

## بررسی اثرات سطحی بر روی ارتعاشات آزاد پیچشی نانوتیرها

رضا ناظم‌نژاد

دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه دامغان، دامغان، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۲۲ مرداد ۱۳۹۴  
بازنگری: ۱۸ مهر ۱۳۹۴  
پذیرش: ۱۳ آبان ۱۳۹۴  
ارائه آنلاین: ۲ دی ۱۳۹۴

### کلمات کلیدی:

نانوتیر  
ارتعاشات پیچشی  
فرکانس طبیعی  
اثرات سطحی

**چکیده:** در این مقاله، ارتعاشات آزاد پیچشی نانوتیرها با در نظر گرفتن اثرات سطحی بررسی شده است. بدین منظور، معادله حرکت نانوتیر با در نظر گرفتن مولفه‌های اثرات سطحی با استفاده از اصل همپلتون و بر اساس تئوری الاستیسیته سطحی استخراج شده است. سپس معادلات حرکت به ازای سه شرط مرزی گیردار-گیردار، گیردار-آزاد و آزاد-آزاد به صورت تحلیلی حل شده و فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای نانوتیر به دست آمده است. به منظور گزارش نتایج عددی، از نانوتیری با مقطع دایروی و از جنس آلومینیوم و سیلیکون استفاده شده است. در ادامه، میزان تاثیرگذاری مولفه‌های اثرات سطحی بر روی فرکانس‌های پیچشی طبیعی نانوتیر به ازای مقادیر مختلف برای طول، شعاع و شماره فرکانس نانوتیر بررسی شده است. همچنین میزان تاثیرگذاری هر یک از مولفه‌های اثرات سطحی بر روی فرکانس‌های طبیعی به طور جداگانه بررسی شده است. یکی از نتایج مهم این پژوهش این است که تاثیرگذاری مولفه‌های اثرات سطحی بر روی ارتعاشات آزاد پیچشی نانوتیرها کاملاً متفاوت از آنچه که برای ارتعاشات آزاد عرضی نانوتیرها گزارش شده است می‌باشد. نتایج این پژوهش می‌تواند در طراحی سیستم‌های نانوالکترومکانیکی مانند نانو یاتاقان‌ها و سروو موتورهای دوار مفید باشد.

### ۱- مقدمه

مقایسه نتایج تئوری کلاسیک با نتایج آزمایشگاهی سازه‌های نانو مقیاس نشان داده است که رفتار این سازه‌ها قابل تفسیر با استفاده از تئوری‌های کلاسیک نیست که مهمترین دلایل این اختلاف ناشی از وجود اثر اندازه و مولفه‌های اثرات سطحی است. به منظور بررسی اثر اندازه، تئوری‌های مختلفی پیشنهاد شده است که یکی از پرکاربردترین آنها تئوری الاستیسیته غیرمحلی [۱] است. این تئوری بیان می‌کند که تنش در یک نقطه از نانو سازه، نه تنها به کرنش در آن نقطه بلکه به کرنش در تمام نقاط جسم بستگی دارد. برای بررسی مولفه‌های اثرات سطحی نیز تئوری الاستیسیته سطحی [۲، ۳] پیشنهاد شده است که در آن سطح جسم به عنوان پوسته‌ای دو بعدی مدل می‌شود که به اطراف جسم به گونه‌ای چسبیده است که قابلیت لغزش بین سطح و حجم جسم وجود ندارد. دلیل در نظر گرفتن مولفه‌های اثر سطحی این است که در سازه‌های نانومقیاس، نسبت انرژی ذخیره شده در سطح به انرژی ذخیره شده در حجم قابل توجه می‌شود بطوریکه که نمی‌توان از این انرژی مشابه آنچه برای سازه‌های ماکرو انجام می‌شود صرف نظر نمود.

در بین رفتارهای مختلف مکانیکی نانو سازه‌ها، تحلیل رفتار دینامیکی آنها به دلیل کاربرد، حساسیت و پیچیدگی بیشتر آن نسبت به سایر رفتارهای مکانیکی، بیشتر مورد توجه بوده است. از طرفی، بیشتر پژوهش‌های انجام شده بر روی تحلیل رفتار دینامیکی نانو سازه‌ها، معطوف به بررسی ارتعاشات

عرضی نانوتیرها [۴-۸] و نانو صفحات [۹-۱۱] بوده است و کمتر پژوهشی یافت می‌شود که به بررسی ارتعاشات پیچشی نانوتیرها پرداخته باشد. از اولین پژوهش‌هایی که به بررسی اثر اندازه بر رفتار پیچشی نانوتیرها و نانوتیوب‌ها پرداخته است می‌توان به پژوهش لی و همکاران [۱۲] اشاره نمود. در این پژوهش، رفتار پیچشی استاتیکی و دینامیکی نانوتیرهای با مقطع دایروی بر اساس مدل جدیدی از تئوری الاستیسیته غیرمحلی بررسی شده است. آنها نشان دادند که با افزایش اثر اندازه، جابجایی زاویه‌ای کاهش یافته اما فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابد. در پژوهش دیگری لیم و همکاران [۱۳] ارتعاشات آزاد پیچشی نانوتیرهای با حرکت محوری را با در نظر گرفتن اثر اندازه بررسی نمودند. در پژوهش بالا سرعت بحرانی استخراج شده و نتیجه‌گیری شده است که سرعت بحرانی به شدت متاثر از مقدار اثر اندازه است. پژوهشی مشابه نیز برای نانوتیوب‌های دولایه انجام شده است [۱۴]. در این پژوهش، اثر پیوندهای واندروالسی به همراه اثر اندازه بر روی رفتار ارتعاشات پیچشی نانوتیوب‌ها بررسی شده و نشان داده شده است که شکل مودهای نانوتیوب دولایه‌ی تحت پیچش، شامل شکل مودهای هم‌فاز و ناهم‌فاز است. لویا و همکاران [۱۵] نیز علاوه بر در نظر گرفتن اثر اندازه، رفتار پیچشی نانو تیرهای ترک‌دار را با در نظر گرفتن اثرات شدت ترک، محل ترک، شرایط مرزی مختلف و اثر جرم متمرکز مورد تحلیل قرار دادند. رفتار استاتیکی و دینامیکی پیچشی نانوتیرها در محیط الاستیک نیز توسط آردا و آیدوقلو [۱۶] مورد توجه قرار گرفته است.

مروری بر مراجع نشان می‌دهد که از بین دو عاملی که سبب بروز خطا

• مولفه‌های کرنش:

$$\varepsilon_{xt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_t}{\partial x} \right) = r \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (4)$$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{tt} = \varepsilon_{nn} = \varepsilon_{xn} = \varepsilon_{tn} = 0 \quad (5)$$

• مولفه‌های تنش:

$$\sigma_{xt} = G \varepsilon_{xt} = Gr \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (6)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{tt} = \sigma_{nn} = \sigma_{xn} = \sigma_{tn} = 0 \quad (7)$$

در رابطه (۶)،  $G$  مدول برشی نانوتیر است. تا این قسمت، تنها مولفه‌های حجم جسم که در اصل همیلتون باید به کار روند، استخراج شده است. در ادامه، مولفه‌های ناشی از سطح که در اصل همیلتون و تشکیل انرژی‌های جنبشی و پتانسیل موثر می‌باشند به دست خواهد آمد. در تئوری الاستیسیته سطحی گارتین و مورداک [۳، ۲] رابطه تنش و کرنش سطحی به صورت رابطه‌های (۸) و (۹) ارائه شده است:

$$\tau_{\alpha\beta}^{\pm} = \tau_0^{\pm} \delta_{\alpha\beta} + (\mu_0^{\pm} - \tau_0^{\pm})(u_{\alpha,\beta}^{\pm} + u_{\beta,\alpha}^{\pm}) + (\lambda_0^{\pm} + \tau_0^{\pm})u_{\gamma,\gamma}^{\pm} + \tau_0^{\pm}u_{\alpha,\beta}^{\pm} \quad (8)$$

$$\tau_{\alpha n}^{\pm} = \tau_0^{\pm}u_{n,\alpha}^{\pm} \quad (9)$$

که  $\alpha, \beta = x, t$  و علامت‌های مثبت و منفی به ترتیب نشان دهنده سطوح بالایی و زیرین تشکیل دهنده جسم هستند.  $\tau_0^{\pm}$  بیانگر تنش پسماند سطح در حالت کرنش صفر،  $\lambda_0^{\pm}$  و  $\mu_0^{\pm}$  ثوابت لامه سطوح فوقانی و زیرین،  $\delta_{\alpha\beta}$  دلتای کرونکر و  $u_{\alpha}^{\pm}$  معرف مولفه‌های جابه‌جایی سطوح در راستای محورهای مختصات می‌باشد (منظور از سطوح فوقانی و زیرین، برای حالت جسم با مقاطع مربع یا مستطیل می‌باشد).

از آنجا که نانوتیر مورد بررسی همگن است و جنس تمام نقاط نانوتیر

بین نتایج تئوری کلاسیک و نتایج آزمایشگاهی برای نانو مقیاس‌ها شده است فقط عامل اثر اندازه بر روی رفتار پیچشی نانو سازه‌ها بررسی شده و طبق دانسته‌های نویسنده، عامل اثرات سطحی در هیچ مرجعی بررسی نشده است. به همین دلیل و برای پوشش این خلاء، در این پژوهش ارتعاشات پیچشی نانوتیرها با در نظر گرفتن اثرات سطحی بررسی می‌شود. بدین منظور، معادلات حرکت پیچشی یک نانوتیر با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده و اثرات سطحی در معادلات حرکت و شرایط مرزی لحاظ می‌شوند. سپس معادلات حرکت به روش تحلیلی حل شده و فرکانس‌های طبیعی نانوتیر به ازای شرایط مرزی مختلف و با در نظر گرفتن اثرات سطحی گزارش می‌شوند.

## ۲- استخراج معادلات حرکت و شرایط مرزی نانوتیر با در نظر گرفتن اثرات سطحی

به منظور استخراج معادلات حرکت پیچشی نانوتیر با در نظر گرفتن اثرات سطحی، نانوتیری به طول  $L$  ( $0 \leq x \leq L$ ) و شعاع  $R$  در دستگاه مختصات  $x-t-n$  مدنظر است (شکل ۱).

مولفه‌های جابجایی نقطه‌ای مانند  $P$  (در این حالت، مبداء دستگاه مختصات باید در نقطه  $P$  قرار بگیرد) از نانوتیر وقتی به اندازه  $\theta(x, T)$  جابجایی زاویه‌ای داشته باشد در راستای سه محور دستگاه مختصات به صورت روابط (۱)–(۳) بیان می‌شود [۱۷]:

$$u_x(x, T) = 0 \quad (1)$$

$$u_t(x, T) = r\theta(x, T) \quad (2)$$

$$u_n(x, T) = 0 \quad (3)$$

در روابط (۱)–(۳)،  $T$  زمان است. بر اساس مولفه‌های جابجایی، مولفه‌های کرنش و تنش به ترتیب بصورت روابط (۴)–(۷) به دست می‌آیند:

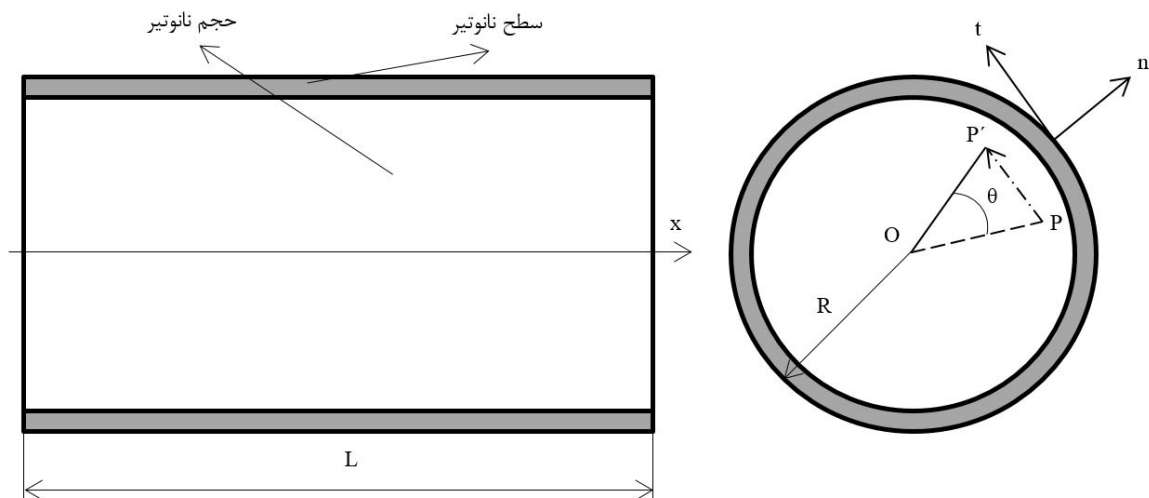


Fig. 1. Schematic of nanobeam with surface effects

شکل ۱: شماتیک نانوتیر با اثرات سطحی

در رابطه (۲۰)،  $I_p$  و  $I_0$  به ترتیب ممان اینرسی جرم نانوتیر در واحد طول و ممان اینرسی قطبی سطح مقطع هستند. همان‌طور که از روابط (۱۵)–(۲۰) مشاهده می‌شود با استفاده از تئوری الاستیسیته سطحی، مولفه‌های اثر سطحی در معادله حرکت و شرایط مرزی ظاهر شده‌اند. نکته قابل ذکر در این قسمت این است که از بین ثوابت لامه ( $\mu$  و  $\lambda$ )، ثابت لامه  $\mu$  همان مدول برشی می‌باشد یعنی  $G = \mu$ . بنابراین می‌توان متغیر  $(GI_p)^*$  را به صورت  $GI_p + 2\pi R^3(G_0 - \tau_0)$  بیان نمود. از طرفی قرار گرفتن مولفه تنش سطحی  $\tau_0$  در کنار مولفه مدول برشی سطحی  $G_0$ ، دلالت بر این دارد که تنش پسماند سطحی سبب تغییر خواص مکانیکی سطحی نانوتیر می‌شود [۱۸].

### ۳- حل معادلات حرکت به ازای شرایط مرزی مختلف

بعد از استخراج معادلات حرکت و شرایط مرزی، با حل معادلات فوق فرکانس‌های طبیعی پیچشی نانوتیر با در نظر گرفتن اثرات سطحی به دست می‌آید. بدین منظور، با فرض جابجایی زاویه‌ای هارمونیک برای نانوتیر به صورت رابطه (۲۷):

$$\theta(x, T) = \theta(x)e^{i\omega T} \quad (21)$$

معادله حرکت نانوتیر بر حسب مکان به دست می‌آید (رابطه (۲۲)):

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} + \lambda^2\theta(x) = 0 \quad (22)$$

که  $\lambda = \omega/\alpha$  حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم (رابطه (۲۲))، رابطه (۲۳) را برای جابجایی زاویه‌ای نانوتیر نتیجه می‌دهد:

$$\theta(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x) \quad (23)$$

یافتن ثابت‌های  $A$  و  $B$  نیاز به دانستن شرایط مرزی در ابتدا و انتهای نانوتیر دارد. شرایط مرزی‌ای که در این پژوهش بررسی می‌شود شرایط مرزی گیردار-گیردار، گیردار-آزاد و آزاد-آزاد هستند که معادلات هر یک بر اساس رابطه (۱۶) به ترتیب به صورت روابط (۲۴)–(۲۶) بیان می‌شوند:

$$\theta(0) = \theta(L) = 0 \quad (24)$$

$$\theta(0) = (GI_p)^* \frac{d\theta(L)}{dx} = 0 \quad (25)$$

$$\Rightarrow \theta(0) = \frac{d\theta(L)}{dx} = 0$$

$$(GI_p)^* \frac{d\theta(0)}{dx} = (GI_p)^* \frac{d\theta(L)}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta(0)}{dx} = \frac{d\theta(L)}{dx} = 0 \quad (26)$$

اکنون با جایگذاری شرایط مرزی (روابط (۲۴)–(۲۶)) در رابطه (۲۳)، شکل مودها و فرکانس‌های طبیعی پیچشی نانوتیر با در نظر گرفتن اثرات سطحی به ازای سه شرط مرزی بررسی شده به دست می‌آید که عبارتند از:

یکسان است از علامت‌های مثبت و منفی صرف نظر می‌شود. با در نظر گرفتن مولفه‌های جابجایی نانوتیر (روابط (۱)–(۳))، مولفه تنش سطحی غیر صفر موثر در ارتعاشات پیچشی نانوتیر بصورت رابطه (۱۰) به دست می‌آید:

$$\tau_{xt} = (\mu_0 - \tau_0) \left( r \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad (10)$$

اکنون که مولفه‌های تنش و کرنش حجم و سطح جسم به دست آمده‌اند می‌توان با استفاده از اصل همیلتون (رابطه (۱۱)) معادلات حرکت حاکم نانوتیر و شرایط مرزی را با در نظر گرفتن اثرات سطحی استخراج نمود:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - K - W) dt = 0 \quad (11)$$

در اصل همیلتون (رابطه (۱۱))،  $U$ ،  $K$  و  $W$  به ترتیب انرژی پتانسیل، انرژی جنبشی و کار خارجی وارد بر نانوتیر بوده و به صورت روابط (۱۲)–(۱۴) بیان می‌شوند:

$$\delta U = \int_V (\sigma_{xt} \delta \varepsilon_{xt}) dx dy dz + \int_A (\tau_{xt} \delta \varepsilon_{xt}) dx ds \quad (12)$$

$$\delta K = \int_V \rho \left( \frac{\partial u_t}{\partial T} \delta \left( \frac{\partial u_t}{\partial T} \right) \right) dx dy dz + \int_A \rho_0 \left( \frac{\partial u_t}{\partial T} \delta \left( \frac{\partial u_t}{\partial T} \right) \right) dx ds \quad (13)$$

$$\delta W = 0 \quad (14)$$

با جایگذاری روابط (۱۲)–(۱۴) در رابطه (۱۱) و انجام انتگرالگیری جزء به جزء، معادله حاکم و شرایط مرزی به ترتیب به صورت روابط (۱۵) و (۱۶) حاصل می‌شود:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial T^2} \quad (15)$$

$$(GI_p)^* \frac{\partial \theta}{\partial x} \delta \theta \Big|_0^L = 0 \quad (16)$$

که

$$\alpha^2 = \frac{(GI_p)^*}{(I_0)^*} \quad (17)$$

$$(GI_p)^* = GI_p + 2\pi R^3(\mu_0 - \tau_0) \quad (18)$$

$$(I_0)^* = I_0 + 2\pi R^3 \rho_0 \quad (19)$$

$$I_0 = \rho I_p = \rho \iint (r^2) dA = \rho \pi \frac{R^4}{2} \quad (20)$$

• شکل مودها:

جدول ۱: مقایسه فرکانس‌های اول و دوم نانوتیر آلومینیومی گیردار-آزاد حاصل از پژوهش حاضر با مرجع [۱۷]

فرکانس دوم (GHz)		فرکانس اول (GHz)		شعاع (nm)	طول (nm)
مرجع [۱۷]	پژوهش حاضر	مرجع [۱۷]	پژوهش حاضر		
۱۴۶۲/۳۳	۱۴۶۲/۳۳	۴۸۷/۴۴	۴۸۷/۴۴	۱	۱۰
۱۴۶۲/۳۳	۱۴۶۲/۳۳	۴۸۷/۴۴	۴۸۷/۴۴	۲	
۱۴۶۲/۳۳	۱۴۶۲/۳۳	۴۸۷/۴۴	۴۸۷/۴۴	۳	
۲۹۲/۴۷	۲۹۲/۴۷	۹۷/۴۹	۹۷/۴۹	۱	۵۰
۲۹۲/۴۷	۲۹۲/۴۷	۹۷/۴۹	۹۷/۴۹	۲	
۲۹۲/۴۷	۲۹۲/۴۷	۹۷/۴۹	۹۷/۴۹	۳	

بر روی شکل مودهای عرضی نانوتیر با شرط مرزی گیردار-آزاد موثر بوده و شکل مودهای نانوتیر با شرایط مرزی لولا-لولا و گیردار-گیردار مستقل از اثرات سطحی هستند. از آنجا که مولفه‌های سطحی تأثیری بر روی شکل مودهای پیچشی نانوتیرها ندارند در شکل ۲، شکل مودهای نانوتیر به ازای سه شرط مرزی مختلف و بدون در نظر گرفتن اثرات سطحی با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

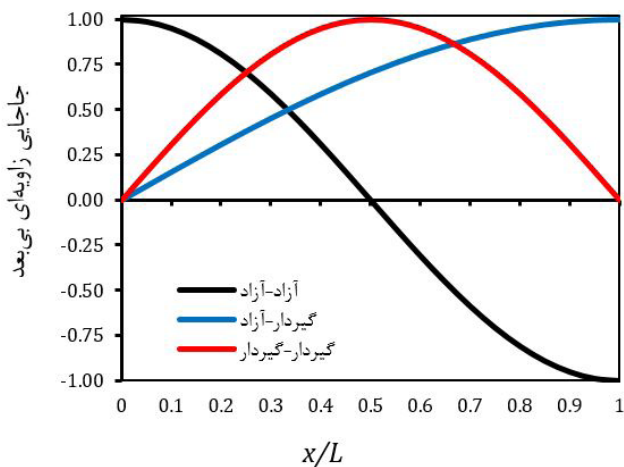


Fig. 2. Comparison of the fundamental torsional mode shapes of nanobeam

شکل ۲: مقایسه شکل مودهای اول پیچشی نانوتیر

به منظور نمایش بهتر تأثیر مولفه‌های سطحی بر روی فرکانس‌های طبیعی پیچشی نانوتیر، از نسبت فرکانسی بصورت رابطه (۳۳) استفاده شده است. رابطه (۳۳) بیان می‌کند که اگر مقدار نسبت فرکانسی بزرگتر از یک باشد آن‌گاه تأثیر مولفه‌های سطحی یک تأثیر افزایشی خواهد بود و بالعکس اگر مقدار نسبت فرکانسی کوچک‌تر از یک باشد آن‌گاه تأثیر مولفه‌های سطحی یک تأثیر کاهش‌دهنده خواهد بود و برای نسبت فرکانسی برابر با یک، مولفه‌های سطحی تأثیری نخواهند داشت.

= نسبت فرکانسی

$$\frac{\text{فرکانس پیچشی با در نظر گرفتن اثرات سطحی}}{\text{فرکانس پیچشی بدون در نظر گرفتن اثرات سطحی}} \quad (۳۳)$$

حالت گیردار-گیردار

$$\theta_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (۲۷)$$

حالت گیردار-آزاد

$$\theta_n(x) = A_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right) \quad (۲۸)$$

حالت آزاد-آزاد

$$\theta_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (۲۹)$$

• فرکانس‌های طبیعی:

حالت گیردار-گیردار

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right) \sqrt{\frac{(GI_p)^*}{(I_0)^*}} \quad (۳۰)$$

حالت گیردار-آزاد

$$\omega_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right) \sqrt{\frac{(GI_p)^*}{(I_0)^*}} \quad (۳۱)$$

حالت آزاد-آزاد

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right) \sqrt{\frac{(GI_p)^*}{(I_0)^*}} \quad (۳۲)$$

که  $n=1,2,3,\dots$  با برابر صفر قرار دادن مولفه‌های اثرات سطحی در روابط (۳۰)–(۳۲)، همان روابطی حاصل می‌شوند که برای فرکانس‌های پیچشی تیر ماکرو گزارش شده‌اند [۱۷].

#### ۴- نتایج

بعد از استخراج روابط فرم بسته فرکانس‌های پیچشی نانوتیر با در نظر گرفتن اثرات سطحی و به ازای شرایط مرزی مختلف، در این بخش نتایج ارائه می‌شود. پیش از ارائه نتایج جدید، ابتدا در جدول ۱ مقایسه‌ای بین فرکانس‌های پیچشی نانوتیر بدون در نظر گرفتن اثرات سطحی با آنچه برای فرکانس‌های پیچشی تیر ماکرو [۱۷] گزارش شده است به ازای  $G=29$  GPa و  $\rho=2700 \text{ kg.m}^{-3}$  انجام شده است.

جدول ۱ نشان می‌دهد که نتایج حاصل از روابط استخراج شده در این پژوهش دقیقاً مشابه با نتایج گزارش شده برای تیر ماکرو است. به بیان دیگر، جدول ۱ تأیید می‌کند که روابط استخراج شده در این پژوهش، صحیح هستند. به منظور ارائه نتایج جدید، در ابتدا اثر مولفه‌های سطحی بر روی شکل مودهای مربوط به سه شرط مرزی با یکدیگر مقایسه می‌شوند. همان‌طور که از روابط (۲۷)–(۲۹) مشاهده می‌شود شکل مودهای پیچشی نانوتیر به ازای شرایط مرزی مختلف مستقل از اثرات سطحی هستند. این در حالیست که در مرجع [۱۹] نشان داده شده است که در ارتعاشات آزاد عرضی نانوتیرها، از بین سه شرط مرزی لولا-لولا، گیردار-گیردار و گیردار-آزاد، اثرات سطحی فقط

که هر چه شرط مرزی نانوتیر محکم‌تر باشد میزان تاثیر مولفه‌های سطحی کم‌تر می‌شود [۲۲].

ج) تاثیر مولفه‌های سطحی بر روی فرکانس‌های عرضی نانوتیر، با افزایش طول نانوتیر، افزایش و با افزایش شماره فرکانس، ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد [۲۱]. این در حالیست که تاثیر مولفه‌های سطحی بر روی فرکانس‌های پیچشی نانوتیرها مستقل از شماره فرکانس و طول نانوتیر است.

**جدول ۳: تغییرات نسبت فرکانسی به ازای شماره مودهای مختلف**  
Table 3. Variations of frequency ratio for various frequency numbers

شماره فرکانس	شرط مرزی گیردار-گیردار		شرط مرزی گیردار-آزاد	
	سیلیکون	آلومینیوم	سیلیکون	آلومینیوم
۱	۰/۲۰۴۶	۰/۶۵۷۵	۰/۲۰۴۶	۰/۶۵۷۵
۲	۰/۲۰۴۶	۰/۶۵۷۵	۰/۲۰۴۶	۰/۶۵۷۵
۳	۰/۲۰۴۶	۰/۶۵۷۵	۰/۲۰۴۶	۰/۶۵۷۵
۴	۰/۲۰۴۶	۰/۶۵۷۵	۰/۲۰۴۶	۰/۶۵۷۵

**جدول ۴: تغییرات نسبت فرکانسی اول به ازای طول‌های مختلف**  
Table 4. Variations of the fundamental frequency ratio for various nanobeam lengths

طول نانوتیر (nm)	شرط مرزی گیردار-گیردار		شرط مرزی گیردار-آزاد	
	سیلیکون	آلومینیوم	سیلیکون	آلومینیوم
۵	۰/۲۰۴۶	۰/۶۵۷۵	۰/۲۰۴۶	۰/۶۵۷۵
۱۰	۰/۲۰۴۶	۰/۶۵۷۵	۰/۲۰۴۶	۰/۶۵۷۵
۱۵	۰/۲۰۴۶	۰/۶۵۷۵	۰/۲۰۴۶	۰/۶۵۷۵
۲۰	۰/۲۰۴۶	۰/۶۵۷۵	۰/۲۰۴۶	۰/۶۵۷۵

در ادامه و در شکل ۳ تاثیر مولفه‌های سطحی بر روی فرکانس‌های طبیعی پیچشی نانوتیر به ازای مقادیر مختلف برای شعاع آن نمایش داده شده است. از آنجا که بیشتر نشان داده شد که مولفه‌های سطحی تاثیر یکسانی بر روی فرکانس‌های پیچشی نانوتیر با هرگونه شرط مرزی دارند و اینکه تاثیر آنها مستقل از شماره فرکانس است بنابراین در شکل ۳، فقط تاثیر مولفه‌های سطحی بر فرکانس اول بررسی شده است که می‌توان نتایج آن را برای سایر فرکانس‌ها نیز مورد قبول دانست. شکل ۳ علاوه بر اینکه اثبات می‌کند تاثیر کاهشی مولفه‌های سطحی بر روی نسبت فرکانسی نانوتیر از جنس آلومینیوم بیشتر از سیلیکون است نشان می‌دهد که با افزایش شعاع نانوتیر، تاثیر کاهشی مولفه‌های سطحی برای نانوتیر با هر دو جنس آلومینیوم و سیلیکون کاهش می‌یابد. این کاهش تاثیر به این دلیل است که با افزایش شعاع، انرژی ذخیره‌شده در سطح در مقایسه با انرژی ذخیره‌شده در حجم با نرخ کمتری افزایش می‌یابد. همچنین از شکل ۳ مشاهده می‌شود که منحنی‌های تغییرات نسبت فرکانسی بر حسب شعاع، دارای شیب بیشتر

هم‌چنین، نانوتیر مورد بررسی دارای سطح مقطع دایروی به شعاع  $R$ ، طول  $L$  و از جنس‌های آلومینیوم و سیلیکون با خواص مکانیکی داده شده در جدول ۲ انتخاب شده که خواص مکانیکی سطحی آلومینیوم و سیلیکون در جهت کریستالی [۱۰۰] هستند.

**جدول ۲: خواص مکانیکی نانوتیر از جنس آلومینیوم و سیلیکون**  
Table 2. Mechanical properties of nanobeam made of aluminum and silicon

سیلیکون	آلومینیوم	خواص مکانیکی
۴۰	۲۶	مدول برشی حجمی (GPa)
۲۳۷۰	۲۷۰۰	چگالی حجمی ( $\text{kg/m}^3$ )
$3/169 \times 10^{-7}$	$5/46 \times 10^{-7}$	چگالی سطحی ( $\text{kg/m}^2$ )
-۲/۷۷۷۹	-۵/۴۲۵۱	ثابت لامه سطحی ( $\text{N/m}$ ) $\mu_0$
۰/۶۰۵۶	۰/۵۶۸۹	تنش سطحی ( $\text{N/m}$ )

اولین نکته‌ای که اشاره به آن ضروری است این است که روابط (۳۰) و (۳۲) نشان می‌دهند که تاثیر مولفه‌های سطحی بر روی فرکانس‌های پیچشی نانوتیر با شرایط مرزی گیردار-گیردار برابر با شرایط مرزی آزاد-آزاد است. این در حالیست که هر چه شرایط مرزی نانوتیر مقیدتر باشد تاثیر مولفه‌های سطحی بر روی فرکانس‌های عرضی نانوتیر کم‌تر خواهد بود [۲۰، ۲۱]. از آنجا که فرکانس‌های پیچشی نانوتیر با شرایط مرزی گیردار-گیردار و آزاد-آزاد با یکدیگر برابر هستند در ادامه و به منظور پرهیز از تکرار، فقط نتایج شرایط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد ارائه و مقایسه می‌شوند.

در جدول‌های ۳ و ۴، تاثیر مولفه‌های سطحی بر روی فرکانس‌های پیچشی نانوتیر به ترتیب به ازای شماره مودها و طول‌های مختلف نانوتیر بررسی شده است. از جداول ۳ و ۴ مشاهده می‌شود که اولاً مولفه‌های سطحی تاثیر کاهشی بر روی فرکانس‌های پیچشی نانوتیر با شرایط مرزی و جنس‌های مختلف داشته، ثانياً تاثیر مولفه‌های سطحی بر روی فرکانس‌های طبیعی مستقل از شماره فرکانس و طول نانوتیر بوده و ثالثاً اندازه تاثیر کاهشی مولفه‌های سطحی برای نانوتیر با شرط مرزی گیردار-آزاد برابر با شرط مرزی گیردار-گیردار است. این نتیجه به همراه نتیجه به‌دست‌آمده از روابط (۳۰) و (۳۲) دلالت بر این دارد که میزان تاثیر مولفه‌های سطحی بر روی ارتعاشات آزاد پیچشی نانوتیر با هرگونه شرط مرزی یکسان است. با مقایسه نتایج به‌دست‌آمده برای تاثیر مولفه‌های سطحی بر روی ارتعاشات پیچشی نانوتیرها با آنچه برای تاثیر مولفه‌های سطحی بر روی ارتعاشات عرضی نانوتیرها گزارش شده است نکات زیر قابل ذکر هستند:

الف) مولفه‌های سطحی تاثیر افزایشی بر روی فرکانس‌های عرضی نانوتیرها دارند [۴، ۵، ۱۱، ۲۰، ۲۲، ۲۳] در حالیکه آنها دارای تاثیر کاهشی بر روی فرکانس‌های پیچشی نانوتیرها هستند.

ب) تاثیر مولفه‌های سطحی بر روی فرکانس‌های پیچشی نانوتیرها به ازای تمامی شرایط مرزی یکسان است اما تاثیر مولفه‌های سطحی بر روی فرکانس‌های عرضی نانوتیرها وابسته به نوع شرط مرزی است. به این معنی

آنها با یکدیگر برابر نیست. همچنین مشاهده می‌شود که از بین سه مولفه سطحی، مولفه تنش سطحی در مقایسه با دو مولفه دیگر، دارای کمترین تاثیر کاهشی است و تاثیر کاهشی آن در شعاع‌های بیشتر بسیار ناچیز شده به نحوی که می‌توان از تاثیر آن در مقایسه با تاثیر دو مولفه دیگر صرف‌نظر نمود. از شکل ۴ قابل‌مشاهده است که با اینکه مقدار تنش سطحی نانوتیر آلومینیومی اندکی کم‌تر از تنش سطحی نانوتیر سیلیکونی است اثر کاهشی تنش سطحی نانوتیر آلومینیومی اندکی بیشتر از اثر کاهشی تنش سطحی نانوتیر سیلیکونی است. دلیل این امر را می‌توان اینگونه بیان نمود که تاثیر مولفه‌های سطحی نه تنها به مقدار مولفه‌های سطحی بستگی دارد بلکه به مقدار خواص مکانیکی حجمی نانوسازه نیز وابسته است. همچنین شکل ۴ نشان می‌دهد که برای نانوتیر سیلیکونی، تاثیر کاهشی ثابت لامه سطحی  $\mu_0$  بیشتر از تاثیر کاهشی چگالی سطحی است اما این در حالیست که برای نانوتیر آلومینیومی، تاثیر کاهشی ثابت لامه سطحی  $\mu_0$  کم‌تر از تاثیر کاهشی چگالی سطحی است. نکته پایانی در مورد شکل ۴ این است که میزان تاثیر کاهشی مولفه‌های سطحی بر روی فرکانس‌های پیچشی، بستگی به جنس نانوتیر یا به بیان دیگر بستگی به مقدار خواص مکانیکی حجمی و سطحی نانوتیر دارد.

به منظور ارائه نتایج عددی و با این هدف که محققان آتی بتوانند مقادیر عددی از این پژوهش در اختیار داشته باشند نتایجی از آنچه که در شکل‌های ۳ و ۴ به صورت کیفی نشان داده شده است در جدول ۵ به صورت کمی لیست شده است. نتیجه‌ای که اشاره به آن ضروری به نظر می‌رسد این است که تاثیر کاهشی مولفه‌های سطحی وقتی همزمان در نظر گرفته شده باشند کم‌تر از مجموع تاثیرهای کاهشی آنهاست وقتی که به صورت جداگانه در نظر گرفته شوند. به بیان دیگر، تاثیر مولفه‌های سطحی از اصل برهم‌نهی (جمع آثار) تبعیت نمی‌کند.

در بخش پایانی این مقاله، لازم است به این نکته اشاره شود که تمام بحث‌های بالا، با این فرض انجام شده است که وجود تنش پسماند سطحی سبب ایجاد تنش پسماند حجمی نشود. این فرض در بسیاری از مراجعی که به بررسی تاثیر مولفه‌های سطحی بر روی رفتار مکانیکی نانوسازه‌ها پرداخته‌اند استفاده شده است. هر چند مراجعی نیز وجود دارند که به تنش پسماند حجمی ایجادشده از طرف تنش پسماند سطحی در استخراج معادله حرکت و شرایط مرزی توجه کرده و نشان داده‌اند که با قبول این تاثیر، مولفه‌های تنش پسماند سطحی و حجمی اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند [۲۴]. با توجه به توضیحات اشاره شده و نتایج گفته شده در جدول ۵، می‌توان اینگونه نتیجه‌گیری نمود که در نظر گرفتن یا نگرفتن تاثیر مولفه تنش سطحی نمی‌تواند خطای قابل‌توجهی را در نتایج در مقایسه با در نظر نگرفتن دو مولفه سطحی تاثیرگذار دیگر ایجاد کند چرا که میزان تاثیر کاهشی آن در مقایسه با دیگر مولفه‌های سطحی بسیار کم‌تر است.

به ازای مقادیر کمتر شعاع بوده و با افزایش شعاع نانوتیر شیب منحنی نیز کاهش می‌یابد که نشان‌دهنده کاهش وابستگی نسبت فرکانسی به اثرات سطحی است.

در ادامه، به بررسی این نکته پرداخته می‌شود که از بین سه مولفه سطحی که بر روی رفتار ارتعاشات آزاد پیچشی نانوتیرها تاثیرگذار هستند کدام یک تاثیرگذاری بیشتری نسبت به دیگری دارد. بدین منظور، در شکل ۴ تغییرات نسبت فرکانسی اول بر حسب شعاع نانوتیر و برای حالتی که تاثیر هر یک از مولفه‌های سطحی بصورت جداگانه در نظر گرفته شده باشد رسم شده است. شکل ۴ نشان می‌دهد که هر سه مولفه اثرات سطحی دارای تاثیر کاهشی بر روی فرکانس‌های طبیعی پیچشی هستند اما میزان تاثیرگذاری

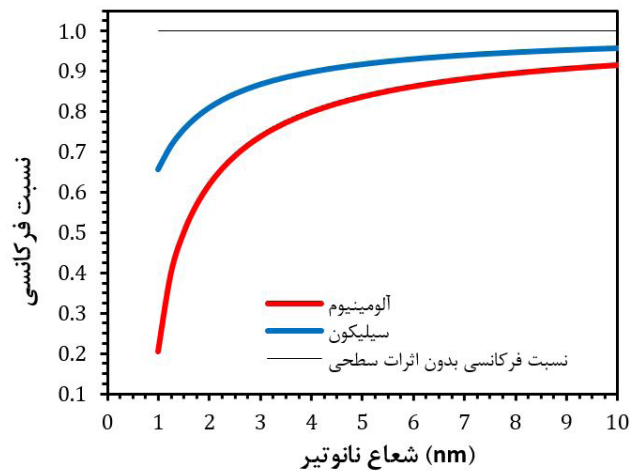


Fig. 3. Variations of frequency ratio versus the nanobeam radius with considering all surface effects simultaneously

شکل ۳: تغییرات نسبت فرکانسی بر حسب شعاع نانوتیر با در نظر گرفتن تمام اثرات سطحی

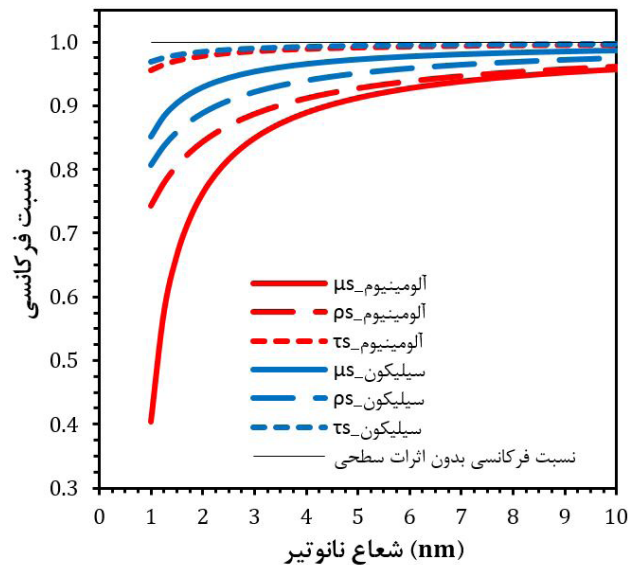


Fig. 4. Variations of frequency ratio versus the nanobeam radius with considering effects of surface parameters separately

شکل ۴: تغییرات نسبت فرکانسی بر حسب شعاع نانوتیر به ازای در نظر گرفتن تاثیر جداگانه مولفه‌های سطحی

جدول ۵: مقادیر نسبت فرکانسی به ازای در نظر گرفتن تاثیر همزمان و جداگانه مولفه‌های اثرات سطحی  
Table 5. Frequency ratio values with considering effects of surface parameters separately and simultaneously

سیلیکون				آلومینیوم				شعاع نانوتیر (nm)
تاثیر تمام مولفه‌ها	تاثیر $\mu_0$	تاثیر $\rho_0$	تاثیر $\tau_0$	تاثیر تمام مولفه‌ها	تاثیر $\mu_0$	تاثیر $\rho_0$	تاثیر $\tau_0$	
۰/۶۵۷۵	۰/۸۵۰۷	۰/۸۰۷۲	۰/۹۶۹۴	۰/۲۰۴۶	۰/۴۰۴۳	۰/۷۴۳۵	۰/۹۵۵۱	۱
۰/۸۱۰۱	۰/۹۲۸۴	۰/۸۸۸۳	۰/۹۸۴۸	۰/۶۱۸۸	۰/۷۶۲۷	۰/۸۴۳۸	۰/۹۷۷۸	۲
۰/۸۶۸۱	۰/۹۵۲۸	۰/۹۲۱۲	۰/۹۸۹۹	۰/۷۳۸۲	۰/۸۴۹۲	۰/۸۸۷۵	۰/۹۸۵۳	۳
۰/۸۹۸۸	۰/۹۶۴۹	۰/۹۳۹۲	۰/۹۹۲۴	۰/۷۹۹۷	۰/۸۸۹۳	۰/۹۱۲۰	۰/۹۸۹۰	۴
۰/۹۱۷۹	۰/۹۷۲۰	۰/۹۵۰۵	۰/۹۹۴۰	۰/۸۳۷۶	۰/۹۱۲۵	۰/۹۲۷۸	۰/۹۹۱۲	۵

## ۵- نتیجه گیری

در این مقاله، ارتعاشات آزاد پیچشی نانوتیرها با در نظر گرفتن اثرات سطحی به ازای سه شرط مرزی گیردار-گیردار، گیردار-آزاد و آزاد-آزاد به صورت تحلیلی بررسی شده است. نتایج عددی نشان می‌دهد که مولفه‌های اثرات سطحی دارای تاثیر کاهشی بر روی فرکانس‌های طبیعی پیچشی نانوتیرها هستند و میزان تاثیر آنها، مستقل از شماره مود فرکانسی و طول نانوتیر است. از طرفی مشاهده شده است که تاثیر مولفه‌های سطحی وابسته به شعاع نانوتیر بوده بطوریکه با افزایش شعاع نانوتیر، میزان تاثیر کاهشی مولفه‌های سطحی بر روی فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابد. بر خلاف آنچه که برای مولفه‌های سطحی، تاثیری افزایشی بر روی ارتعاشات آزاد عرضی نانوتیرها مشاهده شده، مولفه‌های سطحی همواره دارای تاثیر کاهشی بر روی فرکانس‌های طبیعی پیچشی نانوتیرها هستند. نکته پایانی که می‌توان به آن اشاره کرد این است که مولفه‌های سطحی، دارای تاثیر کاهشی یکسانی بر روی فرکانس‌های طبیعی نانوتیر با هرگونه شرط مرزی‌ای است. یکی از عواملی که نتایج این پژوهش را مهم کرده این است که برای اثر اندازه، تاثیری کاهشی بر روی هر دو فرکانس‌های عرضی و پیچشی گزارش شده است اما مشاهده شده است که مولفه‌های سطحی تاثیری افزایشی بر روی فرکانس‌های عرضی و تاثیری کاهشی بر روی فرکانس‌های پیچشی دارند.

## منابع

- [4] R. Nazemnezhad, S. Hosseini-Hashemi, Nonlinear free vibration analysis of Timoshenko nanobeams with surface energy, *Meccanica*, 50(4) (2015) 1027-1044.
- [5] S. Hosseini-Hashemi, R. Nazemnezhad, H. Rokni, Nonlocal nonlinear free vibration of nanobeams with surface effects, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 52 (2015) 44-53.
- [6] A.G. Arani, S. Amir, P. Dashti, M. Yousefi, Flow-induced vibration of double bonded visco-CNTs under magnetic fields considering surface effect, *Computational Materials Science*, 86 (2014) 144-154.
- [7] A.G. Arani, M. Roudbari, Nonlocal piezoelectric surface effect on the vibration of visco-Pasternak coupled boron nitride nanotube system under a moving nanoparticle, *Thin Solid Films*, 542 (2013) 232-241.
- [8] A.G. Arani, S. Amir, A. Shajari, M. Mozdianfard, Z.K. Maraghi, M. Mohammadimehr, Electro-thermal non-local vibration analysis of embedded DWBNTs, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, (2011) 0954406211422619.
- [9] M. Zare, R. Nazemnezhad, S. Hosseini-Hashemi, Natural frequency analysis of functionally graded rectangular nanoplates with different boundary conditions via an analytical method, *Meccanica*, (2015) 1-18.
- [10] S. Hosseini-Hashemi, M. Kermajani, R. Nazemnezhad, An analytical study on the buckling and free vibration of rectangular nanoplates using nonlocal third-order shear deformation plate theory, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 51 (2015) 29-43.
- [11] S. Hosseini-Hashemi, M. Bedroud, R. Nazemnezhad, An exact analytical solution for free vibration of functionally graded circular/annular Mindlin nanoplates via nonlocal elasticity, *Composite Structures*, 103 (2013) 108-118.
- [1] A.C. Eringen, D. Edelen, On nonlocal elasticity, *International Journal of Engineering Science*, 10(3) (1972) 233-248.
- [2] M.E. Gurtin, A.I. Murdoch, A continuum theory of elastic material surfaces, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 57(4) (1975) 291-323.
- [3] M. Gurtin, J. Weissmüller, F. Larche, A general theory of curved deformable interfaces in solids at equilibrium, *Philosophical Magazine A*, 78(5) (1998) 1093-1109.

- surface energy for static and dynamic response of nanoscale beams, *Nanotechnology, IEEE Transactions on*, 9(4) (2010) 422-431.
- [20] S. Hosseini-Hashemi, M. Fagher, R. Nazemnezhad, Surface effects on free vibration analysis of nanobeams using nonlocal elasticity: a comparison between Euler-Bernoulli and Timoshenko, *J Solid Mech*, 5(3) (2013) 290-304.
- [21] R. Nazemnezhad, M. Salimi, S.H. Hashemi, P.A. Sharabiani, An analytical study on the nonlinear free vibration of nanoscale beams incorporating surface density effects, *Composites Part B: Engineering*, 43(8) (2012) 2893-2897.
- [22] S. Hosseini-Hashemi, M. Fagher, R. Nazemnezhad, M.H.S. Haghighi, Dynamic behavior of thin and thick cracked nanobeams incorporating surface effects, *Composites: Part B*, 61 (2014) 66-72
- [23] S. Hosseini-Hashemi, R. Nazemnezhad, An analytical study on the nonlinear free vibration of functionally graded nanobeams incorporating surface effects, *Composites Part B: Engineering*, 52 (2013) 199-206.
- [24] M. Gurtin, X. Markenscoff, R. Thurston, Effect of surface stress on the natural frequency of thin crystals, *Applied Physics Letters*, 29(9) (1976) 529-530.
- [12] C. Li, C.W. Lim, J. Yu, Twisting statics and dynamics for circular elastic nanosolids by nonlocal elasticity theory, *Acta Mechanica Solida Sinica*, 24(6) (2011) 484-494.
- [13] C.W. Lim, C. Li, J. Yu, Free torsional vibration of nanotubes based on nonlocal stress theory, *Journal of Sound and Vibration*, 331(12) (2012) 2798-2808.
- [14] M. Aydogdu, M. Arda, Torsional vibration analysis of double walled carbon nanotubes using nonlocal elasticity, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, (2014) 1-14.
- [15] J. Loya, J. Aranda-Ruiz, J. Fernandez-Saez, Torsion of cracked nanorods using a nonlocal elasticity model, *Journal of Physics D: Applied Physics*, 47(11) (2014) 115304.
- [16] M. Arda, M. Aydogdu, Torsional statics and dynamics of nanotubes embedded in an elastic medium, *Composite Structures*, 114 (2014) 80-91.
- [17] S.S. Rao, *Vibration of continuous systems*, John Wiley & Sons, 2007.
- [18] P. Lee, Y. Wang, X. Markenscoff, High-frequency vibrations of crystal plates under initial stresses, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 57(1) (1975) 95-105.
- [19] C. Liu, R. Rajapakse, Continuum models incorporating

Please cite this article using:

R. Nazemnezhad, "Investigation of Surface Effects on Free Torsional Vibration of Nanobeams" *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 49(2) (2017) 309-316.  
DOI: 10.22060/mej.2015.564

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

