تانسور الاستیسیته فضائی در معادلات بنیادین اولری نرخی

بیژن عباسی خزائی[1*]، زهرا عباسی[2]

چکیده

به طور معمول در تحلیل تغییرشکل‌های بزرگ، معادلات بنیادین نرخی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در مختصات فضائی، تانسور الاستیسیته فضایی، نرخ عینی یک تانسور تنش را به نرخ تغییرشکل مرتبط می‌نماید. تانسور الاستیسیته فضایی برای یک ماده مشخص در معادلات بنیادین نرخی مختلف، متفاوت است و یافتن رابطه بین آن‌ها مورد علاقه برخی از محققین است. تحقیقات انجام شده در این زمینه محدود بوده و نتایج آن‌ها فقط برای چند مدل خاص ارائه شده است. در این تحقیق یک رابطه عمومی و صریح بین تانسورهای الاستیسیته در معادلات بنیادین ارائه شده است. این رابطه تابعی از تانسور گرین-کاوشی چپ و بردارهای ویژه آن است.

کلمات کلیدی : معادله بنیادین نرخی، تانسور الاستیسیته فضائی، نرخ تنش همگرد

Spatial Elasticity Tensor in Eulerian Rate Type Constitutive Equations

B. Abbasi Khazaei, Z. Abbasi

ABSTRACT

In finite deformation analysis, the use of constitutive equations in rate form is often required. In a spatial setting, elastic modulus tensor relates some objective rate of a spatial stress tensor to the rate of deformation. It is important to know that, the spatial elastic modulus tensors of a material in different constitutive equations differ and relation between them may be interest for some researchers. In this paper, a general explicit formulation between the spatial elastic modulus tensors of some constitutive equations expressed. This formulation is a function of left Cauchy-Green tensor and its eigenvectors.

KEYWORDS : Rate type constitutive equation, spatial elasticity tensor, Corotational stress rate

۱- مقدمه

در تحلیل تغییرشکل‌های بزرگ اجسام، به‌دلیل تغییر پیوسته موقعیت جسم، لازم است معادله بنیادین مستقل از ناظر و یا به-عبارتی عینی۹ باشد[۱]. معادله بنیادین می‌تواند نسبت به موقعیت تغییرشکل یافته و یا تغییرشکل نیافته به عنوان موقعیت مبنا بدست آید. اگر موقعیت تغییرشکل یافته به عنوان موقعیت مبنا برای استخراج معادله بنیادین انتخاب شود، استفاده از معادلات بنیادین اولری نرخی الزامی است[۱]. همه نرخ‌های تنش را می‌توان در دو دسته کلی نرخ‌های همگرد۱ مانند نرخ لگاریتمی۲[۶-۲]، زارمبا-یاومن۳[۸و۷]، گرین-نقدی۴[۹] و نرخ‌های غیر همگرد۵ مانند نرخ تروزدل۶[۱۰]، کاتر-ریولین۷[۱۱] و اولدروید۸[۱۲]دسته‌بندی نمود. در یک مدل همگرد بر عکس مدل غیر همگرد، نگاشت یک متغیر تانسوری از موقعیت تغییرشکل نیافته به موقعیت تغییرشکل یافته، طوری انجام می‌شود که سیستم مختصات فضا-زمان دچار اعوجاج نمی‌شود[۶].

تاریخ دریافت مقاله:۱۳۸۸/۹/۱۶

تاریخ اصلاحات مقاله: ۱۳۸۹/۱۰/۴

۱ * نویسنده مسئول و استادیار، گروه مهندسی مکانیک دانشکده فنی مهندسی دانشگاه رازی؛ تلفن محل کار ۰۸۳۱۸۲۵۴٦٤٦؛ biabk@yahoo.com

۲ کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس؛ abbasi_zahra@hotmail.com.

تانسور مرتبه چهار الاستیسیته در معادلات بنیادین اولری نرخی[10]، مقدار نرخ تغییرشکل را به نرخ تنش مرتبط می‌نماید. برای معادلات بنیادین مختلف تانسور الاستیسیته متفاوت است. یک موضوع مورد علاقه برای برخی از محققین، بدست آوردن رابطه بین تانسورهای الاستیسیته در معادلات مختلف است. تحقیقات انجام شده در این زمینه بسیار محدود بوده و نتایج آنها نیز تنها برای چند مدل خاص ارائه شده است. به‌عنوان مثال رابطه بین مدول‌های مماسی در معادلات بنیادین بر اساس نرخ های زارمبا-یاومن و نرخ تروزدل بطور صریح ارائه شده‌اند[۱۳و۱]. از این رابطه می‌توان برای خطی‌سازی نیروهای داخل گرهی، در روش المان محدود لاگرانژی بهنگام شده استفاده نمود. هم چنین با استفاده از این رابطه می‌توان از یک الگوریتم انتگرال‌گیری به‌جای الگوریتم‌های مختلف برای بهنگام نمودن تنش‌های اولری در برنامه المان محدود متکی بر معادلات هیپوالاستیسیته استفاده نمود[۱۳].

۲- روابط سینماتیکی

در این بخش روابط سینماتیکی که در ادامه مورد استفاده قرار خواهند گرفت، مرور می‌شوند:

۲-۱- گرادیان تغییرشکل، گرادیان سرعت، نرخ تغییرشکل

تغییر شکل موضعی یک ذره با بردار موقعیت $\mathrm{X} = \phi(\mathrm{x}, \mathbf{t})$ نسبت به یک سیستم مختصات مبنا به‌وسیله تانسور گرادیان تغییرشکل $\mathbf{F}$، بصورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad ; \det \mathbf{F} > 0 \tag{۱}$$

که $\mathbf{x}$ بردار موقعیت نسبت به مختصات تغییر شکل یافته و $\mathbf{X}$ بردار موقعیت نسبت به مختصات تغییر شکل نیافته است.

کمیت‌های گرادیان سرعت($\mathbf{L}$)، نرخ تغییر شکل($\mathbf{D}$)و بخش غیرمتقارن گرادیان سرعت($\mathbf{W}$) نیز بصورت روابط(۲) بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} &\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}, \\ &\mathbf{D} = \frac{\mathbf{L} + \mathbf{L}^T}{2}, \mathbf{W} = \frac{\mathbf{L} - \mathbf{L}^T}{2} \end{aligned} \tag{۲}$$

با استفاده از تجزیه قطبی گرادیان تغییرشکل داریم:

$$\mathbf{F} = \mathbf{RU} = \mathbf{VR} \tag{۳}$$

که $\mathbf{R}$ تانسور دوران و $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ به ترتیب تانسور کشیدگی راست و چپ هستند که از رابطه (٤) بدست می‌آیند:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{U}^2, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 \tag{٤}$$

$\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ به ترتیب تانسورهای کاوشی- گرین چپ و راست هستند.

اگر مقادیر ویژه تانسورهای $\mathbf{V}$ و $\mathbf{B}$ به ترتیب $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ و $\{\chi_1, ..., \chi_n\}$ باشند، و $1 \le n \le 3$ تعداد مقادیر ویژه غیر یکسان را مشخص کنند، آنگاه رابطه $\chi_\alpha = \lambda_\alpha^2 \quad (\alpha = 1, ..., n)$ برقرار خواهد بود.

مقادیر ویژه تانسور $\mathbf{B}$، بصورت رابطه (٥) بدست می‌آیند[٤]:

$$\begin{aligned} &\chi_\alpha = \frac{1}{3}(I + 2\sqrt{I^2 - 3II}\cos\frac{1}{3}(\varphi - 2\pi\alpha)) \\ &\varphi = \arccos\left(\frac{2I^3 - 9I.II + 27III}{2(I^2 - 3II)^{3/2}}\right); \\ &\alpha = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{٥}$$

در رابطه(٥) I، II و III نامتغیرهای اصلی تانسور $\mathbf{B}$ هستند که عبارتند از:

$$\begin{aligned} &I = tr\mathbf{B}; \\ &II = \frac{1}{2}((tr\mathbf{B})^2 - tr\mathbf{B}^2); \\ &III = \det\mathbf{B} = \frac{1}{6}(tr\mathbf{B})^3 - \frac{1}{2}(tr\mathbf{B})(tr\mathbf{B}^2) + \frac{1}{3}tr\mathbf{B}^3 \end{aligned} \tag{٦}$$

هرگاه $\{\mathbf{B}_1, ..., \mathbf{B}_n\}$ تصاویر ویژه[11] تانسور $\mathbf{B}$ با ویژگی‌های رابطه (۷) باشند:

$$\mathbf{B}_\alpha \cdot \mathbf{B}_\beta = \delta_{\alpha\beta}\mathbf{B}_\alpha \quad , \sum_{\alpha=1}^{n}\mathbf{B}_\alpha = \mathbf{I} \tag{۷}$$

تجزیه طیفی $\mathbf{B}$ بصورت رابطه (۸) خواهد بود[١٤]:

$$\mathbf{B} = \sum_{\alpha=1}^{n}\chi_\alpha\mathbf{B}_\alpha \quad , \mathbf{B}_\alpha = n_\alpha \otimes n_\alpha \tag{۸}$$

در روابط بالا $\delta_{\alpha\beta}$ دلتای کرونکر، n_α بردار ویژه تانسور $\mathbf{V}$ (یا $\mathbf{B}$) و $\mathbf{I}$ تانسور واحد از مرتبه دوم است. در رابطه (۷) عملگر جمع $\sum$ روی اندیس‌های تکراری انجام نمی‌شود. با استفاده از رابطه (۸)، رابطه سیلوستر بدست می‌آید:

$$\mathbf{B}_\alpha = \delta_{1n} + \prod_{\beta=1, \beta\neq\alpha}^{n}\frac{\mathbf{B} - \chi_\beta\mathbf{I}}{\chi_\alpha - \chi_\beta} \tag{۹}$$

۲-۲- اصل عینیت، نرخ‌های عینی تنش اولری و تانسور الاستیسیته فضایی

در چارچوب مکانیک کلاسیک، فرض براین است که دیدن و سنجش موقعیت و زمان نسبت به یک ناظر، در مختصات گالیله‌ای فضا-زمان انجام می‌شود. از آنجا که موقعیت ناظر دلخواه است، بنابراین یک تئوری فیزیکی همراه با حرکت و

تغییرشکل، می‌تواند نسبت به هر ناظری نظام‌مند شود. براساس اصل مستقل از ناظر بودن که ما در اینجا از آن با عنوان اصل عینیت[12] نام می‌بریم، یک تئوری فیزیکی نسبت به ناظرهای مختلف باید نتایج یکسانی را ارائه دهد. این موضوع بیانگر این حقیقت است که رفتار ماده مستقل از ناظر است.

دو ناظر با موقعیت های $(\ )^*$ و $(\ )$ را در مختصات گالیله ای فضا-زمان در نظر بگیرید. روابط نسبت به دو ناظر بصورت رابطه (۱۰) انتقال می‌یابند:

$$\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \bar{b}(t) \qquad (۱۰)$$

$\mathbf{x}(t)$ و $\mathbf{x}^*(t)$ بردارهای موقعیت یک ذره متحرک نسبت به دو ناظر با موقعیت های $(\ )^*$ و $(\ )$ در لحظه t هستند. $\mathbf{Q}(t)$ و $\bar{b}(t)$ نیز به ترتیب تانسور دوران و بردار انتقال (تابع زمان) هستند. واضح است که مختصات ناظر $(\ )^*$، همان مختصات ناظر اولیه است که با سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}^T(t)$ در حال چرخش است و به اندازه $\bar{b}(t)$ انتقال داده شده است. $\mathbf{Q}$ یک تانسور اورتوگونال[13] با ویژگی‌های زیر است:

$$\begin{aligned} &\frac{D}{Dt}(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}) = \dot{\mathbf{Q}}^T\,\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T\,\dot{\mathbf{Q}} = 0 \\ &\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I} \\ &\mathbf{G}^* = \mathbf{Q}\mathbf{G}\mathbf{Q}^T \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

همانطورکه می‌دانیم یک بردار $\mathbf{v}$ بوسیله رابطه $\mathbf{v}^* = \mathbf{Q}\mathbf{v}$ انتقال می‌یابد. از طرفی یک تانسور اولری مرتبه دوم $\mathbf{G}$، یک فضای برداری است که بردار $\mathbf{v}$ را به بردار دیگری مانند $\mathbf{u}$ بصورت $\mathbf{v} = \mathbf{G}\mathbf{u}$ مرتبط می‌نماید. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}^* = \mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{G}\mathbf{u} = \mathbf{Q}\mathbf{G}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{u} = \mathbf{G}^*\mathbf{u}^* \\ &\mathbf{G}^* = \mathbf{Q}\mathbf{G}\mathbf{Q}^T \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

تانسور مرتبه دوم اولری $\mathbf{G}$ بصورت $\mathbf{G}^* = \mathbf{Q}\mathbf{G}\mathbf{Q}^T$ انتقال می‌یابد. کمیت‌هایی که به این صورت انتقال می‌یابند کمیت‌های مستقل از ناظر یا "عینی" هستند. می‌توان نشان داد که برای یک کمیت لاگرانژی مانند تانسور مرتبه دوم تنش پیولا-کیرشهف دوم[14] که با $\mathbf{S}$ نشان داده می‌شود، رابطه انتقال بصورت $\mathbf{S}^* = \mathbf{S}$ خواهد بود.

بر اساس اصل عینیت هر متغیر اساسی در معادله بنیادین، باید عینی باشد. معادله بنیادین برای تغییر شکل‌های کوچک که بیانگر رابطه تنش-کرنش در محدوده الاستیک است، بصورت رابطه (۱۳) بیان می‌شود:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2\mu} - \frac{\upsilon}{1+\upsilon}\frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}}{2\mu}\mathbf{I} \qquad (۱۳)$$

رابطه بالا به قانون هوک مشهور است که در آن $\boldsymbol{\sigma}$ تنش کاوشی، $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ کرنش الاستیک، υ ضریب پواسون، μ مدول برشی و $\mathbf{I}$ تانسور واحد از مرتبه دوم است. با توجه به اینکه رفتار ماده مستقل از ناظر است، بنابراین کمیت‌های $\boldsymbol{\sigma}$ و $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ در رابطه (۱۳) باید عینی باشند. می‌توان نشان داد که این کمیت‌ها عینی هستند. اما باید توجه داشت که این رابطه تنها برای تغییر شکل‌های کوچک برقرار است، زمانیکه مختصات تغییر شکل نیافته و تغییر شکل یافته بر هم منطبقند. اگر رابطه (۱۳) را برای تغییر شکل‌های بزرگ تعمیم دهیم، لازم است رابطه بصورت نرخی بیان شود. با مشتق‌گیری از رابطه (۱۳) نسبت به زمان از دید ناظر در موقعیت تغییرشکل نیافته، شکل نرخی آن بصورت رابطه(۱٤) خواهد بود:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \frac{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}{2\mu} - \frac{\upsilon}{1+\upsilon}\frac{tr\,\dot{\boldsymbol{\sigma}}}{2\mu}\mathbf{I} \qquad (۱٤)$$

علامت $\dot{(\ )}$ نشان دهنده مشتق زمانی نسبت به موقعیت تغییرشکل نیافته است. با توجه به آنچه که درباره اصل عینیت گفته شد، مانند رابطه (۱۳) لازم است معادله نرخی (۱٤) نیز عینی باشد. به عبارت دیگر هرگاه دو ناظر مختلف در موقعیت‌های تغییرشکل نیافته و تغییرشکل یافته کمیت نرخ تغییر شکل[15] را سنجش نمایند، هر دو ناظر باید نتایج یکسانی را ببینند. بدیهی است اگر مقدار تغییرشکل (دوران و انتقال) در محدوده تغییرشکل‌های کوچک باشد، می‌توان فرض نمود که موقعیت‌های اولیه و جاری بر هم منطبق بوده و اصل عینیت برقرار است. اما نتیجه این موضوع برای تغییرشکل‌های بزرگ بصورت دیگری است. به عبارت دیگر رابطه (۱٤) نسبت به دو ناظر مختلف نتایج یکسانی را ارائه نمی‌دهد و اصل عینیت برقرار نیست. زیرا کمیت‌های $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ و $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ عینی نبوده و از قانون انتقال در معادله (۱۲) پیروی نکرده و باید با کمیت‌های عینی جایگزین شوند. مقدار $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ را می‌توان با کمیت نرخ تغییر شکل $\mathbf{D}$ که یک کمیت عینی است جایگزین نمود. اما در مورد تانسور اولری $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$، می‌توان نشان داد که اگرچه $\boldsymbol{\sigma}$ عینی است، اما مشتق زمانی آن یعنی $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$، نسبت به ناظر واقع در مختصات تغییرشکل نیافته عینی نیست. بنابراین نمو تنش یعنی $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathrm{dt}$ عینی نیست و کمیت $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ بعنوان نمو $\boldsymbol{\sigma}$ در معادله بنیادین نرخی، ممکن است مناسب نباشد. به عبارت دیگر این سئوال مطرح خواهد شد که آیا $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ واقعا نرخ تغییرات تنسور تنش کاووشی $\boldsymbol{\sigma}$ را نسبت به هر مرجعی ارائه می‌دهد؟ [٦].

راه‌حل پیامد گفته‌شده، ابتدا بوسیله زارمبا [۷] و سپس یاومن [۸] ارائه شده است که به نرخ زارمبا-یاومن معروف

است. که عبارت است از:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{ZJ}=\dot{\boldsymbol{\sigma}}+\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}-\mathbf{W}\boldsymbol{\sigma} \quad (15)$$

$\overset{\circ}{(\ )}$ نشان‌دهنده مشتق زمانی نسبت به مختصات تغییرشکل یافته $(\ )^*$ است. در اینجا کمیت $\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{ZJ}$ عینی بوده و بیانگر نرخ تغییرات $\boldsymbol{\sigma}$ نسبت به مختصات تغییر شکل‌یافته است. شکل نرخی رابطه (۱٤) می‌تواند بصورت رابطه (۱٦) اصلاح گردد:

$$\mathbf{D}^{e}=\frac{\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{ZJ}}{2\mu}-\frac{\upsilon}{1+\upsilon}\frac{tr(\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{ZJ})}{2\mu}\mathbf{I} \quad (16)$$

پس از نرخ زارمبا-یاومن، نرخ‌های دیگری از قبیل اولدروید بالایی و پایینی[۱۲]، تروزدل[۱۰]، کاتر- ریولین[۱۱]، گرین-نقدی [۹] و نرخ‌هایی بر پایه اسپین بدست آمده از دوران سه تائی اولری و لاگرانژی[۱۵] و نرخ لگاریتمی [٦-۲]، ارائه شده اند. رابطه‌ای عمومی که بیانگر همه نرخ‌های عینی باشد، بصورت رابطه (۱۷) ارائه شده است[۹]:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{*}=\dot{\boldsymbol{\sigma}}+\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\Omega}^{*}-\boldsymbol{\Omega}^{*}\boldsymbol{\sigma} \quad (17)$$

با استفاده ازرابطه $\boldsymbol{\tau}=J\cdot\boldsymbol{\sigma}$ می‌توان نوشت:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{*}=\dot{\boldsymbol{\tau}}+\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\Omega}^{*}-\boldsymbol{\Omega}^{*}\boldsymbol{\tau} \quad (18)$$

که $\boldsymbol{\tau}$ تنش کیرشهف و J دترمینان گرادیان تغییر شکل $\mathbf{F}$ است. $\boldsymbol{\Omega}^*$ نیز یک تانسور اسپین اولری تابع زمان است و به-عبارت دیگر یک تانسور پادمتقارن تابع زمان است که می‌توانند بصورت $\boldsymbol{\Omega}^*=\boldsymbol{\Omega}^*(\mathbf{F},\mathbf{L})$ تعریف شود. دو دسته نرخ عینی با عناوین نرخ‌های همگرد و نرخ‌های غیرهمگرد بر اساس اینکه $\boldsymbol{\Omega}^*$ پادمتقارن[16] ($\boldsymbol{\Omega}^{*T}=-\boldsymbol{\Omega}^*$) و یا غیرپاد متقارن[17] ($\boldsymbol{\Omega}^{*T}\neq-\boldsymbol{\Omega}^*$) باشد، وجود دارد. بعنوان مثال، نرخ‌های اولدروید بالایی و پایینی و نرخ تروزدل به ازاء $\boldsymbol{\Omega}^*$، معادل $\mathbf{L}$، $-\mathbf{L}$ و $-\mathbf{L}+\frac{1}{2}tr\mathbf{L}$ بعنوان نرخ‌های غیرهمگرد و نرخ زارمبا-یاومن و گرین-نقدی به ازاء $\boldsymbol{\Omega}^*$ معادل $\mathbf{W}$ و $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$ به‌عنوان نرخ همگرد شناخته شده‌اند.

برای نرخ‌های همگرد رابطه (۱۹) برقرار است:

$$\boldsymbol{\Omega}^{*}=\dot{\boldsymbol{\Omega}}^{T}\mathbf{Q} \quad (19)$$

می‌توان نشان داد که همه شکل‌های تابع تانسوری $\boldsymbol{\Omega}^*=\boldsymbol{\Omega}^*(\mathbf{F},\mathbf{L})$ ، بی‌نهایت تعریف از نرخ‌های عینی را ارائه می‌دهند. با وجود این، اینها فقط بخش کوچکی نسبت به تمام تعاریف ممکن هستند. واضح است که بی‌نهایت نرخ همگرد مختلف را می‌توان یافت که بطور حتم همه آنها عینی نیستند. عینی بودن یک نرخ همگرد، به تانسور اسپین $\boldsymbol{\Omega}^*$ بستگی دارد [٤و٥]. برخی نرخ‌های عینی مشهور در جدول (۱) آورده شده‌اند. جائیکه $C^{\sigma\log},C^{\sigma ZJ},C^{\tau ZJ},C^{\sigma GN}$, ... تانسور الاستیسیته فضایی در معادلات مختلف را نشان می دهد. گفتنی است برای یک ماده یکسان، تانسورهای الاستیسیته گفته شده یکسان نیستند و درصورتیکه یکسان فرض شوند، رفتار ماده با هر یک از نرخ‌های بکار رفته یکسان نخواهد بود. در حالی‌که استفاده از نرخ‌های متفاوت، فقط به دلیل وجود ناظرهای مختلف نسبت به یک پدیده فیزیکی یکسان بوده و نباید جواب‌های متفاوتی را ارائه دهند. به‌عنوان مثال برای این‌که نرخ زارمبا-یاومن از تنش کاوشی $\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{ZJ}$ و تنش کیرشهف $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{ZJ}$ پاسخ‌های یکسانی را ارائه دهند، لازم است رابطه(۲۰) بین تانسورهای الاستیسیته مربوطه یعنی $C^{\sigma ZJ}_{ijkl}$ و $C^{\tau ZJ}_{ijkl}$ برقرار باشد [۱]:

$$C^{\tau ZJ}_{ijkl}=J(C^{ZJ}_{ijkl}+\sigma_{ij}\delta_{kl}) \quad (20)$$

با همین استدلال رابطه بین کمیت‌های $C^{\sigma Tr}_{ijkl}$، $C^{\tau ZJ}_{ijkl}$ و $C^{\tau ZJ}_{ijkl}$ عبارت است از [۱]:

:]

$$C^{\sigma Tr}_{ijkl}=J^{-1}C^{\tau ZJ}_{ijkl}-\sigma_{ik}\delta_{jl}-\sigma_{jl}\delta_{ik} \quad (21)$$

$$C^{\sigma Tr}_{ijkl}=J^{-1}C^{\sigma ZJ}_{ijkl}-\sigma_{ik}\delta_{jl}-\sigma_{jl}\delta_{ik}+\sigma_{ij}\delta_{kl} \quad (22)$$

در روابط بالا δ_{ij} دلتای کرونکر است. نکته با اهمیت آن است که فقط برای برخی از مدل‌ها، رابطه بین تانسور الاستیسیته آنها در دسترس است. اینک این سوال مطرح است که رابطه بین تانسور الاستیسیته تا چه اندازه اهمیت دارد؟ در پاسخ به این سوال باید گفت که با در دست داشتن رابطه بین تانسور الاستیسیته، نه تنها امکان تبدیل معادلات بنیادین نرخی به یکدیگر وجود دارد بلکه برخی قابلیت‌های دیگر، مانند تعیین ماتریس سختی در برنامه المان محدود و یا استفاده از یک الگوریتم انتگرال‌گیری از تنش برای هر معادله بنیادین اولری نرخی، فراهم می‌شود. با توجه به اهمیت رابطه بین تانسورهای الاستیسیته در ادامه به دو موضوع اخیر بطور مختصر پرداخته‌شده است.

۳- تعیین ماتریس سختی در برنامه المان محدود

در برنامه المان محدود لاگرانژی بهنگام شده نرخی، رابطه تغییرات زمانی نیروهای داخلی $\dot{f}^{int}_{iI}$ و نرخ تغییر مکان $\dot{u}$، به‌وسیله بخش مادی و هندسی ماتریس سختی یعنی K^{mat} و K^{geo} بصورت رابطه (۲۳) بیان می‌شود:

$$\dot{f}^{int}_{iI}=(K^{mat}+K^{geo})\dot{u} \quad (23)$$

ماتریس‌های سختی مادی[18] و سختی هندسی[19] برای روش لاگرانژی بهنگام شده از روابط (۲٤) و (۲۵) بدست می‌آیند [۱۳]:

$$\mathrm{K}_{rsIJ}^{mat} = \int_{\hat{\mathrm{V}}} J^{-1} N_{I,k}\, \delta_{ri}\, \mathbf{C}_{kijl}^{\tau\mathrm{Tr}} N_{J,l}\, \delta_{sj}\, \mathrm{d}\hat{\mathrm{V}} \qquad (۲٤)$$

$$\mathrm{K}_{rsIJ}^{geo} = \int_{\hat{\mathrm{V}}} J^{-1} N_{I,j}^{T}\, \tau_{jk}\, N_{J,k}\, \delta_{rs}\, \mathrm{d}\hat{\mathrm{V}} \qquad (۲۵)$$

در رابطه (۲٤)، $\mathbf{C}_{kijl}^{\tau tr}$، N، $\hat{\mathrm{V}}$ و δ به ترتیب تانسور الاستیسیته نرخ تروزدل تنش کیرشهف، تابع شکل، حجم ناحیه انتگرالگیری و دلتای کرونکر هستند. همان طور که دیده می‌شود، برای محاسبه مقدار انتگرال و بدست آوردن ماتریس سختی مادی لازم است رابطه تانسور الاستیسیته نرخ مورد استفاده، برحسب تانسور الاستیسیته نرخ تروزدل مشخص باشد. اگرچه با استفاده از برخی روش‌های عددی این کمیت را می‌توان بطور نموی محاسبه نمود اما توجه شود که استفاده از روابط دقیق و صریح ریاضی نه تنها ما را در فهم و تحلیل نتایج بدست آمده از حل معادلات کمک می‌نماید، بلکه ممکن است نتایج دقیق‌تری را نیز ارائه دهد.

٤- انتگرال‌گیری از تنش

مرحله انتگرال‌گیری از تنش‌ها در روش‌های المان محدود نرخی بسیار مهم است. معلوم بودن رابطه بین تانسور الاستیسیته نرخ مورد استفاده و نرخ تروزدل در انتگرال‌گیری تنش‌های اولری در برنامه المان محدود بهنگام شده نرخی، امکان استفاده از یک الگوریتم را برای همه نرخ‌های مورد نظر فراهم می‌نماید. به عنوان مثال، یک رابطه عمومی برای بهنگام کردن تنش‌ها بصورت رابطه (۲٦) ارائه شده است[۱۷و۱٦] :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{t+\Delta t} &= \mathbf{F}_{t+\Delta t}\boldsymbol{\tau}_{t}\mathbf{F}_{t+\Delta t}^{T} \\ &+ \left[\mathbf{F}_{t+\Delta t}\mathbf{F}_{t+\frac{\Delta t}{2}}^{-1} \left(\mathbf{C}_{t+\frac{\Delta t}{2}}^{Tr} : \mathbf{D}_{t+\frac{\Delta t}{2}}\right) \mathbf{F}_{t+\frac{\Delta t}{2}}^{-T} \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{T} \right] \Delta t \end{aligned} \qquad (۲٦)$$

Δt اختلاف بین دو توقف زمانی پیاپی t_1 و t_2 و $\mathbf{C}^{\mathrm{Tr}}$ تانسور الاستیسیته نرخ تروزدل است. با استفاده از این رابطه، با داشتن تنش‌ها و سایر کمیت‌ها در لحظه قبلی، مقدار تنش در لحظه جاری را می‌توان محاسبه نمود. با توجه به اینکه رابطه فوق عمومی است، چنانچه برنامه بر اساس سایر معادلات نرخی پیاده‌سازی شود، لازم است در معادله فوق کمیت $\mathbf{C}^{\mathrm{Tr}}$، با عبارت معادل آن برحسب نرخ تنش مورد استفاده جایگزین شود. بنابراین با داشتن رابطه تانسور الاستیسیته نرخ تروزدل یا نظیر آن در سایر نرخ‌ها، می‌توان از یک الگوریتم انتگرال‌گیری برای همه نرخ‌ها استفاده نمود.

۵- رابطه بین تانسورهای الاستیسیته

رابطه بین تنش کیرشهف $\boldsymbol{\tau}$ و تنش پیولای دوم $\mathbf{S}$ عبارت است از:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{F}^{T} \qquad (۲۷)$$

با توجه به اینکه مشتقات زمانی، نسبت به مختصات مادی تنش کیرشهف و یا تنش کاوشی عینی نیستند، از مشتقات آنها نسبت به یک مختصات فضایی استفاده می‌شود. رابطه نرخ تروزدل و نرخ مادی تنش کیرشهف بصورت روابط (۲۸) و (۲۹) بیان می‌شوند:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{Tr}} = \mathrm{C}^{\sigma ZJ} : \mathbf{D} - \mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{D} + trace(\mathbf{D})\boldsymbol{\sigma} \qquad (۲۸)$$

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{Tr}} = (\mathrm{C}^{\sigma ZJ} - \mathrm{C}' + \boldsymbol{\sigma}\otimes\mathbf{I}) : \mathbf{D} = \mathrm{C}^{\sigma\,\mathrm{Tr}} : \mathbf{D} \qquad (۲۹)$$

بنابراین رابطه بین نرخ تروزدل و نرخ یاومن، بصورت رابطه (۳۰) خواهد بود:

$$\mathrm{C}^{\sigma\,\mathrm{Tr}} = \mathrm{C}^{\sigma ZJ} - \mathrm{C}' + \boldsymbol{\sigma}\otimes\mathbf{I} = \mathrm{C}^{\sigma ZJ} - \mathrm{C}^{*} \qquad (۳۰)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\mathrm{C}' : \mathbf{D} = \mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{D} \qquad (۳۱)$$

$$\mathrm{C}^{*} = \mathrm{C}' - \boldsymbol{\sigma}\otimes\mathbf{I} \qquad (۳۲)$$

$$\mathrm{C}^{*}_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\sigma_{jl} + \delta_{il}\sigma_{jk} + \delta_{jk}\sigma_{il} + \delta_{jl}\sigma_{ik}) - \delta_{kl}\sigma_{kl} \qquad (۳۳)$$

با توجه به اینکه $\boldsymbol{\sigma}\otimes\mathbf{I} \neq \mathbf{I}\otimes\boldsymbol{\sigma}$، بنابراین اگرچه C' دارای تقارن کلی[۲۰] است اما C^{*} این تقارن را ندارد.

همان‌طورکه نشان داده‌شد، یک رابطه ویژه بین تانسور الاستیسیته در نرخ‌های تروزدل و یاومن بدست آمد. در ادامه سعی می‌شود که یک رابطه عمومی برای نرخ‌های همگرد ارائه شود.

با مشتق گیری از رابطه (۲۷)، رابطه (۳٤) بدست می‌آید:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \mathbf{F}\cdot\mathbf{S}\cdot\dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}} \qquad (۳٤)$$

با استفاده از رابطه $\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L}\cdot\mathbf{F}$ می‌توان نوشت:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\tau} + \mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{L}^{\mathrm{T}} \qquad (۳۵)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}} &= \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{L}^{\mathrm{T}} \\ &= \mathrm{J}(\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{L}^{\mathrm{T}} + \mathrm{trace}(\mathbf{L})\boldsymbol{\sigma}) \\ &= \mathrm{J}\ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{Tr}} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{C}} \end{aligned} \qquad (۳٦)$$

در رابطه بالا $\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{C}}$، نرخ انتقال یافته[۲۱] و یا به‌عبارتی مشتق لی[۲۲] تنش کیرشهف است که بصورت رابطه(۳۷) تعریف می‌شود:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{C}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{L}^{T} = \mathbf{C}^{\tau\,\mathrm{Tr}} : \mathbf{D} \qquad (۳۷)$$

$$\overset{\square}{\mathbf{S}} = \mathbf{F}^{-1} \ \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{C}} \mathbf{F}^{-\mathrm{T}}$$
$$\overset{\square}{\mathbf{S}} = \mathbf{F}^{-1}(\overset{\square}{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{L}^{\mathrm{T}})\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \qquad (۳۸)$$

رابطه بین تانسورهای الاستیسیته در نرخ تروزدل تنش کیرشهف $\mathbf{C}^{\tau\mathrm{Tr}}$ و نرخ تروزدل تنش کاوشی $\mathbf{C}^{\sigma\mathrm{Tr}}$ عبارت‌اند از:

$$\mathbf{C}^{\sigma\mathrm{Tr}} = J^{-1}\mathbf{C}^{\tau\mathrm{Tr}} \qquad (۳۹)$$

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{Tr}} = J^{-1} \ \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{C}} \qquad (۴۰)$$

حال لازم است رابطه (۴۰) برای خانواده عمومی نرخ‌های همگرد تعمیم داده شود. بعبارت دیگر باید رابطه بین $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{C}}$ و $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}$ را برای همه نرخ‌های همگرد، پیدا کنیم. برای خانواده عمومی نرخ‌های همگرد، رابطه زیر وجود دارد:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} = \overset{\square}{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}:\mathbf{D} \qquad (۴۱)$$

که $\boldsymbol{\Omega}$ تانسور چرخش و $\mathbf{C}$ تانسور الاستیسیته فضایی برای خانواده عمومی نرخ‌های تنش است.

خانواده عمومی تانسور چرخش بصورت رابطه (۴۲) است:

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{W} + \mathbf{N} \qquad (۴۲)$$

که تانسور $\mathbf{N}$ بصورت رابطه (۴۳) معرفی می‌شود[۵و۶]:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{N} = 0 && if \quad \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 \\
&\mathbf{N} = v\,[\mathbf{BD}] && if \quad \chi_1 \neq \chi_2 = \chi_3 \\
&\mathbf{N} = v_1[\mathbf{BD} - \mathbf{DB}] + v_2[\mathbf{B}^2\mathbf{D}] + v_3[\mathbf{B}^2\mathbf{DB}] && \\
& && if \quad \chi_1 \neq \chi_2 = \chi_3 \neq \chi_1
\end{aligned} \qquad (۴۳)$$

در رابطه بالا $\left[\mathbf{B}^r\mathbf{D}^s\right] = \mathbf{B}^r\mathbf{D}\mathbf{B}^s - \mathbf{B}^s\mathbf{D}\mathbf{B}^r$، بطوریکه $r,s = 0,1,2$ و χ_i مقادیر ویژه تانسور $\mathbf{B}$ هستند جاییکه:

$$\begin{aligned}
v_k &= -\frac{(-1)^k}{\Delta}[\chi_1^{\,3-k}\,\varepsilon_{23} \\
&\quad + \chi_2^{\,3-k}\,\varepsilon_{31} + \chi_3^{\,3-k}\,\varepsilon_{12}] \\
\Delta &= (\chi_1 - \chi_2)(\chi_2 - \chi_3)(\chi_3 - \chi_1) \\
\varepsilon_{12} &= h(\frac{\chi_1}{\chi_2}), \varepsilon_{31} = h(\frac{\chi_3}{\chi_1}), \varepsilon_{23} = h(\frac{\chi_2}{\chi_3})
\end{aligned} \qquad (۴۴)$$

حال با قرار دادن معادله (۴۲) در رابطه (۴۱) می‌توان نوشت:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} = \overset{\square}{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}\cdot(\mathbf{W}+\mathbf{N}) - (\mathbf{W}+\mathbf{N})\cdot\boldsymbol{\tau} \qquad (۴۵)$$

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} = \ \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{ZJ}} + \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N} - \mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\tau} \qquad (۴۶)$$

از طرف دیگر با استفاده از رابطه $\mathbf{L} = \mathbf{W} + \mathbf{D}$، معادله (۳۷) بصورت رابطه (۴۷) بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{C}} &= \dot{\boldsymbol{\tau}} - (\mathbf{W}+\mathbf{D})\cdot\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\cdot(\mathbf{W}+\mathbf{D})^T \\
&= \ \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{ZJ}} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{D} - \mathbf{D}\boldsymbol{\tau}
\end{aligned} \qquad (۴۷)$$

اکنون با بدست آوردن مقدار $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{ZJ}}$ از (۴۶) و قرار دادن آن در (۴۷)، رابطه نرخ انتقال یافته تنش کیرشهف بصورت (۴۸) بدست می‌آید:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{C}} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N} + \mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{D} - \mathbf{D}\boldsymbol{\tau} \qquad (۴۸)$$

برای رسیدن به یک شکل استاندارد از ماتریس سختی مماسی، لازم است تمام اجزا سمت راست رابطه (۴۸) بصورت تابعی از نرخ تغییر شکل $\mathbf{D}$ تبدیل نمود. در نتیجه با استفاده از رابطه (۴۲)، یک تانسور مرتبه چهار $\mathbf{M}_{ijkl}$ به‌گونه ای تعریف می‌شود که تانسور مرتبه دوم نرخ تغییرشکل را به تانسور مرتبه دوم $\mathbf{N}$ انتقال دهد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\mathrm{N}_{ij} = \mathbf{M}_{ijkl}\,\mathrm{D}_{\mathrm{kl}} \qquad (۴۹)$$

مولفه‌های تانسور $\mathbf{M}_{ijkl}$ عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{ijkl} &= \upsilon_3'(\mathrm{B}_{\mathrm{ik}}^2\mathrm{B}_{\mathrm{jl}} - \mathrm{B}_{\mathrm{ik}}\mathrm{B}_{\mathrm{jl}}^2) + \upsilon_2'(\mathrm{B}_{\mathrm{ik}}^2\delta_{\mathrm{jl}} - \delta_{\mathrm{ik}}\mathrm{B}_{\mathrm{jl}}^2) \\
&\quad + \upsilon_1'(\mathrm{B}_{\mathrm{ik}}\delta_{\mathrm{jl}} - \delta_{\mathrm{ik}}\mathrm{B}_{\mathrm{jl}})
\end{aligned} \qquad (۵۰)$$

رابطه (۴۸) را بصورت زیر بازنویسی می‌نماییم:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{C}} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau}\cdot(\mathbf{M}:\mathbf{D}) + (\mathbf{M}:\mathbf{D})\cdot\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{D} - \mathbf{D}\boldsymbol{\tau} \qquad (۵۱)$$

از طرف دیگر تانسور مرتبه چهار $\mathbf{L}$ طوری تعریف می‌شود که:

$$\mathbf{L}:\mathbf{D} = -\boldsymbol{\tau}\cdot(\mathbf{M}:\mathbf{D}) + (\mathbf{M}:\mathbf{D})\cdot\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{D} - \mathbf{D}\boldsymbol{\tau} \qquad (۵۲)$$

با استفاده از برخی عملیات تانسوری مولفه‌های تانسور $\mathbf{L}$ بدست می‌آیند:

$$\mathbf{L}_{ijkl} = \mathbf{M}_{\mathrm{irkl}}\tau_{rj} - \mathbf{M}_{\mathrm{rjkl}}\tau_{ri} - \delta_{ik}\boldsymbol{\tau}_{jl} - \delta_{jl}\boldsymbol{\tau}_{ik} \qquad (۵۳)$$

حال با استفاده از رابطه $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{C}:\mathbf{D}$ و رابطه (۵۲)، رابطه (۵۱) بصورت رابطه (۵۴) بدست می‌آید:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{C}} = \mathbf{C}:\mathbf{D} + \mathbf{L}:\mathbf{D} = (\mathbf{C}+\mathbf{L}):\mathbf{D} \qquad (۵۴)$$

با مقایسه روابط (۳۷) و (۵۴)، رابطه بین تانسورهای الاستیسیته در نرخ تروزدل و خانواده عمومی نرخ‌ها، بصورت رابطه (۵۵) بدست می‌آید:

$$\mathbf{C}^{\tau\mathrm{Tr}} = \mathbf{C} + \mathbf{L}\ , \ \ \mathbf{C}_{kijl}^{\tau\mathrm{Tr}} = \mathbf{C}_{kijl} + \mathbf{L}_{kijl} \qquad (۵۵)$$

که $\mathbf{C}_{kijl}^{\tau\mathrm{Tr}}$ تانسور الاستیسیته برای نرخ تروزدل تنش کیرشهف و $\mathbf{C}$ تانسور الاستیسیته برای نرخ موردنظر و دلخواه از خانواده عمومی نرخ‌های تنش است. با استفاده از این رابطه

برای یک نرخ تنش موردنظر برای تعیین ماتریس سختی کافی است مقادیر $\mathbf{C}_{kijl}$ و $\mathbf{L}_{kijl}$ نرخ تنش مورد نظر محاسبه و کمیت $\mathbf{C}_{kijl}+\mathbf{L}_{kijl}$ جایگزین $\mathbf{C}^{\tau Tr}_{kijl}$ در رابطه (۲٤) شود. در این شرایط فقط با استفاده از یک الگوریتم بهنگام کردن تنش و تغییر مقادیر $\mathbf{C}_{kijl}$ و $\mathbf{L}_{kijl}$ برای هر معادله بنیادین نرخی اولری می‌توان ماتریس سختی در روش المان محدود را تعیین نمود.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک رابطه صریح بین تانسورهای الاستیسیته فضایی در معادلات بنیادین اولری نرخی با نرخ تروزدل و خانواده عمومی نرخهای همگرد، ارائه شده است. این رابطه تابعی از تانسور گرین-کاوشی چپ $\mathbf{B}$ و بردارهای ویژه آن است. این رابطه، امکان خطی‌سازی نیروهای داخل گرهی، در روش المان محدود لاگرانژی بهنگام شده را برای برخی معادلات نرخی اولری فراهم می‌نماید. با استفاده از آن می‌توان از یک الگوریتم برای انتگرال‌گیری از تنش‌های اولری در برنامه المان محدود برای همه نرخ‌های همگرد استفاده نمود.

۷- تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از معاونت محترم پژوهشی دانشگاه رازی، به‌دلیل حمایت از این تحقیق تشکر می‌نمایند.

۸- ضمائم

جدول (۱): برخی معادلات هیپوالاستیسیته

نرخ لگاریتمی (Logarithmic rate)	$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{\log}=\mathrm{C}^{\sigma\log}:\mathbf{D}$
نرخ زارمبا-یاومن از تنش کاوشی (Zaremba-Jaumann rate)	$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{ZJ}=\mathrm{C}^{\sigma ZJ}:\mathbf{D}$
نرخ زارمبا-یاومن از تنش کیرشهف (Zaremba-Jaumann rate)	$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{ZJ}=\mathrm{C}^{\tau ZJ}:\mathbf{D}$
نرخ گرین-نقدی (Green-Naghdi rate)	$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{GN}=\mathrm{C}^{\sigma GN}:\mathbf{D}$
نرخ بر پایه چرخش محور لاگرانژی (Lagrangian triad based rate)	$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{L}=\mathrm{C}^{\sigma L}:\mathbf{D}$
نرخ بر پایه چرخش محور اولری (Eulerian triad based rate)	$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{E}=\mathrm{C}^{\sigma E}:\mathbf{D}$
نرخ تروزدل (Truesdell rate)	$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{Tr}=\mathrm{C}^{\sigma Tr}:\mathbf{D}$
نرخ کاتر-ریولین (Cotter-Rivlin rate)	$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{CR}=\mathrm{C}^{\sigma CR}:\mathbf{D}$
نرخ اولدروید بالایی (Upper Oldroyd rate)	$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{UO}=\mathrm{C}^{\sigma UO}:\mathbf{D}$
نرخ اولدروید پایینی (Lower Oldroyd rate)	$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{LO}=\mathrm{C}^{\sigma LO}:\mathbf{D}$
نرخ انتقال یافته (Convected rate)	$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{C}=\mathrm{C}^{\sigma C}:\mathbf{D}$

۹- مراجع

[۱] Pinsky, P.M., Oritz, M., Pister, K.S.; "Numerical integration of rate constitutive equations in finite deformation analysis ", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, No. 40, PP. 137-158, 1983.

[۲] Xiao, H., Bruhns, O.T., Meyers, A.; "Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate ", Acta Mechanica, No. 124, PP. 89-105, 1997.

[۳] Xiao, H., Bruhns, O.T., Meyers, A.; "Hypo-elasticity model based upon the logarithmic stress rate ", Journal of Elasticity, No. 47, PP. 51-68, 1997.

[٤] Xiao, H., Bruhns, O.T., Meyers, A.; "Strain rates and material spins ", Journal of Elasticity, No. 52, PP.1-42, 1998.

[٥] Xiao, H., Bruhns, O.T., Meyers, A.; "On objective corotational rates and their defining spin tensors", International Journal of Solid and Structures, No. 35, PP. 4001-4014, 1995.

[٦] Xiao, H., Bruhns, O.T., Meyers, A.; "Elastoplasticity beyond small deformation: Basic variables,essential structures, and constitutive and computational implication ", Acta Mechanica, No. 182, PP. 31-111, 2006.

[۷] Zaremba, S.; "Sur une forme perfectionee de la theorie de la relaxation", Bull. Intern. Acad. Sci. Cracovie, PP. 594-614, 1903.

[۸] Jaumann, G.; "Geschlossenes System physikalischer differentialgesetze", Akad. Wiss. Wien Sitzber. IIa, No. 120, PP. 594-614, 1911.

[۹] Green, A. E., Naghdi, P. M. ; "Ageneral Theory of an elastic-plastic continuum", Arch. Rat. Mech. Anal. , No. 18, PP. 251-281, 1965.

[۱۰] Truesdell, C., Noll, W.; "The nonlinear field theories of mechanics ", Handbuch der Physik, volume III/3. Springer, Berlin, PP, 441-447, 1965.

[۱۱] Cotter, B.A., Rivlin, R.S.; "Tensors associated with time-dependent stress ", Quart. Appl. Math., No. 13, PP. 177-182, 1955.

[۱۲] Oldroyd, J. G.; "On the formulation of rheological equation of state ", Proc. Roy. Soc. London Ser. A, No. 200, PP. 523-541, 1950.

[۱۳] Belytschko, T., Liu, W.K., Moran, B.; "Nonlinear finite elements for continua and structures ", New York: John Wiley & Sons; 2001.

[۱٤] Xiao, H. ; "Unified explicit basis-free expressions for time rate and conjugate stress of an arbitrary Hill's strain ", International Journal of Solid and Structures, No. 32, PP. 3327-3347, 1995.

[۱٥] Szabo, L., Balla, M.; "Comparison of some stress rates ", International Journal of Solid and Structures, No. 25, PP. 279-297, 1989.

[١٦] Abbasi, B., Parsa, M.H.; “Finite element study of the energy dissipation and residual stresses in the closed elastic deformation path”, International Journals for Numerical Methods in Engineering, No PP, 2006.

[١٧] بیژن عباسی خزائی، محمد حبیبی پارسا، " مدلهای هیپوالاستیسیته و انتگرال پذیری آنها"، نشریه علمی پژوهشی دانشکده فنی دانشگاه تهران، سال چهل و یکم شماره۸ (پیاپی ۱۱۰) صفحه۱۰۱۱، ١٣٨٦

۱۰- زیرنویس‌ها

۱ Corotational rate
۲ Logarithmic rate
۳ Zaremba-Jaumann rate
۴ Green-Naghdi rate
۵ Non-corotational rate
۶ Green-Naghdi rate
۷ Green-Naghdi rate
۸ Green-Naghdi rate
۹ Objective
۱۰ Rate type constitutive equations
۱۱ Eigen projection
۱۲ Objectivity
۱۳ Orthogonal Tensor
۱۴ Second Piola-Kirchhof Stress Tensor
۱۵ Rate of deformation
۱۶ Symmetric
۱۷ Skew-Symmetric
۱۸ Material stiffness
۱۹ Geometrical stiffness
۲۰ Major Symmetry
۲۱ Convected rate
۲۲ Lie Deviator