



Free Vibration Analysis of Auxetic-Core Sandwich Plate in Contact with Fluid by Layer Theory

Korosh Khorshidi¹ * , Alireza Pakrouyan², Peyman Yousefi², Ali Pourmahdi¹

¹ Department of Mechanical Engineering, Arak University, Arak, Iran.

² Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University-Branch Arak, Arak, Iran.

ABSTRACT: In this article, the free vibration characteristics of a rectangular sandwich plate with a honeycomb core are investigated when the plate is positioned on the wall of a fluid-filled tank. The sandwich plate consists of two thin aluminum facesheets and an austenitic aluminum honeycomb core. To homogenize the honeycomb core, in addition to the classical Mlok–Gibson model, one of the latest available models, namely the Tournabene model, is employed to provide an innovative approach in this study. To model the dynamic behavior of the sandwich plate, three distinct analytical models are presented, and the advantages and limitations of each are discussed. The equations of motion are derived from Hamilton's principle, and a layered analytical model is used to simulate the sandwich plate with Navier boundary conditions in contact with the fluid. In the fluid–structure interaction, the fluid is assumed to be ideal, incompressible, irrotational, and inviscid, and the coupling effect between the plate and the fluid in the transverse direction is considered, while shear effects are neglected. The analytical methods and homogenization relations are validated against prior research and three-dimensional finite-element simulations. Finally, the influence of parameters such as the dimension of the tank-to-plate length ratio, the fluid height from the bottom edge, the plate's position on the wall, and the honeycomb-cell geometry on the submerged natural frequencies is analyzed and compared.

Review History:

Received: Oct. 09, 2025

Revised: Jun. 17, 2026

Accepted: Jul. 22, 2026

Available Online: Aug. 02, 2026

Keywords:

Free Vibration

Sandwich Plate

Auxetic Core

Fluid–Structure Interaction

1- Introduction

Honeycomb sandwich panels have been widely used in aerospace, marine, transportation, and automotive industries due to their high strength-to-weight ratio, excellent stiffness, and good energy absorption capability. Although detailed modeling of the honeycomb core provides accurate results, it considerably increases the computational cost. Therefore, homogenization of the honeycomb core as an equivalent orthotropic layer has become a common approach for the analysis of such structures. Furthermore, determining the natural frequencies of fluid-loaded structures is of great importance because the added-mass effect significantly alters their vibration characteristics. In recent years, several studies have investigated the free vibration of fluid-loaded sandwich structures, developed shear deformation theories and layerwise models, and examined the dynamic behavior of auxetic-core sandwich structures [1, 2]. The novelty of the present study is the free vibration analysis of a rectangular sandwich panel with an aluminum auxetic honeycomb core and two aluminum face sheets embedded in the wall of a fluid-filled tank. In addition to the Malek–Gibson model, the recently developed Tornabene homogenization model is employed for the homogenization of the honeycomb core.

Three analytical models are proposed for the sandwich panel, and their advantages and limitations are compared. The proposed analytical approach, the homogenization relations, and the mathematical framework for fluid–structure interaction are validated against published results and three-dimensional finite element analyses. Finally, the effects of the tank-to-panel aspect ratio, fluid height, panel location on the tank wall, and honeycomb cell geometry on the wet natural frequencies are investigated.

2- Methodology

As illustrated in Fig. 1, a rectangular sandwich plate with a commercial re-entrant auxetic honeycomb core embedded in the wall of a fluid-filled rectangular tank is investigated. The sandwich plate consists of two isotropic aluminum face sheets and an aluminum auxetic honeycomb core.

Three analytical models are developed to describe the sandwich plate, among which the layerwise model is employed for the fluid–structure interaction analysis. The face sheets are modeled based on the First-Order Shear Deformation Theory (FSDT), while the core is represented using Frostig's second model considering transverse flexibility. The displacement fields of the face sheets and the core are expressed by Eqs.

*Corresponding author's email: k-khorshidi@araku.ac.ir



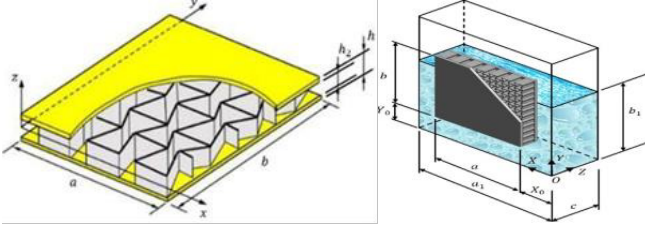


Fig. 1. Commercial re-entrant auxetic honeycomb sandwich plate in contact with fluid.

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z^2} = 0 \quad (7)$$

To simplify the analysis, the auxetic honeycomb core is homogenized as an equivalent orthotropic layer. The effective material properties of the core are evaluated using both the Malik–Gibson model and the recently developed Tornabene model. The fluid inside the tank is assumed to be ideal, incompressible, inviscid, and irrotational. Accordingly, the fluid–structure interaction is formulated using the velocity potential, which satisfies Laplace’s equation, as presented in Eq. (8).

$$\int_0^t \delta \left(T_P - U_S + T_{F_B} + T_{F_S} \right) dt = 0 \quad (8)$$

(1-4) and (5-6), respectively.

$$\begin{aligned} \eta^{(f)}(x, y, z_f, t) &= \eta_0^{(f)}(x, y, t) \\ &+ \left(z_f + \delta_{1f} \frac{h_f}{2} \right) \eta_{\psi}^{(f)}(x, y, t) \end{aligned} \quad (1)$$

$$w^{(f)}(x, y, z_f, t) = w_0^{(f)}(x, y, t); (f=1,3) \quad (2)$$

$$(z_{fmin} = -(1 + \delta_{1f}) \frac{h_f}{2}; z_{fmin} \leq z_f \leq z_{fmax}) \quad (3)$$

$$(z_{fmax} = (1 - \delta_{1f}) \frac{h_f}{2}; z_{fmin} \leq z_f \leq z_{fmax}) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \eta^{(2)}(x, y, z_2, t) &= \\ \eta_0^{(2)}(x, y, t) &+ z_2 \eta_1^{(2)}(x, y, t) \\ &+ z_2^2 \eta_2^{(2)}(x, y, t) + z_2^3 \eta_3^{(2)}(x, y, t) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} w^{(2)}(x, y, z_2, t) &= \\ w_0^{(2)}(x, y, t) &+ z_2 w_1^{(2)}(x, y, t) \\ &+ z_2^2 w_2^{(2)}(x, y, t), (-h_2/2 \leq z_2 \leq h_2/2) \end{aligned} \quad (6)$$

By enforcing full compatibility between the face sheets and the core, the governing equations are derived from Hamilton’s principle, as given in Eq. (7).

The governing equations for the simply supported sandwich plate are solved using the separation of variables and the Galerkin method, and the wet natural frequencies and corresponding mode shapes are obtained through an eigenvalue analysis. Furthermore, the transverse shear correction factors are determined iteratively using Huang’s approach to improve the accuracy of the layerwise model. The proposed analytical formulation, homogenization models, and fluid–structure interaction framework are validated against published results and three-dimensional finite element simulations. Finally, the effects of the tank aspect ratio, fluid height, plate location on the tank wall, and auxetic honeycomb cell geometry on the wet natural frequencies are investigated.

3- Validation, Results and Discussion

The accuracy of the proposed model was first evaluated by comparing the analytical results with those available in the literature. As shown in Table 1, excellent agreement is achieved, demonstrating the accuracy and reliability of the developed analytical model. Furthermore, the fluid–structure interaction formulation was validated against three-dimensional finite element simulations performed in ANSYS. As illustrated in Fig. 3, the analytical and numerical results show very good agreement, confirming the validity of the proposed mathematical model.

Following the validation, the effects of several governing parameters on the wet natural frequencies were investigated. As shown in Fig. 3, the auxetic honeycomb geometry, particularly the cell angle and cell size, has a significant influence on the dimensionless wet fundamental frequency. The complete parametric study, including the effects of the core-to-face-sheet thickness ratio, cell aspect ratio, inclined cell-wall thickness, tank dimensions, fluid height, and the plate location on the tank wall, together with the corresponding figures and tables, is presented in the full paper.

Table 1. Natural frequencies (Hz) of a rectangular honeycomb sandwich plate with Navier boundary conditions.

Method	Mood (1,1)	Mood (1,2)	Mood (2,2)
Method 1	23.464	45.039	39.061
Method 2	23.456	44.771	91.418
Method 3	23.464	45.038	93.06
Method 4	23.356	44.77	91.415
Method 5	23.35	44.77	91.41
Method 6	-	45	92
[3]	23	45	91
[3]	23.39	44.47	91.57
[3]	23.41	44.64	92.19
[4]	23.63	44.77	91.42
[4]	23.25	44.61	91.87

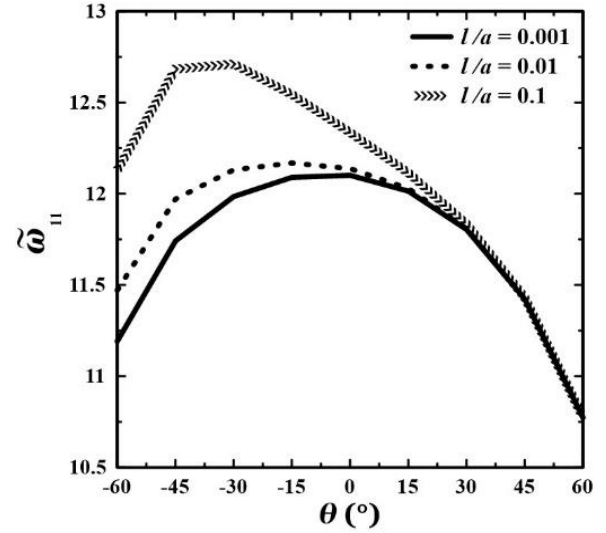


Fig. 3. Variation of the dimensionless wet fundamental frequency versus the cell angle for different cell sizes.

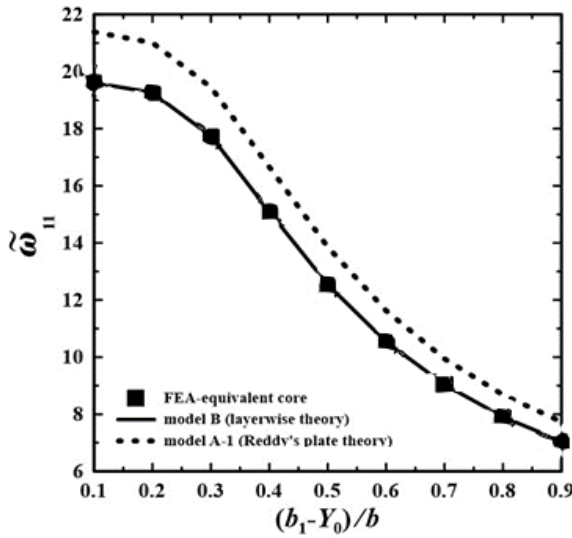


Fig. 2. Variation of the dimensionless wet natural frequency of mode (1,1).

4- Discussion and Results

The accuracy of the proposed model was first evaluated by comparing the analytical results with those reported in the literature. As shown in Table 3, excellent agreement demonstrates the accuracy and reliability of the developed analytical model. Furthermore, the fluid–structure interaction formulation was validated against three-dimensional finite element simulations performed in ANSYS. As illustrated in Fig. 3, the analytical and numerical results show very

good agreement, confirming the validity of the proposed mathematical model. Following validation, the effects of several governing parameters on the wet natural frequencies were investigated. As shown in Fig. 12, the auxetic honeycomb geometry, particularly the cell angle and cell size, significantly influences the dimensionless wet fundamental frequency. The complete parametric study, including the effects of the core-to-face-sheet thickness ratio, cell aspect ratio, inclined cell-wall thickness, tank dimensions, fluid height, and plate location on the tank wall, together with the corresponding figures and tables, is presented in the full paper.

References

- [1] A. Ramian, R. Talookolaei, M. Abedi, Free Vibration Analysis Of A Laminated Composite Sandwich Plate With Compressible Core Placed At The Bottom Of A Tank Filled With Fluid, In Structures, 29(11) (2021) 1259–1273.
- [2] K. Khorshidi, H. Norowzian, Stability Analysis Of A Sandwich Plate With An Auxetic Core Reinforced With Carbon Nanotubes Under Aeroelastic Forces, JSTC Journal, 14(4) (2024) 2597–2610.(In Persian)
- [3] M. Raville, C. Ueng, Determination Of Natural Frequencies Of Vibration Of A Sandwich Plate, Exp Mech, 7(11) (1967) 490–493.
- [4] M. Rao, Y. Desai, Analytical Solutions For Vibrations Of Laminated And Sandwich Plates Using Mixed Theory, Compos. Struct, 64(3) (2004) 361–373.



بررسی ارتعاش آزاد ورق ساندویچی با هسته آگزتیک در تماس با سیال بر اساس تئوری لایه‌ای

کوروش خورشیدی^{*۱}، علیرضا پاکرویان^۲، پیمان یوسفی^۳، علی پورمهدی^۴

۱- گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اراک، اراک، ایران.

۲- گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک، اراک، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۴/۰۷/۱۷

بازنگری: ۱۴۰۵/۰۳/۲۷

پذیرش: ۱۴۰۵/۰۴/۳۱

ارائه آنلاین: ۱۴۰۵/۰۵/۱۱

کلمات کلیدی:

ارتعاش آزاد

ورق ساندویچی

هسته آگزتیک

برهم‌کنش ورق و سیال

خلاصه: در این مقاله، مشخصه‌های ارتعاش آزاد ورق ساندویچی مستطیلی با هسته لانه‌زنبوری آگزتیک که در دیواره مخزن حاوی سیال جای‌گیری شده است، بررسی می‌شود. ورق ساندویچی از دو رویه آلومینیومی نازک و هسته لانه‌زنبوری آگزتیک از جنس آلومینیوم تشکیل شده است. برای همگن‌سازی هسته لانه‌زنبوری، علاوه بر مدل کلاسیک مالک-گیسون، از یکی از جدیدترین مدل‌های موجود یعنی مدل تورنابن استفاده شده است تا رویکرد نوآورانه در این تحقیق می‌باشد. به منظور مدل‌سازی رفتار دینامیکی ورق ساندویچی، سه مدل تحلیلی متفاوت ارائه و مزایا و محدودیت‌های هر یک از آن‌ها مورد بحث قرار گرفته است. برای استخراج معادلات حرکت از اصل همپلتون استفاده شده و از مدل تحلیلی لایه‌ای برای شبیه‌سازی ورق ساندویچی با شرط مرزی ناوبر و در تماس با سیال بهره گرفته شده است. در اندرکنش سیال-سازه، سیال به صورت ایده‌آل غیرقابل تراکم، غیرچرخشی و غیرلزج در نظر گرفته شده است و اثر برهمکنش ورق و سیال در راستای عرضی ورق فرض و اثرات برشی نادیده گرفته می‌شود. روش‌های تحلیلی و روابط همگن‌سازی با استناد به پژوهش‌های پیشین و همچنین شبیه‌سازی المان محدود سه‌بعدی صحت‌سنجی شده‌اند. در پایان، اثر پارامترهایی مانند نسبت ابعاد مخزن به طول ورق، ارتفاع سیال از لبه پایین، موقعیت ورق در دیواره و هندسه سلول لانه‌زنبوری بر فرکانس‌های طبیعی مربوط تحلیل و مقایسه شده‌اند.

۱- مقدمه

ورق‌های ساندویچی لانه‌زنبوری به دلیل خواص مطلوب مانند نسبت استحکام به وزن بالا و جذب انرژی عالی، کاربردهای وسیعی در حوزه‌های مختلف مهندسی مانند هوافضا، صنایع دریایی، قطارهای سریع‌السیر و خودروسازی پیدا کرده‌اند. برای تحلیل‌های استاتیکی و دینامیکی ورق‌های لانه‌زنبوری، مدل‌سازی واقعی هسته دقیق‌ترین پاسخ‌ها را به دست می‌دهد، لیکن تعداد درجات آزادی کل و به تبع آن زمان محاسباتی را به مقدار قابل توجهی افزایش می‌دهد. بهترین روش برای ساده‌سازی تحلیل آن‌ها، همگن‌سازی رفتار هسته لانه‌زنبوری است به طوری که بتوان آن را به صورت یک لایه ارتوتروپیک معادل، تحلیل کرد. به منظور حصول پاسخ‌های نهایی قابل اعتماد، خواص موثر هسته لانه‌زنبوری باید تا حد امکان دقیق تعیین شوند تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها، از مهم‌ترین پارامترها در طراحی سازه‌ها هستند. این مشخصه‌ها می‌توانند به طور مستقل مورد

استفاده قرار گیرند (مثلاً فرکانس‌های طبیعی تعیین شده را می‌توان به عنوان نمادی از میزان خرابی سازه در نظر گرفت) و یا به عنوان جزئی از روند سایر تحلیل‌ها مورد توجه باشند. ورق‌های در تماس با سیال، بخش‌های اصلی بدنه کشتی‌ها، زیردریایی‌ها، سازه‌های دریایی، مخازن سوخت و بسیاری از وسایل صنعتی دیگر را تشکیل می‌دهند. رفتار ارتعاشی این ورق‌ها نسبت به حالت خشک متفاوت بوده و به دلیل اثر جرم افزوده سیال فرکانس‌های طبیعی آن‌ها کاهش می‌یابند.

تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های ساندویچی لانه‌زنبوری از سال‌های دور مورد توجه محققان بوده است. ترابی و همکاران [۱] با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییرشکل برشی به تحلیل ارتعاش و فلاتر ورق‌های ساندویچی لانه‌زنبوری دوزنقه‌ای پرداختند و بیدگی و همکاران [۲] با استفاده از آن ارتعاش آزاد پوسته‌های ساندویچی لانه‌زنبوری دو انحنایی با رویه‌های پیزوالکتریک را بررسی کردند. با استفاده از همین تئوری، پاسخ‌های دینامیکی غیرخطی ورق‌های ساندویچی لانه‌زنبوری آگزتیک با رویه‌های همسانگرد توسط نگوین و فام [۳] و با رویه‌های همسانگرد تقویت شده

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: k-khorshidi@araku.ac.ir



با سفت‌کننده‌های مشبک توسط کونگ و همکاران [۴] تعیین شدند. لی و همکاران [۵] با استفاده از تئوری مرتبه سوم ردی فرکانس‌های طبیعی غیرخطی ورق‌های ساندویچی لانه‌زنبوری را تعیین کردند. آن‌ها نشان دادند که با کاهش ضخامت رویه‌ها اختلاف بین فرکانس‌های غیرخطی و خطی کاهش می‌یابد. لی و همکاران [۶] به منظور تحلیل ارتعاش آزاد و عایق‌بندی صوتی ورق‌های ساندویچی لانه‌زنبوری آگزتیک مدرج تابعی از تئوری تغییرشکل برشی تانژانت هاپربولیک استفاده کردند. آن‌ها با استفاده از تحلیل کوپل ارتعاشی - آکوستیکی فرکانس‌های طبیعی را به‌دست آوردند و نشان دادند که مقادیر این فرکانس‌ها با نتایج حاصل از تحلیل ارتعاش آزاد سیستم برابر هستند. برای پوسته‌های چند لایه، هوانگ [۷] به منظور اصلاح اثر شرط پیوستگی تنش‌های برشی بین لایه‌ها، با افزودن ضرایب تصحیح برشی به تئوری مرتبه سوم ردی، آن را بهبود داد. او ضرایب تصحیح برشی را از طریق مقایسه با معادلات الاستیسیته و با استفاده از یک فرآیند تکراری تعیین کرد. روش پرکاربردتر برای تعیین نتایج دقیق ورق‌های ساندویچی نسبتاً ضخیم استفاده از تئوری‌های لایه‌ای مرتبه بالا است. فراستگ [۸] به‌منظور استخراج معادلات حاکم بر حرکت ورق‌های ساندویچی با هسته نرم دو مدل مختلط (مدل اول) و جابجایی (مدل دوم) را پیشنهاد دادند. آن‌ها در مدل دوم برای رویه‌ها از تئوری کلاسیک استفاده کردند و برای هسته جابجایی‌های درون‌صفحه‌ای و عرضی را به‌ترتیب با استفاده از چندجمله‌ای‌های درجه سوم و دوم مختصه ضخامت تقریب زدند. ورق‌های در تماس با سیال، بخش‌های اصلی بدنه کشتی‌ها، زیر دریایی‌ها، سازه‌های دریایی، مخازن سوخت و بسیاری از وسایل صنعتی دیگر را تشکیل می‌دهند. رفتار ارتعاشی این ورق‌ها نسبت به حالت خشک متفاوت بوده و به دلیل اثر جرم افزوده سیال فرکانس‌های طبیعی آن‌ها کاهش می‌یابند [۹، ۱۰]. در دهه اخیر مطالعات متعددی در زمینه پیش‌بینی فرکانس‌های طبیعی یک ورق در تماس با سیال انجام شده است. حسینی هاشمی و همکاران [۱۱] با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییرشکل برشی و روش حل ریتز اثر سیال با طول بی‌نهایت را بر روی مشخصه‌های ارتعاش آزاد ورق‌های همسانگرد و چندلایه بررسی کردند. خورشیدی و فرهادی [۱۲] و خورشیدی و بخششی [۱۳] با استفاده از سه تئوری کلاسیک، مرتبه اول تغییرشکل برشی و مرتبه سوم تغییرشکل برشی ارتعاش آزاد ورق‌های چندلایه و مدرج تابعی در تماس با سیال محدود را بررسی کردند. خورشیدی و همکاران [۱۴] با استفاده از دو روش تجربی آنالیز مودال ارتعاشی و آکوستیکی فرکانس‌های طبیعی ورق‌های همسانگرد قائم در تماس با سیال محدود را به‌دست آوردند و

نشان دادند که نتایج حاصل از این دو روش تقریباً برابر هستند. خورشیدی و کریمی [۱۵] با استفاده از تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی و روش حل گالرکین، کریمی و همکاران [۱۶] با استفاده از تئوری مرتبه پنجم تغییر شکل برشی و به روش حل ریلی - ریتز فرکانس‌های طبیعی نانو ورق‌های پیزوالکتریک و میکرو ورق‌های مدرج تابعی در تماس با سیال را تعیین کردند. بخششی و مهباد [۱۷] اثر امواج سطح آزاد سیال را به‌صورت جداگانه بر روی ارتعاش آزاد میکرو ورق‌های مدرج تابعی در تماس با سیال محدود بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که حرکت نوسانی سیال باعث تقویت فرکانس‌های طبیعی می‌شود ولی اثر آن زمانی ملموس است که هم سیال خیلی سنگین باشد (مانند جیوه) و هم ورق خیلی نازک باشد. اخیراً رامیان و همکاران [۱۸، ۱۹] به بررسی ارتعاش آزاد ورق‌های ساندویچی قائم و افقی در تماس با سیال محدود پرداختند. آن‌ها برای مدل‌سازی هسته انعطاف‌پذیر از مدل دوم فراستگ استفاده کردند. این مطالعات اثر برخی پارامترها مانند جنس لایه‌ها و نسبت ضخامت هسته به رویه‌ها را بر روی فرکانس‌های طبیعی بررسی کردند. خورشیدی و نوروزیان [۲۰] به بررسی پایداری ورق ساندویچی با هسته آگزتیک و لایه‌های تقویت‌شده در معرض نیروی آیرودلاستیک پرداختند. معادلات با تئوری برشی اصلاح‌شده و روش گلرکین حل و نتایج با مقالات معتبر مقایسه شده است. تأثیر پارامترهای هندسی، فشار آیرودینامیکی و کسر حجمی نانو لوله کربنی بر پایداری تحلیل شده است. نتایج نشان می‌دهد که این پارامترها نقش مهمی در افزایش یا کاهش پایداری سازه دارند. یولجو و همکاران [۲۱] به تأثیر الگوی ساختار هسته آگزتیک و شرایط مرزی را بر رفتار ارتعاشی پانل‌های ساندویچی مورد بررسی قرار دادند. سه نوع هسته آگزتیک چاپ سه‌بعدی شامل سه ضلعی، غیر سه ضلعی و شش ضلعی با رویه‌های مرکب الیاف شیشه/اپوکسی تحلیل و آزمایش شدند. نتایج نشان داد که هسته‌های شش ضلعی عملکرد دینامیکی بهتری داشته و فرکانس طبیعی بالاتری ایجاد می‌کنند. خورشیدی و همکاران [۲۲] ارتعاشات اجباری پوسته استوانه‌ای سه‌لایه، حاوی سیال غیرلزج و تحت بار ضربه‌ای را بررسی کردند. هر سه لایه از جنس آلومینیوم و لایه مرکزی ساخته شده از ساختار آگزتیک لانه‌زنبوری درون رو لحاظ شده است. با استفاده از نظریه‌های تغییر شکل برشی مرتبه بالا و اصل همپلتون معادلات حاکم بر سیستم استخراج شده و از روش باقیمانده وزنی گالرکین حل شده‌اند. سیستم با هر دو شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و تکیه‌گاه گیردار بررسی کردند. فنگ و همکاران [۲۳] یک روش طراحی معکوس مبتنی بر مدل تولیدی عمیق برای تولید سلول‌های آگزتیک سه‌بعدی با نسبت پواسون

طراحی را همزمان بهبود بخشد.

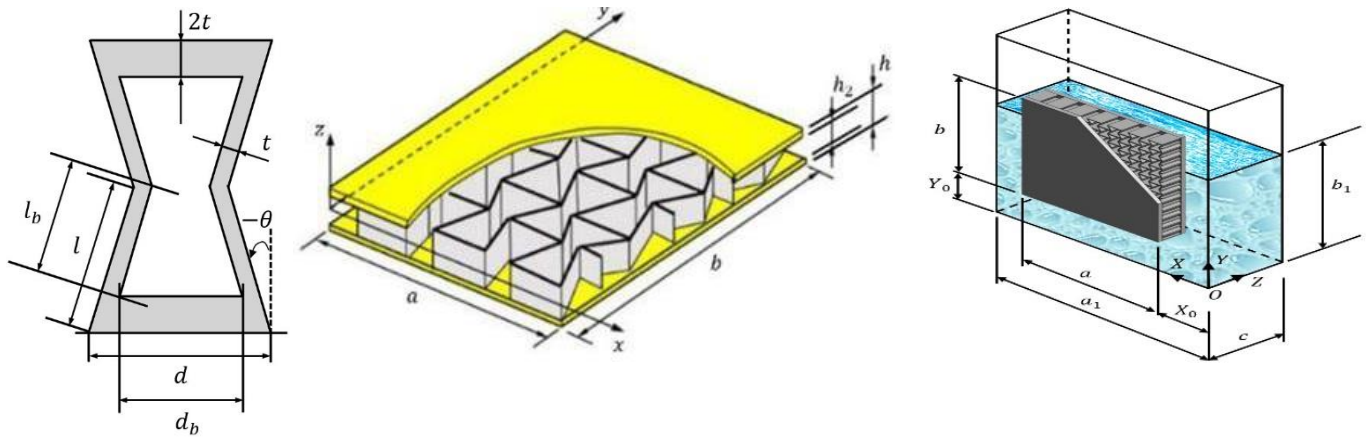
نوآوری تحقیق حاضر بررسی مشخصه‌های ارتعاش آزاد یک ورق ساندویچی مستطیلی با هسته لانه‌زنبوری آگزتیک (شامل دو رویه آلومینیومی و یک هسته لانه‌زنبوری آگزتیک از جنس آلومینیوم) مستقر در دیواره یک مخزن حاوی سیال می‌باشد. برای همگن‌سازی هسته لانه‌زنبوری، علاوه بر مدل مالک و گیسون، از یکی از جدیدترین مدل‌ها (مدل تورنابن) استفاده شده است. برای مدل‌سازی ورق ساندویچی سه نوع مدل تحلیلی پیشنهاد داده شده‌اند و مزایا و معایب آنها با هم مقایسه شده‌اند. از نوع مدل تحلیلی لایه‌ای برای مدل‌سازی ورق ساندویچی دارای شرط مرزی ناوبر و در تماس با سیال استفاده شده‌اند. سیال، ایده‌آل (تراکم‌ناپذیر، غیر لزج و غیر چرخشی) در نظر گرفته شده است. روش‌های حل حاضر، روابط همگن‌سازی هسته لانه‌زنبوری، و چارچوب ریاضی برهم‌کنش ورق ساندویچی - سیال با استفاده از نتایج تحقیقات سایر محققان و نیز نتایج حاصل از تحلیل المان محدود سه‌بعدی صحت سنجی شده‌اند. سرانجام اثر پارامترهای مختلف مانند نسبت ابعاد مخزن به طول ورق، ارتفاع سیال از لبه پایین ورق، موقعیت ورق در دیواره مخزن و هندسه سلول لانه‌زنبوری بر روی فرکانس‌های طبیعی مرطوب مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

۲- استخراج معادلات حاکم و حل آن‌ها

در شکل ۱ ورق ساندویچی مستطیلی به طول a ، عرض b و ضخامت h در نظر گرفته شده است. این ورق سه لایه است بطوریکه لایه بالایی و پایینی از جنس ایزوتروپیک و لایه میانی یا به اصطلاح هسته ورق از جنس آگزتیک با فرض سلول درون رو است. h_c نیز ضخامت هسته آگزتیک است. مطابق شکل ۲ برای توصیف حرکت ورق ساندویچی از سه سیستم مختصات O_1-XYZ , O_2-XYZ , O_3-XYZ استفاده شده است. مختصه‌های درون‌صفحه‌ای X و Y به ترتیب از لبه‌های ورق در $X = X$ و $Y = Y$ اندازه‌گیری می‌شوند. به علاوه مختصه‌های عرضی Z_1 ، Z_2 و Z_3 به ترتیب از سطح تماس لایه ۱ و سیال، سطح میانی لایه ۲ (هسته) و سطح میانی لایه ۳ به سمت راست اندازه‌گیری می‌شوند.

دقت نتایج و سرعت محاسباتی مدل‌های لایه‌ای به نوع تئوری‌های مورد استفاده برای لایه‌ها بستگی دارد. در کار حاضر با صرف‌نظر از کرنش نرمال عرضی رویه‌ها، از تئوری مرتبه اول تغییرشکل برشی برای مدل‌سازی آن‌ها استفاده شده است. مطابق این تئوری میدان جابجایی رویه‌ها را می‌توان به صورت زیر نوشت [۱۵]:

منفی توسعه یافته است. نتایج نشان می‌دهند که تیرهای ساندویچی حاصل، فرکانس طبیعی بالاتری نسبت به روش‌های متداول دارند و رفتار ارتعاشی آن‌ها تحت تأثیر عواملی چون پیکربندی هسته، نسبت ضخامت ورق به هسته، شرایط مرزی و محیط حرارتی قرار دارد. حیدری سروشجانی و همکاران [۲۴] تأثیر هسته‌های آگزتیک بر ویژگی‌های ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی دارای بریدگی با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش تحلیلی را بررسی نمودند. روش پیشنهادی با به‌کارگیری تکنیک دوبعدی و تقسیم‌بندی پوسته به پل‌های مختلف، دقت بالایی در مدل‌سازی نواحی با جزئیات هندسی بالا مانند بریدگی‌ها دارد. همچنین، نتایج با سیگنال‌های لرزشی و صوتی تأیید شده و برتری روش نسبت به مدل‌سازی اجزای محدود اثبات می‌شود. مالک و گیسون [۲۵] به اولویت‌بندی خواص الاستیک مؤثر در شبکه‌های آگزتیک با نظم منظم شش‌ضلعی پرداخته‌اند و نشان داده‌اند که با تغییر ابعاد سلولی و نسبت‌های هندسی می‌توان مدول‌های مؤثر را به شکل طراحی‌شدنی کنترل کرد. تورنابن و همکاران [۲۶] فرمولاسیون‌های مرتبه بالاتر را برای سازه‌های پوسته‌ای دوانحنایی آگزتیک را بررسی کرده‌اند تا دقت پیش‌بینی پاسخ ارتعاشی را افزایش دهند. سوروهان و همکاران [۲۷] با استفاده از تحلیل‌های المان محدود، امکان ارزیابی دقیق خواص مکانیکی آگزتیک را فراهم کرده‌اند تا جایگزین آزمایش‌های پرهزینه باشد. در ورقهای ساندویچی، حسینی هاشمی و ارسنجانی [۲۸] و حسینی هاشمی و همکاران [۲۹] با ارائه معادلات دقیق مرزی و راه‌حل‌های مرتبه سوم تغییرشکل برشی، دقت تخمین فرکانس‌های طبیعی و مودهای ارتعاشی را در شرایط گوناگون مرزی و ضخامت بهبود بخشیده‌اند. پژوهش‌های راویل و ینگ [۳۰]، ژاو و لی [۳۱]، یان و داو [۳۲] و راثو و دسای [۳۳] نیز به کارگیری روش‌های تحلیلی و عددی متفاوت برای تحلیل ارتعاش آزاد این سازه‌ها را نشان می‌دهند تا پاسخ دینامیکی نسبت به ترکیبی از لایه‌ها و مصالح را به دقت پیش‌بینی کنند. مطالعات اخیر بین و همکاران [۳۴] و راد و همکاران [۳۵] ورقهای ساندویچی با رویه‌های متخلخل تابعی مدرج و هسته آگزتیک با در نظر گرفتن شرایط مختلف الاستیک را در بهبود یا تغییر فرکانس‌ها و مودهای ارتعاشی بررسی کرده‌اند. به طور کل، این پژوهش‌ها پل ارتباطی مهمی بین طراحی ساختار آگزتیک، فرمولاسیون‌های مرتبه بالاتر و تحلیل‌های ارتعاشی ورقهای ساندویچی با کاربردهای مهندسی را ایجاد می‌کند و نشان می‌دهد که ترکیب هسته‌های نوین و پایه‌های الاستیک می‌تواند وزن سبک، پایداری دینامیکی و کارایی



شکل ۱. ورق ساندویچی لانه زنبوری آگزتیک با سلول درون رو تجاری در تماس با سیال، هندسه، ابعاد، دستگاه مختصات.

Fig. 1. Commercial re-entrant auxetic honeycomb sandwich plate in contact with fluid: geometry, dimensions, and coordinate system.

$$\eta_{\psi}^{(f)} = \left\{ \psi_x^{(f)} \quad \psi_y^{(f)} \right\}^T \quad (۶)$$

به طوری که u^f و v^f به ترتیب جابجایی‌های سطوح میانی رویه‌ها در راستای محوره‌های X و Y هستند، به علاوه $\psi_x^{(f)}$ و $\psi_y^{(f)}$ به ترتیب بیانگر دوران‌های ناشی از خمش سطوح میانی رویه‌ها حول محوره‌های Y و X می‌باشند. با احتساب اثر انعطاف‌پذیری عرضی، کار حاضر از مدل دوم فراستیک برای بیان میدان جابجایی هسته لانه زنبوری استفاده می‌کند [۸]:

$$\begin{aligned} \eta^{(2)}(x, y, z_2, t) &= \eta_0^{(2)}(x, y, t) \\ &+ z_2 \eta_1^{(2)}(x, y, t) + z_2^2 \eta_2^{(2)}(x, y, t) \\ &+ z_2^3 \eta_3^{(2)}(x, y, t) \end{aligned} \quad (۷)$$

$$\begin{aligned} w^{(2)}(x, y, z_2, t) &= w_0^{(2)}(x, y, t) \\ &+ z_2 w_1^{(2)}(x, y, t) + z_2^2 w_2^{(2)}(x, y, t), \end{aligned} \quad (۸)$$

$$(-h_2/2 \leq z_2 \leq h_2/2)$$

به طوری که $w_j^{(r)}$ ($j = 0, 1, 2$) بیانگر مولفه‌های جابجایی عرضی

$$\begin{aligned} \eta^{(f)}(x, y, z_f, t) &= \eta_0^{(f)}(x, y, t) \\ &+ \left(z_f + \delta_{1f} \frac{h_f}{2} \right) \eta_{\psi}^{(f)}(x, y, t) \end{aligned} \quad (۱)$$

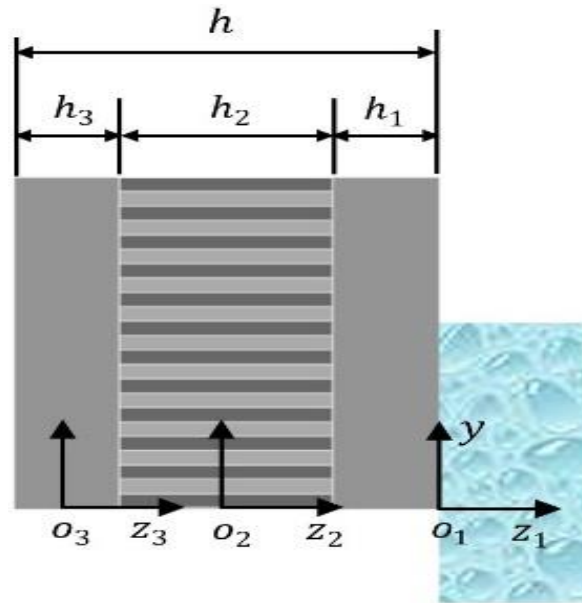
$$\begin{aligned} w^{(f)}(x, y, z_f, t) &= \\ w_0^{(f)}(x, y, t); (f = 1, 3) \end{aligned} \quad (۲)$$

$$\begin{aligned} (z_{fmin} &= -(1 + \delta_{1f})h_f/2); (z_{fmin} \leq z_f \leq z_{fmax}) \quad (\text{الف}) \\ (z_{fmax} &= (1 - \delta_{1f})h_f/2); (z_{fmin} \leq z_f \leq z_{fmax}) \quad (\text{ب}) \end{aligned} \quad (۳)$$

به طوری که δ_{1f} دلتای کروئکر است که به دلیل این که مبدأ سیستم مختصات لایه ۱ از سطح میانی به اندازه $h_1/2$ به سمت راست منتقل شده است، مورد استفاده قرار گرفته است. به علاوه بردارهای $\eta^{(f)}$ و $\eta_{\psi}^{(f)}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۵]:

$$\eta^{(f)} = \left\{ u^{(f)} \quad v^{(f)} \right\}^T \quad (۴)$$

$$\eta_0^{(f)} = \left\{ u_0^{(f)} \quad v_0^{(f)} \right\}^T \quad (۵)$$



شکل ۲. ورق ساندویچی لانه زنبوری آگزتیک (با تکیه گاه های ساده) با سه سیستم مختصات در تماس با سیال.

Fig. 2. Simply supported re-entrant auxetic honeycomb sandwich plate with three coordinate systems in contact with fluid.

$$\begin{cases} \eta^{(f)}(x, y, z_{fint}, t) \\ w^{(f)}(x, y, z_{fint}, t) \end{cases} = \begin{cases} \eta^{(2)}(x, y, z_{2int}, t) \\ w^{(2)}(x, y, z_{2int}, t) \end{cases} \quad (11)$$

هسته هستند. به علاوه بردارهای $\eta^{(r)} = (i = 0, 1, 2, 3)$ و $v_i^{(r)}$ به صورت زیر تعریف می شوند [۸]:

$$z_{fint} = \delta_{1f} z_{fmin} + \delta_{3f} z_{fmax} \quad (12)$$

$$\eta^{(2)} = \begin{Bmatrix} u^{(2)} & v^{(2)} \end{Bmatrix}^T \quad (9)$$

$$z_{2int} = \delta_{1f} h_2 - \delta_{3f} h_2 \quad (13)$$

$$\eta_i^{(2)} = \begin{Bmatrix} u_i^{(2)} & v_i^{(2)} \end{Bmatrix}^T \quad (10)$$

با جایگذاری معادلات (۴-۱۰) در معادله فوق و ساده سازی، مولفه های جابجایی وابسته هسته به صورت زیر به دست می آیند [۱۸]:

$$\eta_3^{(2)} = 2 \left[2 \left(\eta_0^{(1)} - h_2 \eta_1^{(2)} - \eta_0^{(3)} \right) - \left(h_1 \eta_\psi^{(1)} + h_3 \eta_\psi^{(3)} \right) \right] h_2^3 \quad (14)$$

$$\eta_2^{(2)} = \left[2 \left(\eta_0^{(1)} - 2 \eta_0^{(2)} + \eta_0^{(3)} \right) - h_1 \eta_\psi^{(1)} + h_3 \eta_\psi^{(3)} \right] h_2^2 \quad (15)$$

به طوری که $u_i^{(r)} = (i = 0, 1, 2, 3)$ و $v_i^{(r)}$ به ترتیب بیانگر مولفه های جابجایی درون صفحه ای در جهت های X و Y هستند. مطابق معادلات (۱-۱۰)، هر یک از رویه ها دارای ۵ مولفه جابجایی هستند و هسته نیز ۱۱ مولفه جابجایی دارد. در نتیجه ورق ساندویچی دارای ۲۱ مولفه جابجایی می باشد. با در نظر گرفتن پیوستگی کامل بین رویه ها و هسته، شرایط سازگاری در سطح مشترک آن ها را می توان به صورت زیر نوشت [۱۸]:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \left(1 + g' \left(z + \varrho \frac{h}{2} \right)\right) \frac{\partial w_0}{\partial x} + f' \left(z + \varrho \frac{h}{2} \right) \psi_x \quad (23)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \left(1 + g' \left(z + \varrho \frac{h}{2} \right)\right) \frac{\partial w_0}{\partial y} + f' \left(z + \varrho \frac{h}{2} \right) \psi_y \quad (24)$$

با فرض کوچک بودن تغییر شکل‌ها، کرنش‌های خطی رویه‌ها و هسته به ترتیب با استفاده از معادلات محاسبه شده‌اند [۱۹]:

$$\varepsilon^{(f)} = \left\{ \varepsilon_{xx}^{(f)} \quad \varepsilon_{yy}^{(f)} \quad \gamma_{xy}^{(f)} \right\}^T = \varepsilon_0^{(f)} + \left(z_f + \delta_{1f} \frac{h_f}{2} \right) \varepsilon_{\psi}^{(f)} \quad (25)$$

$$\gamma^{(f)} = \left\{ \gamma_{xz}^{(f)} \quad \gamma_{yz}^{(f)} \right\}^T = \eta_{\psi}^{(f)} + \gamma_0^{(f)} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(2)} &= \left\{ \varepsilon_{xx}^{(2)} \quad \varepsilon_{yy}^{(2)} \quad \gamma_{xy}^{(2)} \right\}^T = \alpha_0(z_2) \varepsilon_0^{(2)} \\ &+ \alpha_1(z_2) \varepsilon_1^{(2)} + \alpha_2(z_2) \left(2\varepsilon_0^{(1)} - h_1 \varepsilon_{\psi}^{(1)} \right) \\ &- \alpha_3(z_2) \left(2\varepsilon_0^{(3)} + h_3 \varepsilon_{\psi}^{(3)} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\varepsilon_{zz}^{(2)} = \alpha_0'(z_2) w_0^{(2)} + \alpha_4'(z_2) w_0^{(1)} + \alpha_5'(z_2) w_0^{(3)} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \gamma^{(2)} &= \left\{ \gamma_{xz}^{(2)} \quad \gamma_{yz}^{(2)} \right\}^T = \alpha_0'(z_2) \eta_0^{(2)} \\ &+ \alpha_1'(z_2) \eta_1^{(2)} + \alpha_2'(z_2) \left(2\eta_0^{(1)} - h_1 \eta_{\psi}^{(1)} \right) \\ &- \alpha_3'(z_2) \left(2\eta_0^{(3)} + h_3 \eta_{\psi}^{(3)} \right) + \alpha_0(z_2) \gamma_0^{(2)} \\ &+ \alpha_4(z_2) \gamma_0^{(1)} + \alpha_5(z_2) \gamma_0^{(3)} \end{aligned} \quad (29)$$

به‌طوری‌که $\alpha_{\delta}'(z_{\gamma})$ تا $\alpha_{\delta}'(z_{\gamma})$ مشتقات مرتبه اول چندجمله‌ای‌های $\alpha_{\delta}'(z_{\gamma})$ تا $\alpha_{\delta}'(z_{\gamma})$ می‌باشند. به علاوه بردارهای کرنش $\varepsilon_{\psi}^{(f)}$ ، $\varepsilon_{\psi}^{(f)}$ ، $\varepsilon_{\psi}^{(f)}$ و $\gamma_{\psi}^{(f)}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۹]:

$$w_1^{(2)} = \left(w_0^{(1)} - w_0^{(3)} \right) h_2 \quad (16)$$

$$w_3^{(2)} = 2 \left(w_0^{(1)} - 2w_0^{(2)} + w_0^{(3)} \right) h_2^2 \quad (17)$$

مطابق معادله فوق، مولفه‌های جابجایی ورق ساندویچی از ۲۱ به ۱۵ کاهش می‌یابند. به علاوه با جایگذاری معادلات (۱۴-۱۷) میدان جابجایی هسته به‌صورت زیر ساده می‌شود [۱۸]:

$$\begin{aligned} \eta^{(2)} &= \alpha_0(z_2) \eta_0^{(2)} + \alpha_1(z_2) \eta_1^{(2)} \\ &+ \alpha_2(z_2) \left(2\eta_0^{(1)} - h_1 \eta_{\psi}^{(1)} \right) \\ &- \alpha_3(z_2) \left(2\eta_0^{(3)} + h_3 \eta_{\psi}^{(3)} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

$$w^{(2)} = \alpha_0(z_2) w_0^{(2)} + \alpha_4(z_2) w_0^{(1)} + \alpha_5(z_2) w_0^{(3)} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{aligned} &(\alpha_0(z_2), \alpha_1(z_2), \alpha_2(z_2), \alpha_3(z_2)) = \\ &\left(1 - 4 \left(\frac{z_2}{h_2} \right)^2, z_2 \alpha_0(z_2), \frac{z_2}{h_2} \alpha_4(z_2), \frac{z_2}{h_2} \alpha_5(z_2) \right) \quad (\text{ب}) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\alpha_{4,5}(z_2) = 2 \left(\frac{z_2}{h_2} \right)^2 \pm \frac{z_2}{h_2} \quad (\text{ج})$$

با فرض کوچک بودن تغییر شکل‌ها، مولفه‌های کرنش خطی به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند [۲۰]:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = g \left(z + \varrho \frac{h}{2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + f \left(z + \varrho \frac{h}{2} \right) \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \quad (20)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = g \left(z + \varrho \frac{h}{2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + f \left(z + \varrho \frac{h}{2} \right) \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2g \left(z + \varrho \frac{h}{2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ &+ f \left(z + \varrho \frac{h}{2} \right) \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

$$Q_{11}^{(i)} = \frac{E_{11}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} \quad (39) \quad \varepsilon_0^{(f)} = \partial \eta_0^{(f)} \quad (30)$$

$$Q_{22}^{(i)} = \frac{E_{22}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} \quad (40) \quad \varepsilon_{\psi}^{(f)} = \partial \eta_{\psi}^{(f)} \quad (31)$$

$$Q_{12}^{(i)} = \frac{\nu_{21}^{(i)} E_{11}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} = \frac{\nu_{12}^{(i)} E_{22}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} \quad (41) \quad \gamma_0^{(f)} = \tilde{\partial} w_0^{(f)} \quad (32)$$

$$Q_{66}^{(i)} = G_{12}^{(i)} \quad (42) \quad \varepsilon_1^{(2)} = \partial \eta_1^{(2)} \quad (33)$$

$$Q_{55}^{(i)} = \kappa_{13} G_{13}^{(i)} \quad (43) \quad \gamma_0^{(2)} = \tilde{\partial} w_0^{(2)} \quad (34)$$

$$Q_{44}^{(i)} = \kappa_{23} G_{23}^{(i)} \quad (44) \quad \text{به طوری که } \partial \text{ و } \tilde{\partial} \text{ به ترتیب ماتریس و بردار مشتق هستند که مطابق زیر تعریف می شوند [۱۹]:}$$

به طوری که $i = 1, 2$ نمایانگر رویه های ایزتروپیک با مدول های یانگ و برشی E و G ، ضریب پواسون ν و چگالی ρ می باشند. همچنین $i = 2$ نشان دهنده هسته لانه زنبوری آگزتیک با ضرایب پواسون درون صفحه ای منفی $\nu_{12}^{(2)}$ و $\nu_{21}^{(2)}$ می باشد. k_{13} و κ_{13} نیز ضرایب تصحیح برشی مربوط به تئوری بهبود یافته مرتبه سوم ردی هستند. روابط تنش - کرنش برای رویه های همسانگرد عبارتند از [۲۰]

$$\rho S(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (35)$$

$$\rho S(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (36)$$

به طوری که ∂_x و ∂_y به ترتیب بیانگر مشتقات جزئی نسبت به x و y هستند. ورق ساندویچی با هسته لانه زنبوری آگزتیک یک ورق چند لایه ارتوتروپیک است که روابط تنش - کرنش آن به صورت زیر می باشد [۱۶]:

$$\sigma^{(f)} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{(f)} & \sigma_{yy}^{(f)} & \tau_{xy}^{(f)} \end{Bmatrix}^T = Q_{\sigma}^{(f)} \varepsilon^{(f)} \quad (45)$$

$$\tau^{(f)} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz}^{(f)} & \tau_{yz}^{(f)} \end{Bmatrix}^T = Q_{\tau}^{(f)} \gamma^{(f)} \quad (46)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^{(i)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix}^{(i)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (37)$$

به طوری که

$$Q_{\tau}^{(2)} = \begin{bmatrix} Q_{55}^{(2)} & 0 \\ 0 & Q_{44}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{13}^{(2)} & 0 \\ 0 & G_{23}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (53)$$

و

$$\Delta^{(2)} = 1 - \nu_{12}^{(2)} \nu_{21}^{(2)} - \nu_{23}^{(2)} \nu_{32}^{(2)} - \nu_{31}^{(2)} \nu_{13}^{(2)} - 2\nu_{12}^{(2)} \nu_{23}^{(2)} \nu_{31}^{(2)} \quad (54)$$

در این مدل‌ها، انرژی‌های کرنشی الاستیک و جنبشی ورق ساندویچی

به‌ترتیب با استفاده از معادلات (۵۵-۵۶) محاسبه می‌شوند [۲۰]:

$$U_S = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} \sum_{i=1}^3 \left[\sigma_{xx}^{(i)} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}^{(i)} \varepsilon_{yy} + \tau_{xy}^{(i)} \gamma_{xy} + \tau_{xz}^{(i)} \gamma_{xz} + \tau_{yz}^{(i)} \gamma_{yz} \right] dz_i dy dx \quad (55)$$

$$T_P = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} \sum_{i=1}^3 \rho^{(i)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dz_i dy dx \quad (56)$$

به‌طوری‌که

$$\{z_1^*; z_1^{**}\} = \left\{ -\frac{h}{2} \varrho + \frac{h_2}{2}; \frac{h}{2} (1 - \varrho) \right\} \quad (57)$$

$$\{z_2^*; z_2^{**}\} = \left\{ -\frac{h}{2} \varrho - \frac{h_2}{2}; -\frac{h}{2} \varrho + \frac{h_2}{2} \right\} \quad (58)$$

$$\{z_3^*; z_3^{**}\} = \left\{ -\frac{h}{2} \varrho - \frac{h}{2}; -\frac{h}{2} \varrho - \frac{h_2}{2} \right\} \quad (59)$$

در این مدل، انرژی‌های کرنشی الاستیک و جنبشی ورق ساندویچی

به‌ترتیب با استفاده از معادلات (۳-۲۴) و (۶۰-۶۱) تعریف می‌شوند [۲۰]:

$$Q_{\sigma}^{(f)} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(f)} & Q_{12}^{(f)} & 0 \\ Q_{12}^{(f)} & Q_{22}^{(f)} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^{(f)} \end{bmatrix} = \quad (47)$$

$$\frac{E_0}{1 - \nu_0^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_0 & 0 \\ \nu_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_0}{2} \end{bmatrix}$$

$$Q_{\tau}^{(f)} = \begin{bmatrix} Q_{55}^{(f)} & 0 \\ 0 & Q_{44}^{(f)} \end{bmatrix} = \kappa_s G_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (48)$$

به‌طوری‌که K_s بیانگر ضریب تصحیح برشی مربوط به تئوری مرتبه

اول تغییرشکل برشی است و مقدار آن برابر $\pi^2 / 12$ در نظر گرفته شده

است. همچنین روابط تنش - کرنش هسته ارتوتروپیک عبارتند از [۲۰]:

$$\sigma^{(2)} = \left\{ \sigma_{xx}^{(2)} \quad \sigma_{yy}^{(2)} \quad \sigma_{zz}^{(2)} \quad \tau_{xy}^{(2)} \right\}^T = Q_{\sigma}^{(2)} \varepsilon^{(2)} \quad (49)$$

$$\tau^{(2)} = \left\{ \tau_{xz}^{(2)} \quad \tau_{yz}^{(2)} \right\}^T = Q_{\tau}^{(2)} \gamma^{(2)} \quad (50)$$

$$\varepsilon^{(2)} = \left\{ \varepsilon_{xx}^{(2)} \quad \varepsilon_{yy}^{(2)} \quad \varepsilon_{zz}^{(2)} \quad \gamma_{xy}^{(2)} \right\}^T \quad (51)$$

به‌طوری‌که تعاریف $Q_{\sigma}^{(\tau)}$ و $Q_{\tau}^{(\tau)}$ عبارتند از [۲۰]:

$$Q_{\sigma}^{(2)} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(2)} & Q_{12}^{(2)} & Q_{13}^{(2)} & 0 \\ Q_{12}^{(2)} & Q_{22}^{(2)} & Q_{23}^{(2)} & 0 \\ Q_{13}^{(2)} & Q_{23}^{(2)} & Q_{33}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{66}^{(2)} \end{bmatrix} = \quad (52)$$

$$\frac{1}{\Delta^{(2)}} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -\nu_{23}^{(2)} \nu_{32}^{(2)} \end{pmatrix} E_{11}^{(2)} & \begin{pmatrix} \nu_{31}^{(2)} & \\ +\nu_{31}^{(2)} \nu_{23}^{(2)} \end{pmatrix} E_{11}^{(2)} & \begin{pmatrix} \nu_{31}^{(2)} & \\ +\nu_{21}^{(2)} \nu_{32}^{(2)} \end{pmatrix} E_{11}^{(2)} & 0 \\ & \begin{pmatrix} 1 & \\ & -\nu_{31}^{(2)} \nu_{13}^{(2)} \end{pmatrix} E_{22}^{(2)} & \begin{pmatrix} \nu_{32}^{(2)} & \\ +\nu_{31}^{(2)} \nu_{12}^{(2)} \end{pmatrix} E_{22}^{(2)} & 0 \\ & & \begin{pmatrix} 1 & \\ & -\nu_{21}^{(2)} \nu_{12}^{(2)} \end{pmatrix} E_{33}^{(2)} & 0 \\ sym & & & \Delta^{(2)} G_{12}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\sin(-\theta) < \frac{1}{2} \frac{d_b}{l_b} \quad (62)$$

بر اساس مدل مالک و گیسون، خواص موثر هسته لانه‌زنبوری کلاسیک را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود [۲۵]:

$$\rho^{(2)} = \rho_0 \left[1 - \frac{l_b (d_b + l_b \sin \theta)}{l (d + l \sin \theta)} \right] \quad (63)$$

$$E_{11}^{(2)} = E_0 \frac{\left(\frac{2t}{l_b} \right)^3 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right)}{\cos^3 \theta \left[1 + \left(\frac{2t}{l_b} \right)^2 \left(2.4 + 1.5\nu_0 + \tan^2 \theta \right) + 2 \frac{d_b}{l_b} \sec^2 \theta \right]} \quad (64)$$

$$E_{22}^{(2)} = E_0 \frac{\left(\frac{2t}{l_b} \right)^3 \cos \theta}{\left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right) \sin^2 \theta \left[1 + \left(\frac{2t}{l_b} \right)^2 \left(2.4 + 1.5\nu_0 + \cot^2 \theta \right) \right]} \quad (65)$$

$$G_{12}^{(2)} = E_0 \frac{\left(\frac{2t}{l_b} \right)^3 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right)}{\left(\frac{d_b}{l_b} \right)^2 \cos \theta G_{12}^*} \quad (66)$$

$$G_{12}^* = 1 + 2 \frac{d_b}{l_b} + \left(\frac{2t}{l_b} \right)^2 \times \left[\frac{2.4 + 1.5\nu_0}{\frac{d_b}{l_b}} \left(2 + \frac{d}{l} + \sin \theta \right) + \frac{d}{l} + \sin \theta \right] \left[\left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right) \tan^2 \theta + \sin \theta \right] \quad (67)$$

$$U_S = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\sum_{\substack{f=1 \\ (f \neq 2)}}^3 \int_{z_{f \min}}^{z_{f \max}} \left[\left(\varepsilon^{(f)} \right)^T \sigma^{(f)} + \left(\gamma^{(f)} \right)^T \tau^{(f)} \right] dz_f \right. \\ \left. + \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \left[\left(\varepsilon^{(2)} \right)^T \sigma^{(2)} + \left(\gamma^{(2)} \right)^T \tau^{(2)} \right] dz_2 \right] dy dx \quad (60)$$

$$T_P = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\sum_{\substack{f=1 \\ (f \neq 2)}}^3 \int_{z_{f \min}}^{z_{f \max}} \rho_0 \left\{ \dot{\eta}^{(f)} \right\}^T \left\{ \dot{\eta}^{(f)} \right\} dz_f \right. \\ \left. + \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \rho^{(2)} \left\{ \dot{\eta}^{(2)} \right\}^T \left\{ \dot{\eta}^{(2)} \right\} dz_2 \right] dy dx \quad (61)$$

به طوری که $Z_{f \max}$ و $Z_{f \min}$ در معادلات (۳-۱) تعریف شده‌اند.

برای تحلیل‌های استاتیکی و دینامیکی ورق‌های لانه‌زنبوری، مدل سازی واقعی هسته دقیق ترین پاسخ‌ها را به دست می‌دهد، لیکن تعداد درجات آزادی کل و به تبع آن زمان محاسباتی را به مقدار قابل توجهی افزایش می‌دهد. بهترین روش برای ساده سازی تحلیل آن‌ها، همگن سازی رفتار هسته لانه زنبوری است به طوری که بتوان آن را به صورت یک لایه ارتوتروپیک معادل، تحلیل کرد. به منظور حصول پاسخ‌های نهایی قابل اعتماد، خواص موثر هسته لانه‌زنبوری باید تا حد امکان دقیق تعیین شوند. در سال ۱۹۹۹ گیسون و اشبی [۶] با فرض غشائی بودن دیواره سلول، روابط پارامتری معادل هسته لانه‌زنبوری را ارائه دادند. روابط آن‌ها ساده بوده ولی دقت خوبی ندارند. در سال ۲۰۱۵ مالک و گیسون [۲۵] با در نظر گرفتن اثر نقاط موجود در محل تقاطع دیواره‌های افقی و مورب، مدل خود را ارائه دادند. شکل (۱) مشخصات هندسی سلول لانه‌زنبوری درون‌رو کلاسیک (ضخامت یکسان دیواره‌های افقی و مورب) را نشان می‌دهد که این مشخصه‌ها شامل زاویه سلول (θ)، طول دیواره‌های افقی (d) و مورب (l) و ضخامت آن‌ها (t) هستند. همچنین d_b و l_b به ترتیب طول قسمت‌های داخلی دیواره‌های افقی و مورب هستند که بر حسب پارامترهای سلول تعیین می‌شوند. با توجه به شکل اگر زاویه صفر باشد سلول مستطیلی بوده و اگر زاویه مثبت باشد سلول شش ضلعی می‌باشد. مطابق شکل، شرط لازم برای عدم تماس قسمت‌های داخلی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

بر اساس مدل مالک و گییسون، خواص موثر هسته لانه‌زنبوری تجاری

را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود [۲۵]:

$$\rho^{(2)} = \rho_0 \left[1 - \frac{l \cos \theta (d_b + l \sin \theta)}{(l \cos \theta + t)(d + l \sin \theta)} \right] \quad (۷۴)$$

$$E_{11}^{(2)} = E_0 \frac{\left(\frac{t}{l_b}\right)^3 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right)}{\cos^3 \theta \left[1 + \left(\frac{t}{l_b}\right)^2 \left(\frac{2.4 + 1.5\nu_0}{+ \tan^2 \theta + \frac{d_b}{l_b} \sec^2 \theta} \right) \right]} \quad (۷۵)$$

$$E_{22}^{(2)} = E_0 \frac{\left(\frac{t}{l_b}\right)^3 \cos \theta}{\left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) \sin^2 \theta \left[1 + \left(\frac{t}{l_b}\right)^2 \left(\frac{2.4 + 1.5\nu_0}{+ \cot^2 \theta} \right) \right]} \quad (۷۶)$$

$$G_{12}^{(2)} = E_0 \frac{\left(\frac{t}{l_b}\right)^3 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right)}{\left(\frac{d_b}{l_b}\right)^2 \cos \theta G_{12}^*} \quad (۷۷)$$

$$G_{12}^* = 1 + 2 \frac{d_b}{l_b} + \left(\frac{t}{l_b}\right)^2 \left[\frac{2.4 + 1.5\nu_0}{\frac{d_b}{l_b}} \left(4 + \frac{d}{l} + \sin \theta \right) + \frac{d + \sin \theta}{\left(\frac{d_b}{l_b}\right)^2} \left[\left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right) \tan^2 \theta + \sin \theta \right] \right] \quad (۷۸)$$

$$G_{13}^{(2)} = G_0 \frac{\left(\frac{t}{l}\right)}{\left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) \left(\frac{t}{l} + \cos \theta\right)} \times \left[\frac{l_b}{l} \sin^2 \theta + \frac{d}{l} + \frac{t}{l} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (۷۹)$$

$$G_{13}^{(2)} = G_0 \frac{\left(\frac{2t}{l}\right)}{\left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) \cos \theta} \times \left[\frac{l_b}{l} \sin^2 \theta + \frac{d_b}{2l} + \frac{3t}{2l} \tan \theta - \frac{t \sin^2 \theta (2 \sin \theta - 1)}{l \cos \theta} \right] \quad (۶۸)$$

$$G_{23}^{(2)} = G_0 \frac{\left(\frac{2t}{l}\right)}{\left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) \cos \theta} \times \left[\frac{l_b}{l} \cos^2 \theta + \frac{3t}{2l} \tan \theta - \frac{t}{l} \cos \theta (2 \sin \theta - 1) \right] \quad (۶۹)$$

$$\nu_{12}^{(2)} = \frac{\sin \theta \left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right)}{\cos^2 \theta} \times \left[\frac{1 + \left(\frac{2t}{l_b}\right)^2 (1.4 + 1.5\nu_0)}{1 + \left(\frac{2t}{l_b}\right)^2 \left(\frac{2.4 + 1.5\nu_0 + \tan^2 \theta}{+ 2 \frac{d_b}{l_b} \sec^2 \theta} \right)} \right] \quad (۷۰)$$

$$\nu_{21}^{(2)} = \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta \left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right)} \times \left[\frac{1 + \left(\frac{2t}{l_b}\right)^2 (1.4 + 1.5\nu_0)}{1 + \left(\frac{2t}{l_b}\right)^2 (2.4 + 1.5\nu_0 + \cot^2 \theta)} \right] \quad (۷۱)$$

$$l_b = l - \frac{t}{\cos \theta} \quad (۷۲)$$

$$d_b = d - \frac{2t(1 - \sin \theta)}{\cos \theta} \quad (۷۳)$$

می‌شوند [۲۵]:

$$E_{11}^{(2)} = E_0 \frac{\left(\frac{t}{l}\right)^3 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right)}{\cos^3 \theta \left[1 + \left(\frac{t}{l}\right)^2 \left(2.4 + 1.5\nu_0 + \tan^2 \theta\right) + 2\frac{d}{l} \sec^2 \theta\right]} \quad (۸۶)$$

$$E_{22}^{(2)} = E_0 \frac{\left(\frac{t}{l}\right)^3 \cos \theta}{\left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) \sin^2 \theta \left[1 + \left(\frac{t}{l}\right)^2 \left(2.4 + 1.5\nu_0\right) + \cot^2 \theta\right]} \quad (۸۷)$$

$$E_{33}^{(2)} = E_0 \frac{\frac{t}{l} \left(\frac{d}{l} + 2\right)}{2 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) \cos \theta} \quad (۸۸)$$

$$\rho^{(2)} = \rho_0 E_{33}^{(2)} E_0 \quad (۸۹)$$

$$G_{12}^{(2)} = E_0 \frac{4 \left(\frac{t}{l}\right)^3 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right)}{\left(\frac{d}{l}\right)^2 \left(4 + \frac{d}{l}\right) \cos \theta} \quad (۹۰)$$

$$G_{23}^{(2)} = G_0 \frac{\frac{t}{l} \cos \theta}{\frac{d}{l} + \sin \theta} \quad (۹۱)$$

$$\nu_{12}^{(2)} = \frac{\left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) \sin \theta \left[1 + \left(\frac{t}{l}\right)^2 (1.4 + 1.5\nu_0)\right]}{\cos^2 \theta \left[1 + \left(\frac{t}{l}\right)^2 \left(2.4 + 1.5\nu_0 + \tan^2 \theta\right) + 2\frac{d}{l} \sec^2 \theta\right]} \quad (۹۲)$$

$$\nu_{21}^{(2)} = \frac{\cos^2 \theta \left[1 + \left(\frac{t}{l}\right)^2 (1.4 + 1.5\nu_0)\right]}{\left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) \sin \theta \left[1 + \left(\frac{t}{l}\right)^2 \left(2.4 + 1.5\nu_0\right) + \cot^2 \theta\right]} \quad (۹۳)$$

$$G_{23}^{(2)} = G_0 \frac{\left(\frac{t}{l}\right)}{\left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) \left(\frac{t}{l} + \cos \theta\right)} \times \left[\frac{l_b}{l} \cos^2 \theta + 2\frac{t}{l} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right] \quad (۸۰)$$

$$d_b = d - t \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \quad (۸۱)$$

$$l_b = l - t \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \quad (۸۲)$$

اخیراً تورنابن و همکاران [۲۶] مدل قبلی پیشنهادی توسط سوروهان و همکاران در سال ۲۰۱۵ [۲۷] را ارتقاء دادند. از آنجایی که در میان خواص الاستیک موثر، مدول برشی عرضی $G_{۱۳}^{(۲)}$ بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق ساندویچی اثری قابل توجه می‌گذارد، تورنابن و همکاران [۲۶]، رابطه‌ای برای محاسبه این مدول برشی عرضی پیشنهاد دادند و از طریق مقایسه با تحلیل المان محدود سه‌بعدی - دوبعدی نشان دادند که مدلشان نسبت به مدل‌های تئوری پیشین از دقت بالاتری برخوردار است. تورنابن و همکاران [۲۶] مدول برشی عرضی $G_{۱۳}^{(۲)}$ هسته لانه‌زنبوری کلاسیک را به‌صورت زیر محاسبه نمودند [۲۶]:

$$G_{13}^{(2)} = G_{13_L}^{(2)} + \frac{\frac{2}{5} \frac{h_2}{l}}{\frac{3}{4} \left(\frac{h_2}{l}\right)^2 + \frac{1}{4}} \left(G_{13_U}^{(2)} - G_{13_L}^{(2)}\right), \quad (۸۳)$$

$$G_{13_L}^{(2)} = G_0 \frac{\frac{t}{l} \left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right)}{\left(1 + 2\frac{d}{l}\right) \cos \theta}, \quad (۸۴)$$

$$G_{13_U}^{(2)} = G_0 \frac{\frac{t}{l} \left(\frac{d}{l} + 2 \sin^2 \theta\right)}{2 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) \cos \theta} \quad (۸۵)$$

سایر خواص موثر هسته لانه‌زنبوری کلاسیک به‌صورت زیر محاسبه

$$E_{22}^{(2)} = E_0 \frac{\left(\frac{t}{l}\right)^3 \cos \theta}{\left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) \sin^2 \theta \left[1 + \left(\frac{t}{l}\right)^2 \left(\frac{2.4 + 1.5\nu_0}{\cot^2 \theta}\right)\right]} \quad (10.1)$$

$$\nu_{13}^{(2)} = \nu_0 \frac{E_{11}^{(2)}}{E_{33}^{(2)}} \quad (94)$$

$$E_{33}^{(2)} = E_0 \frac{\frac{t}{l} \left(\frac{d}{l} + 1\right)}{\left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) \cos \theta} \quad (10.2)$$

$$\nu_{23}^{(2)} = \nu_0 \frac{E_{22}^{(2)}}{E_{33}^{(2)}} \quad (95)$$

$$\nu_{31}^{(2)} = \nu_{32}^{(2)} = \nu_0 \quad (96)$$

$$\rho^{(2)} = \rho_0 E_{33}^{(2)} E_0 \quad (10.3)$$

تورنابین و همکاران [۲۶] مدول برشی عرضی $G_{13}^{(2)}$ هسته لانه‌زنبوری تجاری را به‌صورت زیر محاسبه نمودند:

$$G_{12}^{(2)} = E_0 \frac{\left(\frac{t}{l}\right)^3 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right)}{\left(\frac{d}{l}\right)^2 \left(1 + \frac{d}{4l}\right) \cos \theta} \quad (10.4)$$

$$G_{13}^{(2)} = G_{13_L}^{(2)} + \frac{\frac{2}{5} \frac{h_2}{l}}{\frac{3}{4} \left(\frac{h_2}{l}\right)^2 + \frac{1}{4}} \left(G_{13_U}^{(2)} - G_{13_L}^{(2)}\right) \quad (97)$$

$$G_{23}^{(2)} = G_0 \frac{\frac{t}{l} \cos \theta}{\frac{d}{l} + \sin \theta} \quad (10.5)$$

$$G_{13_L}^{(2)} = G_0 \frac{\frac{t}{l} \left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right)}{\left(1 + \frac{d}{l}\right) \cos \theta} \quad (98)$$

سیال داخل مخزن ایده‌آل در نظر گرفته شده است، یعنی سیال تراکم‌ناپذیر، غیر لزج و غیر چرخشی است. به علاوه نوسانات سیال کوچک، هارمونیک و خطی فرض شده‌اند. مطابق شرط پیوستگی تابع پتانسیل سرعت باید معادله لاپلاس را ارضاء نماید [۱۵]:

$$G_{13_U}^{(2)} = G_0 \frac{\frac{t}{l} \left(\frac{d}{l} + \sin^2 \theta\right)}{\left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) \cos \theta} \quad (99)$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z^2} = \nabla^2 \varphi_B + \nabla^2 \varphi_S = 0 \quad (10.6)$$

سایر خواص موثر هسته لانه‌زنبوری تجاری به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند [۲۶]:

$$\nabla^2 \varphi_B = 0, \nabla^2 \varphi_S = 0 \quad (10.7)$$

به‌طوری‌که φ_B و φ_S به‌ترتیب توابع پتانسیل سرعت موده‌ای بالچینگ (حرکت سیال ناشی از اثر ارتعاش ورق) و اسلاشینگ (امواج سطح آزاد سیال) می‌باشند.

$$E_{11}^{(2)} = E_0 \frac{\left(\frac{t}{l}\right)^3 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right)}{\cos^3 \theta \left[1 + \left(\frac{t}{l}\right)^2 \left(\frac{2.4 + 1.5\nu_0 + \tan^2 \theta}{+2\frac{d}{l} \sec^2 \theta}\right)\right]} \quad (100)$$

کف مخزن ($y=0$) و سه دیواره قائم $x=0$ و $z=c$ صلب و نفوذ ناپذیر هستند، بنابراین برای مودهای بالچینگ و اسلاشینگ می‌توان نوشت:

$$-\rho_F \frac{\partial \varphi_B}{\partial t} \Big|_{Y=b_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi_B}{\partial t} \Big|_{Y=b_1} = 0 \Rightarrow \quad (116)$$

$$\varphi_B = 0 \quad \text{at } Y = b_1$$

$$\frac{\partial \varphi_B}{\partial X} \Big|_{X=0, a_1} = 0 \quad (108)$$

$$\frac{\partial \varphi_B}{\partial Y} \Big|_{Y=0} = 0 \quad (109)$$

$$\frac{\partial \varphi_B}{\partial Z} \Big|_{Z=c} = 0 \quad (110)$$

$$\frac{\partial \varphi_S}{\partial X} \Big|_{X=0, a_1} = 0 \quad (111)$$

$$\frac{\partial \varphi_S}{\partial Y} \Big|_{Y=0} = 0 \quad (112)$$

$$\frac{\partial \varphi_S}{\partial Z} \Big|_{Z=c} = 0 \quad (113)$$

شرایط کوپلینگ دینامیکی در دیواره قائم $Z=0$ (برای مودهای بالچینگ و اسلاشینگ) را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\frac{\partial \varphi_B}{\partial Z} \Big|_{Z=0} = \begin{cases} \frac{\partial w_0}{\partial t}; X_0 \leq X \leq X_0 + a; Y_0 \leq Y \leq b_1 \\ 0 \end{cases} \quad (114)$$

$$\frac{\partial \varphi_S}{\partial Z} \Big|_{Z=0} = 0, \quad (115)$$

به طوری که ρ_F چگالی سیال است. برای حل دو معادله لاپلاس موجود در معادلات (۱۰۶-۱۰۷) از روش جداسازی متغیرها استفاده شده است. برای این منظور ابتدا توابع پتانسیل سرعت مودهای بالچینگ و اسلاشینگ به صورت زیر نوشته شده‌اند:

$$\varphi_B(X, Y, Z, t) = \dot{T}_B(t) \cdot \hat{X}_B(X) \cdot \hat{Y}_B(Y) \cdot \hat{Z}_B(Z) \quad (117)$$

$$\varphi_S(X, Y, Z, t) = \dot{T}_S(t) \cdot \hat{X}_S(X) \cdot \hat{Y}_S(Y) \cdot \hat{Z}_S(Z) \quad (118)$$

به طوری که $\dot{T}_B(t)$ و $\dot{T}_S(t)$ به ترتیب ضرایب وابسته به زمان مودهای بالچینگ و اسلاشینگ هستند و می‌توان آن‌ها را به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{Bmatrix} \dot{T}_B(t) \\ \dot{T}_S(t) \end{Bmatrix} = -i\omega \begin{Bmatrix} T_B \\ T_S \end{Bmatrix} \exp(-i\omega t) \quad (119)$$

به طوری که ω بیانگر فرکانس طبیعی سیستم بر حسب رادیان بر ثانیه است. با جای گذاری معادلات (۱۱۷) و (۱۱۸) در معادله (۱۰۷)، معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$\frac{1}{\hat{X}_B(X)} \frac{d^2 \hat{X}_B}{dX^2} + \frac{1}{\hat{Y}_B(Y)} \frac{d^2 \hat{Y}_B}{dY^2} + \frac{1}{\hat{Z}_B(Z)} \frac{d^2 \hat{Z}_B}{dZ^2} = 0 \quad (120)$$

$$\frac{1}{\hat{X}_S(X)} \frac{d^2 \hat{X}_S}{dX^2} + \frac{1}{\hat{Y}_S(Y)} \frac{d^2 \hat{Y}_S}{dY^2} + \frac{1}{\hat{Z}_S(Z)} \frac{d^2 \hat{Z}_S}{dZ^2} = 0 \quad (121)$$

از هر یک از معادلات فوق، سه معادله دیفرانسیل معمولی به صورت زیر قابل استخراج است:

$$\hat{X}_B(X) = \cos\left(\frac{k_1\pi}{a_1}X\right); (k_1=0, 1, 2, \dots) \quad (128)$$

همین طور با این فرض که Π_Y^B یک عدد موهومی خالص است، از معادلات (۱۲۳)، (۱۰۸-۱۱۰) و (۱۱۶) نتیجه می شود:

$$\hat{Y}_B(Y) = \cos\left(\frac{(2k_2+1)\pi}{2b_1}Y\right); (k_2=0, 1, 2, \dots) \quad (129)$$

سرانجام با حل معادله دیفرانسیل (۱۲۴) به همراه شرط مرزی (۱۰۸-۱۱۰) نتیجه می شود:

$$\hat{Z}_B(Z) = \cosh(p_{k_1k_2}Z) - \tanh(p_{k_1k_2}c) \sinh(p_{k_1k_2}Z) \quad (130)$$

$$p_{k_1k_2} = \pi \sqrt{\left(\frac{k_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{(2k_2+1)}{2b_1}\right)^2} \quad (131)$$

با جای گذاری معادلات (۱۲۸-۱۳۱) در معادله (۱۱۷) و اضافه نمودن ترم زمانی در قالب سری های فوریه، φ_B به دست می آید:

$$\varphi_B(X, Y, Z, t) = \sum_{k_1=0}^{M_B} \sum_{k_2=0}^{N_B} \dot{T}_{B_{k_1k_2}}(t) \hat{X}_{B_{k_1}}(X) \hat{Y}_{B_{k_2}}(Y) \hat{Z}_{B_{k_1k_2}}(Z) \quad (132)$$

با جای گذاری معادله (۱۳۲) در (۱۱۱-۱۱۳) ضرایب وابسته به زمان مود بالجینگ (یعنی $\dot{T}_{B_{k_1k_2}}(t)$) بر حسب توابعی از جابجایی عرضی ورق ساندویچی (یعنی $W \cdot$) به دست می آیند:

$$\dot{T}_{B_{k_1k_2}}(t) = \frac{2(2 - \delta_{0k_1})}{-a_1 b_1 p_{k_1k_2} \tanh(p_{k_1k_2}c)} \quad (133)$$

$$\times \int_{X_0}^{X_0+a} \int_{Y_0}^{b_1} \frac{\partial W_0}{\partial t} \hat{X}_{B_{k_1}}(X) \hat{Y}_{B_{k_2}}(Y) dY dX$$

$$\frac{1}{\hat{X}_B(X)} \frac{d^2 \hat{X}_B}{dX^2} = -\Pi_X^{B^2} \Rightarrow \quad (122)$$

$$\frac{d^2 \hat{X}_B}{dX^2} + \Pi_X^{B^2} \hat{X}_B(X) = 0$$

$$\frac{1}{\hat{Y}_B(Y)} \frac{d^2 \hat{Y}_B}{dY^2} = -\Pi_Y^{B^2} \Rightarrow \quad (123)$$

$$\frac{d^2 \hat{Y}_B}{dY^2} + \Pi_Y^{B^2} \hat{Y}_B(Y) = 0$$

$$\frac{1}{\hat{Z}_B(Z)} \frac{d^2 \hat{Z}_B}{dZ^2} = \Pi_X^{B^2} + \Pi_Y^{B^2} \Rightarrow \quad (124)$$

$$\frac{d^2 \hat{Z}_B}{dZ^2} - (\Pi_X^{B^2} + \Pi_Y^{B^2}) \hat{Z}_B(Z) = 0$$

$$\frac{1}{\hat{X}_S(X)} \frac{d^2 \hat{X}_S}{dX^2} = -\Pi_X^{S^2} \Rightarrow \quad (125)$$

$$\frac{d^2 \hat{X}_S}{dX^2} + \Pi_X^{S^2} \hat{X}_S(X) = 0$$

$$\frac{1}{\hat{Y}_S(Y)} \frac{d^2 \hat{Y}_S}{dY^2} = \Pi_X^{S^2} + \Pi_Z^{S^2} \Rightarrow \quad (126)$$

$$\frac{d^2 \hat{Y}_S}{dY^2} - (\Pi_X^{S^2} + \Pi_Z^{S^2}) \hat{Y}_S(Y) = 0$$

$$\frac{1}{\hat{Z}_S(Z)} \frac{d^2 \hat{Z}_S}{dZ^2} = -\Pi_Z^{S^2} \Rightarrow \quad (127)$$

$$\frac{d^2 \hat{Z}_S}{dZ^2} + \Pi_Z^{S^2} \hat{Z}_S(Z) = 0$$

با این فرض که Π_X^B یک عدد موهومی خالص است، از معادلات (۱۰۱-۱۱۳) نتیجه می شود:

به طریق مشابه با این فرض که Π_X^S یک عدد موهومی خالص است، از معادلات (۱۲۵) و (۱۱۱-۱۱۳) نتیجه می‌شود:

$$\hat{X}_S(X) = \cos\left(\frac{k_1\pi}{a_1}X\right); (k_1 = 0, 1, 2, \dots) \quad (134)$$

همین‌طور با این فرض که $\Pi_{Z_1}^S$ یک عدد موهومی خالص است، از معادلات (۱۲۵)، (۱۱۱-۱۱۳) و (۱۱۵) نتیجه می‌شود:

$$\hat{Z}_S(X) = \cos\left(\frac{k_2\pi}{c}Z\right); (k_2 = 0, 1, 2, \dots) \quad (135)$$

سرانجام با حل معادله دیفرانسیل (۱۲۶) به همراه شرط مرزی (۱۱۱)- (۱۱۳) نتیجه می‌شود:

$$\hat{Y}_S(Y) = \cosh(q_{k_1k_2}Y) \quad (136)$$

$$q_{k_1k_2} = \pi\sqrt{\left(\frac{k_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{k_2}{c}\right)^2} \quad (137)$$

با جای‌گذاری معادلات (۱۳۴) تا (۱۳۷) در معادله (۱۱۸) و اضافه نمودن ترم زمانی در قالب سری‌های فوریه، φ_S به‌دست می‌آید:

$$\varphi_S(X, Y, Z, t) = \sum_{k_1=0}^{M_S} \sum_{k_2=0}^{N_S} \hat{T}_{S_{k_1k_2}}(t) \hat{X}_{S_{k_1}}(X) \hat{Y}_{S_{k_1k_2}}(Y) \hat{Z}_{S_{k_2}}(Z) \quad (138)$$

جهت رابطه بندی سیال در تئوری لایه ای توابع پتانسیل سرعت سیال به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\varphi_B(X, Y, Z_1, t) = \sum_{k_1=0}^{M_B} \sum_{k_2=0}^{N_B} \hat{T}_{B_{k_1k_2}}(t) \hat{X}_{B_{k_1}}(X) \hat{Y}_{B_{k_2}}(Y) \hat{Z}_{B_{k_1k_2}}(Z_1) \quad (139)$$

$$\dot{T}_{B_{k_1k_2}}(t) = \frac{2(2 - \delta_{0k_1})}{-a_1 b_1 p_{k_1k_2} \tanh(p_{k_1k_2}c)} \quad (140)$$

$$\times \int_{X_0}^{X_0+a} \int_{Y_0}^{b_1} \frac{\partial w_0^{(1)}}{\partial t} \hat{X}_{B_{k_1}}(X) \hat{Y}_{B_{k_2}}(Y) dY dX$$

$$\varphi_S(X, Y, Z_1, t) = \sum_{k_1=0}^{M_S} \sum_{k_2=0}^{N_S} \dot{T}_{S_{k_1k_2}}(t) \hat{X}_{S_{k_1}}(X) \hat{Y}_{S_{k_1k_2}}(Y) \hat{Z}_{S_{k_2}}(Z_1) \quad (141)$$

معادله اسلاشینگ خطی در سطح آزاد سیال برای تئوری لایه‌ای به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 \varphi_S}{\partial t^2} \bigg|_{Y=b_1} + g \left(\frac{\partial \varphi_B}{\partial Y} \bigg|_{Y=b_1} + \frac{\partial \varphi_S}{\partial Y} \bigg|_{Y=b_1} \right) = 0 \Rightarrow \int_0^{a_1} \int_0^c \left[\frac{\partial^2 \varphi_S}{\partial t^2} \bigg|_{Y=b_1} + g \left(\frac{\partial \varphi_B}{\partial Y} \bigg|_{Y=b_1} + \frac{\partial \varphi_S}{\partial Y} \bigg|_{Y=b_1} \right) \right] \quad (142)$$

$$\delta \varphi_S(X, b_1, Z_1, t) dZ_1 dX = 0$$

انرژی جنبشی مودهای بالچینگ و اسلاشینگ سیال (وارد به ورق ساندویچی) به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$T_{F_B} = -\frac{1}{2} \rho_F \int_{X_0}^{X_0+a} \int_{Y_0}^{Y_0+b} \left(\varphi_B|_{Z_1=0} \right) \frac{\partial w_0^{(1)}}{\partial t} dY dX \quad (143)$$

$$T_{F_S} = -\frac{1}{2} \rho_F \int_{X_0}^{X_0+a} \int_{Y_0}^{Y_0+b} \left(\varphi_S|_{Z_1=0} \right) \frac{\partial w_0^{(1)}}{\partial t} dY dX \quad (144)$$

به‌منظور استخراج معادلات حاکم و شرایط مرزی از اصل همپلتون استفاده شده است:

$$\int_0^t \delta(T_P - U_S + T_{F_B} + T_{F_S}) dt = 0 \quad (145)$$

$$-\frac{4}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \times \left(h_2 \ddot{v}_1^{(2)} + \ddot{v}_0^{(3)} + \frac{h_3}{2} \ddot{\psi}_y^{(3)} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \delta \psi_y^{(1)} \Rightarrow & \frac{\partial M_{xy}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}^{(1)}}{\partial y} - R_{yz}^{(1)} \\ & - h_1 \left(\frac{\partial \bar{P}_{xy}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{P}_{yy}^{(2)}}{\partial y} \right) + h_1 \bar{S}_{yz}^{(2)} \\ & + \frac{2h_1}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \ddot{v}_0^{(1)} \\ & - \left[I_1^{(1)} + \frac{h_1^2}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \right] \ddot{\psi}_y^{(1)} \\ & + \frac{h_1}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \ddot{v}_0^{(2)} \\ & + \frac{2h_1}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \\ & \times \left(h_2 \ddot{v}_1^{(2)} + \ddot{v}_0^{(3)} + \frac{h_3}{2} \ddot{\psi}_y^{(3)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (149)$$

$$\begin{aligned} \delta w_0^{(1)} \Rightarrow & \frac{\partial R_{xz}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial R_{yz}^{(1)}}{\partial y} - \tilde{T}_{zz}^{(2)} + \frac{\partial \hat{S}_{xz}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{S}_{yz}^{(2)}}{\partial y} \\ & - \left[I_0^{(1)} + \frac{1}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \right] \ddot{w}_0^{(1)} \\ & - \frac{1}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \left(2\ddot{w}_0^{(2)} - \ddot{w}_0^{(3)} \right) \\ & + \rho_F [2\dot{\phi}_B(X, Y, 0, t) + \dot{\phi}_S(X, Y, 0, t)] = 0 \end{aligned} \quad (150)$$

$$\begin{aligned} \delta u_0^{(3)} \Rightarrow & \frac{\partial N_{xx}^{(3)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^{(3)}}{\partial y} - 2 \left(\frac{\partial \bar{P}_{xx}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{P}_{xy}^{(2)}}{\partial y} \right) \\ & + 2\bar{S}_{xz}^{(2)} - \left[I_0^{(3)} + \frac{4}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \right] \ddot{u}_0^{(3)} \\ & - \frac{2h_3}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \ddot{\psi}_x^{(3)} \\ & - \frac{2}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \ddot{u}_0^{(2)} \end{aligned} \quad (151)$$

با جای‌گذاری معادلات (۵۵)، (۵۶) و (۱۴۳-۱۴۴) در معادله فوق، انجام عملیات انتگرال‌گیری جزء به جزء و مساوی صفر قرار دادن ضرایب مولفه‌های جابجایی مجازی، معادلات دیفرانسیل زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \delta u_0^{(1)} \Rightarrow & \frac{\partial N_{xx}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^{(1)}}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \bar{P}_{xx}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{P}_{xy}^{(2)}}{\partial y} \right) - 2\bar{S}_{xz}^{(2)} \\ & - \left[I_0^{(1)} + \frac{4}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \right] \ddot{u}_0^{(1)} \\ & + \frac{2h_1}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \ddot{\psi}_x^{(1)} \\ & - \frac{2}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \ddot{u}_0^{(2)} \\ & - \frac{4}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \\ & \times \left(h_2 \ddot{u}_1^{(2)} + \ddot{u}_0^{(3)} + \frac{h_3}{2} \ddot{\psi}_x^{(3)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (146)$$

$$\begin{aligned} \delta \psi_x^{(1)} \Rightarrow & \frac{\partial M_{xx}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^{(1)}}{\partial y} - R_{xz}^{(1)} - h_1 \left(\frac{\partial \bar{P}_{xx}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{P}_{xy}^{(2)}}{\partial y} \right) \\ & + h_1 \bar{S}_{xz}^{(2)} + \frac{2h_1}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \ddot{u}_0^{(1)} \\ & - \left[I_1^{(1)} + \frac{h_1^2}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \right] \ddot{\psi}_x^{(1)} \\ & + \frac{h_1}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \ddot{u}_0^{(2)} \\ & + \frac{2h_1}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \\ & \times \left(h_2 \ddot{u}_1^{(2)} + \ddot{u}_0^{(3)} + \frac{h_3}{2} \ddot{\psi}_x^{(3)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (147)$$

$$\begin{aligned} \delta v_0^{(1)} \Rightarrow & \frac{\partial N_{xy}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}^{(1)}}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial \bar{P}_{xy}^{(2)}}{\partial x} \right. \\ & - 2\bar{S}_{yz}^{(2)} - \left[I_0^{(1)} + \frac{4}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \right] \ddot{v}_0^{(1)} \\ & + \frac{2h_1}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \ddot{\psi}_y^{(1)} \\ & - \frac{2}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \ddot{v}_0^{(2)} \end{aligned} \quad (148)$$

$$+\frac{2h_3}{h_2^4}\left(I_2^{(2)}-\frac{4}{h_2^2}I_3^{(2)}\right) \\ \times\left(h_2\ddot{v}_1^{(2)}-\dot{v}_0^{(1)}+\frac{h_1}{2}\ddot{\psi}_y^{(1)}\right)=0$$

$$+\frac{4}{h_2^4}\left(I_2^{(2)}-\frac{4}{h_2^2}I_3^{(2)}\right) \\ \times\left(h_2\ddot{u}_1^{(2)}-\ddot{u}_0^{(1)}+\frac{h_1}{2}\ddot{\psi}_x^{(1)}\right)=0$$

$$\delta w_0^{(3)} \Rightarrow \frac{\partial R_{xz}^{(3)}}{\partial x} + \frac{\partial R_{yz}^{(3)}}{\partial y} - \bar{T}_{zz}^{(2)} + \frac{\partial S_{xz}^{(2)}}{\partial x} \\ + \frac{\partial S_{yz}^{(2)}}{\partial y} - \left[I_0^{(3)} + \frac{1}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \right] \ddot{w}_0^{(3)} \\ - \frac{1}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \left(2\ddot{w}_0^{(2)} - \ddot{w}_0^{(1)} \right) = 0 \quad (155)$$

$$\delta \psi_x^{(3)} \Rightarrow \frac{\partial M_{xx}^{(3)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^{(3)}}{\partial y} - R_{xz}^{(3)} - h_3 \left(\frac{\partial \bar{P}_{xx}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{P}_{xy}^{(2)}}{\partial y} \right) \\ + h_3 \bar{S}_{xz}^{(2)} - \frac{2h_3}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \ddot{u}_0^{(3)} \\ - \left[I_1^{(3)} + \frac{h_3^2}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \right] \ddot{\psi}_x^{(3)} \\ - \frac{h_3}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \ddot{u}_0^{(2)} \\ + \frac{2h_3}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \\ \times \left(h_2 \ddot{u}_1^{(2)} - \ddot{u}_0^{(1)} + \frac{h_1}{2} \ddot{\psi}_x^{(1)} \right) = 0 \quad (152)$$

$$\delta u_0^{(2)} \Rightarrow \frac{\partial P_{xx}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}^{(2)}}{\partial y} - S_{xz}^{(2)} \\ - \left(I_0^{(2)} - \frac{8}{h_2^2} I_1^{(2)} + \frac{16}{h_2^4} I_2^{(2)} \right) \ddot{u}_0^{(2)} \\ - \frac{1}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \\ \times \left[2 \left(\ddot{u}_0^{(1)} + \ddot{u}_0^{(3)} \right) - h_1 \ddot{\psi}_x^{(1)} + h_3 \ddot{\psi}_x^{(3)} \right] = 0 \quad (156)$$

$$\delta v_0^{(3)} \Rightarrow \frac{\partial N_{xy}^{(3)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}^{(3)}}{\partial y} - 2 \left(\frac{\partial \bar{P}_{xy}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{P}_{yy}^{(2)}}{\partial y} \right) \\ + 2 \bar{S}_{yz}^{(2)} - \left[I_0^{(3)} + \frac{4}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \right] \ddot{v}_0^{(3)} \\ - \frac{2h_3}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \ddot{\psi}_y^{(3)} \\ - \frac{2}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \ddot{v}_0^{(2)} \\ + \frac{4}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \\ \times \left(h_2 \ddot{v}_1^{(2)} - \ddot{v}_0^{(1)} + \frac{h_1}{2} \ddot{\psi}_y^{(1)} \right) = 0 \quad (153)$$

$$\delta u_1^{(2)} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{P}_{xx}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{P}_{xy}^{(2)}}{\partial y} - \tilde{S}_{xz}^{(2)} \\ - \left(I_1^{(2)} - \frac{8}{h_2^2} I_2^{(2)} + \frac{16}{h_2^4} I_3^{(2)} \right) \ddot{u}_1^{(2)} \\ - \frac{2}{h_2^3} \left(I_2^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \\ \times \left[2 \left(\ddot{u}_0^{(1)} - \ddot{u}_0^{(3)} \right) - \left(h_1 \ddot{\psi}_x^{(1)} + h_3 \ddot{\psi}_x^{(3)} \right) \right] = 0 \quad (157)$$

$$\delta \psi_y^{(3)} \Rightarrow \frac{\partial M_{xy}^{(3)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}^{(3)}}{\partial y} - R_{yz}^{(3)} - h_3 \left(\frac{\partial \bar{P}_{xy}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{P}_{yy}^{(2)}}{\partial y} \right) \\ + h_3 \bar{S}_{yz}^{(2)} - \frac{2h_3}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \ddot{v}_0^{(3)} \\ - \left[I_1^{(3)} + \frac{h_3^2}{h_2^4} \left(I_2^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) \right] \ddot{\psi}_y^{(3)} \\ - \frac{h_3}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \ddot{v}_0^{(2)} \\ \times \left(h_2 \ddot{v}_1^{(2)} - \ddot{v}_0^{(1)} + \frac{h_1}{2} \ddot{\psi}_y^{(1)} \right) = 0 \quad (154)$$

$$\delta v_0^{(2)} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{P}_{xy}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{P}_{yy}^{(2)}}{\partial y} - \tilde{S}_{yz}^{(2)} \\ - \left(I_0^{(2)} - \frac{8}{h_2^2} I_1^{(2)} + \frac{16}{h_2^4} I_2^{(2)} \right) \ddot{v}_0^{(2)} \\ - \frac{1}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) \\ \times \left[2 \left(\ddot{v}_0^{(1)} + \ddot{v}_0^{(3)} \right) - h_1 \ddot{\psi}_y^{(1)} + h_3 \ddot{\psi}_y^{(3)} \right] = 0 \quad (158)$$

منتجه‌های تنش رویه‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} (N^{(f)}, M^{(f)}) = & \\ \int_{z_f \min}^{z_f \max} \left(1, z_f + \delta_{1f} \frac{h_f}{2} \right) \sigma^{(f)} dz_f = & \quad (164) \\ (A_{\sigma 0}^{(f)}, B_{\sigma}^{(f)}, \epsilon_{\psi}^{(f)}) \end{aligned}$$

$$R^{(f)} = \int_{z_f \min}^{z_f \max} \tau^{(f)} dz_f = A_{\tau}^{(f)} \gamma^{(f)} \quad (165)$$

به طوری که

$$\begin{aligned} (N^{(f)}, M^{(f)}, R^{(f)}) = & \\ \left(\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix}^{(f)}, \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}^{(f)}, \begin{Bmatrix} R_{xz} \\ R_{yz} \end{Bmatrix}^{(f)} \right) & \quad (166) \end{aligned}$$

$$(A_{\sigma}^{(f)}, B_{\sigma}^{(f)}) = \int_{z_f \min}^{z_f \max} \left(1, \left(z_f + \delta_{1f} \frac{h_f}{2} \right)^2 \right) Q_{\sigma}^{(f)} dz_f \quad (167)$$

$$A_{\tau}^{(f)} = \int_{z_f \min}^{z_f \max} Q_{\tau}^{(f)} dz_f \quad (168)$$

منتجه‌های تنش درون صفحه‌ای هسته به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} (P^{(2)}, \tilde{P}^{(2)}, \overline{P}^{(2)}, \overline{\overline{P}}^{(2)}) = & \\ \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} (\alpha_0(z_2), \alpha_1(z_2), \alpha_2(z_2), \alpha_3(z_2)) \left\{ \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{(2)} \\ \sigma_{yy}^{(2)} \\ \tau_{xy}^{(2)} \end{Bmatrix} \right\} dz_2 & \quad (169) \end{aligned}$$

به طوری که

$$\begin{aligned} \delta v_1^{(2)} \Rightarrow \frac{\partial P_{xy}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}^{(2)}}{\partial y} - S_{yz}^{(2)} & \\ - \left(I_1^{(2)} - \frac{8}{h_2^2} I_2^{(2)} + \frac{16}{h_2^4} I_3^{(2)} \right) \dot{v}_1^{(2)} & \quad (159) \\ - \frac{2}{h_2^3} \left(I_2^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_3^{(2)} \right) & \\ \times \left[2(\dot{v}_0^{(1)} - \dot{v}_0^{(3)}) - (h_1 \ddot{\psi}_y^{(1)} + h_3 \ddot{\psi}_y^{(3)}) \right] = 0 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta w_0^{(2)} \Rightarrow \frac{\partial S_{xz}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^{(2)}}{\partial y} - T_{zz}^{(2)} & \\ - \left(I_0^{(2)} - \frac{8}{h_2^2} I_1^{(2)} + \frac{16}{h_2^4} I_2^{(2)} \right) \dot{w}_0^{(2)} & \quad (160) \\ - \frac{2}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) (\dot{w}_0^{(1)} + \dot{w}_0^{(3)}) = 0 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta w_0^{(2)} \Rightarrow \frac{\partial S_{xz}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^{(2)}}{\partial y} - T_{zz}^{(2)} & \\ - \left(I_0^{(2)} - \frac{8}{h_2^2} I_1^{(2)} + \frac{16}{h_2^4} I_2^{(2)} \right) \dot{w}_0^{(2)} & \quad (161) \\ - \frac{2}{h_2^2} \left(I_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} I_2^{(2)} \right) (\dot{w}_0^{(1)} + \dot{w}_0^{(3)}) = 0 & \end{aligned}$$

به طوری که در معادلات فوق، ممان‌های جرمی اینرسی رویه‌ها و هسته

به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} (I_0^{(f)}, I_1^{(f)}) = & \\ \int_{z_f \min}^{z_f \max} \left(1, \left(z_f + \delta_{1f} \frac{h_f}{2} \right)^2 \right) \rho^{(f)} dz_f & \quad (162) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I_0^{(2)}, I_1^{(2)}, I_2^{(2)}, I_3^{(2)}) = & \\ \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} (1, z_2^2, z_2^4, z_2^6) \rho^{(2)} dz_2 & \quad (163) \end{aligned}$$

$$P^{(2)} = \left(A_0^{(2)} - \frac{8}{h_2^2} B_0^{(2)} + \frac{16}{h_2^4} C_0^{(2)} \right) \mathcal{E}_0^{(2)} + \frac{1}{h_2^2} \left(B_0^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} C_0^{(2)} \right) \left[2(\mathcal{E}_0^{(1)} + \mathcal{E}_0^{(3)}) - h_1 \mathcal{E}_\psi^{(1)} + h_3 \mathcal{E}_\psi^{(3)} \right] \quad (174)$$

$$+ \frac{1}{h_2} \left(A_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} B_1^{(2)} \right) (\mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_3) w_0$$

$$P^{(2)} = \left(B_0^{(2)} - \frac{8}{h_2^2} C_0^{(2)} + \frac{16}{h_2^4} D_0^{(2)} \right) \mathcal{E}_1^{(2)} + \frac{2}{h_2^3} \left(C_0^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} D_0^{(2)} \right) \left[2(\mathcal{E}_0^{(1)} - \mathcal{E}_0^{(3)}) - (h_1 \mathcal{E}_\psi^{(1)} + h_3 \mathcal{E}_\psi^{(3)}) \right] \quad (175)$$

$$+ \frac{4}{h_2^2} \left(B_1^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} C_1^{(2)} \right) (\mathbf{j}_1 - 2\mathbf{j}_2 + \mathbf{j}_3) w_0$$

$$\bar{P}^{(2)} = \frac{1}{h_2^2} \left(B_0^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} C_0^{(2)} \right) \mathcal{E}_0^{(2)} + \frac{1}{h_2^4} \left(C_0^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} D_0^{(2)} \right) (2h_2 \mathcal{E}_1^{(2)} + 2\mathcal{E}_0^{(3)} + h_3 \mathcal{E}_\psi^{(3)}) \quad (176)$$

$$+ \frac{1}{h_2^4} \left(C_0^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} D_0^{(2)} \right) (2\mathcal{E}_0^{(1)} - h_1 \mathcal{E}_\psi^{(1)}) + F_1^{(2)} H w_0$$

$$\bar{\bar{P}}^{(2)} = -\frac{1}{h_2^2} \left(B_0^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} C_0^{(2)} \right) \mathcal{E}_0^{(2)} + \frac{1}{h_2^4} \left(C_0^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} D_0^{(2)} \right) (2h_2 \mathcal{E}_1^{(2)} - 2\mathcal{E}_0^{(1)} + h_1 \mathcal{E}_\psi^{(1)}) \quad (177)$$

$$- \frac{1}{h_2^4} \left(C_0^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} D_0^{(2)} \right) (2\mathcal{E}_0^{(3)} + h_3 \mathcal{E}_\psi^{(3)}) - F_1^{(2)} H w_0$$

$$T_{zz}^{(2)} = -\frac{8}{h_2^2} \left((B_1^{(2)})^T - \frac{4}{h_2^2} (C_1^{(2)})^T \right) \mathcal{E}_1^{(2)} + \frac{16}{h_2^5} (C_1^{(2)})^T \left[2(-\mathcal{E}_0^{(1)} + \mathcal{E}_0^{(3)}) + h_1 \mathcal{E}_\psi^{(1)} + h_3 \mathcal{E}_\psi^{(3)} \right] \quad (178)$$

$$- \frac{32}{h_2^4} B_{33}^{(2)} (\mathbf{j}_1 - 2\mathbf{j}_2 + \mathbf{j}_3) w_0$$

$$\left(P^{(2)}, \tilde{P}^{(2)}, \bar{P}^{(2)}, \bar{\bar{P}}^{(2)} \right) = \left(\left\{ \begin{matrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \end{matrix} \right\}^{(2)}, \left\{ \begin{matrix} \tilde{P}_{xx} \\ \tilde{P}_{yy} \\ \tilde{P}_{xy} \end{matrix} \right\}^{(2)}, \left\{ \begin{matrix} \bar{P}_{xx} \\ \bar{P}_{yy} \\ \bar{P}_{xy} \end{matrix} \right\}^{(2)}, \left\{ \begin{matrix} \bar{\bar{P}}_{xx} \\ \bar{\bar{P}}_{yy} \\ \bar{\bar{P}}_{xy} \end{matrix} \right\}^{(2)} \right) \quad (179)$$

منتجه‌های تنش نرمال عرضی هسته به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\left(T_{zz}^{(2)}, \tilde{T}_{zz}^{(2)}, \bar{T}_{zz}^{(2)} \right) = \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} (\alpha_0'(z_2), \alpha_4'(z_2), \alpha_5'(z_2)) \sigma_{zz}^{(2)} dz_2 \quad (180)$$

منتجه‌های تنش برشی عرضی هسته به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\left(S^{(2)}, \tilde{S}^{(2)}, \bar{S}^{(2)}, \bar{\bar{S}}^{(2)}, \dot{S}^{(2)}, \dot{S}^{(2)}, \dot{\bar{S}}^{(2)} \right) = \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} (\alpha_0'(z_2), \alpha_1'(z_2), \alpha_2'(z_2), \alpha_3'(z_2), \alpha_0(z_2), \alpha_4(z_2), \alpha_5(z_2)) \tau^{(2)} dz_2 \quad (181)$$

به طوری که

$$\left(S^{(2)}, \tilde{S}^{(2)}, \bar{S}^{(2)}, \bar{\bar{S}}^{(2)}, \dot{S}^{(2)}, \dot{S}^{(2)}, \dot{\bar{S}}^{(2)} \right) = \left(\left\{ \begin{matrix} S_{xz} \\ S_{yz} \end{matrix} \right\}^{(2)}, \left\{ \begin{matrix} \tilde{S}_{xz} \\ \tilde{S}_{yz} \end{matrix} \right\}^{(2)}, \left\{ \begin{matrix} \bar{S}_{xz} \\ \bar{S}_{yz} \end{matrix} \right\}^{(2)}, \left\{ \begin{matrix} \bar{\bar{S}}_{xz} \\ \bar{\bar{S}}_{yz} \end{matrix} \right\}^{(2)}, \left\{ \begin{matrix} \dot{S}_{xz} \\ \dot{S}_{yz} \end{matrix} \right\}^{(2)}, \left\{ \begin{matrix} \dot{\bar{S}}_{xz} \\ \dot{\bar{S}}_{yz} \end{matrix} \right\}^{(2)}, \left\{ \begin{matrix} \dot{\bar{\bar{S}}}_{xz} \\ \dot{\bar{\bar{S}}}_{yz} \end{matrix} \right\}^{(2)} \right) \quad (182)$$

منتجه‌های تنش هسته بر حسب مولفه‌های جابجایی عبارتند از:

$$-\left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{6}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)}\right) \partial \mathbf{j}_3] w_0$$

$$\begin{aligned} \bar{S}^{(2)} &= \frac{16}{h_2^4} B_{\tau}^{(2)} \eta_0^{(2)} + \frac{6}{h_2^3} \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{12}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)}\right) \eta_1^{(2)} \\ &- \frac{4}{h_2^4} \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{9}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)}\right) \left(2\eta_0^{(1)} - h_1 \eta_{\psi}^{(1)}\right) \\ &- \frac{4}{h_2^4} \left(B_{\tau}^{(2)} + \frac{9}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)}\right) \left(2\eta_0^{(3)} + h_3 \eta_{\psi}^{(3)}\right) \\ &- \frac{2}{h_2^3} \left[\left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{6}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)}\right) \partial \mathbf{j}_1 - 3 \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)}\right) \partial \mathbf{j}_2\right. \\ &\left. - \left(B_{\tau}^{(2)} + \frac{6}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)}\right) \partial \mathbf{j}_3\right] w_0 \end{aligned} \quad (184)$$

$$\begin{aligned} \dot{S}^{(2)} &= \left(A_{\tau}^{(2)} - \frac{16}{h_2^2} B_{\tau}^{(2)} + \frac{48}{h_2^4} C_{\tau}^{(2)}\right) \eta_1^{(2)} + \frac{6}{h_2^3} \\ &\times \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)}\right) \left[2 \left(\eta_0^{(1)} - \eta_0^{(3)}\right) - \left(h_1 \eta_{\psi}^{(1)} + h_3 \eta_{\psi}^{(3)}\right)\right] \\ &+ \left[\frac{2}{h_2^2} \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)}\right) \partial (\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_3)\right. \\ &\left. + \left(A_{\tau}^{(2)} - \frac{8}{h_2^2} B_{\tau}^{(2)} + \frac{16}{h_2^4} C_{\tau}^{(2)}\right) \partial \mathbf{j}_2\right] \omega_0 \end{aligned} \quad (185)$$

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= -\frac{8}{h_2^3} B_{\tau}^{(2)} \eta_0^{(2)} + \frac{2}{h_2^2} \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{12}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)}\right) \eta_1^{(2)} \\ &+ \frac{2}{h_2^3} \left(B_{\tau}^{(2)} + \frac{6}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)}\right) \left(2\eta_0^{(1)} - h_1 \eta_{\psi}^{(1)}\right) \\ &+ \frac{2}{h_2^3} \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{6}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)}\right) \left(2\eta_0^{(3)} + h_3 \eta_{\psi}^{(3)}\right) \\ &+ \frac{1}{h_2^2} \left[\left(B_{\tau}^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)}\right) \partial \mathbf{j}_1\right. \\ &\left. - \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)}\right) \partial (\mathbf{j}_3 - 2\mathbf{j}_2)\right] w_0 \end{aligned} \quad (186)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{zz}^{(2)} &= \frac{1}{h_2} \left[\left(A_1^{(2)}\right)^T - \frac{4}{h_2^2} \left(B_1^{(2)}\right)^T\right] \varepsilon_0^{(2)} \\ &+ \frac{4}{h_2^2} \left[\left(B_1^{(2)}\right)^T - \frac{4}{h_2^2} \left(C_1^{(2)}\right)^T\right] \varepsilon_1^{(2)} \\ &+ \frac{1}{h_2^3} \left[\left(B_1^{(2)}\right)^T + \frac{8}{h_2^2} \left(C_1^{(2)}\right)^T\right] \left(2\varepsilon_0^{(1)} - h_1 \varepsilon_{\psi}^{(1)}\right) \\ &+ \frac{1}{h_2^3} \left[\left(B_1^{(2)}\right)^T - \frac{8}{h_2^2} \left(C_1^{(2)}\right)^T\right] \left(2\varepsilon_0^{(3)} + h_3 \varepsilon_{\psi}^{(3)}\right) + L_{33}^{(2)} \bar{H} w_0 \end{aligned} \quad (179)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_{zz}^{(2)} &= -\frac{1}{h_2} \left[\left(A_1^{(2)}\right)^T - \frac{4}{h_2^2} \left(B_1^{(2)}\right)^T\right] \varepsilon_0^{(2)} \\ &+ \frac{4}{h_2^2} \left[\left(B_1^{(2)}\right)^T - \frac{4}{h_2^2} \left(C_1^{(2)}\right)^T\right] \varepsilon_1^{(2)} \\ &- \frac{1}{h_2^3} \left[\left(B_1^{(2)}\right)^T - \frac{8}{h_2^2} \left(C_1^{(2)}\right)^T\right] \left(2\varepsilon_0^{(1)} - h_1 \varepsilon_{\psi}^{(1)}\right) \\ &- \frac{1}{h_2^3} \left[\left(B_1^{(2)}\right)^T + \frac{8}{h_2^2} \left(C_1^{(2)}\right)^T\right] \left(2\varepsilon_0^{(3)} + h_3 \varepsilon_{\psi}^{(3)}\right) - L_{33}^{(2)} \bar{\bar{H}} w_0 \end{aligned} \quad (180)$$

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \frac{8}{h_2^4} B_{\tau}^{(2)} [8\eta_0^{(2)} - 4(\eta_0^{(1)} + \eta_0^{(3)}) \\ &+ 2(h_1 \eta_{\psi}^{(1)} - h_3 \eta_{\psi}^{(3)}) - h_2 \partial (\mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_3)] w_0 \end{aligned} \quad (181)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}^{(2)} &= \left(A_{\tau}^{(2)} - \frac{24}{h_2^2} B_{\tau}^{(2)} + \frac{144}{h_2^4} C_{\tau}^{(2)}\right) \eta_1^{(2)} + \frac{6}{h_2^3} \\ &\times \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{12}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)}\right) \left[2 \left(\eta_0^{(1)} - \eta_0^{(3)}\right) - \left(h_1 \eta_{\psi}^{(1)} + h_3 \eta_{\psi}^{(3)}\right)\right] \\ &+ \left[\frac{2}{h_2^2} \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{12}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)}\right) \partial (\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_3)\right. \\ &\left. + \left(A_{\tau}^{(2)} - \frac{16}{h_2^2} B_{\tau}^{(2)} + \frac{48}{h_2^4} C_{\tau}^{(2)}\right) \partial \mathbf{j}_2\right] \omega_0 \end{aligned} \quad (182)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}^{(2)} &= -\frac{16}{h_2^4} B_{\tau}^{(2)} \eta_0^{(2)} + \frac{6}{h_2^3} \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{12}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)}\right) \eta_1^{(2)} \\ &+ \frac{4}{h_2^4} \left(B_{\tau}^{(2)} + \frac{9}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)}\right) \left(2\eta_0^{(1)} - h_1 \eta_{\psi}^{(1)}\right) \\ &+ \frac{4}{h_2^4} \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{9}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)}\right) \left(2\eta_0^{(3)} + h_3 \eta_{\psi}^{(3)}\right) \\ &+ \frac{2}{h_2^3} \left[\left(B_{\tau}^{(2)} + \frac{6}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)}\right) \partial \mathbf{j}_1 + 3 \left(B_{\tau}^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} C_{\tau}^{(2)}\right) \partial \mathbf{j}_2\right. \end{aligned} \quad (183)$$

$$\tilde{L}_{33}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۱۹۴)$$

$$w_0 = \{w_0^{(1)} \quad w_0^{(2)} \quad w_0^{(3)}\}^T, \quad (۱۹۵)$$

$$(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) = (\{1 \ 0 \ 0\}, \{0 \ 1 \ 0\}, \{0 \ 0 \ 1\})$$

$$H = \frac{1}{h_2^5} \begin{bmatrix} h_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & -h_2^2 \end{bmatrix} \quad (۱۹۶)$$

$$(\tilde{H}, \overline{H}, \overline{\overline{H}}) =$$

$$H \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, h_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, h_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad (۱۹۷)$$

با توجه به اصل همیلتون، شرایط مرزی ضروری و طبیعی در لبه‌های

ورق ساندویچی با تکیه‌گاه‌های ساده به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$EBCs \text{ at } x = 0, a \Rightarrow v_0^{(1,3)} = 0; \psi_y^{(1,3)} = 0; \quad (۱۹۸)$$

$$w_0^{(1,3)} = 0; v_0^{(2)} = 0; v_1^{(2)} = 0; w_0^{(2)} = 0$$

$$EBCs \text{ at } y = 0, b \Rightarrow u_0^{(1,3)} = 0; \psi_x^{(1,3)} = 0; \quad (۱۹۹)$$

$$w_0^{(1,3)} = 0; u_0^{(2)} = 0; u_1^{(2)} = 0; w_0^{(2)} = 0$$

$$NBCs \text{ at } x = 0, a \Rightarrow N_{xx}^{(1)} + 2\bar{P}_{xx}^{(2)} = 0;$$

$$M_{xx}^{(1)} - h_1 \bar{P}_{xx}^{(2)} = 0;$$

$$N_{xx}^{(3)} - 2\bar{\bar{P}}_{xx}^{(2)} = 0; \quad (۲۰۰)$$

$$M_{xx}^{(3)} - h_3 \bar{\bar{P}}_{xx}^{(2)} = 0;$$

$$P_{xx}^{(2)} = 0; P_{xx}^{(2)} = 0$$

$$\dot{S}^{(2)} = \frac{8}{h_2^3} B_\tau^{(2)} \eta_0^{(2)} + \frac{2}{h_2^2} \left(B_\tau^{(2)} - \frac{12}{h_2^2} C_\tau^{(2)} \right) \eta_1^{(2)}$$

$$- \frac{2}{h_2^3} \left(B_\tau^{(2)} - \frac{6}{h_2^2} C_\tau^{(2)} \right) \left(2\eta_0^{(1)} - h_1 \eta_\psi^{(1)} \right)$$

$$- \frac{2}{h_2^3} \left(B_\tau^{(2)} + \frac{6}{h_2^2} C_\tau^{(2)} \right) \left(2\eta_0^{(3)} + h_3 \eta_\psi^{(3)} \right) \quad (۱۸۷)$$

$$- \frac{1}{h_2^2} \left[\left(B_\tau^{(2)} - \frac{4}{h_2^2} C_\tau^{(2)} \right) \partial(\mathbf{j}_1 - 2\mathbf{j}_2) \right.$$

$$\left. - \left(B_\tau^{(2)} + \frac{4}{h_2^2} C_\tau^{(2)} \right) \partial \mathbf{j}_3 \right] w_0$$

به طوری که

$$(A_0^{(2)}, B_0^{(2)}, C_0^{(2)}, D_0^{(2)}) =$$

$$\int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} (1, z_2^2, z_2^4, z_2^6) \begin{bmatrix} Q_{11}^{(2)} & Q_{12}^{(2)} & 0 \\ Q_{12}^{(2)} & Q_{22}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^{(2)} \end{bmatrix} dz_2 \quad (۱۸۸)$$

$$(A_1^{(2)}, B_1^{(2)}, C_1^{(2)}) = \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} (1, z_2^2, z_2^4) \begin{bmatrix} Q_{13}^{(2)} \\ Q_{23}^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix} dz_2 \quad (۱۸۹)$$

$$(A_\tau^{(2)}, B_\tau^{(2)}, C_\tau^{(2)}) = \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} (1, z_2^2, z_2^4) Q_\tau^{(2)} dz_2 \quad (۱۹۰)$$

$$F_1^{(2)} = \left[\left(B_1^{(2)} + \frac{8}{h_2^2} C_1^{(2)} \right) \quad C_1^{(2)} \quad \left(B_1^{(2)} - \frac{8}{h_2^2} C_1^{(2)} \right) \right] \quad (۱۹۱)$$

$$\tilde{F}_1^{(2)} = F_1^{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۱۹۲)$$

$$L_{33}^{(2)} = \left\{ A_{33}^{(2)} + \frac{16}{h_2^2} B_{33}^{(2)} \quad B_{33}^{(2)} \quad A_{33}^{(2)} - \frac{16}{h_2^2} B_{33}^{(2)} \right\} \quad (۱۹۳)$$

محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه به دست می‌آیند. در این بخش به منظور اصلاح اثر پیوستگی تنش‌های برشی عرضی بین لایه‌ها از روش توسعه داده شده توسط هوانگ [۷] استفاده شده است. در گام نخست با استفاده از روابط زیر انرژی‌های کرنشی برشی عرضی برای ورق ساندویچی محاسبه می‌شوند [۷]:

$$U_{S13} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \sum_{i=1}^3 Q_{55}^{(i)} \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} \gamma_{xz}^2 dz_i dy dx \quad (20.5)$$

$$U_{S23} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \sum_{i=1}^3 Q_{44}^{(i)} \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} \gamma_{yz}^2 dz_i dy dx \quad (20.6)$$

از طرفی مطابق معادلات الاستیسیته سه بعدی، تنش‌های برشی عرضی به صورت زیر می‌باشند [۷]:

$$\hat{\tau}_{xz}^{(i)} = \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} \left(\rho^{(i)} \ddot{u} - \sigma_{xx,x}^{(i)} - \tau_{xy,y}^{(i)} \right) dz_i + \hat{\tau}_{xz}^{(i-1)} \quad (20.7)$$

$$\hat{\tau}_{yz}^{(i)} = \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} \left(\rho^{(i)} \ddot{v} - \tau_{xy,x}^{(i)} - \sigma_{yy,y}^{(i)} \right) dz_i + \hat{\tau}_{yz}^{(i-1)} \quad (20.8)$$

به طوری که علامت (i) بیانگر مقادیر به دست آمده از معادلات الاستیسیته سه بعدی است. با توجه به معادلات (20.7) و (20.8)، انرژی‌های کرنشی برشی عرضی به صورت زیر به دست می‌آیند [۷]:

$$\hat{U}_{S3} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \sum_{i=1}^3 \frac{1}{Q_{55}^{(i)}} \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} \hat{\tau}_{xz}^{(i)2} dz_i dy dx \quad (20.9)$$

$$\hat{U}_{S3} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \sum_{i=1}^3 \frac{1}{Q_{44}^{(i)}} \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} \hat{\tau}_{yz}^{(i)2} dz_i dy dx \quad (21.0)$$

ضریب تصحیح برشی k_{13} از طریق مقایسه معادلات (20.5) و (20.9) به دست می‌آید و ضریب تصحیح برشی k_{23} نیز از طریق مقایسه معادلات

$$NBCs \text{ at } y=0, b \Rightarrow N_{yy}^{(1)} + 2\bar{P}_{yy}^{(2)} = 0 \quad (\text{الف})$$

$$M_{yy}^{(1)} - h_1 \bar{P}_{yy}^{(2)} = 0 \quad (\text{ب})$$

$$N_{yy}^{(3)} - 2\bar{P}_{yy}^{(2)} = 0 \quad (\text{ج}) \quad (20.1)$$

$$M_{yy}^{(3)} - h_3 \bar{P}_{yy}^{(2)} = 0 \quad (\text{د})$$

$$P_{yy}^{(2)} = 0 \quad (\text{ه})$$

$$\tilde{P}_{yy}^{(2)} = 0 \quad (\text{و})$$

که EBC بیانگر شرایط مرزی اوپلر و NBC بیانگر شرایط مرزی ناویر می‌باشند. در این مدل به منظور حل معادلات حاکم از روش گالرکین استفاده شده است. در گام نخست مولفه‌های جابجایی به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که شرایط مرزی اساسی در لبه‌های ورق ساندویچی را ارضاء نمایند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$w_0(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{0m,n}(t) \sin(\mu_m x) \sin(\lambda_n y) \quad (20.2)$$

$$\psi_x(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \psi_{xm,n}(t) \cos(\mu_m x) \sin(\lambda_n y) \quad (20.3)$$

$$\psi_y(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \psi_{ym,n}(t) \sin(\mu_m x) \cos(\lambda_n y), \quad (\mu_m = m\pi x/a; \lambda_n = n\pi y/b) \quad (20.4)$$

به طوری که m و n به ترتیب تعداد نیم موج در جهت‌های x و y هستند. پس از جای گذاری معادله فوق در دستگاه معادلات حاکم و اعمال روش گالرکین، دستگاه معادلات حاکم به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی با مشتقات زمانی تبدیل می‌شود. سرانجام پس از تشکیل ماتریس‌های سفتی و جرم، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها به ترتیب با

$$\begin{Bmatrix} v_0^{(1,2,3)}(x, y, t) \\ \psi_y^{(1,3)}(x, y, t) \\ v_1^{(2)}(x, y, t) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \begin{Bmatrix} V_{0m,n}^{(1,2,3)}(t) \\ \Psi_{ym,n}^{(1,3)}(t) \\ V_{1m,n}^{(2)}(t) \end{Bmatrix} \sin(\mu_m x) \cos(\lambda_n y) \quad (214)$$

$$w_0^{(1,2,3)}(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_{0m,n}^{(1,2,3)}(t) \sin(\mu_m x) \sin(\lambda_n y) \times (\mu_m = m\pi x a; \lambda_n = n\pi y b) \quad (215)$$

به طوری که

$$\begin{Bmatrix} U_{0m,n}^{(1,2,3)}(t) \\ \Psi_{xm,n}^{(1,3)}(t) \\ U_{1m,n}^{(2)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{0m,n}^{(1,2,3)} \\ \Psi_{xm,n}^{(1,3)} \\ U_{1m,n}^{(2)} \end{Bmatrix} \exp(-i\omega t) \quad (216)$$

$$\begin{Bmatrix} V_{0m,n}^{(1,2,3)}(t) \\ \Psi_{ym,n}^{(1,3)}(t) \\ V_{1m,n}^{(2)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_{0m,n}^{(1,2,3)} \\ \Psi_{ym,n}^{(1,3)} \\ V_{1m,n}^{(2)} \end{Bmatrix} \exp(-i\omega t) \quad (217)$$

$$W_{0m,n}^{(1,2,3)}(t) = W_{0m,n}^{(1,2,3)} \exp(-i\omega t) \quad (218)$$

پس از جای گذاری معادلات (۲۱۳-۲۱۵) در مجموعه معادلات حاکم (یعنی معادلات (۱۴۶) تا (۱۶۱) و (۱۴۲)) و اعمال روش گالرکین، دستگاه معادلات حاکم به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی با مشتقات زمانی تبدیل می شود. سرانجام پس از تشکیل ماتریس های سفتی و جرم، فرکانس های طبیعی و شکل مودها به ترتیب با محاسبه مقادیر ویژه و

(۲۰۶) و (۲۱۵) به دست می آید. به علت تأثیر قابل توجه این ضرایب بر روی فرکانس های طبیعی، مطابق معادلات زیر از یک فرآیند تکراری برای محاسبه آن ها استفاده شده است [۷]

$$\kappa_{13}^{k+1} = \frac{U_{S13}^k}{\hat{U}_{S3}^k}, \quad (219)$$

$$\kappa_{23}^{k+1} = \frac{U_{S23}^k}{\hat{U}_{S3}^k} \quad (220)$$

به طوری که k شمارنده تکرار است. فرآیند فوق تا رسیدن به همگرایی مطلوب تکرار می شود. با جای گذاری معادلات فوق در معادلات (۳۸-۴۴) و جای گذاری معادلات حاصله در اصل همیلتون، انرژی های کرنشی برشی عرضی سازگار با تئوری مرتبه سوم ردی جایگزین انرژی های کرنشی سازگار با معادلات الاستیسیته سه بعدی می شوند و در نتیجه نقیصه تئوری مرتبه سوم ردی برای ورق های ساندویچی از دیدگاه انرژی اصلاح می شود. از آنجایی که ضرایب مود اسلاشینگ سیال (یعنی $T_{S_{k_1 k_2}}(t)$ مجهول هستند، پس معادله اسلاشینگ خطی در سطح آزاد (یعنی معادله (۱۴۲)) باید به عنوان معادله شانزدهم به مجموعه معادلات برهم کنش ورق ساندویچی - سیال اضافه گردد تا این معادلات قابل حل شوند. به منظور ارضاء شرایط مرزی ضروری (یعنی معادلات (۱۹۸-۱۹۹))، مولفه های جابجایی به صورت زیر به ترم های مکانی و زمانی خود تفکیک می شوند:

$$\begin{Bmatrix} u_0^{(1,2,3)}(x, y, t) \\ \psi_x^{(1,3)}(x, y, t) \\ u_1^{(2)}(x, y, t) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \begin{Bmatrix} U_{0m,n}^{(1,2,3)}(t) \\ \Psi_{xm,n}^{(1,3)}(t) \\ U_{1m,n}^{(2)}(t) \end{Bmatrix} \cos(\mu_m x) \sin(\lambda_n y) \quad (221)$$

بردارهای ویژه تعیین می‌شوند.

۳- بحث و نتایج عددی

در این بخش به بررسی نتایج حاصل از تحلیل ارتعاش آزاد ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگرتیک با شرایط مرزی ناویر در تماس با سیال تئوری لایه‌ای و شرایط مرزی لوی بدون سیال (تئوری تک‌لایه معادل) پرداخته شده است. در اکثر بخش‌ها به منظور حذف اثرات اندازه و جنس ماده اصلی، به جای فرکانس طبیعی، فرکانس طبیعی بی‌بعد به صورت زیر محاسبه شده و مورد بررسی قرار گرفته است.

$$\omega = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{12\rho_0(1-\nu_0^2)}{E_0}} \quad (219)$$

قبل از استخراج نتایج حاصل از کدهای کامپیوتری نوشته شده در نرم افزار ممتیکا، همگرایی نتایج برحسب تعداد جملات استفاده شده در سری‌های مورد استفاده در روش گالرکین بررسی شده است. نتایج ارائه شده در روش گالرکین، مقادیر M و N در معادله (۲۱۳-۲۱۵) برابر ۴ و مقادیر MB و NB در معادله (۱۳۹) برابر ۱۰ در نظر گرفته شوند. همچنین برای مود اسلاشینگ سیال MS و NS در معادله (۱۴۰-۱۴۱) برابر ۳ در نظر گرفته شده‌اند. در تئوری لایه‌ای، با مساوی صفر قرار دادن ضخامت یکی از رویه‌ها (مثلاً h_p و نیز چند جمله‌ای‌های $\alpha_p(z_p)$ تا $\alpha_\delta(z_p)$ ورق ساندویچی به یک ورق همسانگرد با ضخامت h_1 تبدیل می‌شود. به طوری که در این حالت، تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی جایگزین تئوری لایه‌ای می‌شود.

در جدول ۱ پنج فرکانس طبیعی یک ورق مربعی همسانگرد با شرایط مرزی نوع ناویر بدون تماس با سیال با شرایط مرزی ناویر، با استفاده از تئوری مرتبه سوم ردی (همراه با روش‌های حل گالرکین و نوع لوی) و تئوری مرتبه اول میندلین (همراه با روش حل گالرکین) با نتایج موجود در تحقیقات حسینی هاشمی و ارسنجانی در سال ۲۰۰۵ [۲۸] و حسینی هاشمی و همکاران در سال ۲۰۱۱ [۲۹] مقایسه شده‌اند. نتایج ارائه شده در این جدول برای ورق از جنس آلومینیوم با مدول یانگ ۶۹ گیگاپاسکال، چگالی ۲۷۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب و ضریب پواسون ۰/۳ می‌باشد. نتایج جدول ۱ حاکی از دقت بالای هر سه مدل تحلیلی استفاده شده در این تحقیق برای ورق همسانگرد با شرایط مرزی ناویر است. که در جدول زیر روش ۱، روش حاضر گالرکین و روش ۲، روش حاضر ردی می‌باشد

در جدول ۲ پنج فرکانس طبیعی یک ورق مربعی همسانگرد با شرایط مرزی لوی بدون تماس با سیال با استفاده از تئوری مرتبه سوم ردی محاسبه شده‌اند با نتایج موجود در تحقیقات سایر محققان مقایسه شده‌اند. مشخصات هندسی و مادی ورق، مطابق بخش قبل می‌باشند. نتایج جدول ۲ حاکی از دقت مناسب و کارایی مدل تحلیلی استفاده شده در این تحقیق برای ورق همسانگرد با شرایط مرزی لوی است. در جدول ۲ روش ۱، روش حاضر ردی می‌باشد. در جدول ۳ شش فرکانس طبیعی یک ورق ساندویچی لانه‌زنبوری بدون تماس با سیال با شرایط مرزی ناویر با استفاده از تئوری‌های ردی و بهبودیافته ردی (همراه با روش‌های حل گالرکین و نوع لوی) و تئوری لایه‌ای (همراه با روش حل گالرکین) با نتایج موجود در تحقیقات راویله و یونگ [۳۰]، ژو و لی [۳۱]، یوان و دیو و رائو [۳۲] و دسائی [۳۳] مقایسه شده‌اند. طول، عرض، ضخامت کل و ضخامت هسته ورق ساندویچی

جدول ۱. مقایسه پنج فرکانس طبیعی بی‌بعد یک ورق مربعی همسانگرد نوع ناویر با نسبت ضخامت به طول ۰/۱.

Table 1. Comparison of the first five dimensionless natural frequencies of a Navier isotropic square plate with a thickness-to-length ratio of 0.1.

روش	مود (۱ا)	مود (۲ا)	مود (۱و۲)	مود (۲و۲)	مود (۳ا)
روش ۱	۱۹/۰۶۵۳	۴۵/۴۸۶۹	۴۵/۴۸۶۹	۶۹/۸۰۹۳	۸۵/۰۶۴۶
روش ۲	۱۹/۰۶۵۳	۴۵/۴۸۷	۴۵/۴۸۹۲	۶۹/۸۱۰۷	۸۵/۰۸۴۶
[۲۸]	۱۹/۰۸۴	۴۵/۵۸۴۵	۴۵/۵۸۴۵	۷۰/۰۲۱۹	۸۵/۳۶۵۴
[۲۹]	۱۹/۰۶۵۳	۴۵/۴۸۶۹	۴۵/۴۸۶۹	۶۹/۸۰۹۳	۸۵/۰۸۴۶

جدول ۲. مقایسه پنج فرکانس طبیعی بی‌بعد یک ورق مربعی همسانگرد نوع لوی با نسبت ضخامت به طول ۰/۱.

Table 2. Comparison of the first five dimensionless natural frequencies of a Levy isotropic square plate with a thickness-to-length ratio of 0.1.

شرایط مرزی	روش	مود اول	مود دوم	مود سوم	مود چهارم	مود پنجم
SSSC	روش ۱	مود (۱ و ۱)	مود (۲ و ۱)	مود (۱ و ۲)	مود (۲ و ۲)	مود (۳ و ۱)
	[۲۸]	۲/۳۱۲۴	۴۷/۰۶۶	۵۲/۹۹۸	۷۴/۰۴۶	۸۶/۱۹۰
		۲۲/۴۲۶	۴۷/۲۲۴	۵۲/۳۲۴	۷۴/۴۰۱	۸۶/۲۱۹
SCSC	روش ۱	۲۲/۴۰۱	۴۷/۱۳۰	۵۲/۲۳۲	۷۴/۲۲۵	۸۵/۹۳۱
	[۲۸]	۲۶/۴۶۶	۴۹/۰۱۴	۵۸/۸۹۹	۷۸/۶۸	۸۶/۸۴۹
		۲۶/۷۳۶	۴۹/۲۶۰	۵۹/۴۸۰	۷۹/۱۹۵	۸۷/۲۰۷
SFSS	روش ۱	۲۶/۷۰۸۴	۴۹/۱۷۵۶	۵۹/۴۱۵۹	۷۹/۰۷۸۳	۸۶/۹۳۹۷
	[۲۸]	۱۱/۶۱۵	۲۷/۵۵	۳۸/۴۷۲	۵۳/۹۲۳	۵۷/۹۸۶
	[۲۹]	۱۱/۳۸	۲/۱۹۱	۳۸/۳۶۱	۵۳/۸۵۲	۵۵/۷۶۲
SFSF	روش ۱	۱۱/۳۷۳	۲۶/۱۵۷	۳۸/۲۹۰	۵۳/۲۵۷	۵۵/۶۳۴
	[۲۸]	۹/۵۱۸۹	۱۶/۵۶۲	۳۷/۲۶۷	۳۶/۴۷۷	۴۳/۴۱۴
	[۲۹]	۹/۴۴۵	۱۵/۴۰۵	۳۳/۹۱	۳۶/۴۲۴	۴۲/۸۸۷
SFSC	روش ۱	۹/۴۴۱	۱۵/۳۹۱	۳۳/۸۶	۳۶/۳۴۸	۴۲/۸۰۰
	[۲۸]	۱۲/۵۸	۳۱/۹۷۵	۳۸/۸۳۷	۵۶/۵۳	۶۵/۰۲
	[۲۹]	۱۲/۲۶	۳۰/۴۷	۳۸/۷۱	۵۵/۹۷	۶۲/۹۵
		۱۲/۲۵	۳۰/۴۳	۳۸/۶۴	۵۵/۸۵	۶۲/۸۴

به‌ترتیب برابر ۱/۸۲۸۸ متر، ۱/۲۱۹۲ متر، ۷/۱۶۲۸ میلی‌متر، و ۶/۳۵ میلی‌متر هستند. همچنین مدول یانگ، ضریب پواسون و چگالی آلومینیوم به‌ترتیب برابر ۶۸/۹۴۸ گیگاپاسکال، ۰/۳۳، و ۲۷۶۸ کیلوگرم بر متر مکعب هستند. به‌علاوه برای هسته لانه‌زنبوری مدول‌های برشی عرضی $G_{۱۳}^{(۲)}$ و $G_{۲۳}^{(۲)}$ به‌ترتیب برابر ۱۳۴/۴۵ مگاپاسکال و ۵۱/۷۱ مگاپاسکال هستند و چگالی نیز برابر ۱۲۱/۸۳ کیلوگرم بر متر مکعب است. به‌منظور سازگاری با مطالعه تجربی راویله و یوئنگ [۳۰]، مولفه‌های سفتی درون‌صفحه‌ای هسته برابر صفر در نظر گرفته شده‌اند. نتایج جدول ۳ حاکی از دقت مناسب تئوری‌های بهبودیافته ردی و لایه‌ای برای ورق ساندویچی لانه‌زنبوری با شرایط مرزی ناوبر است.

که در جدول ۳ روش ۱، روش حل گالرکین - تئوری ردی و روش ۲، روش حل گالرکین - تئوری بهبودیافته ردی و روش ۳، روش حل نوع لوی - تئوری ردی و روش ۴، روش حل نوع لوی - تئوری بهبودیافته ردی و روش ۵، روش حل گالرکین و روش ۶، روش حل گالرکین - تئوری

لایه‌ای راویله و یوئنگ می‌باشد. صحت‌سنجی فرکانس‌های طبیعی ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگزتیک نوع ناوبر بدون سیال با نتایج حاصل از تحلیل المان محدود: در این بخش روابط همگن‌سازی هسته لانه‌زنبوری با نتایج حاصل از تحلیل المان محدود سه‌بعدی انجام شده روی مدل‌های واقعی در نرم افزار انسیس ۲۰۲۱ برای نسبت‌های مختلف ضخامت هسته به ورق مقایسه می‌شوند. در محیط آنالیز مودال آکوستیکی در نرم افزار انسیس، ورق ساندویچی و ناحیه سیال محدود به‌ترتیب با استفاده از المان‌های سالیید ۱۸۶ و فلوااید ۲۲۰ مش‌بندی شده‌اند. المان فلوااید ۲۲۰ یک المان آکوستیکی توپر سه‌بعدی شش وجهی و ۲۰ گره‌ای است. ورق ساندویچی شامل ۲۷۰۴ المان سالیید ۱۸۶ است و زمانی که ارتفاع بی‌بعد سیال از لبه پایینی ورق برابر ۰/۹ است، ۱۴۹۷۶ المان فلوااید ۲۲۰ برای ناحیه سیال به‌کار رفته‌اند.

این بخش در نظر دارد که چارچوب ریاضیاتی برهم‌کنش ورق - سیال را برای یک ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگزتیک تجاری مرطوب با مقادیر مختلف ارتفاع بی‌بعد سیال از لبه پایینی ورق (یعنی $(b_1 - y) \cdot b$) بررسی

جدول ۳. فرکانس‌های طبیعی (هرتز) یک ورق ساندویچی لانه‌زنبوری مستطیلی با شرایط مرزی ناویر.

Table 3. Natural frequencies (Hz) of a rectangular honeycomb sandwich plate with Navier boundary conditions.

روش	مود (۱ و ۱)	مود (۲ و ۲)	مود (۱ و ۳)	مود (۲ و ۱)	مود (۳ و ۳)
روش ۱	۲۳/۴۶۴	۴۵/۰۳۹	۷۱/۷۱۸	۸۰/۸۱۸	۹۳/۰۶۱
روش ۲	۲۳/۳۵۶	۴۴/۷۷۱	۷۰/۵۳۹	۸۰/۱۵۶	۹۱/۴۱۸
روش ۳	۲۳/۴۶۴	۴۵/۰۳۸	۷۱/۷۱۷	۸۰/۸۱۷	۹۳/۰۶
روش ۴	۲۳/۳۵۶	۴۴/۷۷۰	۷۰/۵۳۷	۸۰/۱۵۴	۹۱/۴۱۵
روش ۵	۲۳/۳۵	۴۴/۷۷	۷۰/۵۳	۸۰/۱۵	۹۱/۴۱
روش ۶	-	۴۵	۶۹	۷۸	۹۲
[۳۰]	۲۳	۴۵	۷۱	۸۰	۹۱
[۳۰]	۲۳/۲۹	۴۴/۴۷	۷۱/۱۵	۷۸/۷۸	۹۱/۵۷
[۳۰]	۲۳/۴۱	۴۴/۶۴	۷۱/۵	۷۹/۲۶	۹۲/۱۹
[۳۳]	۲۳/۳۶	۴۴/۷۷	۷۰/۵۵	۸۰/۱۶	۹۱/۴۲
[۳۳]	۲۳/۲۵	۴۴/۶۱	۷۰/۷۷	۷۹/۹۷	۹۱/۷۸

لانه‌زنبوری: تغییرات ضریب تصحیح برشی $k_{۳۳}$ بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق با در نظر گرفتن مدل مالک و گیبسون برای هسته لانه‌زنبوری در شکل ۷ نشان داده شده است. مطابق شکل مشاهده می‌شود که:

(۱) با نازک شدن رویه‌ها، ضریب تصحیح برشی افزایش می‌یابد، که این امر به معنای افزایش دقت تئوری ردی برای ورق‌های ساندویچی با رویه‌های نازک است.

(۲) ضریب تصحیح برشی $k_{۳۳}$ برای لانه‌زنبوری‌های تجاری بیشتر از لانه‌زنبوری‌های کلاسیک است. این امر به این دلیل است که بر اساس مدل مالک و گیبسون، سفتی برشی عرضی $G_{۱۳}^{(۲)}$ در لانه‌زنبوری‌های تجاری بیشتر از لانه‌زنبوری‌های کلاسیک است.

(۳) شماره مود اثر چندانی بر روی ضریب تصحیح برشی ندارد.

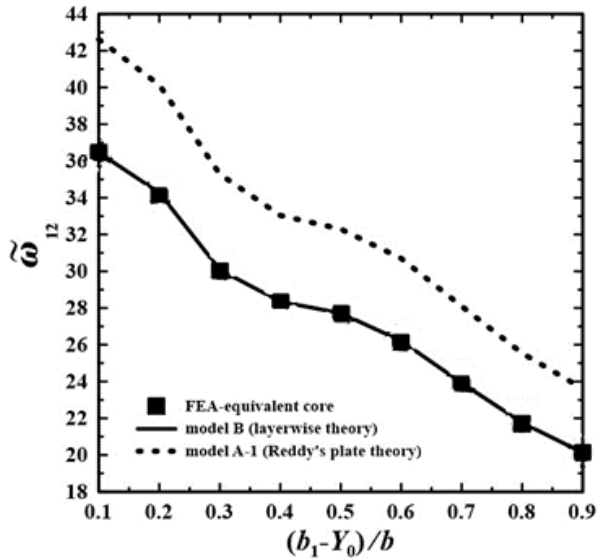
بررسی اثر نسبت ضخامت هسته به ورق بر روی $k_{۳۳}$ در تئوری بهبودیافته ردی با در نظر گرفتن مدل مالک و گیبسون برای هسته لانه‌زنبوری: تغییرات ضریب تصحیح برشی $k_{۳۳}$ بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق با در نظر گرفتن مدل مالک و گیبسون برای هسته لانه‌زنبوری در شکل ۸ نشان داده شده است. مطابق شکل مشاهده می‌شود که ضریب تصحیح برشی $k_{۳۳}$ برای لانه‌زنبوری‌های تجاری و لانه‌زنبوری‌های کلاسیک تقریباً یکسان است. این امر به این دلیل است که بر اساس مدل

نماید. برای اطمینان از حذف خطاهای ناشی از روابط همگن‌سازی هسته‌های لانه‌زنبوری، فقط ورق‌های ساندویچی با هسته‌های معادل‌سازی شده توسط مدل تورنابن در انسیس مدل‌سازی و تحلیل شده‌اند. نسبت ضخامت هسته به ورق برابر ۰/۸ است و سایر خواص هندسی ورق و ناحیه سیال محدود می‌باشند. شکل‌های ۳ تا ۶ چهار فرکانس طبیعی بی‌بعد به‌دست آمده از روش حل گالرکین همراه با مدل همگن‌سازی تورنابن (همراه با تئوری‌های ردی و بهبودیافته ردی (مدل ۱-A) و تئوری لایه‌ای (مدل B)) را با نتایج حاصل از تحلیل المان محدود سه‌بعدی مقایسه می‌کنند.

در شکل‌های ۳ تا ۶ مشاهده می‌شود که چارچوب ریاضیاتی برهم‌کنش ورق ساندویچی - سیال برای تئوری‌های بهبودیافته ردی و لایه‌ای از دقت بالایی برخوردار است.

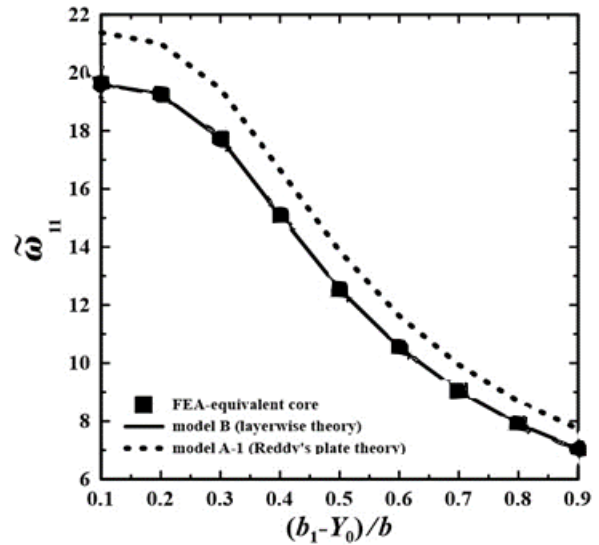
$b = ۰/۵ (b_۱ - y)$ با افزایش ارتفاع سیال از لبه پایینی ورق، فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابند، به‌طوری‌که مثلاً با اضافه شدن سیال تا ارتفاع نصف ورق (یعنی می‌توان نتیجه گرفت که فرکانس طبیعی پایه ۳۶٪ کاهش می‌یابد. دلیل این امر، افزایش جرم افزوده سیال به ورق ساندویچی است.

بررسی اثر نسبت ضخامت هسته به ورق بر روی $k_{۳۳}$ در تئوری بهبودیافته ردی با در نظر گرفتن مدل مالک و گیبسون برای هسته



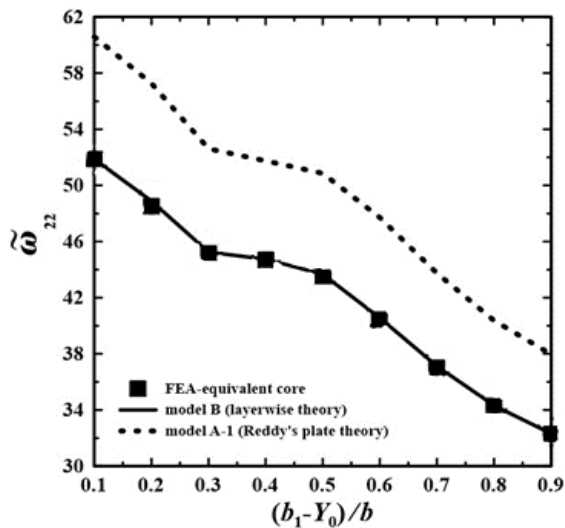
شکل ۴. تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد مود (۱ و ۲) ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگزتیک تجاری نوع ناویر مرطوب بر حسب ارتفاع بی‌بعد سیال از لبه پایینی ورق.

Fig. 4. Variation of the dimensionless wet natural frequency of mode (1,2) for a commercial Navier re-entrant auxetic honeycomb sandwich plate versus the dimensionless fluid height measured from the lower edge of the plate.



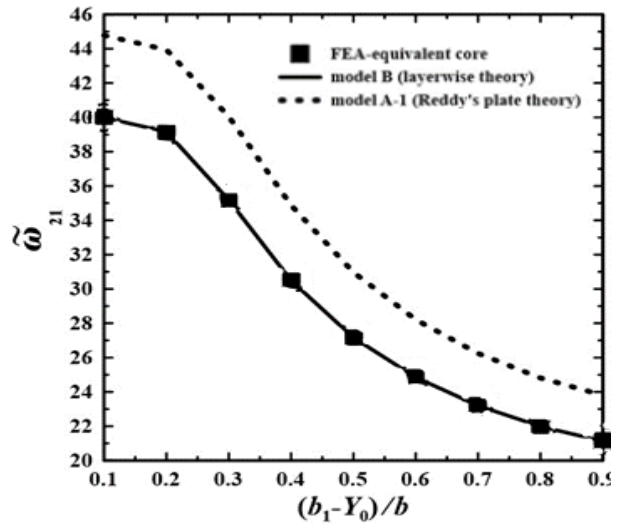
شکل ۳. تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد مود (۱ و ۱) ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگزتیک تجاری نوع ناویر مرطوب بر حسب ارتفاع بی‌بعد سیال از لبه پایینی ورق.

Fig. 3. Variation of the dimensionless wet natural frequency of mode (1,1) for a commercial Navier re-entrant auxetic honeycomb sandwich plate versus the dimensionless fluid height measured from the lower edge of the plate.



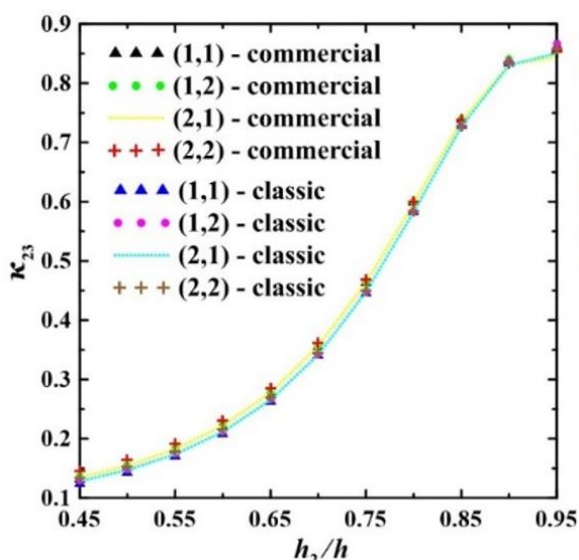
شکل ۶. تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد مود (۲ و ۲) ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگزتیک تجاری نوع ناویر مرطوب بر حسب ارتفاع بی‌بعد سیال از لبه پایینی ورق.

Fig. 6. Variation of the dimensionless wet natural frequency of mode (2,2) for a commercial Navier re-entrant auxetic honeycomb sandwich plate versus the dimensionless fluid height measured from the lower edge of the plate.



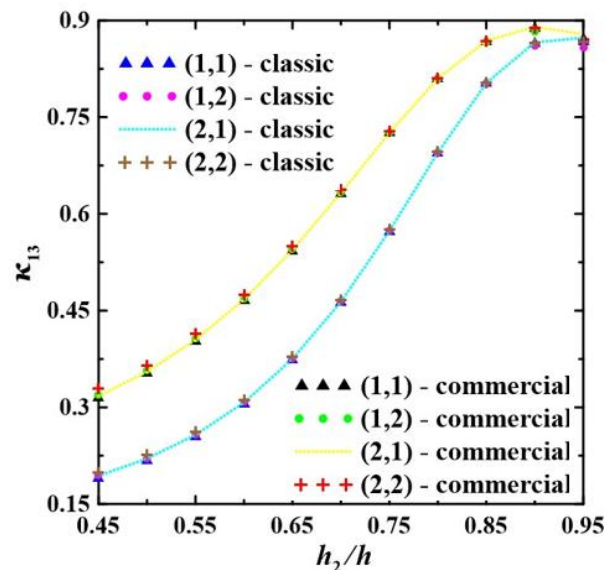
شکل ۵. تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد مود (۲ و ۱) ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگزتیک تجاری نوع ناویر مرطوب بر حسب ارتفاع بی‌بعد سیال از لبه پایینی ورق.

Fig. 5. Variation of the dimensionless wet natural frequency of mode (2,1) for a commercial Navier re-entrant auxetic honeycomb sandwich plate versus the dimensionless fluid height measured from the lower edge of the plate.



شکل ۸. تغییرات ضریب تصحیح برشی K_{23} با در نظر گرفتن مدل مالک و گیسون برای هسته لانه‌زنبوری بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق.

Fig. 8. Variation of the shear correction factor based on the Malek-Gibson model for the honeycomb core versus the core-to-face-sheet thickness ratio



شکل ۷. تغییرات ضریب تصحیح برشی K_{13} با در نظر گرفتن مدل مالک و گیسون برای هسته لانه‌زنبوری بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق.

Fig. 7. Variation of the shear correction factor based on the Malek-Gibson model for the honeycomb core versus the core-to-face-sheet thickness ratio

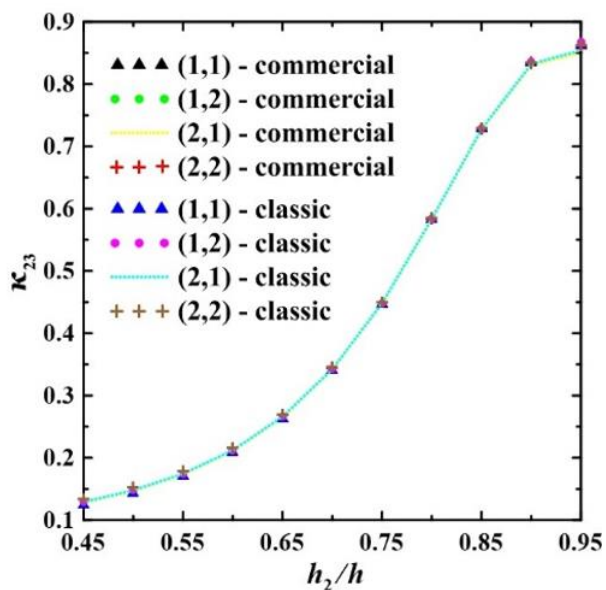
شکل ۱۱ نمودار فرکانس پایه بی‌بعد مرطوب ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگزیک تجاری در تماس با سیال را بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق در مقادیر مختلف نسبت ضخامت به طول ورق نشان می‌دهد. بر خلاف فرکانس‌های طبیعی خشک، مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت ضخامت هسته به ورق، فرکانس پایه مرطوب کاهش می‌یابد. علاوه بر این مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت ضخامت به طول ورق از ۰/۱ تا ۰/۴، فرکانس به‌طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد. شکل ۱۲ تغییرات فرکانس پایه بی‌بعد مرطوب را به‌عنوان تابعی از زاویه سلول لانه‌زنبوری به‌ازاء اندازه‌های سلول مختلف (یعنی نسبت l/a نشان می‌دهد. مشاهدات نشان می‌دهند که با تغییر زاویه سلول از ۶۰- تا ۶۰+ درجه، فرکانس پایه ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد، به‌طوری‌که برای نسبت‌های l/a برابر ۰/۰۰۱، ۰/۰۱ و ۰/۱ بیشینه فرکانس به‌ترتیب در زوایای ۰، ۱۵- و ۳۰- درجه رخ می‌دهد. علاوه بر این در یک زاویه سلول مشخص، افزایش اندازه سلول باعث افزایش فرکانس پایه می‌شود، با این وجود این اثر در سلول‌های درون‌رو مشهودتر است

شکل ۱۳ رابطه بین فرکانس پایه بی‌بعد مرطوب و نسبت ابعاد سلول

مالک و گیسون، سفتی برشی عرضی $G_{23}^{(2)}$ در لانه‌زنبوری‌های تجاری و کلاسیک تقریباً برابر است.

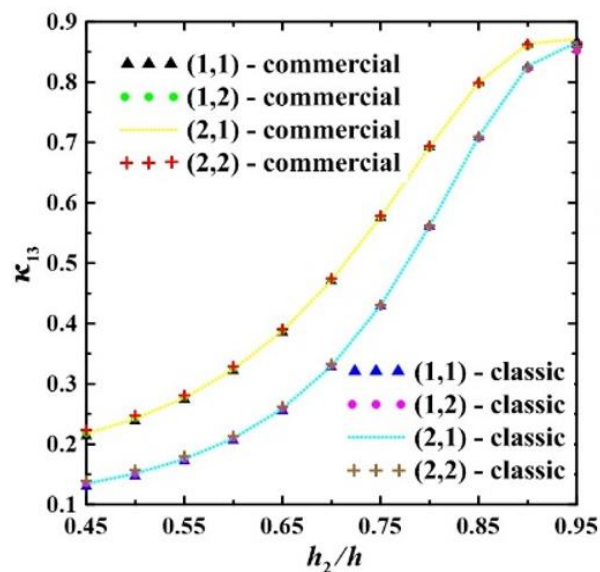
بررسی اثر نسبت ضخامت هسته به ورق بر روی در تئوری بهبودیافته ردی با در نظر گرفتن مدل تورنابن برای هسته لانه‌زنبوری: تغییرات ضریب تصحیح برشی k_{13} بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق با در نظر گرفتن مدل تورنابن برای هسته لانه‌زنبوری در شکل ۹ نشان داده شده است. از مقایسه این شکل با شکل ۷ مشاهده می‌شود که درصد تغییرات ضریب تصحیح برشی k_{13} بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق، در مدل تورنابن نسبت به مدل مالک و گیسون بیشتر است.

بررسی اثر نسبت ضخامت هسته به ورق بر روی k_{23} در تئوری بهبودیافته ردی با در نظر گرفتن مدل تورنابن برای هسته لانه‌زنبوری: تغییرات ضریب تصحیح برشی k_{23} بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق با در نظر گرفتن مدل تورنابن برای هسته لانه‌زنبوری در شکل ۱۰ نشان داده شده است. از مقایسه این شکل با شکل ۸ مشاهده می‌شود که درصد تغییرات ضریب تصحیح برشی k_{23} بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق، در مدل‌های تورنابن و مالک و گیسون تقریباً برابر است.



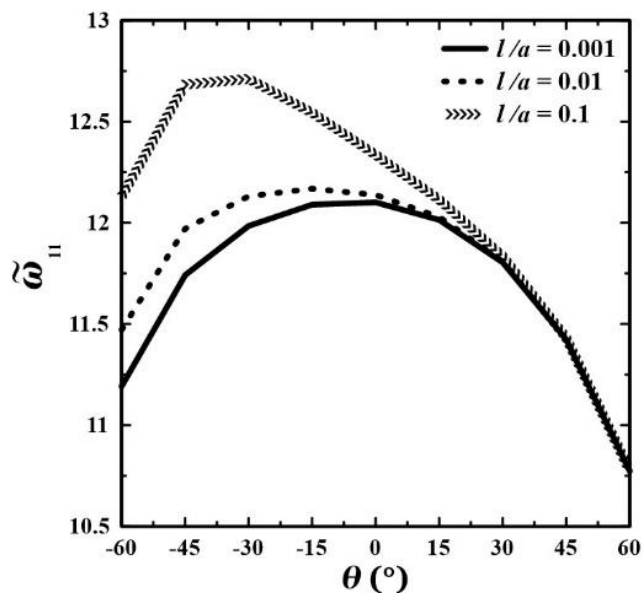
شکل ۱۰. تغییرات ضریب تصحیح برشی K_{23} با در نظر گرفتن مدل تورنابن برای هسته لانه‌زنبوری بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق.

Fig. 10. Variation of the shear correction factor based on the Tornabene model for the honeycomb core versus the core-to-face-sheet thickness ratio



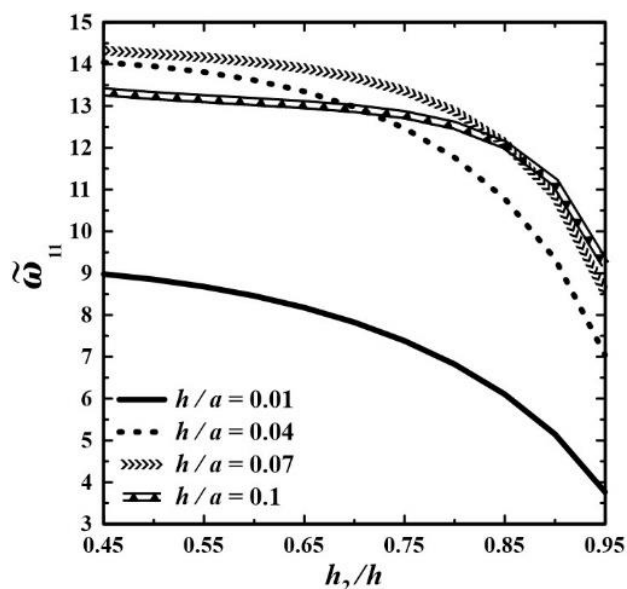
شکل ۹. تغییرات ضریب تصحیح برشی K_{13} با در نظر گرفتن مدل تورنابن برای هسته لانه‌زنبوری بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق.

Fig. 9. Variation of the shear correction factor based on the Tornabene model for the honeycomb core versus the core-to-face-sheet thickness ratio



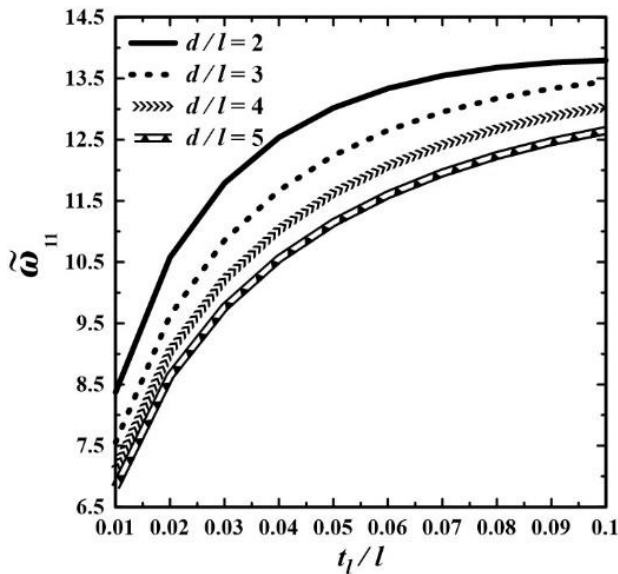
شکل ۱۲. تغییرات فرکانس پایه بی‌بعد مرطوب بر حسب زاویه سلول برای اندازه‌های سلول مختلف.

Fig. 12. Variation of the dimensionless wet fundamental frequency versus the cell angle for different cell sizes.



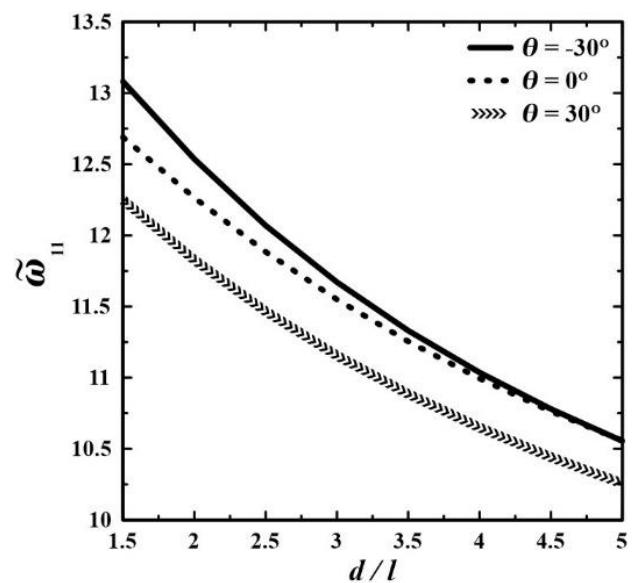
شکل ۱۱. تغییرات فرکانس پایه بی‌بعد مرطوب بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق برای مقادیر مختلف نسبت ضخامت به طول ورق.

Fig. 11. Variation of the dimensionless wet fundamental frequency versus the core-to-face-sheet thickness ratio for different plate thickness-to-length ratios.



شکل ۱۴. تغییرات فرکانس پایه بی‌بعد مرطوب بر حسب نسبت ضخامت به طول جداره مورب سلول برای نسبت‌های مختلف ابعاد سلول.

Fig. 14. Variation of the dimensionless wet fundamental frequency versus the inclined cell-wall thickness-to-length ratio for different cell aspect ratios



شکل ۱۳. تغییرات فرکانس پایه بی‌بعد مرطوب بر حسب نسبت ابعاد سلول برای زوایای مختلف.

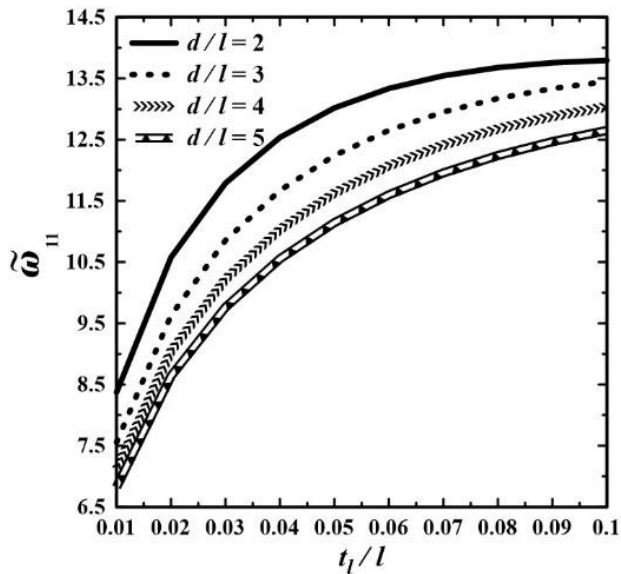
Fig. 13. Variation of the dimensionless wet fundamental frequency versus the cell aspect ratio for different cell angles.

می‌یابد که این امر سبب افزایش فرکانس طبیعی ورق ساندویچی می‌شود. شکل ۱۶ اثرات موقعیت‌های افقی و قائم ورق در دیواره مخزن را بر روی فرکانس پایه بی‌بعد مرطوب نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، زمانی که نسبت a_1/x برابر 0.25 است، فرکانس پایه ماکزیمم می‌باشد، زیرا ورق ساندویچی در مرکز دیوار قرار دارد که این امر باعث می‌شود گرادیان سرعت سیال در ناحیه برهم‌کنش ورق - سیال مینیمم باشد. علاوه بر این‌ها مشاهدات نشان می‌دهند که با افزایش نسبت γ/b فرکانس پایه افزایش می‌یابد، زیرا برای ثابت نگه داشتن ارتفاع سیال از لبه پایینی ورق یعنی $(b_1 - \gamma)$ ارتفاع کلی سیال (یعنی b_1) متناسب با γ افزایش یافته است، که این امر از طریق افزایش ظرفیت مخزن و کاهش سرعت سیال سبب افزایش فرکانس طبیعی می‌شود.

۳-۱- جمع بندی و نتیجه‌گیری

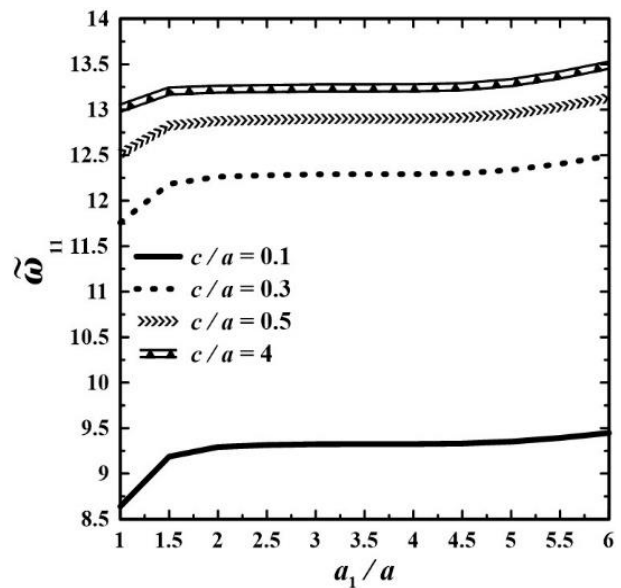
هدف از پژوهش حاضر بررسی مشخصه‌های ارتعاش آزاد ورق ساندویچی مستطیلی با هسته لانه‌زنبوری آگزتیک با استفاده از مدل مالک-گیسون و به صورت نوآورانه با بکارگیری مدل تورنابنه است، که ورق ساندویچی

لانه‌زنبوری را برای زوایای مختلف نشان می‌دهد. مشاهدات نشان می‌دهند که با افزایش نسبت ابعاد سلول از $1/5$ تا 5 ، فرکانس پایه کاهش می‌یابد. شکل ۱۴ تغییرات فرکانس پایه بی‌بعد مرطوب را به‌عنوان تابعی از نسبت ضخامت به طول جداره مورب سلول برای نسبت‌های مختلف ابعاد سلول نشان می‌دهد. مشاهدات نشان می‌دهند که به‌ازاء هر چهار نسبت ابعاد سلول با افزایش ضخامت جداره مورب سلول فرکانس پایه افزایش می‌یابد. با ضخیم شدن جداره‌های سلول، هم چگالی و هم سفتی هسته افزایش می‌یابند. فرکانس پایه افزایش می‌یابد زیرا افزایش مولفه‌های سفتی (به‌خصوص مولفه‌های برشی عرضی) بر افزایش چگالی غلبه دارند. شکل ۱۵ نمودار فرکانس پایه بی‌بعد مرطوب را بر حسب نسبت طول مخزن به ورق برای نسبت‌های مختلف عرض مخزن به طول ورق نشان می‌دهد. لازم بذکر است که x برابر 0 در نظر گرفته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود افزایش نسبت طول مخزن به ورق فرکانس پایه را افزایش می‌دهد. علاوه بر این در یک نسبت طول مخزن به ورق مشخص، افزایش نسبت عرض مخزن به طول ورق فرکانس پایه را تا رسیدن به یک مقدار مجانبی افزایش می‌دهد. با افزایش ظرفیت مخزن سرعت سیال کاهش



شکل ۱۶. تغییرات فرکانس پایه بی‌بعد مرطوب بر حسب موقعیت افقی بی‌بعد ورق در دیواره برای مقادیر موقعیت‌های افقی و قائم ورق در دیواره مخزن.

Fig. 16. Variation of the dimensionless wet fundamental frequency versus the dimensionless horizontal position of the plate on the tank wall for different horizontal and vertical positions of the plate on the tank wall.



شکل ۱۵. تغییرات فرکانس پایه بی‌بعد مرطوب بر حسب نسبت طول مخزن به طول ورق.

Fig. 15. Variation of the dimensionless wet fundamental frequency versus the tank-to-plate length ratio for different tank-width-to-plate-length ratios.

فرکانس‌های طبیعی مرطوب ورق مورد ارزیابی و تجزیه و تحلیل قرار گرفته است که به طور خلاصه نتایج زیر حاصل گردیده است.

در ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگزتیک تجاری که در تماس با سیال است، افزایش نسبت ضخامت به طول ورق از ۰/۰۱ به ۰/۰۴ باعث افزایش قابل توجه فرکانس پایه می‌شود زیرا صلبیت ورق افزایش می‌یابد.

در حالت بدون سیال، فرکانس پایه در حالت نسبت ضخامت هسته به ورق برابر ۰/۸۵ درصد به بیشینه می‌رسد که در حالت تماس با سیال، با افزایش این نسبت از ۰/۴۵ به ۰/۹۵ درصد، فرکانس پایه کاهش می‌یابد که دلیل این امر تاثیر اثرات اغتشاش سیال و نوسانات ورق ناشی از اندرکش سیال و سازه می‌باشد.

با کوچک‌تر بودن اندازه سلول، فرکانس پایه به بیشینه‌ای مربوط به سلول‌های مستطیلی (زاویه صفر) منطبق است؛ با افزایش اندازه سلول، بیشینه فرکانس پایه به سلول‌های درون‌رو با زوایای منفی میل می‌کند.

با افزایش اندازه سلول، عموماً فرکانس پایه افزایش می‌یابد، با تأکید بیشتر در سلول‌های درون‌رو.

ضخامت دیواره‌های سلول‌های درون‌رو با افزایش فرکانس پایه ارتباط

مفروض در دیواره یک مخزن سیال جای گرفته است. ساختار این ورق شامل دو رویه آلومینیومی و هسته‌ای آگزتیک از جنس آلومینیوم رویه‌ها می‌باشد. سه مدل تحلیلی برای بیان رفتار ورق ساندویچی پیشنهاد و مقایسه‌ای از مزایا و معایب آن‌ها ارائه شده است. دو مدل تحلیلی لایه‌ای، به‌همراه روش حل گالرکین، برای مدل‌سازی رفتار دینامیکی ورق با شرط مرزی ناویر در تماس با سیال به کار گرفته شده‌اند. در بخش لایه‌ای، رویه‌ها با تئوری مرتبه اول میندلین و هسته با مدل دوم (مدل جابه‌جایی) فراستیگ تحلیل شده‌اند. سیال فرضی از نوع ایده‌آل (غیرقابل تراکم، غیرلزج و غیرچرخشی) است. نتایج روش‌های ارائه‌شده، روابط همگن‌سازی هسته لانه‌زنبوری، و چارچوب ریاضی تعامل ورق-سیال را با استفاده از پژوهش‌های پیشین و تحلیل المان محدود سه‌بعدی صحت‌سنجی گردیده است. در این مقاله با فرضیات تئوری لایه‌ای معادلات حاکم بر سازه استخراج گردیده است که نوآوری این تحقیق می‌باشد، همچنین مدل ارائه شده برای ورق ساندویچی با هسته آگزتیک در تماس با سیال نیز دارای نوآوری می‌باشد. در نهایت، اثر پارامترهای مختلفی مانند نسبت مخزن به طول ورق، ارتفاع سیال از لبه پایین، موقعیت ورق در دیواره مخزن و هندسه سلول لانه‌زنبوری بر

Theory, Int J Solids Struct, 31(9) (1994) 1263–1277.

مثبتی دارد.

[8] Y. Frostig, O. Thomsen, High-Order Free Vibration Of Sandwich Plates With A Flexible Core, Int J Solids Struct, 163(21) (2004) 617–629.

افزایش ارتفاع سیال از لبه پایین ورق، فرکانس پایه را به طور معنی داری کاهش می دهد (مثلاً افزودن سیال تا نیمی از ارتفاع ورق، کاهش $\approx 36\%$).

[9] S. Omiddezyani, R. Jafari, M. Talookolaei, H. Afrasiab, The Size-Dependent Free Vibration Analysis Of A Rectangular Mindlin Microplate Coupled With Fluid, Ocean Eng, 163(21) (2018) 617–629.

افزایش ظرفیت مخزن، فرکانس پایه را به طور نمایی افزایش می دهد. ورق در مرکز دیواره سلول، فرکانس پایه را بیشینه می کند.

[10] T. Thinh, T. Tu, N. Vanlong, Free Vibration Of A Horizontal Functionally Graded Rectangular Plate Submerged In Fluid Medium, Ocean Eng, 216(11) (2020).

برای ورق لانه زنبوری آگزتیک در حالت بدون سیال، اثر نسبت ضخامت به طول جداره مورب سلول بر روی ورق های با مرزهای مقیدتر، واضح تر است. بیشترین و کمترین اثر به ترتیب مربوط به شرایط مرزی SCSC (ورق با مرزهای مقیدتر) و SFSF (ورق با مرزهای آزادتر) است.

منابع

[11] S. Hashemi, M. Karimi, M. Taher, Vibration Analysis Of Rectangular Mindlin Plates On Elastic Foundations And Vertically In Contact With Stationary Fluid By The Ritz Method, Ocean Eng, 37(2) (2010). (In Persian)

[1] K. Torabi, H. Afshari, F. Aboutalebi, Vibration And Flutter Analyses Of Cantilever Trapezoidal Honeycomb Sandwich Plates, J. Sandw. Struct & Mater, 21(8) (2019) 2887–2920. (In Persian)

[12] K. Khorshid, S. Farhadi, Free Vibration Analysis Of A Laminated Composite Rectangular Plate In Contact With A Bounded Fluid, Compos. Struct, 104 (2013) 176–186. (In Persian)

[2] E. Bidgoli, M. Arefi, M. Mohammadimehr, Free Vibration Analysis Of Honeycomb Doubly Curved Shell Integrated With CNT-Reinforced Piezoelectric Layers, Mech Based Des Struct Mach, (2020) 1–32. (In Persian)

[13] K. Khorshidi, A. Bakhsheshy, Free Vibration Analysis Of A Functionally Graded Rectangular Plate In Contact With A Bounded Fluid, Acta Mech, 226(10) (2015) 401–3423. (In Persian)

[3] D. Nguyen, C. Pham, Nonlinear Dynamic Response And Vibration Of Sandwich Composite Plates With Negative Poisson's Ratio In Auxetic Honeycombs, J. Sandw. Struct & Mater, 20(6) (2018) 692–717.

[14] K. Khorshidi, F. Akbari, H. Ghadirian, Experimental And Analytical Modal Studies Of Vibrating Rectangular Plates In Contact With A Bounded Fluid, Ocean Eng, 140 (2017) 146–154. (In Persian)

[4] P. Cong, P. Quyet, N. Duc, Effects Of Lattice Stiffeners And Blast Load On Nonlinear Dynamic Response And Vibration Of Auxetic Honeycomb Plates, Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci, 21(8) (2021) 1505–1521.

[15] K. Khorshidi, M. Karimi, Analytical Modeling For Vibrating Piezoelectric Nanoplates In Interaction With Inviscid Fluid Using Various Modified Plate Theories, Compos Struct, 244 (2019) 1122–1134. (In Persian)

[5] Y. Li, W. Yao, Y. Zhang, Nonlinear Dynamic Characteristics Of Symmetric Rectangular Honeycomb Sandwich Thin Plate, J. Sandw. Struct & Mater, 23(7) (2021) 3390–3413.

[16] M. Karimi, K. Khorshidi, R. Dimitri, F. Tornabene, Size-Dependent Hydroelastic Vibration Of FG Microplates Partially In Contact With A Fluid, Compos. Struct, 244(11) (2020) 218–238. (In Persian)

[6] F. Li, W. Yuan, C. Zhang, Free Vibration And Sound Insulation Of Functionally Graded Honeycomb Sandwich Plates, J. Sandw. Struct & Mater, 24(1) (2022) 565–600.

[17] A. Bakhsheshy, H.A. Mahbadi, The Effect Of Fluid

[7] N. Huang, Influence Of Shear Correction Factors In The Higher Order Shear Deformation Laminated Shell

- Order Formulations For Doubly-Curved Shell Structures With A Honeycomb Core, Thin-Walled Struct, 164(5) (2021) 112–142.
- [27] S. Sorohan, M. Sandu, D. Constantinescu, G. Sandu, On The Evaluation Of Mechanical Properties Of Honeycombs By Using Finite Element Analyses, Int J Solids Struct, 3(9) (2015) 819–853.
- [28] S. Hashemi, M. Arsanjani, Exact Characteristic Equations For Some Of Classical Boundary Conditions Of Vibrating Moderately Thick Rectangular Plates, Int. J. Solids Struct, 42(3) (2005) 819–853. (In Persian)
- [29] S. Hashemi, M. Fadaee, H. Taher, Exact Solutions For Free Flexural Vibration Of Lévy-Type Rectangular Thick Plates Via Third-Order Shear Deformation Plate Theory, Appl. Math. Model, 35(2) (2011) 708–727. (In Persian)
- [30] M. Raville, C. Ueng, Determination Of Natural Frequencies Of Vibration Of A Sandwich Plate, Exp Mech, 7(11) (1967) 490–493.
- [31] H. Zhou, G. Li, Free Vibration Analysis Of Sandwich Plates With Laminated Faces Using Spline Finite Point Method, Comput & Struct, 59(2) (1996) 490–493.
- [32] W. Yuan, D. Dawe, Free Vibration Of Sandwich Plates With Laminated Faces, Int J Numer Methods Eng, 54(2) (2002) 195–217.
- [33] M. Rao, Y. Desai, Analytical Solutions For Vibrations Of Laminated And Sandwich Plates Using Mixed Theory, Compos. Struct, 64(3) (2004) 361–373.
- [34] D. Binh, D. Huan, N. Hai, L. Quan, L. Chau, H. Anh, Free Vibration Analysis of Sandwich Plates with Auxetic Core and Porous FG Faces Resting on Winkler/Pasternak/Kerr Elastic Foundations, Vietnam Journal of Agricultural Sciences, 8(12) (2025) 2493–2508.
- [35] H. Raad, E. Najim, M. Jweeg, Vibration Analysis of Sandwich Plates with Hybrid Composite Cores Combining Porous Polymer and Foam Structures, Journal of Computational Applied Mechanics, 25(4) (2024) 485–499. (In Persian)
- Surface Waves On Free Vibration Of Functionally Graded Microplates In Interaction With Bounded Fluid, Ocean Eng, 194(12) (2019) 98–113. (In Persian)
- [18] A. Ramian, C. Jafari, R. Talookolaei, M. Abedi, Free Vibration Analysis Of Sandwich Plates With Compressible Core In Contact With Fluid, Thin-Walled Struct, 157(15) (2020) 107–121.
- [19] A. Ramian, R. Talookolaei, M. Abedi, Free Vibration Analysis Of A Laminated Composite Sandwich Plate With Compressible Core Placed At The Bottom Of A Tank Filled With Fluid, In Structures, 29(11) (2021) 1259–1273.
- [20] K. Khorshidi, H. Norowzian, Stability Analysis Of A Sandwich Plate With An Auxetic Core Reinforced With Carbon Nanotubes Under Aeroelastic Forces, JSTC Journal, 14(4) (2024) 2597–2610. (In Persian)
- [21] D. Yolcu, B. Ozturk, G. Sari, B. Okutanbaba, Free Vibration Response Of Sandwich Composites With Auxetic Chiral Core, European Journal Of Mechanics - A/Solids, 113(8) (2025) 105–121.
- [22] K. Khorshidi, S. Savvafi, Z. Zobeid, Investigation Of Free Vibration In Fluid-Loaded Cylindrical Shells With A Three-Layer Sandwich Wall And An Auxetic Central Layer, Macs Journal, 12(24) (2025) 53–73. (In Persian)
- [23] X. Fang, H. Shen, H. Wang, Nonlinear Free Vibration Of Sandwich Beam With Data-Driven Inverse Designed Auxetic Core Based On Deep Learning, European Journal Of Mechanics - A/Solids, 102(7) (2025) 105–134.
- [24] A. Heidarisoureshjani, A. Kalantari, E. Hesari, R. Talebitooti, M. Talebitooti, Cutout Effects On The Vibration Of Sandwich Auxetic Cylindrical Shells With An Experimental Validation, Journal Of Sound And Vibration, 592(11) (2024) 118–131. (In Persian)
- [25] S. Malek, L. Gibson, Effective elastic properties of periodic hexagonal honeycombs, Mech Mater, 91(11) (2015) 226–240.
- [26] F. Tornabene, M. Viscoti, R. Dimitr, MAiello, Higher

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

K. Khorshidi, A. R. Pakrouyan, P. Yousefi, A. Pourmahdi, *Free Vibration Analysis of Auxetic-Core Sandwich Plate in Contact with Fluid by Layer Theory*, *Amirkabir J. Mech Eng.*, 58(1) (2026) 29-66.

DOI: [10.22060/mej.2026.24883.7905](https://doi.org/10.22060/mej.2026.24883.7905)



