار غیرخطی، تغییر در دینامیک سیستم در طول زمان تحت تأثیر خطاها، حذف صفر و قطب، و سایر اشکال دینامیک‌های مدل‌نشده ناشی شود. این عدم قطعیت‌ها را می‌توان به دو گروه عمده تقسیم کرد: عدم قطعیت ساختارمند^۲ و عدم قطعیت بدون ساختار^۳ [۲]. به طور کلی

- 1 Uncertainty
- 2 Structured
- 3 Unstructured

عدم قطعیت‌های پارامتری یا هر نوع عدم قطعیتی که در قالب یک روش ساختار یافته قابل تشخیص باشد به عنوان عدم قطعیت‌های ساختارمند در نظر گرفته می‌شوند. از سوی دیگر، عدم قطعیت بدون ساختار به نوعی از عدم قطعیت اطلاق می‌شود که ساختار مشخصی ندارد و اندازه‌گیری حدود آن نیز با چالش‌هایی همراه است. روش‌های کنترل مقاوم^۴ به منظور مدیریت و کاهش اثرات انواع عدم قطعیت‌ها توسعه یافته‌اند. این روش‌ها پایداری و عملکرد مقاوم سیستم‌های کنترل را تضمین می‌کنند. پایداری مقاوم یک سیستم کنترلی به این خاصیت اشاره دارد که سیستم در حضور عدم قطعیت نیز پایدار بماند. به همین ترتیب، داشتن عملکرد مقاوم نیز به آن معناست که سیستم در حضور عدم قطعیت کارایی و عملکرد مناسب خود را حفظ کند [۳]. تحقیقات زیادی چه در زمینه پایداری مقاوم و چه در مورد کارایی مقاوم سیستم‌های کنترلی تا به اکنون صورت گرفته است که روند افزایشی آن همچنان ادامه دارد، و همچنان در سال‌های اخیر جزئی از مهمترین



موضوعات مطالعاتی حوزه کنترل است [۴-۸].

پذیری تعیین شوند؛ به ویژه زمانی که یک طراح گزینه‌های متنوعی را برای انتخاب پیش رو دارد. در این چنین شرایطی استفاده از حاشیه‌های مقاومت مفید خواهد بود. این حاشیه‌ها روشن می‌کنند که سیستم چه میزان از عدم قطعیت را پیش از رسیدن به ناپایداری یا عملکرد نامطلوب تحمل می‌کند. حاشیه‌های بهره و فاز از مشهورترین حاشیه‌های مقاومت هستند و پژوهش‌های زیادی در این زمینه منتشر شده است [۱۶-۱۹]. همچنین تحقیقات اخیر در مورد تغییرات همزمان در بهره و فاز به عنوان یک معیار جدید با عنوان حاشیه‌های دیسکی [۲۰] جمع‌آوری شده‌اند. این معیار توسط ام. بارت در سال ۱۹۸۰ معرفی شد [۲۱]. ترکیب حاشیه‌های بهره و فاز در این معیار منجر به طراحی‌های محافظه‌کارانه‌تری می‌شود. این معیارها تنها برای تعیین پایداری مقاوم استفاده می‌شوند و عملکرد مقاوم در آن مد نظر قرار نمی‌گیرد. اندازه‌گیری عملکرد مقاوم با استفاده از برخی دیگر از روش‌های کنترل مقاوم مانند سنتز H_1 [۲۲] یا مانند آنچه در [۲۳، ۲۴] بحث شده است، مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. نکته دیگر آن که روش تئوری بازخورد کمی در زمره روش‌های کنترلی متمرکز^۳ قرار دارد. این روش‌ها علی‌رغم مزایایی مانند طراحی و ساختار ساده‌تر نسبت به روش‌های غیر متمرکز^۴، امکان کمتری برای تصمیم‌گیری چندگانه سیستم در اختیار طراح قرار می‌دهد. روش‌های غیرمتمرکز در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری قرار گرفته‌اند. این مساله در مراجعی مانند [۲۵، ۲۶] مورد بررسی قرار گرفته است.

پدیده حاشیه‌های بهره و فاز مرتبط با طراحی تئوری بازخورد کمی در چند مرجع همچون [۲۷] قبلاً مورد مطالعه قرار گرفته است، اما نقص عمیقی در بررسی حاشیه‌های مقاومت عملکردی آشکار است و مطالعات انجام گرفته نتوانسته‌اند کاربرد این حاشیه‌ها در طراحی سیستم‌های کنترلی بر اساس تئوری بازخورد کمی و امکان مقایسه آن‌ها را نمایش دهند. هدف این مقاله پر کردن شکاف علمی در زمینه تعیین معیار برای بررسی عملکرد و پایداری مقاوم و تعیین حاشیه‌های جدید مقاومت بر اساس تئوری بازخورد کمی است تا تأثیرات همزمان تغییرات بهره و فاز بر پایداری و عملکرد سیستم‌های کنترلی طراحی شده با استفاده از این روش را بررسی کند. برای این کار از معیارهای مقاومت مطرح شده در تئوری بازخورد کمی استفاده می‌شود. مقادیر این حاشیه‌ها از حل نامعادلات جبری تئوری بازخورد کمی یا با استفاده از نمودار نیکولز اصلاح شده به دست می‌آید. جزییات محاسبات در قسمت‌های بعد مورد بررسی قرار خواهد گرفت. این حاشیه‌ها نشان می‌دهند یک سیستم حلقه بسته به چه اندازه از شرایطی که ناپایدار

یکی از قدیمی‌ترین روش‌های کنترل مقاوم که هم پایداری و هم عملکرد مقاوم را تضمین می‌کند، تئوری بازخورد کمی^۱ است [۹]. این استراتژی کنترلی به صورت کمی با مفهوم عدم قطعیت پارامتری برخورد می‌کند و به طور همزمان عملکرد سیستم را حفظ می‌کند. رویکرد تئوری بازخورد کمی از مزایای حوزه فرکانسی به منظور ایجاد ساختار کنترلی مقاوم خود بهره می‌برد. اصول این روش ابتدا توسط آیزاک ام. هورویتز در سال ۱۹۵۹ معرفی شد [۱۰]. او این روش را چهار سال بعد، در سال ۱۹۶۳، در کتاب برجسته‌اش [۱۱] پیشنهاد داد. مزایای به کار بردن فیدبک در سیستم‌های کنترل در این منابع ذکر شده است. مهمترین آن‌ها به شرح زیر است [۱۰]:

- امکان حذف یا کاهش اثرات اغتشاشات خارجی
 - حساسیت کمتر نسبت به تغییرات در سیستم
- کاربرد تکنیک تئوری بازخورد کمی به مزایایی منجر می‌شود که شامل موارد زیر است:

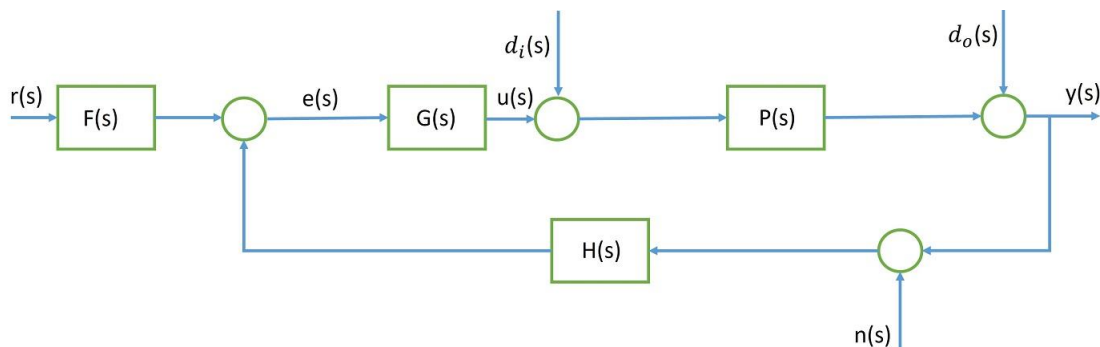
- ساختارهای کنترلی ساده و قابل اجرا
- حفظ پهنای باند و اندازه کنترل‌کننده؛ که به آن هزینه بازخورد^۲ گفته می‌شود
- توانایی مقابله با عدم قطعیت‌ها و حفظ عملکرد سیستم در حد مجاز از طریق یک طراحی چند هدفه

اگرچه روش تئوری بازخورد کمی بسیار مفید است، اما به دلیل برخی پیش‌فرض‌هایی که برای طراحی سیستم‌های کنترلی دارد با چالش‌ها و محدودیت‌هایی مواجه می‌شود. مهمترین این فرض‌ها که توسط دوایل [۱۲] بررسی شده‌اند به این شرح است: الف) سیستم نباید دارای صرفه‌های سمت راست محور موهومی باشد؛ یعنی باید مینیمم فاز باشد؛ ب) درجه نسبی تابع انتقال ثابت است. تحقیقاتی در سال‌های اخیر انجام شده که بر غلبه بر این چالش‌ها تمرکز داشته‌اند [۱۳-۱۵].

یکی از محدودیت‌های روش تئوری بازخورد کمی این است که برای طراحی کنترل‌کننده‌های مقاوم برای محدوده خاصی از عدم قطعیت پارامتری استفاده می‌شود و پایداری یا عملکرد سیستم خارج از این حدود تعیین نمی‌شود. در واقع، این روش هیچ معیاری برای مقایسه مقاومت سیستم‌های مختلف و ارزیابی آن در حالت کلی (و نه یک بازه محدود) ندارد و تنها تعیین می‌کند که آیا یک سیستم برای یک حد معین عدم قطعیت مقاوم است یا خیر. از سوی دیگر، گاهی اوقات ضروری است که چنین ویژگی‌های مقایسه

3 Centralized
4 Decentralized

1 Quantitative Feedback Theory (QFT)
2 Cost of feedback



شکل ۱. شمای ساختار کنترلی دو درجه آزادی در روش QFT

Fig. 1. 2-DOF control structure in QFT design

$(n(s))$ کمک می‌کند. از طرف دیگر، پیش‌فیلتر هنگامی مورد استفاده قرار می‌گیرد که نیاز به ردیابی سیگنال مرجع $r(s)$ باشد. سیگنال‌های خروجی سیستم، خطا و تلاش کنترلی به سادگی و به صورت زیر از روی سیگنال‌های خارجی قابل محاسبه هستند. به منظور ساده‌سازی نوشتار، متغیر "S" از معادلات حذف شده است.

$$y = \frac{PGF}{1+PGH} r + \frac{1}{1+PGH} (Pd_i + d_o) - \frac{PGH}{1+PGH} n \quad (1)$$

$$e = \frac{F}{1+PGH} r + \frac{H}{1+PGH} (Pd_i + d_o) - \frac{H}{1+PGH} n \quad (2)$$

$$u = \frac{GF}{1+PGH} r + \frac{GH}{1+PGH} (Pd_i + d_o) - \frac{GH}{1+PGH} n \quad (3)$$

در تئوری بازخورد کمی عدم قطعیت سیستم به صورت نامعینی پارامتری در تابع تبدیل سیستم تحت کنترل $(P(s))$ اعمال می‌شود. این شیوه مدلسازی عدم قطعیت برای محاسبه حاشیه مقاومت مناسب نیست چون معمولاً به دلیل تعداد بالای ضرایب دارای نامعینی، پیچیدگی محاسباتی بالایی به همراه دارد. در مطالعه حاضر به منظور جلوگیری از این پیچیدگی عدم قطعیت به صورت ترکیبی از بهره و فاز اضافی در یک قالب یک ترم

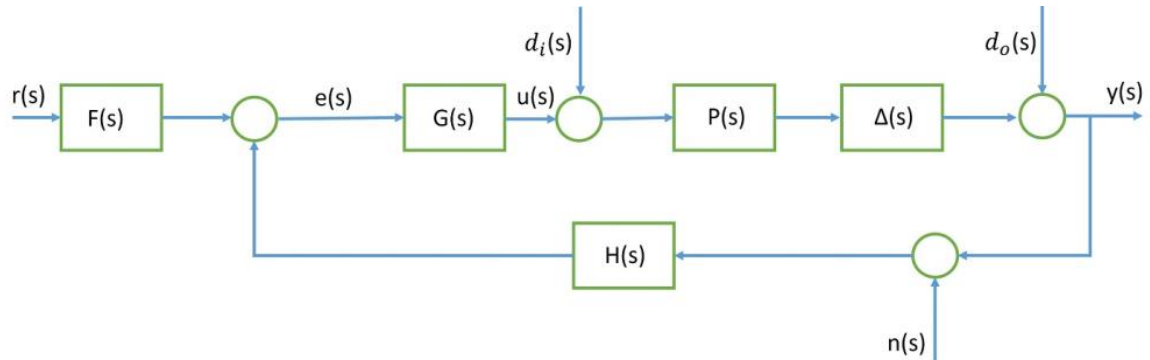
شود یا رفتار ناکارآمدی پیدا کند فاصله دارد. کاربرد دیگر آنها این است که امکان مقایسه پایداری و عملکرد مقاوم سیستم‌های کنترلی مختلف را فراهم می‌کنند. همان‌گونه که گفته شد مقدار عددی این معیارها از ترکیب وزن‌دار حاشیه‌های بهره و فاز به دست می‌آید. این مساله سبب می‌شود که ریسک طراحی کاهش یابد.

ساختار قسمت‌های بعدی مقاله به این شرح است: در ابتدا ساختار کنترلی تئوری بازخورد کمی و پس از آن نحوه محاسبه معیارهای طراحی توضیح داده می‌شود. در ادامه در مورد نحوه محاسبه حاشیه‌های مختلف مقاومت بحث می‌شود. سپس نحوه محاسبه حاشیه مقاومت جدید مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ادامه برای بررسی کارایی این روش، آن را بر روی یک سیستم نمونه پیاده‌سازی کرده و نتایج نظری و تجربی آن مورد بررسی قرار خواهند گرفت. در نهایت نیز مطالب مطرح شده در مقاله جمع‌بندی خواهند شد.

۲- مدل‌سازی و نظریات

۲-۱- ساختار کنترلی

شمای یک ساختار کنترلی دو درجه آزادی، که در تئوری بازخورد کمی استفاده می‌شود، در شکل ۱ نشان داده شده است. این ساختار از آن رو با عنوان دو درجه آزادی نام‌گذاری شده است که به صورت هم‌زمان یک جبران‌ساز $(G(s))$ و یک پیش‌فیلتر $(F(s))$ در آن تعبیه شده است. جبران‌ساز به پایدارسازی سیستم حلقه بسته و کاهش اثرات عدم قطعیت‌های داخلی، اغتشاشات خارجی در ورودی $(d_i(s))$ و خروجی $(d_o(s))$ و نویز



شکل ۲. ساختار کنترلی دو درجه آزادی به همراه عدم قطعیت ضربی

Fig. 2. 2-DOF control structure with a multiplicative uncertainty

ترکیبی از بهره k و زاویه فاز ϕ است، در صورتی که سیستمی محدوده گسترده‌تری از این پارامترها را تحمل کند، مقاوم‌تر محسوب می‌شود.

۲-۲- معیارهای پایداری و عملکرد

رویکرد تئوری بازخورد کمی یک روش مبتنی بر حوزه فرکانس است که در آن تمام متغیرها در حوزه فرکانس تعریف شده‌اند. دلیل انتخاب این حوزه نسبت به حوزه‌های زمان و s این است که امکان تعریف و ارزیابی معیارهای مقاومت و بهینگی در این حوزه با هزینه کمتر وجود دارد [۲۸]. توضیح جامعی از معیارهای پایداری و عملکرد را می‌توان در [۹، ۲۹] پیدا کرد. این معیارها در واقع اندازه مجموعه‌ای از توابع تبدیل در هر فرکانس مطلوب هستند. بدون از دست دادن کلیت، میتوان در نظر گرفت که $H(s)=1$. در این صورت برخی از مهمترین معیارهای مقاومت سیستم را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

- معیار پایداری:

$$T_1(\omega) = \left| \frac{y(j\omega)}{F(j\omega)r(j\omega)} \right| = \left| \frac{P(j\omega)G(j\omega)}{1+P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_1(\omega) = W_s, \quad \omega \in \Omega \quad (7)$$

این معیار پایداری سیستم را نشان می‌دهد و معادل با معیار پایداری دایره

نامعین ضربی $\Delta(s)$ مدل می‌شوند. بنابراین، نمودار قبلی به یک نمودار جدید تبدیل می‌شود که در شکل ۲ نشان داده شده است. در این ساختار فرض شده است که $\Delta(s) = ke^{\phi s}$ که در آن k و ϕ به ترتیب بهره و فاز نامعین اضافه شده به سیستم نامی هستند.

در این صورت معادلات قبلی به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$y = \frac{P\Delta GF}{1+P\Delta GH} r + \frac{1}{1+P\Delta GH} (P\Delta d_i + d_o) - \frac{P\Delta GH}{1+P\Delta GH} n \quad (4)$$

$$e = \frac{F}{1+P\Delta GH} r + \frac{H}{1+P\Delta GH} (P\Delta d_i + d_o) - \frac{H}{1+P\Delta GH} n \quad (5)$$

$$u = \frac{GF}{1+P\Delta GH} r + \frac{GH}{1+P\Delta GH} (P\Delta d_i + d_o) - \frac{GH}{1+P\Delta GH} n \quad (6)$$

یک سیستم کنترلی زمانی می‌تواند مقاوم محسوب شود که به ازای $\Delta \neq 1$ پایداری و عملکرد خود را حفظ نماید. از آنجا که خود ترم Δ

$$\delta_{4_{lo}}(\omega) \leq T_5(\omega) = \left| \frac{y(j\omega)}{r(j\omega)} \right| = \left| \frac{P(j\omega)G(j\omega)F(j\omega)}{1+P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_{5_{up}}(\omega), \omega \in \Omega_5 \quad (13)$$

• معیار تابع مکمل حساسیت:

$$T_6(\omega) = \left| \frac{y(j\omega)}{F(j\omega)r(j\omega)} \right| = \left| \frac{P(j\omega)G(j\omega)}{1+P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_6(\omega), \omega \in \Omega_6 \quad (14)$$

در صورتی که در نامعادلات فوق اثر نامعینی ضربی G و جبران ساز P و سیستم $\Delta(j\omega) = ke^{j\phi}$ را در نظر بگیریم و $P(j\omega) = p(\omega)e^{i\theta(\omega)} = p(\omega)\angle\theta(\omega)$ و $G(j\omega) = g(\omega)e^{i\psi(\omega)} = p(\omega)\angle\psi(\omega)$ لحاظ کنیم به نامعادلات زیر خواهیم رسید. لازم به ذکر است که اندازه پیش‌فیلتر نیز به صورت $f = |F(j\omega)|$ تعریف می‌شود.

$$p^2 g^2 k^2 \left(1 - \frac{1}{\delta_1^2}\right) + 2pgk \cos(\theta + \psi + \phi) + 1 \geq 0, \omega \in \Omega_1 \quad (15)$$

$$p^2 g^2 k^2 + 2pgk \cos(\theta + \psi + \phi) + 1 - \frac{1}{\delta_2^2} \geq 0, \omega \in \Omega_2 \quad (16)$$

$$p^2 g^2 k^2 + 2pgk \cos(\theta + \psi + \phi) + 1 - \frac{p^2 k^2}{\delta_2^2} \geq 0, \omega \in \Omega_3 \quad (17)$$

$$\left(p^2 k^2 - \frac{1}{\delta_1^2}\right) g^2 + 2pgk \cos(\theta + \psi + \phi) + 1 \geq 0, \omega \in \Omega_4 \quad (18)$$

M' است که مکان هندسی نقاط در نمودار نیکولز با اندازه‌های ثابت (برابر با M) است. امکان ارزیابی دو معیار پایداری دیگر، حاشیه‌های بهره و فاز، با استفاده از سوپریمم این معیار، WS ، وجود دارد:

$$GM = 20 \log\left(1 + \frac{1}{W_s}\right), \text{ in db} \quad (8)$$

$$PM = 180 - 2\left(\frac{180}{\pi}\right) \arccos\left(\frac{0.5}{W_s}\right), \text{ in deg} \quad (9)$$

• معیار حساسیت و اغتشاش در خروجی:

$$T_2(\omega) = S(\omega) = \left| \frac{y(j\omega)}{d_o(j\omega)} \right| = \left| \frac{1}{1+P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_2(\omega), \omega \in \Omega_2 \quad (10)$$

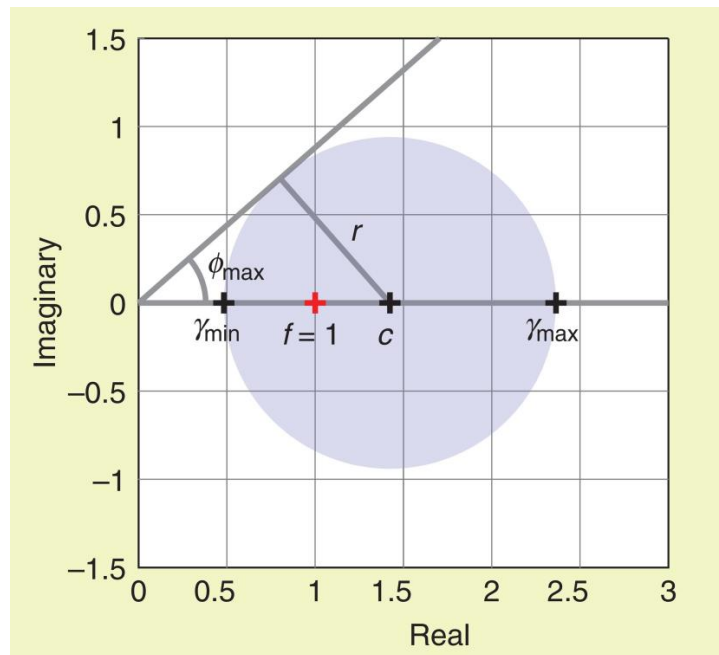
• معیار اغتشاش در ورودی:

$$T_3(\omega) = \left| \frac{y(j\omega)}{d_i(j\omega)} \right| = \left| \frac{P(j\omega)}{1+P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_3(\omega), \omega \in \Omega_3 \quad (11)$$

• معیار تلاش کنترلی:

$$T_4(\omega) = \left| \frac{y(j\omega)}{F(j\omega)r(j\omega)} \right| = \left| \frac{G(j\omega)}{1+P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_4(\omega), \omega \in \Omega_4 \quad (12)$$

• معیار ردیابی ورودی مینا:



شکل ۳. ناحیه پایدار در صفحه اعداد مختلط و حاشیه دیسکی [۲۰]

Fig. 3. Stable region in complex plane and the disk margin

است، زمانی که فاز سیستم برابر با 180° باشد. از طرف دیگر، می‌توان حاشیه فاز را به عنوان بیشترین فاز اضافه شده به یک سیستم کنترلی حلقه بسته پیش از رسیدن به ناپایداری تعریف کرد، زمانی که بهره برابر با صفر دسیبل باشد. علی‌رغم داشتن برخی مزایا، استفاده از این حاشیه‌ها برای تعیین مقاومت یک سیستم حلقه بسته نواقصی نیز دارد. استفاده از این حاشیه‌های جداگانه با ریسک زیادی همراه است. مواردی وجود دارند که یک سیستم میزان زیادی از تغییرات جداگانه در هر دو متغیر را به خوبی تحمل می‌کند؛ اما زمانی که این تغییرات به صورت همزمان رخ می‌دهند ناپایدار می‌شود. این مشکل با جزئیات در [۲۰] توصیف شده است. برای غلبه بر این مشکل مفهوم حاشیه دیسکی^۱ معرفی شده است. حاشیه دیسکی معیاری است که تغییرات همزمان بهره و فاز را شامل می‌شود. این معیار به نحوی تعریف می‌شود که سطح دیسکی با شعاع مشخص را در صفحه مختلط در برمی‌گیرد. شکل ۳ ناحیه پایدار در صفحه اعداد مختلط و همچنین مفهوم حاشیه دیسکی را نشان می‌دهد.

اگرچه این روش نسبت به بکارگیری جداگانه حاشیه‌های بهره و فاز

$$p^2 g^2 k^2 \left(1 - \frac{f}{\delta_{5_{up}}^2}\right) + 2pgk \cos(\theta + \psi + \phi) + 1 \geq 0, \omega \in \Omega_5 \quad (19)$$

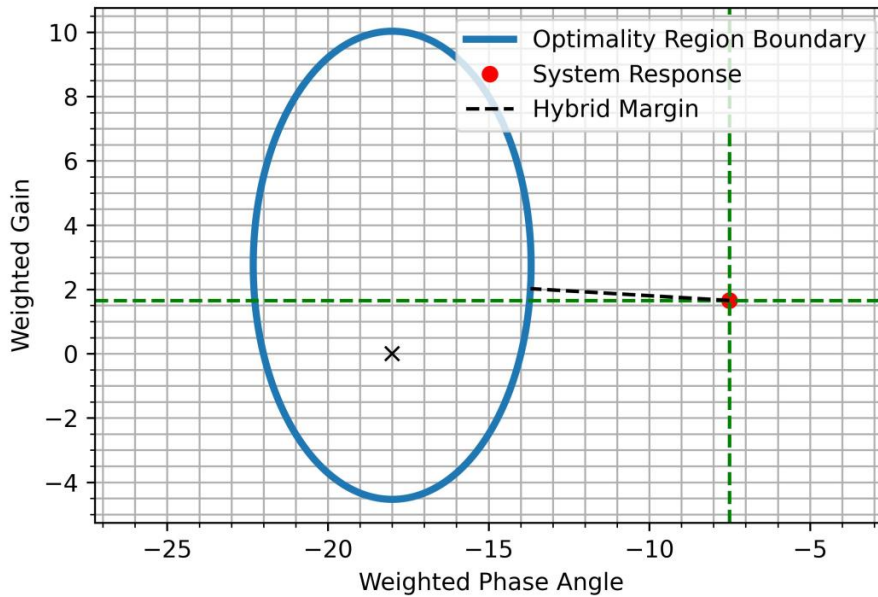
$$p^2 g^2 k^2 \left(1 - \frac{f}{\delta_{5_{lo}}^2}\right) + 2pgk \cos(\theta + \psi + \phi) + 1 \leq 0, \omega \in \Omega_5 \quad (20)$$

$$p^2 g^2 k^2 \left(1 - \frac{1}{\delta_6^2}\right) + 2pgk \cos(\theta + \psi + \phi) + 1 \geq 0, \omega \in \Omega_6 \quad (21)$$

۲-۳- حاشیه‌های مقاومت

روش سنتی تعریف حاشیه‌های مقاومت برای سیستم‌های کنترلی، استفاده از حاشیه‌های بهره و فاز است. حاشیه بهره، بیشترین بهره مجاز افزوده شده به یک سیستم کنترلی حلقه بسته پیش از رسیدن به ناپایداری

1 Disk Margin



شکل ۴. محاسبه حاشیه مقاومت با استفاده از نمودار اصلاح شده نیکولز

Fig. 4. Robustness margin in the modified Nichols chart

طراحی انتخاب می‌شوند. استفاده از این ضرایب این امکان را می‌دهد که طراح با توجه به تجربه و داوری اولیه خود از مساله، اثر بهره و فاز را در مقدار عددی حاشیه محاسبه شده تنظیم کند.

۵- کمترین مقدار RM محاسبه شده در هر فرکانس به عنوان حاشیه مقاومت آن فرکانس خواهد بود.

۶- مراحل ۲ تا ۵ برای تمامی فرکانس‌ها تکرار می‌شود و کمترین مقدار RM به عنوان حاشیه مقاومت سیستم از دید آن معیار محاسبه می‌شود.

لازم به ذکر است که مقدار RM در هر فرکانس را می‌توان از طریق یک نمودار نیکولز اصلاح‌شده به دست آورد. در این نمودار محورهای افقی و عمودی به ترتیب بهره و زاویه فاز وزن‌دار سیستم هستند (k/a و ϕ/b). برای محاسبه RM کفایت مکان هندسی بهره و فاز وزن‌دار سیستم، مرتبط با تابع تبدیل معیار مد نظر، را در فرکانس مطلوب به همراه مکان هندسی نقاط مرزی متناسب با نامعادله مربوط به معیار مد نظر، با فرض $\Delta=1$ ، رسم نمود و کمترین فاصله آن‌ها به دست آید. این فاصله برابر با میزان RM آن معیار در آن فرکانس مطلوب است. شکل ۴ شمایی مثالی از این فرآیند را نشان می‌دهد. در این شکل نقطه قرمز مکان هندسی بهره و زاویه فاز تابع تبدیل معیار مورد بررسی در فرکانس مد نظر است. منحنی آبی رنگ نیز مرز متناسب با نامعادله مربوط به آن معیار را مشخص می‌کند. باید توجه داشت

جامع‌تر و محافظه‌کارانه‌تر است ولی خود نواقص دیگری دارد. ابتدا اینکه محاسبات این روش در فضای اعداد مختلط صورت می‌پذیرد و بهره و فاز به صورت مستقیم در محاسبات نقش ندارند. از طرفی این معیار برای بررسی پایداری سیستم کاربرد دارد و مقاومت عملکرد سیستم توسط آن مشخص نمی‌شود.

برای پوشش ضعف‌های مطرح شده، در این مقاله حاشیه جدیدی بر اساس ترکیب وزن‌دار بهره و فاز برای بررسی پایداری و عملکرد مقاوم سیستم کنترلی با تلفیق با معیارهای عنوان شده در تئوری بازخورد کمی مورد بررسی قرار می‌گیرد. مسیر محاسبه هر یک از معیارها در روش تلفیقی جدید، که از این پس در این مقاله با عنوان تئوری بازخورد کمی بر مبنای حدود مقاومت^۱ از آن یاد خواهد شد، به صورت زیر است:

- ۱- ابتدا نامعادله مربوط به هر معیار را انتخاب می‌کنیم.
- ۲- یک فرکانس از بازه فرکانسی مرتبط با معیار را انتخاب کرده و مقادیر θ ، ψ و g ، p (و در صورت نیاز f) را در آن فرکانس حساب می‌کنیم.
- ۳- به ازای مقادیر مختلف $\phi \in [-360^\circ : 0^\circ]$ مقدار مرزی k را پیدا می‌کنیم.

۴- به ازای هر جفت ϕ و k مقدار حاشیه ترکیبی $RM = \sqrt{\left(\frac{k}{a}\right)^2 + \left(\frac{\phi}{b}\right)^2}$ را محاسبه می‌کنیم. ضرایب a و b ضرایب وزنی هستند که به فراخور نیاز

1 Robustness Margin-based Quantitative Feedback Theory (RMQFT)

گشتاور T خود تابعی از جریان موتور بوده و به صورت زیر به دست می‌آید:

$$T(t) = K_T i(t) \quad (23)$$

که در آن K_T و i به ترتیب ثابت گشتاور و جریان موتور هستند. جریان خود از معادله دیفرانسیل دیگری که به ولتاژ مربوط است محاسبه می‌شود. این معادله به شکل زیر است:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V(t) - K_b \dot{\theta}(t) \quad (24)$$

در این معادلات L ، R ، V ، K_b و K_T به ترتیب ضریب خودالقایی موتور، مقاومت الکتریکی موتور، ولتاژ و ضریب نیرو محرکه معکوس موتور^۱ هستند. در نهایت تابع تبدیل موقعیت به ورودی ولتاژ به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{K_b}{JLs^3 + (RJ + Lb)s^2 + (Rb + K_T K_b)s} \quad (25)$$

در ادامه برای بررسی بهتر و عملیاتی مساله یک مجموعه آزمایشی برای بررسی عملی مساله تهیه شد که شامل یک عدد موتور دی‌سی انکودر دارد، کارت آردوینو اونو^۲، منبع تغذیه، پایه نگهداری و سایر لوازم جانبی است. یک بازو و تعدادی مهره نیز برای ایجاد گشتاور (به عنوان اغتشاش خارجی) در آزمایش‌ها به کار رفته اند. شایان ذکر است که هر دو روش به علت آن که امکان استفاده از ساختارهای ساده و مرسوم کنترلی را دارند، قابلیت استفاده بالادرنگ^۳ در سیستم‌های واقعی را دارند؛ که نمونه عملی استفاده شده در این پژوهش یک نمونه از این موارد است. تصویر مجموعه آزمایشی در شکل ۵ آمده است. مشخصات موتور با استفاده از پاسخ سیستم حلقه باز و شناسایی سیستم^۴ تخمین زده شده است و نتایج آن در قالب شکل ۵ جدول ۱ ذکر شده است.

با مقایسه خروجی واقعی الکتروموتور با خروجی معادلات ۲۳ تا ۲۵) که مقادیر جدول فوق در آن قرار گرفته) بیشینه خطایی تخمین حدود ۳

در برخی موارد لازم است که نقطه کاری سیستم درون منحنی قرار بگیرد و گاهی خارج از آن. این مساله را می‌توان با محاسبه مقدار عبارت موجود در نامعادله با فرض $\Delta=1$ بررسی نمود.

حال نیاز است که مقایسه‌ای بین کلیات دو روش انجام شود. در تئوری بازخورد کمی بهینه‌سازی عملکرد سیستم در عمل به صورت یک مساله قیدی تعریف می‌شود که در آن سیستم طراحی شده باید تمامی معیارهای طراحی را در بازه عدم قطعیت تعریف شده برآورده سازد؛ ولی تئوری بازخورد کمی بر مبنای حدود مقاومت به صورت یک مساله بهینه‌سازی چندهدفه تعریف می‌شود که در آن حد مقاومت هر معیار طراحی بیشینه می‌شود. بنابراین در روش دوم، بر خلاف تئوری بازخورد کمی، امکان مقایسه مقاومت دو کنترلر مختلف از دید معیارهای مختلف مقدور است. تئوری بازخورد کمی پایداری و عملکرد مقاوم سیستم را به ازای بازه‌ی مشخصی از عدم قطعیت پارامتری تضمین می‌کند ولی در مورد مقادیر بیشتر عدم قطعیت حرفی به میان نمی‌آورد. روش تئوری بازخورد کمی بر مبنای حدود مقاومت، حد مقاومت سیستم را بر اساس تغییرات بهره و فاز معلوم می‌سازد و در مورد عدم قطعیت پارامتری ادعایی ندارد ولی می‌توان ارتباطی بین آن‌ها مشاهده نمود به نحوی که هرچقدر حاشیه مقاومت بیشتر باشد میزان تحمل عدم قطعیت پارامتری نیز بیشتر است.

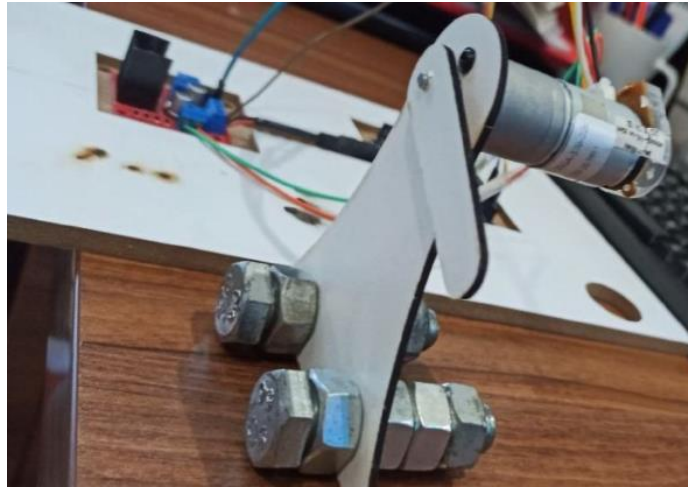
۳- نمونه مطالعاتی

در این قسمت روشی که در بخش قبلی معرفی شد بر روی یک سیستم نمونه مورد بررسی قرار می‌گیرد تا توانایی‌های آن مورد ارزیابی قرار گیرد. یکی از پرکاربردترین موارد استفاده روش تئوری بازخورد کمی در طراحی مقاوم سیستم کنترلی برای کنترل موقعیت و سرعت انواع الکتروموتورهاست [۳۰، ۳۱]. در ادامه و به عنوان نمونه مطالعاتی قصد بر آن است که کاربرد روش مطرح شده در مقاله را برای طراحی کنترلر مقاوم برای کنترل موقعیت یک موتور جریان مستقیم مورد بررسی قرار گیرد. معادله دیفرانسیل دوران موتور جریان مستقیم به صورت زیر است:

$$J\ddot{\theta}(t) + b\dot{\theta}(t) = T(t) - T_L(t) \quad (22)$$

در معادله فوق J ، b ، T ، T_L و به ترتیب ممان اینرسی موتور، ضریب استهلاک ویسکوز موتور، گشتاور موتور، گشتاور خارجی وارده (که به عنوان اغتشاش در نظر گرفته می‌شود) و موقعیت (زاویه) شفت موتور هستند.

- 1 Back Electro-Motor Force (Back EMF)
- 2 Arduino Uno
- 3 Real-Time
- 4 System Identification



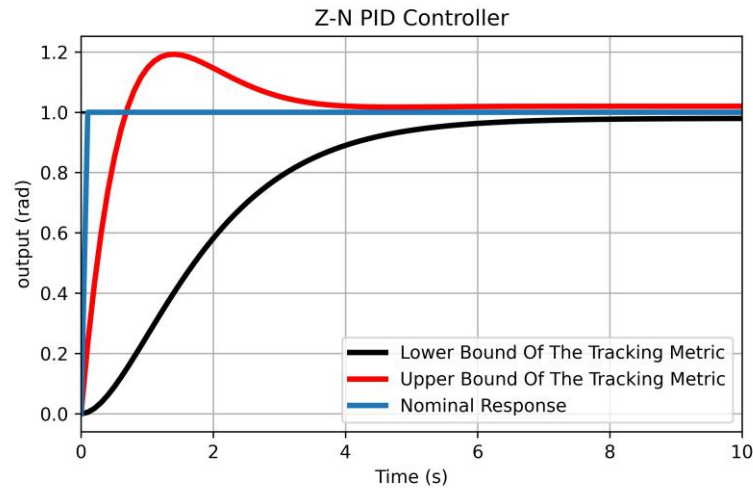
شکل ۵. سیستم آزمایشی مورد مطالعه

Fig. 5. The experiment setup

جدول ۱. مشخصات تخمینی الکتروموتور

Table 1. Estimated motor parameters

واحد	مقدار	مشخصه
kg.m ² /rad	$5/0.4 \times 10^{-5}$	J
H	$1/11 \times 10^{-6}$	L
N.m/(rad/s)	$5/12 \times 10^{-6}$	b
Ω	۴/۵	R
volt/(rad/s)	۰/۰۲۳	K _t
volt/(rad/s)	۰/۰۲۲	K _b



شکل ۶. خروجی کنترل کننده PID طراحی شده به روش زیگلر-نیکولز

Fig. 6. The output of the PID controller designed with the Zigler-Nichols method

در ادامه ضرایب کنترل کننده با استفاده از دو روش تنظیم شد که نتایج آن در قسمت بعد شرح داده می‌شود.

۴- نتایج

در ابتدا، برای آن که ضعف روش‌های کلاسیک طراحی نشان داده شود، نتایج کنترل کننده طراحی شده به روش زیگلر-نیکولز ارائه می‌شود. این دسته روش‌های کلاسیک علی‌رغم اینکه در مواردی کاربردی هستند نمی‌توانند در تمامی مسائل و برای برطرف ساختن نیازهای مختلف طراحی استفاده شوند. خروجی این کنترلر به صورت زیر است. مشاهده می‌شود که نمی‌توان خروجی دلخواه را با استفاده از این روش‌های ابتدایی به دست آورد و نیازهای طراحی در این صورت برآورده نمی‌شوند.

۴-۱- کنترل کننده بر اساس تئوری بازخورد کمی

در ابتدا با استفاده از تئوری بازخورد کمی و استفاده از روش شکل‌دهی حلقه^۲، ضرایب کنترل کننده تعیین شدند. برای این طراحی فرض شده است که عدم قطعیت پارامتری سیستم حدود ۲۰٪ است. ضرایب این کنترل کننده و همچنین باندهای طراحی به همراه مکان‌هندسی سیستم طراحی شده به ترتیب در قالب جدول ۲ و شکل ۷ ارائه شده‌اند. به منظور بررسی عملکرد کنترل کننده طراحی شده، پاسخ حالت نامی

درصد محاسبه شد. مشاهده می‌شود که ضرایب K_p و K_i بسیار نزدیک به هم هستند. این مساله در موتورهای جریان مستقیم امری مرسوم است. در گام بعد معیارهایی برای طراحی و ارزیابی الکتروموتور به صورت زیر تعریف شدند. این معیارها به ترتیب برای پایداری و حدود بالا و پایین ردیابی هستند که روابط آنها در ادامه ذکر شده است. ضرایب عددی این روابط با سعی و خطا به دست آمده است.

$$T_1(\omega) = \left| \frac{P(j\omega)G(j\omega)}{1+P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq 1.46 \quad (26)$$

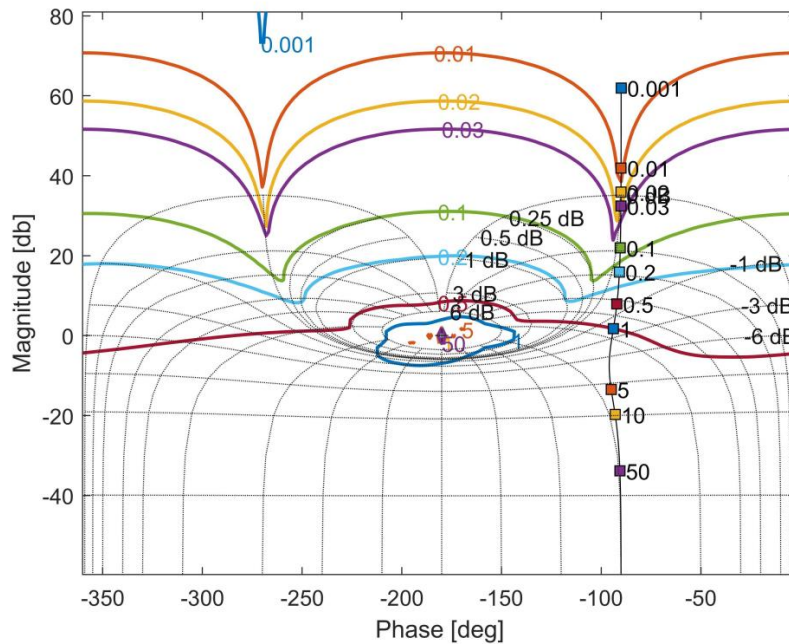
$$\frac{0.98}{s^2 + 2s + 1} \leq T_2(\omega) = \left| \frac{F(j\omega)P(j\omega)G(j\omega)}{1+P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \frac{1.02s + 1.02}{0.4096s^2 + 1.024s + 1} \quad (27)$$

با فرض اینکه پیش فیلتر وجود ندارد، جبران‌ساز حلقه میانی در یک فرآیند سعی و خطا در دو حالت محاسبه شده است. کنترلر حلقه میانی از نوع تناسبی-مشتقگیر^۱ انتخاب شد. فرکانس‌های مطالعاتی شامل $\Omega = [0.001, 0.01, 0.02, 0.03, 0.1, 0.2, 0.5, 1, 5, 10, 50]$ هستند.

جدول ۲. ضرایب کنترل طراحی شده بر اساس تئوری بازخورد کمی

Table 2. QFT controller parameters

K_d	K_p
۰/۰۱۹	۰/۰۲۵



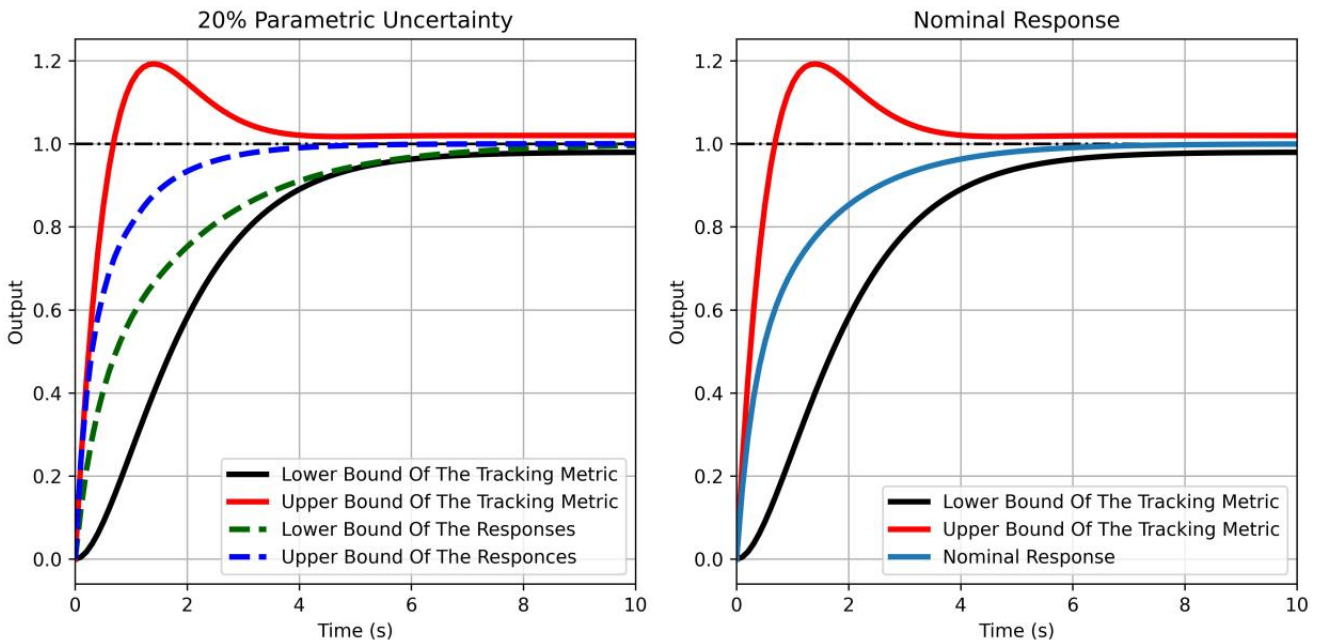
شکل ۷. باندهای طراحی برای کنترل به دست آمده از تئوری بازخورد کمی

Fig. 7. Design Bounds for the QFT setup

سیستم و همچنین پاسخ آن در حضور عدم قطعیت پارامتری ۲۰ درصدی در شکل ۸ به نمایش درآمده است. پاسخ سیستم در حضور عدم قطعیت برای ۱۰۰۰ نمونه تصادفی بررسی و ترسیم شده است. برای هر دو حالت نامی و غیرنامی، باندهای بالای معیار ردیابی ترسیم شده است تا پاسخ سیستم با آن مقایسه شود. همچنین برای حالت غیرنامی باندهای بالا و پایین پاسخ مشخص شده است.

با توجه به پاسخ زمانی سیستم نیز می‌توان دریافت که در حالت نامی پاسخ سیستم در باند طراحی شده خود قرار گرفته است. زمان نشست و خطای حالت ماندگار سیستم در این حالت به ترتیب حدود ۵/۳ ثانیه و ۴ تا ۸ ثانیه است. البته شاهد آن هستیم که در بازه زمانی ۰ تا ۰/۳ ثانیه حد

۰/۰۱ هستند. در پاسخ حالت نامی سیستم فراجهدش و یا فروجهشی مشاهده نمی‌شود. پاسخ حالت نامی در ابتدا به حد بالای معیار ردیابی نزدیک‌تر است و به مرور از آن فاصله گرفته و دوباره به آن نزدیک می‌شود. از سوی دیگر فاصله پاسخ حالت نامی تا حد پایین معیار ردیابی با زمان کاهش می‌یابد. همچنین با توجه به پاسخ سیستم در حضور عدم قطعیت مشاهده می‌شود سیستم به صورت کامل در حضور عدم قطعیت ۲۰ درصدی موفق به برآورده سازی معیارهای طراحی خود شده است. در این حالت نیز فراجهدشی در هیچ یک از نمونه‌ها مشاهده نمی‌شود. بازه تغییرات زمان نشست سیستم نیز بین ۴ تا ۸ ثانیه است. البته شاهد آن هستیم که در بازه زمانی ۰ تا ۰/۳ ثانیه حد



شکل ۸. پاسخ سیستم طراحی شده با تئوری بازخورد کمی در حالت نامی و در حضور عدم قطعیت

Fig. 8. QFT setup response in the nominal condition and in the presence of uncertainty

تعیین شده خود در زمان طراحی بالاتر باشد، امکان شکست سیستم در برآورده‌سازی نیازهای طراحی و عبور از حدود معیارها امکان‌پذیر است. همان‌گونه که انتظار می‌رود هرچه میزان عدم قطعیت بیشتر باشد، احتمال شکست سیستم نیز افزایش می‌یابد. با افزایش مقدار عدم قطعیت پاسخ سیستم حاضر هم از حد بالا و هم از حد پایین معیار ردیابی تجاوز نموده است. احتمال عدم برآورده‌سازی معیار حد بالای ردیابی در بازه زمانی کمتر از $\frac{1}{3}$ بیشتر است و پس از رسیدن سیستم به حالت ماندگار، پاسخ آن از حد بالای معیار تعدی نمی‌کند. این مساله برای حد پایین معیار صادق نیست و حد پایین پاسخ در حالت ماندگار به ازای عدم قطعیت بیشتر از ۴۰ درصد، حتی پس از رسیدن به شرایط حالت ماندگار نیز می‌تواند کمتر از حد پایین معیار باشد.

۴-۲- کنترل کننده بر اساس تئوری بازخورد کمی بر مبنای حدود مقاومت در گام بعدی با استفاده از تئوری بازخورد کمی بر مبنای حدود مقاومت کنترل کننده دیگری برای سیستم طراحی شد. به این منظور یک مساله بهینه‌سازی تعریف شده که هدف آن بیشینه‌سازی حدود مقاومت معیارهای مساله انتخاب شده است. برای حل این مساله از الگوریتم ژنتیک چندهدفه

بالای پاسخ به حد بالای معیار ریابی بسیار نزدیک است و عملاً بر روی آن قرار دارد. از طرف دیگر پاسخ حالت ماندگار سیستم به حد پایین معیار طراحی نزدیک‌تر است. این موارد حاکی از آن است که احتمال دارد پاسخ سیستم در صورت مواجهه با مقادیر بالاتر عدم قطعیت، در بازه‌های زمانی آغازین و پایانی به ترتیب از حد بالا و حد پایین معیار ردیابی تجاوز کند.

حدود مقاومت برای سه معیار انتخابی محاسبه شده که در جدول ۳ ارائه شده‌اند. ضرایب وزنی a و b در این طراحی به ترتیب برابر ۱ و ۱۰ هستند که با سعی و خطا و همچنین بررسی حساسیت سیستم به تغییرات بهره و فاز انتخاب شده است. مشاهده می‌شود که حد مقاومت باند بالای معیار ردیابی حدود ۲ برابر باند پایین آن است که با نتایج به نمایش درآمده در شکل ۸ مطابقت دارد و نشان می‌دهد که احتمال تعدی سیستم از حد پایین ردیابی، در حضور عدم قطعیت پارامتری بالای ۲۰ درصد، بیشتر است.

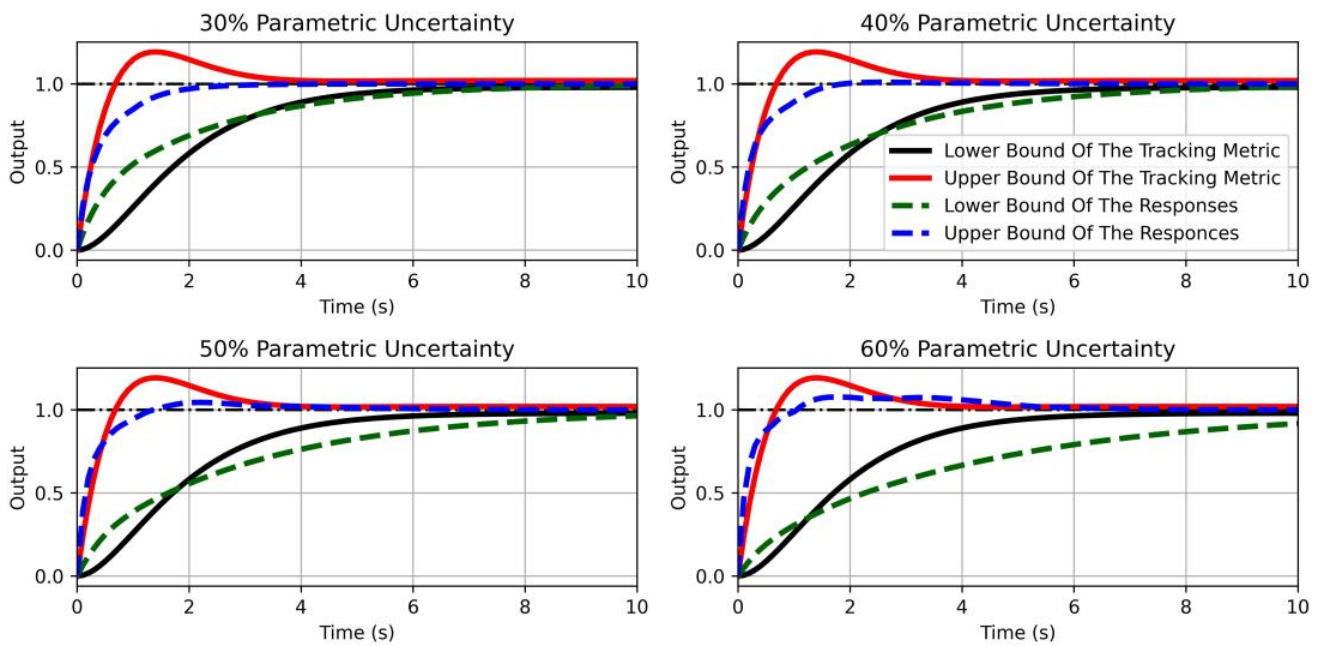
در ادامه برای آن که مقاومت کنترل طراحی شده با استفاده از تئوری بازخورد کمی نسبت به مقادیر بالاتر عدم قطعیت پارامتری بررسی شود، پاسخ سیستم در حضور عدم قطعیت با حدود ۳۰ تا ۶۰ درصدی محاسبه شده که در قالب شکل ۹ به نمایش درآمده است.

به وضوح می‌توان دید که در صورتی که میزان عدم قطعیت از مقدار

جدول ۳. حدود مقاومت کنترل کننده طراحی شده با تئوری بازخورد کمی

Table 3. QFT controller robustness margins

حد مقاومت باند پایین	حد مقاومت باند بالای	حد مقاومت پایداری
ردیابی	ردیابی	
۰/۹۶	۱/۸۶	۵/۹۸



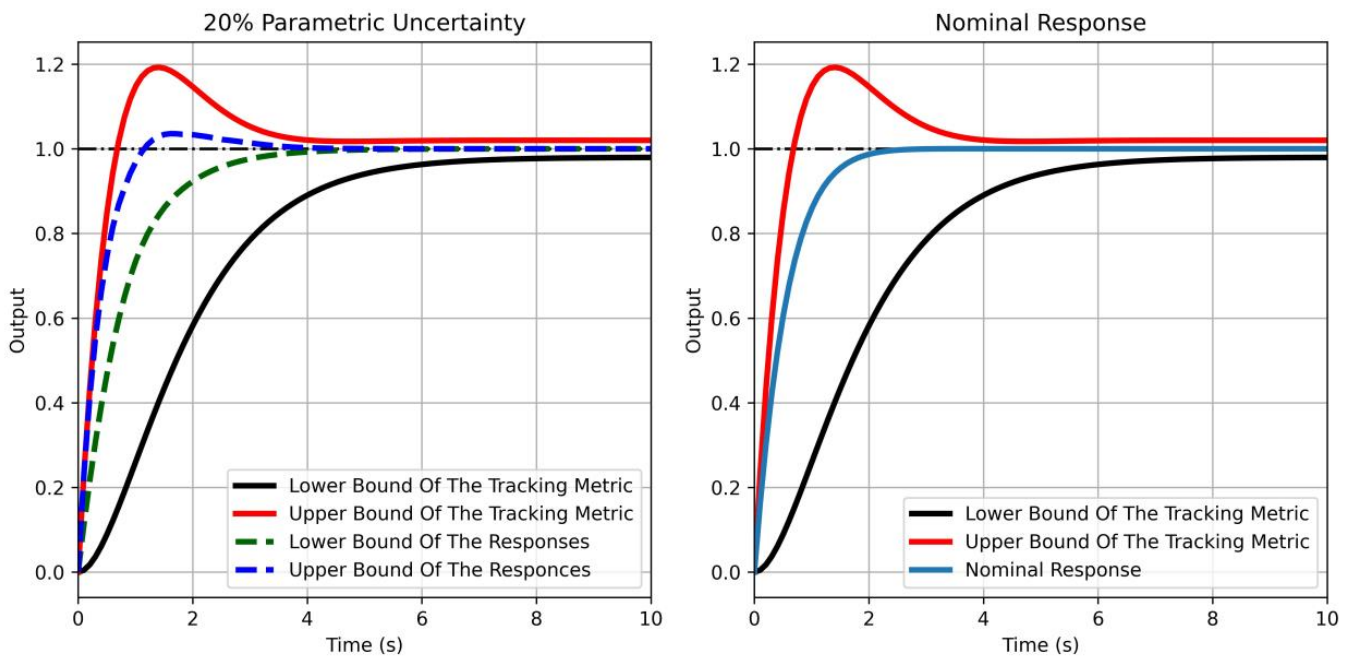
شکل ۹. پاسخ سیستم طراحی شده بر اساس تئوری بازخورد کمی در حضور عدم قطعیت بالاتر از ۲۰ درصد

Fig. 9. QFT controller outputs for uncertainties more than 20%

جدول ۴. ضرایب کنترلی و حدود مقاومت کنترل کننده طراحی شده بر اساس تئوری بازخورد کمی بر مبنای حدود مقاومت

Table 4. RMQFT controller parameters and robustness margins

حد مقاومت باند پایین ردیابی	حد مقاومت باند بالای ردیابی	حد مقاومت پایداری	K_d	K_p
۳/۰۶	۲/۱۴	۴/۴۲	۰/۰۱۷	۰/۰۴۷



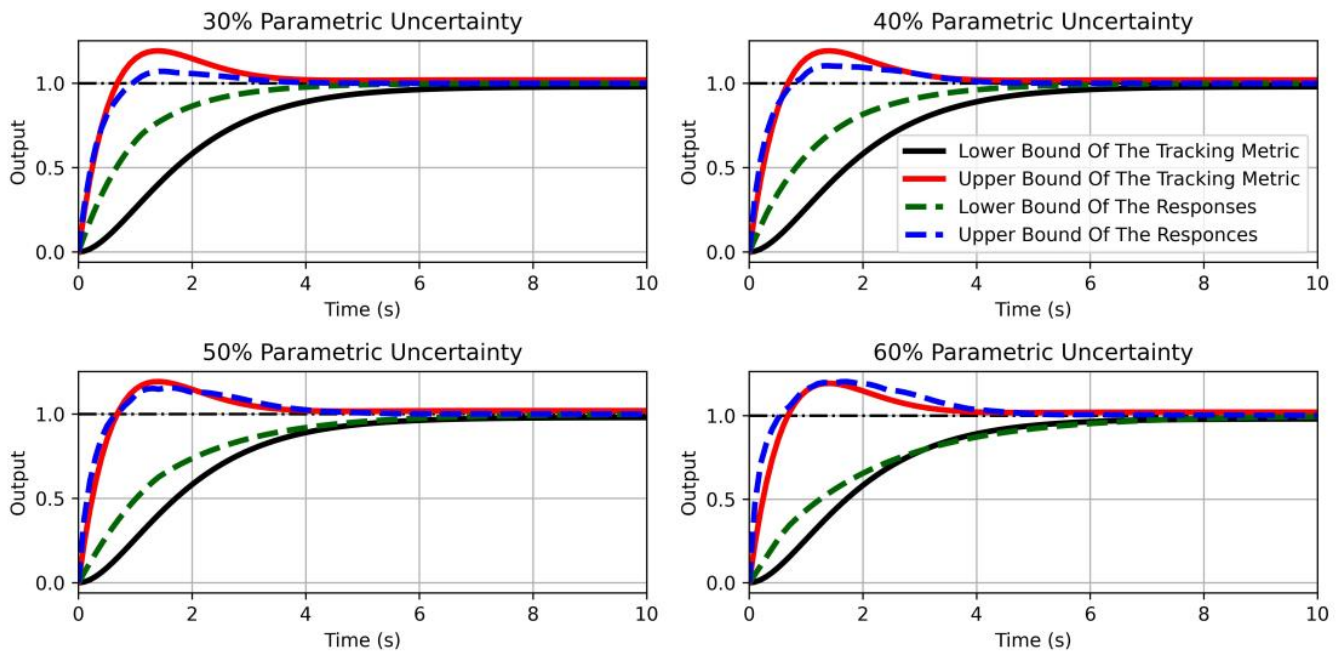
شکل ۱۰. پاسخ سیستم طراحی شده بر اساس تئوری بازخورد کمی بر مبنای حدود مقاومت در حالت نامی و در حضور عدم قطعیت

Fig. 10. RMQFT controller output in the nominal condition and in the presence of uncertainty

سیستم نامی در حضور این کنترلر کمتر از مورد قبل و حدود ۲/۱ ثانیه است. خطای حالت ماندگار نیز صفر است. پاسخ حالت ماندگار بر خلاف نمونه قبلی فاصله تقریباً برابری با حدود بالا و پایین معیار ردیابی دارد. در این نمونه نیز در حالت نامی فراجاهش مشاهده نمی‌شود. در حضور عدم قطعیت ۲۰ درصدی پاسخ سیستم کاملاً در محدوده مد نظر قرار گرفته است. بر خلاف کنترلر طراحی شده بر اساس تئوری بازخورد کمی در اینجا در حضور عدم قطعیت سیستم میتواند دچار فراجاهش بشود که بیشینه مقدار آن حدود ۴ درصد است. این مشاهده با مقدار حد مقاومت پایداری سیستم همخوانی دارد. حد مقاومت پایداری کنترلر طراحی شده به روش اصلاحی از کنترلر طراحی

استفاده شده است. مشخصات کنترل کننده انتخاب شده در قالب جدول ۴ ارائه شده است. مشاهده می‌شود که اگرچه در این حالت حد مقاومت پایداری از کنترل طراحی شده به روش مرسوم تئوری بازخورد کمی کمتر است ولی حدود مقاومت باندهای بالا و پایین ردیابی بیشتر هستند. بنابراین انتظار می‌رود به ازای مقادیر مختلف عدم قطعیت پارامتری احتمال تعدی سیستم از باندهای مجاز خود کمتر باشد.

پاسخ حالت نامی سیستم و پاسخ آن در حضور عدم قطعیت پارامتری ۲۰ درصدی به صورت شکل ۱۰ و در قالب به نمایش درآمده است. در مورد پاسخ حالت نامی سیستم در این مورد باید گفت که زمان نشست



شکل ۱۱. پاسخ سیستم طراحی شده بر اساس تئوری بازخورد کمی بر مبنای حدود مقاومت در حضور عدم قطعیت‌های بالاتر از ۲۰ درصد

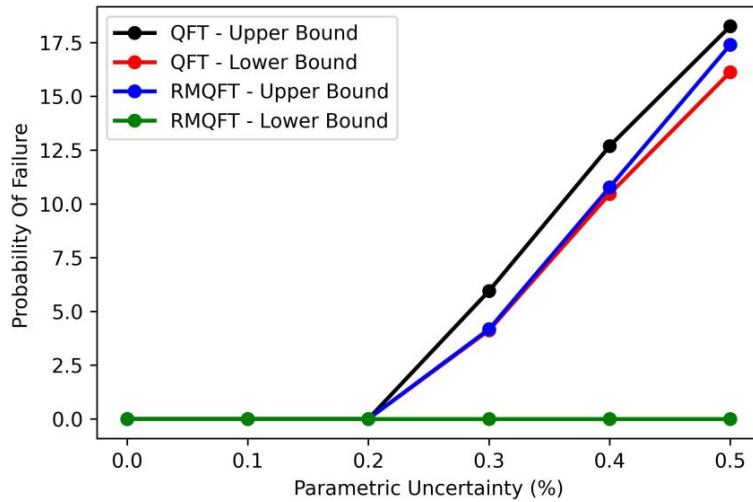
Fig. 11. RMQFT controller output for uncertainties more than 20%

۴-۳- مقایسه

به منظور مقایسه بهتر عملکرد دو سامانه، احتمال شکست^۱ آن‌ها در برآورده سازی معیار ردیابی مقایسه شده است. این نتایج در قالب شکل ۱۲ به نمایش درآمده است. مشاهده می‌شود که همانطور که انتظار می‌رود احتمال شکست هر دو سیستم برای تمامی موارد به ازای عدم قطعیت‌های کمتر از ۲۰ درصد برابر صفر است و هیچ یک از آن‌ها به ازای این مقادیر نامینی از حدود بالا و پایین معیار ردیابی عبور نمی‌کنند. همچنین مشاهده می‌شود که به ازای مقادیر بالاتر عدم قطعیت (تا ۵۰ درصد) سیستم اصلاحی از حد پایین معیار ردیابی عبور نکرده و احتمال شکست آن صفر است. در مورد حد بالای ردیابی نیز می‌توان دید که احتمال شکست سیستم اصلاحی به ازای مقادیر مختلف عدم قطعیت کمتر از سیستم اولیه بوده است. به صورت کلی از منظر حدود بالا و پایین معیار ردیابی سیستم طراحی شده بر مبنای حدود مقاومت رفتار بهتری داشته که با مقادیر حدود مقاومت آن تطابق دارد.

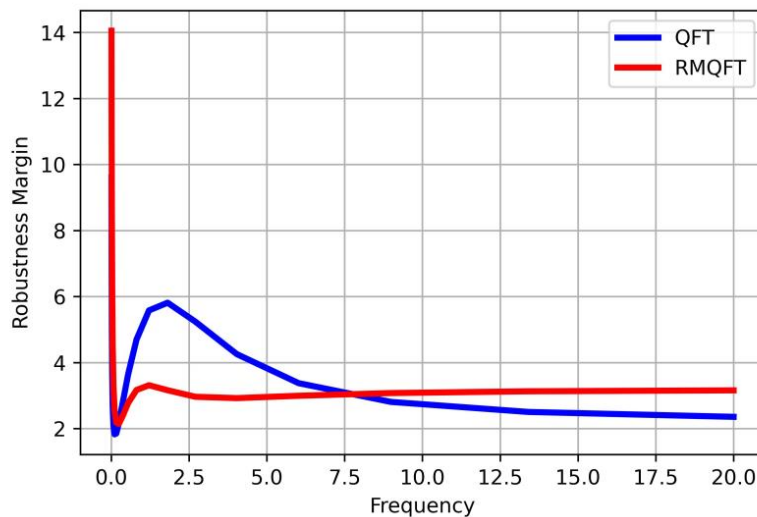
شده به روش مرسوم کمتر است و طبیعی است که احتمالاً و مقدار فراجاهش در این حالت بیشتر باشد. زمان نشست سیستم در این قسمت حدود ۳/۹ ثانیه است و در نمونه‌های مختلف عدم قطعیت تفاوت محسوسی نداشته است. پاسخ سیستم در حضور عدم قطعیت‌های پارامتری بالاتر از ۲۰ درصد در بررسی شده است. در این حالت فراجاهش سیستم به طور میانگین بالاتر و زمان نشست آن کمتر است. در صورت استفاده از این کنترلر میزان عبور پاسخ سیستم از معیار حد پایین ردیابی به صورت ملموسی کاهش یافته است که این مساله با اختلاف حد مقاومت این معیار در دو سیستم همخوانی دارد. عملاً تا زمانی که عدم قطعیت پارامتری کمتر از ۶۰٪ باشد نمونه‌ای مشاهده نمی‌شود که از حد پایین معیار ردیابی عبور نماید. در مورد حد بالای معیار ردیابی شرایط به گونه‌ای دیگر است. از منظر میزان تعدی از بالای معیار ردیابی نتایج این قسمت مشابه حالتی است که از روش مرسوم برای طراحی کنترلر استفاده شده است. این مساله با نزدیکی مقادیر حد مقاومت سیستم در دو روش تطابق دارد.

1 Probability Of Failure (POF)



شکل ۱۲. احتمال شکست کنترل‌کننده‌ها در برآورده سازی معیار ردیابی

Fig. 12. POF of the controllers in tracking the setpoint

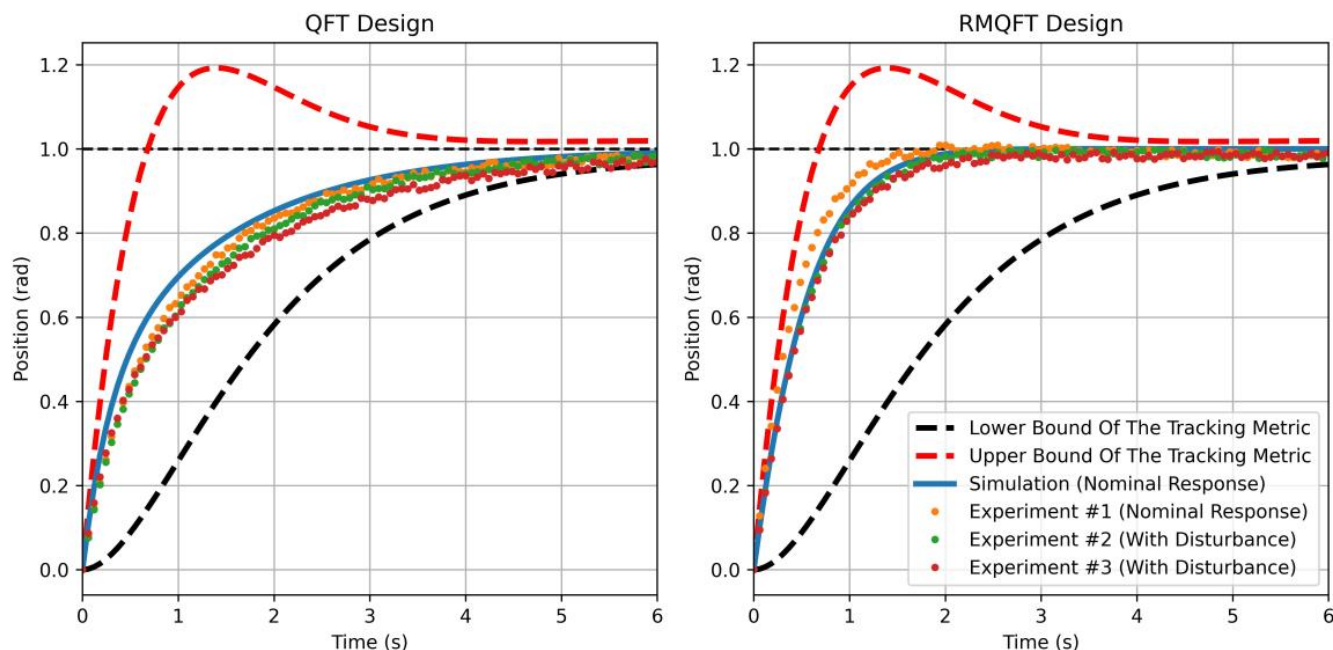


شکل ۱۳. مقایسه حدود مقاومت معیار حد بالای ردیابی برای کنترل‌های طراحی شده

Fig. 13. Comparison of robustness margin for the upper bound of tracking in the controllers

حدود مقاومت در فرکانس‌های نزدیک به صفر حد مقاومت بالاتری دارد که نشان می‌دهد پاسخ حالت ماندگار آن عملکرد مقاومتری دارد؛ که با نتایج نیز منطبق است. همچنین در فرکانس‌های ۱ تا ۷/۵ حد مقاومت کنترل‌کننده مرسوم بالاتر است که با عملکرد مقاوم‌تر این کنترل‌کننده در حالت گذرا ارتباط دارد. باید توجه داشت که معیار انتخاب کنترل‌کننده در قسمت طراحی بر مبنای حدود مقاومت کمینه مقدار حد مقاومت به ازای تمامی فرکانس‌ها

نکته دیگری که در مقایسه نتایج دو سیستم در شکل‌های ۷ تا ۱۰ مشاهده می‌شود آن است که درصد عبور پاسخ از معیار حد بالای ردیابی در قسمت گذرا و مانگار به ترتیب در کنترل طراحی شده به روش اصلاحی و اولیه بیشتر است. برای ریشه یابی این مسائل باید بر رفتار فرکانسی دو کنترلر عمیق‌تر شد. شکل ۱۳ میزان حد مقاومت معیار حد بالای ردیابی را در دو سیستم نشان می‌دهد. می‌توان دید که کنترلر طراحی شده بر مبنای



شکل ۱۴. مقایسه نتایج عملی و شبیه‌سازی در دو سیستم

Fig. 14. Experimental results of the QFT and RMQFT controllers

خارجی ظاهر شود. نتایج حاکی از آن است که در حضور هر دو کنترل کننده نتایج شبیه‌سازی و تست عملی در حالت نامی به همدیگر نزدیک است. بیشترین خطای مدل در این دو حالت حدود ۱۰٪ است. مدل‌سازی در حضور کنترل کننده مرسوم پاسخ اندکی بیشتر از داده‌های اندازه‌گیری شده را نشان می‌دهد. این در حالی است که در حضور کنترل کننده بر مبنای حدود مقاومت پاسخ مدل اندکی از داده‌های اندازه‌گیری شده کمتر است. در حضور کنترل کننده اولیه در صورت اعمال اغتشاش خارجی بیشترین تغییرات مشاهده شده در آزمون شماره ۲ نسبت به نتایج شبیه‌سازی و آزمون عملی نامی (شماره ۱) به ترتیب برابر ۷ و ۲/۵ درصد است. این مقادیر برای آزمون شماره ۳ به ترتیب برابر ۱۷ و ۹ درصد است. مقادیر ذکر شده در حضور کنترل کننده بر مبنای حدود مقاومت به ترتیب ۳ و ۷ درصد برای آزمون شماره ۲ و ۵ و ۸ درصد برای آزمون شماره ۳ هستند. این نتایج نشان می‌دهد که در عمل پاسخ سیستم غیرنامی در حضور کنترل کننده بر مبنای حدود مقاومت به شبیه‌سازی صورت گرفته نزدیک‌تر است.

بوده است؛ در صورتی که نتایج این بخش نشان می‌دهد گاهی نیاز است که نگاه جامع‌تری به مساله داشت و به عنوان برآیندی از حد مقاومت در کل بازه فرکانسی را مورد استفاده قرار داد. به عنوان مثال می‌توان از نرم یا مقدار موثر حد مقاومت در این بازه استفاده کرد. این مساله موضوع پژوهش‌های آتی خواهد بود.

۴-۴ نتایج تجربی

حال به بررسی نتایج عملی اعمال دو کنترل کننده طراحی شده بر سیستم عملی پرداخته خواهد شد. به این منظور نتایج عملی سیستم در حالت نامی و در حضور عدم قطعیت در حضور هر دو کنترل کننده اندازه‌گیری شده و در قالب شکل ۱۴ به نمایش درآمده است. آزمایش عملی هر قسمت در سه حالت انجام گرفته است. حالت اول با شرایط نامی صورت پذیرفته است. در حالت‌های دوم و سوم جرم‌هایی ۱۱۰ و ۲۲۰ گرمی به انتهای بازوی متصل به شفت موتور اضافه شده است تا به عنوان عدم قطعیت در قالب اغتشاش

۵- جمع‌بندی

• می‌توان عملکرد و پایداری سیستم را در فرکانس‌های مختلف، با محاسبه حدود مقاومت در آن فرکانس‌ها، مورد ارزیابی قرار داد. با محاسبه این حدود در هر فرکانس می‌توان گفت که سیستم در فرکانس مد نظر از دید هر معیاری تا چه اندازه رفتار مقاومی از خود نشان می‌دهد و تا چه اندازه می‌تواند تحت اثر عدم قطعیت نیازهای آن معیار را برآورده سازد.

• مانند تئوری بازخورد کمی در اینجا نیز طراحی برای سیستم‌های خطی مینیمم‌فاز در حوزه فرکانس صورت می‌گیرد. به همین دلیل نیاز است تا طراح دید مناسبی به فرکانس‌های کاری سیستم داشته باشد. محاسبه این حاشیه‌ها برای سیستم‌های غیر خطی و غیر مینیمم‌فاز می‌تواند موضوع مطالعات آتی باشد. همچنین انتخاب ضرایب وزنی مناسب می‌تواند یکی از چالش‌های این روش طراحی باشد.

منابع

- [1] Y. Gao, J. Wang, S. Gao, Y. Cheng, An integrated robust design and robust control strategy using the genetic algorithm, *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 17(12) (2021) 8378-8386.
- [2] C. Polton, E. Boje, Quantitative feedback theory design of valve position control for co-ordinated superheater control of main steam temperatures of power plant boilers, *IFAC-PapersOnLine*, 53(2) (2020) 13070-13075.
- [3] M. Honari-Torshizi, H. Rahmani, H. Moeinkhah, M.R. Gharib, J. Jahanpour, A QFT robust controller as a remedy for TRMS, *Aviation*, 24(4) (2020) 137-148.
- [4] I.R. Petersen, R. Tempo, Robust control of uncertain systems: Classical results and recent developments, *Automatica*, 50(5) (2014) 1315-1335.
- [5] S. Bhattacharyya, Robust control under parametric uncertainty: An overview and recent results, *Annual Reviews in Control*, 44 (2017) 45-77.
- [6] D. Wang, H. He, D. Liu, Adaptive critic nonlinear robust control: A survey, *IEEE transactions on cybernetics*, 47(10) (2017) 3429-3451.
- [7] J. Moos, K. Hansel, H. Abdulsamad, S. Stark, D. Clever, J. Peters, Robust reinforcement learning: A review of foundations and recent advances, *Machine Learning and Knowledge Extraction*, 4(1) (2022) 276-315.
- [8] M. Harutyunyan, F. Holweck, D. Sugny, S. Guérin,

در این مقاله روشی برای بررسی مقاومت سیستم‌های کنترلی خطی حلقه بسته، بر اساس محاسبه حاشیه‌های مقاومت پایداری و عملکرد در حوزه فرکانسی، با عنوان تئوری بازخورد کمی بر مبنای حدود مقاومت معرفی شد که در آن از تلفیقی وزن‌دار از حاشیه‌های بهره و فاز به منظور محاسبه و مقایسه مقاومت سیستم استفاده شده است. این شیوه بر روی معیارهای مطرح شده در روش کنترل بازخورد کمی اعمال شده و حاشیه‌های مقاومت برای هر یک از این معیارها محاسبه شد. به منظور بررسی کارایی سنجش عملکرد، این روش و معیارهای مطرح شده در آن برای طراحی سیستم کنترلی حلقه بسته کنترل موقعیت یک موتور جریان مستقیم استفاده شد. مقادیر عددی پارامترهای مدل ریاضی سیستم از روی یک سیستم آزمایشگاهی و با استفاده از شناسایی سیستم به دست آمد و دو نمونه سیستم حلقه بسته بر اساس روش‌های مرسوم و اصلاحی برای آن طراحی شد. نتایج حاصله به صورت زیر جمع‌بندی می‌شوند:

- کنترل‌کننده طراحی شده به روش تئوری بازخورد کمی در بازه عدم قطعیت طراحی خود به خوبی کار می‌کند ولی تضمینی برای پایداری و عملکرد مقاوم آن به ازای مقادیر بیشتر عدم قطعیت وجود ندارد و معیارهای طراحی الزاما برآورده نمی‌شوند.
- در هر دو حالت نظری و تجربی کنترل‌کننده بر مبنای حدود مقاومت به نتایج بهتری دست یافته است و رفتار مقاوم‌تری نشان داده است.
- استفاده از کمینه مقدار حد مقاومت در تئوری بازخورد کمی بر مبنای حدود مقاومت ممکن است در مواردی تمامی جوانب مساله را پوشش ندهد، زیرا صرفاً بدترین عملکرد سیستم را مد نظر قرار می‌دهد و می‌توان از سایر روش‌ها مانند محاسبه نرم دوم تابع حد مقاومت در کل بازه فرکانسی استفاده نمود. نیاز است در تحقیقات آینده این مساله و روش‌های جایگزین بررسی شود.

نقاط قوت و چالش‌های این روش نیز به شرح زیر هستند:

- به علت آن که با استفاده از روش معرفی شده امکان آن فراهم می‌شود که مقاومت سیستم‌های مختلف را، از دید معیارهای مختلف طراحی، با یکدیگر مقایسه نمود، می‌توان آن را به عنوان یک روش طراحی مقاوم چند هدفه به حساب آورد.
- محاسبات این روش به صورت خودکار قابل اجرا هستند و می‌توان آن را با روش‌های بهینه‌سازی ترکیب کرد تا بتوان مقاومت سیستم را به حداکثر میزان خود رسانید.

- systems, in: 12th International Conference on Guidance, Navigation & Control Systems, 2023.
- [20] P. Seiler, A. Packard, P. Gahinet, An introduction to disk margins [lecture notes], IEEE Control Systems Magazine, 40(5) (2020) 78-95.
- [21] M.F. Barrett, Conservatism with robustness tests for linear feedback control systems, in: 1980 19th IEEE Conference on Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes, IEEE, 1980, pp. 885-890.
- [22] Z. Chen, B. Yao, Q. Wang, μ -Synthesis-Based Adaptive Robust Control of Linear Motor Driven Stages With High-Frequency Dynamics: A Case Study, IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 20(3) (2014) 1482-1490.
- [23] K. Zhou, P.P. Khargonekar, J. Stoustrup, H.H. Niemann, Robust performance of systems with structured uncertainties in state space, Automatica, 31(2) (1995) 249-255.
- [24] J. Li, T.-C. Tsao, Robust performance repetitive control systems, J. Dyn. Sys., Meas., Control, 123(3) (2001) 330-337.
- [25] M. Doostmohammadian, H. Zarrabi, H.R. Rabiee, U.A. Khan, T. Charalambous, Distributed detection and mitigation of biasing attacks over multi-agent networks, IEEE Transactions on Network Science and Engineering, 8(4) (2021) 3465-3477.
- [26] M. Doostmohammadian, H. Zarrabi, T. Charalambous, Sensor fault detection and isolation via networked estimation: rank-deficient dynamical systems, International Journal of Control, 96(11) (2023) 2853-2870.
- [27] P. Nataraj, G. Sardar, Computation of QFT bounds for robust sensitivity and gain-phase margin specifications, J. Dyn. Sys., Meas., Control, 122(3) (2000) 528-534.
- [28] J.L. Guzmán, J.C. Moreno, M. Berenguel, F. Rodríguez, J. Sánchez-Hermosilla, A frequency domain quantitative technique for robust control system design, Robust Control, Theory and Applications, (2011) 391-405.
- [29] Y. Chait, O. Yaniv, Multi-input/single-output computer- Digital Optimal Robust Control, Physical Review Letters, 131(20) (2023) 200801.
- [9] M. Garcia-Sanz, Robust control engineering: practical QFT solutions, CRC press, 2017.
- [10] I. Horowitz, Fundamental theory of automatic linear feedback control systems, IRE Transactions on Automatic Control, 4(3) (1959) 5-19.
- [11] I.M. Horowitz, Synthesis of feedback systems, Elsevier, 2013.
- [12] J.C. Doyle, Quantitative feedback theory (QFT) and robust control, in: 1986 American Control Conference, IEEE, 1986, pp. 1691-1698.
- [13] W.-H. Chen, D.J. Ballance, QFT design for uncertain non-minimum phase and unstable plants revisited, International journal of control, 74(9) (2001) 957-965.
- [14] Z. Li, W. Zhou, H. Liu, Robust controller design of non-minimum phase hypersonic aircrafts model based on quantitative feedback theory, The Journal of the Astronautical Sciences, 67 (2020) 137-163.
- [15] T. Kobaku, R. Poola, V. Agarwal, Design of robust PID controller using PSO-based automated QFT for nonminimum phase boost converter, IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 69(12) (2022) 4854-4858.
- [16] Y.-J. Wang, Determination of all feasible robust PID controllers for open-loop unstable plus time delay processes with gain margin and phase margin specifications, ISA transactions, 53(2) (2014) 628-646.
- [17] N. Sayyaf, M.S. Tavazoei, Desirably adjusting gain margin, phase margin, and corresponding crossover frequencies based on frequency data, IEEE Transactions on Industrial Informatics, 13(5) (2017) 2311-2321.
- [18] M. Giaccagli, V. Andrieu, S. Tarbouriech, D. Astolfi, Infinite gain margin, contraction and optimality: an LMI-based design, European Journal of Control, 68 (2022) 100685.
- [19] F. Somers, C. Roos, F. Sanfedino, S. Bennani, V. Preda, Extension of probabilistic gain, phase, disk and delay margins for multi-input multi-output space control

- IEEE, 2020, pp. 1-6.
- [31] J.L. Krishnankutty, A.A.P. Thomas, S. Srivastava, Quantitative feedback theory based robust speed control of vector controlled induction motor, *Bulletin of Electrical Engineering and Informatics*, 12(1) (2023) 121-130.
- aided control design using the quantitative feedback theory, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 3(1) (1993) 47-54.
- [30] R. Čápková, A. Kozáková, M. Minár, K. Ondrejčka, Robust QFT-based control of the DC motor laboratory model, in: 2020 *Cybernetics & Informatics (K&I)*,

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. R. Hadipour, A. Jamali, N. Nariman-zadeh, B. Miripour Fard, *Application of Gain and Phase Margins for Designing Robust Controllers within Quantitative Feedback Theory*, *Amirkabir J. Mech Eng.*, 56(7) (2024) 931-954.

DOI: [10.22060/mej.2024.23255.7736](https://doi.org/10.22060/mej.2024.23255.7736)



