



## تعیین ضرایب شدت تنش حرارتی پایدار در استوانه‌های حاوی ترک نیم‌بیضی محیطی

سید مهدی نبوی\*، امین زارعی

مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۶ مهر ۱۳۹۴  
بازنگری: ۲۰ اردیبهشت ۱۳۹۵  
پذیرش: ۲۷ تیر ۱۳۹۵  
ارائه آنلاین: ۲۲ مرداد ۱۳۹۵

### کلمات کلیدی:

ترک نیم‌بیضی محیطی  
روش تابع وزن  
ضریب شدت تنش  
استوانه

**چکیده:** در این مقاله حل بسته ضرایب شدت تنش در نقطه عمقی ترک نیم‌بیضی محیطی واقع در سطح داخلی استوانه بدست آمده است. استوانه تحت فشار (داخلی و خارجی) و انتقال حرارت از نوع جابه‌جایی اجباری با سیال است. جهت تحلیل، ابتدا تابع وزن نقطه عمقی برای ترک نیم‌بیضی محیطی با استفاده از دو بار مرجع ارائه شده است. سپس مسأله حرارتی در حالت پایدار مورد بررسی قرار گرفته و ضرایب شدت تنش با استفاده از روش تابع وزن محاسبه شده است. اعتبارسنجی مدل ارائه شده در حالت خاص بارگذاری با نتایج سایر مقالات مقایسه شده که بیانگر دقت خوبی است. در ادامه اثرات نسبت منظر، عمق نسبی و نوع انتقال حرارت جابه‌جایی روی ضرایب شدت تنش مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که ترک‌های کم‌عمق در برخی حالات بارگذاری و اشکال ترک نسبت به ترک‌های عمیق‌تر بحرانی‌تر هستند و حل حالت اعمال دما در سطح داخلی استوانه نسبت به حالت جابه‌جایی اجباری محافظه‌کارانه‌تر است.

### ۱- مقدمه

ضرایب شدت تنش به عنوان پارامتری جهت توصیف رفتار ترک‌ها می‌باشند که تعیین آنها برای پیش‌بینی چگونگی رشد ترک در بارگذاری‌های خستگی یا خوردگی و واماندگی ناگهانی سازه ضروری است. ضرایب شدت تنش موجود در هندبوک‌ها [۲،۱] عمدتاً برای بارگذاری‌های خاص ارائه شده است که کاربردهای صنعتی آن را محدود می‌نماید؛ از این رو روش‌های عددی همچون روش اجزا محدود [۳] در مسائل صنعتی در کنار آنها استفاده می‌گردد؛ اما این روش‌ها در مواردی که نیاز به تکرار تحلیل باشد، وقت‌گیر می‌باشند.

از جمله رایج‌ترین ترک‌هایی که در حین عملکرد لوله‌ها و مخازن تحت فشار تحت انواع بارگذاری به وجود می‌آیند، ترک‌های سطحی هستند. این ترک‌ها عموماً به عنوان عیوب ذاتی سازه از ابتدا در نظر گرفته می‌شوند و تحت بارگذاری خستگی به شکل نیم‌بیضی [۴] به وجود می‌آیند و شروع به رشد می‌کنند. یکی از انواع ترک‌های سطحی که امروزه مورد توجه محققین قرار گرفته است، ترک نیم‌بیضی محیطی است که اکثراً در مقاطع دارای جوش در راستای محیطی استوانه به وجود می‌آید. پوئت و آلبادجو [۵] با استفاده از روش رشد مجازی ترک، ضرایب شدت تنش در نقاط عمقی و سطحی ترک نیم‌بیضی محیطی واقع در سطح داخلی استوانه را تعیین

نمودند. برگمن [۶] با استفاده از مدل‌سازی اجزا محدود سه‌بعدی در نرم‌افزار آباکوس ضرایب شدت تنش روی جبهه ترک نیم‌بیضی محیطی داخلی و خارجی را به روش انتگرال جی محاسبه نمود. نتایج تحلیل ضریب شدت تنش ترک‌های سطحی داخلی محیطی توسط برگمن و بریکستاد [۷] نشان داد که المان‌های خطی فنی در حالت ترک‌های عمیق نتایج نسبتاً دقیقی از ضریب شدت تنش ارائه می‌کنند. والبرینک و همکارانش [۸] با ترکیب تبدیل همدیس و روش اجزا محدود به تحلیل ترک نیم‌بیضی محیطی در استوانه پرداختند. پرل و برنشتین [۹،۱۰] با استفاده از روش اجزا محدود سه‌بعدی در نرم‌افزار انسیس، ضرایب شدت تنش در ترک نیم‌بیضی واقع در سطح داخلی کره را تعیین نمودند. اثر ابعاد کره و تعداد ترک نیز بررسی شده است. مینگ و همکارانش [۱۱] با استفاده از روش تجربی فتوالاستیسیته و روش کاستیک معادله‌ای تجربی جهت محاسبه ضرایب شدت تنش در امتداد جبهه ترک نیم‌بیضی محیطی داخلی و خارجی ارائه نمودند. نتایج آن‌ها نشان داد که بیشینه ضریب شدت تنش برای هر دو ترک داخلی و خارجی در نقطه عمقی اتفاق می‌افتد. نبوی و کامیاب [۱۲] ضرایب شدت تنش حرارتی گذرا برای ترک محیطی کامل در استوانه جدار ضخیم را با روش تابع وزن محاسبه نمودند. دلیل و اردوگان [۱۳] ضرایب شدت تنش در امتداد جبهه ترک نیم‌بیضی طولی و محیطی داخلی و خارجی در پوسته‌های استوانه‌ای تحت کشش و خمش یکنواخت در دوردست را به کمک مدل فنر خطی با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های عرضی برشی به دست آوردند. گریبیر و استراتمیر [۱۴] ضرایب شدت تنش ترک‌های نیم‌بیضی محیطی در لوله‌های تحت

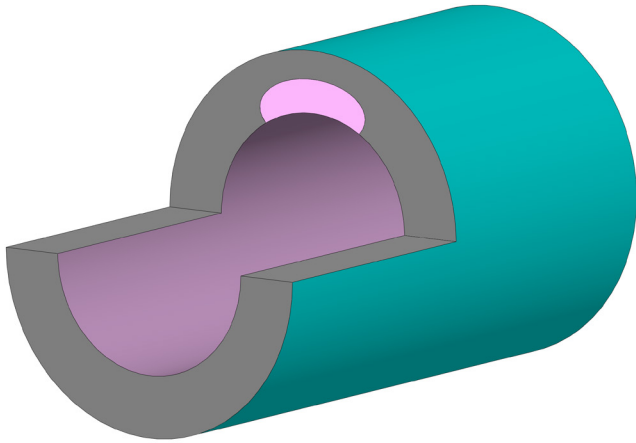


Fig. 1. Schematic of an internal circumferential semi-elliptical crack in a cylinder

شکل ۱: طرح وارهی ترک نیم‌بیضوی محیطی در سطح داخلی استوانه

$$m(r, a) = \frac{H}{K_r} \frac{\partial u_r(r, a)}{\partial r} \quad (1)$$

در رابطه فوق  $H$ ،  $r$  و  $a$  به ترتیب خاصیت ماده، مختصات هندسی در امتداد عمق ترک و طول ترک می‌باشند. همچنین  $K_r$  ضریب شدت تنش مرجع و  $u_r(r, a)$  میزان بازشدن دهانه ترک متناظر با یک بارگذاری مشخص و خاص در مود یک هستند. نکته مهم در مورد رابط فوق این است که محاسبه جابه‌جایی دهانه ترک برای انواع ترک‌های سطحی از جمله ترک نیم‌بیضوی محیطی از طریق روش‌های نظری تقریباً غیرممکن می‌باشد؛ بنابراین پتروسکی و آخن‌باخ [۲۲] فرم تقریبی از میزان بازشدگی صفحه ترک در مود یک ارائه دادند. رابطه ارائه شده توسط آنها به شدت به نوع بارگذاری مرجع انتخابی وابسته است و این مسأله دامنه انتخاب بارگذاری‌های مرجع را محدود می‌کند. شین و گلینکا [۲۳] فرم عمومی تابع وزن نقطه عمقی ترک‌های سطحی را که شامل چهار ترم است، به صورت زیر ارائه کردند:

$$m(r, a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{R_i + a - r}} + 3\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a} \sqrt{R_i + a - r} + M_1 \sqrt{\frac{2}{\pi a}} + M_2 \sqrt{\frac{2}{\pi a^3}} (R_i + a - r) \quad (2)$$

در رابطه فوق نوک ترک در  $r = R_i + a$  قرار گرفته است. در این تابع وزن، دو مجهول  $M_1$  وجود دارد که با تعیین آنها عملاً تابع وزن مشخص می‌شود. با استفاده از تابع وزن اخیر، ضرایب شدت تنش در نقطه عمقی ترک نیم‌بیضوی محیطی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$K = \int_{R_i}^{R_i + a} \sigma(r) m(r, a) dr \quad (3)$$

که در آن  $\sigma(r)$  توزیع تنش طولی در استوانه بدون ترک می‌باشد. از این‌رو در این روش با داشتن دو حالت بارگذاری مرجع و اطلاعات کافی از ضرایب شدت تنش متناظر آن می‌توان ضرایب مجهول را تعیین کرد. هندسه ترک در نظر گرفته شده به طول  $c$  و عمق  $a$  در استوانه‌ای با نسبت شعاع

شوک حرارتی با نسبت شعاع داخلی به ضخامت  $10$  را با روش تابع وزن محاسبه نمودند. اگرچه در مقاله ذکر شده، از کد نرم‌افزاری ایزی<sup>۱</sup> که مبتنی بر روش تابع وزن است، استفاده شده است؛ اما عملاً امکان استفاده کاربردی از آن وجود ندارد.

کومار و همکارانش [۱۵] به بررسی ترک‌های سطحی محیطی و طولی در استوانه از طریق محاسبه ضرایب شدت تنش مود یک با استفاده از مدل المان‌های فبری و المان پوسته پنج درجه آزادی موجود در نرم‌افزار آدینا<sup>۲</sup> پرداختند. ستاری‌فر [۱۶] به محاسبه ضرایب شدت تنش ترک‌های محیطی تمام عمقی تحت خمش موضعی پرداخت. روش استفاده شده بر مبنای اجزا محدود سه‌بعدی و به کمک نرم‌افزار آباکوس و با استفاده از المان‌های تکین در امتداد جبهه ترک می‌باشد. هوه [۱۷] نیز به محاسبه تنش تی با استفاده از روش اجزا محدود سه‌بعدی در ترک‌های محیطی داخلی در استوانه‌ها پرداخت. حکیمی و همکارانش [۱۸] ضرایب شدت تنش و انتگرال چی ترک‌های نیم‌بیضوی داخلی و خارجی محیطی و طولی واقع در پوسته‌های استوانه‌ای و کروی تحت بارگذاری الاستیک درجه سه را به کمک نرم‌افزار اجزا محدود کاستم محاسبه نمودند. چو و همکارانش [۱۹] به روش اجزا محدود سه‌بعدی و استفاده از مدل ماده الاستیک-پلاستیک، روابط اصلاح شده‌ای جهت محاسبه مقدار عددی انتگرال چی در لوله‌های حاوی ترک سطحی محیطی ارائه دادند.

در این مقاله ضرایب شدت تنش ناشی از بارگذاری ترمومکانیکی در نقطه عمقی ترک نیم‌بیضوی محیطی واقع در سطح داخلی استوانه (مطابق شکل ۱) به صورت حل بسته ارائه شده است. استوانه همسانگرد و همگن با نسبت شعاع خارجی به داخلی  $10/1$  تحت فشار داخلی و خارجی و نیز انتقال حرارت از نوع جابه‌جایی اجباری در سطح داخلی خود می‌باشد. به کمک روش تابع وزن، حل بسته ضرایب شدت تنش حرارتی پایدار به‌ازای مقادیر مختلف هندسه ترک و بارگذاری ارائه شده است. اعتبارسنجی تحلیل حاضر از طریق مقایسه نتایج به دست آمده برای ضرایب شدت تنش مود یک ترک به ازای بارگذاری یکنواخت (که ماهیت بارگذاری در استوانه‌های تحت فشار می‌باشد) با نتایج عددی و تجربی سایر محققین انجام شده که از دقت خوبی برخوردار است. همچنین در حالت خاص بارگذاری ترمومکانیکی نتایج تحلیل حاضر با نتایج استاندارد API 579 [۲] مقایسه شده است که حاکی از دقت و صحت حل ارائه شده می‌باشد.

## ۲- روش تابع وزن

تابع وزن، یک تابع کلی برای جسم ترک‌دار با هندسه و ترکیب معین است و از بارگذاری مستقل می‌باشد و با تعیین آن می‌توان ضرایب شدت تنش را در همان جسم به ازای بارگذاری‌های دیگر بدست آورد. تابع وزن برای اولین بار توسط بوکنر [۲۰] و رایس [۲۱] به صورت زیر معرفی شد:

- 1 EASY
- 2 ADINA

یک منحنی که تابع نسبت منظر و عمق نسبی ترک است به مقادیر عددی هر یک از بارگذاری‌ها برازش شده است. انتخاب نوع منحنی برازش شده به نتایج اجزا محدود، به طوری که حساسیت تابع وزن را تأمین کرده و از طرف دیگر دقت بالایی داشته باشد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. از این رو معادله منحنی برازش شده با بیشینه خطای کمتر از ۵/۵ درصد به صورت زیر بدست آمده است:

$$Y_j = \sum_{m=0}^2 \sum_{n=0}^3 A_{jmn} (a/t)^m (a/c)^n, \quad j=0, 1 \quad (۶)$$

که در آن  $j=0$  و  $j=1$  به ترتیب بیانگر بارگذاری فشار ثابت و خطی افزایشی عمود بر سطح ترک می‌باشد و مقادیر ثوابت  $A_{jmn}$  در جدول ۱ و ۲ ارائه شده است. با داشتن این دو بار مرجع و استفاده از انتگرال تابع وزن (معادله (۳)) برای این دو بارگذاری، ضرایب مجهول  $M_i$  بر حسب توابع تصحیح متناظر  $Y_j$  به صورت زیر بدست می‌آیند [۲۵]:

$$M_1 = -\sqrt{2/Q} \pi Y_0 + 3\sqrt{2/Q} \pi Y_1 - 24/5 \quad (۷-الف)$$

$$M_2 = 3\sqrt{2/Q} \pi Y_0 - 6\sqrt{2/Q} \pi Y_1 + 8/5 \quad (۷-ب)$$

دقت تابع وزن به نوع و دقت بارگذاری مرجع وابسته است. از این رو دقت و صحت آن با سایر مقالات در حالت خاص بارگذاری مقایسه شده است. حسن استفاده از روش تابع وزن در این است که وقتی تابع وزن یک ترک تعیین گردد، امکان استفاده از آن برای انواع دیگر بارگذاری میسر می‌شود بدون آن که خللی در دقت آن وارد شود؛ بنابراین با تعیین تابع وزن ترک نیم‌بیضوی محیطی می‌توان از آن برای بارگذاری حرارتی پایدار نیز استفاده نمود.

جدول ۱: ثوابت  $A_{0mn}$  توابع تصحیح در بارگذاری مرجع یکنواخت

Table 1. Coefficient  $A_{0mn}$  in the boundary correction factor for uniform load

m	n			
	۳	۲	۱	۰
۰	۰/۲۳۵	۰/۳۷۸	-۰/۲۴۳	۱/۰۸۳
۱	۰/۹۲۷	-۰/۵۳۹	-۰/۷۹۲	۰/۵۰۸
۲	۶/۸۳۱	۱۲/۹۱۷	-۷/۸۸۶	۱/۸۱۳

جدول ۲: ثوابت  $A_{1mn}$  توابع تصحیح در بارگذاری مرجع خطی

Table 2. Coefficient  $A_{1mn}$  in the boundary correction factor for linear load

m	n			
	۳	۲	۱	۰
۰	-۰/۹۹۱	۱/۷۰۱	-۰/۷۰۶	۰/۶۹۷
۱	۲/۴۱۵	۳/۸۰۸	۱/۳۵۸	-۰/۰۰۲
۲	-۳/۸۶۹	۷/۳۳۳	-۴/۲۹۱	۰/۹۴۰

داخلی به ضخامت  $(R_i/t=10)$  در این تحقیق در شکل ۲ نشان داده شده است. ضرایب شدت تنش جهت هر هندسه ترک شامل عمق نسبی  $a/t$  و نسبت منظر  $a/c$  در ادامه مورد محاسبه قرار می‌گیرد.

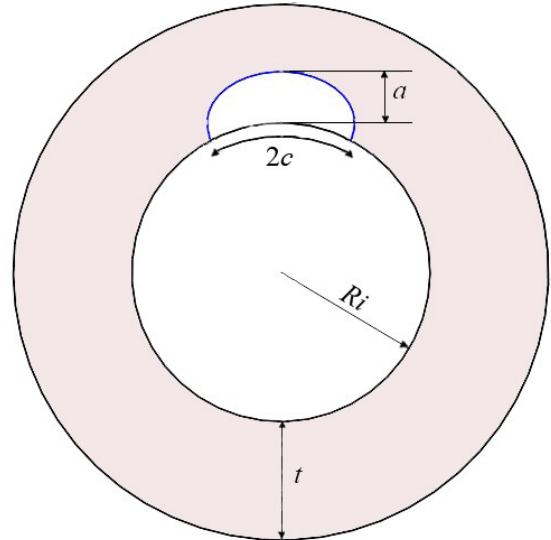


Fig. 2. Geometrical parameters for an internal circumferential semi-elliptical crack in a cylinder

شکل ۲: پارامترهای هندسی ترک نیم‌بیضوی محیطی در سطح داخلی استوانه

برای بدست آوردن مجهولات تابع وزن از ضرایب تصحیح در بارگذاری‌های مرجع به دو صورت فشار ثابت و خطی روی سطح ترک نیم‌بیضوی محیطی به صورت زیر استفاده شده است:

$$K_{r,u} = \sigma_0 Y_0 \sqrt{\pi a/Q} \quad (۴-الف)$$

$$K_{r,l} = \sigma_0 Y_1 \sqrt{\pi a/Q} \quad (۴-ب)$$

در رابطه فوق  $\sigma_0$  بیشینه اندازه بار اعمالی،  $Y_0$  و  $Y_1$  ضرایب تصحیح هندسی و  $Q$  ضریب شکل ترک نیم‌بیضوی است و به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$Q = 1 + 1.464(a/c)^{1.65}, \quad \frac{a}{c} \leq 1 \quad (۵)$$

جهت محاسبه ضرایب تصحیح هندسی  $Y_0$  و  $Y_1$  نیاز به بارگذاری‌های مرجع و حل ضرایب شدت تنش ترک متناظر آنها می‌باشد. انتخاب نوع بارگذاری محدودیت‌های خاص خود را دارد؛ اما معمولاً از دو نوع بارگذاری فشار یکنواخت و خطی افزایشی روی سطح ترک استفاده می‌شود؛ بنابراین، در این مقاله از نتایج عددی به دست آمده از تحلیل اجزا محدود سه‌بعدی ترک در مرجع [۲۴] تحت دو بارگذاری پیش‌گفته استفاده شده است. جهت استفاده از این نتایج عددی در تابع وزن با استفاده از روش حداقل مربعات

### ۳- تعیین ضرایب شدت تنش حرارتی

چنانچه سطح داخلی استوانه، تحت فشار  $P_i$  و انتقال حرارت از نوع جابه‌جایی اجباری با سیال با دمای  $\theta_s$  قرار گرفته باشد و سطح خارجی آن، تحت فشار  $P_o$  و دمای صفر باشد، در این صورت با حل معادلات ترموالاستیسیته در حالت پایدار برای استوانه بلند و همسانگرد، توزیع تنش طولی به صورت زیر بدست می‌آید [۲۶]:

$$\sigma_z(r) = \varphi_1 - 4 \mu \xi_1 \text{Log}(r) \quad (۸)$$

که در آن ثوابت  $\varphi_1$  و  $\xi_1$  از تحلیل ترموالاستیسیته به صورت زیر استخراج شده است:

$$\varphi_1 = \frac{2 \mu}{1-2\nu} \left( (1-\nu) \text{Log} R_o + \nu \xi_2 \right) \quad (۹-الف)$$

$$\xi_1 = -\frac{\alpha (1+\nu) \theta_s}{2(1-\nu) \left( \frac{1}{Bi} + \text{Log} \frac{R_o}{R_i} \right)} \quad (۹-ب)$$

$$\xi_2 = \frac{(1-2\nu) (P_i R_i^2 - P_o R_o^2)}{2 \mu (R_i^2 - R_o^2)} - 2 \frac{(1-\nu) R_i^2}{R_i^2 - R_o^2} \text{Log} \left( \frac{R_o}{R_i} \right) \xi_1 - \left( (1-\nu) + \frac{(R_i^2 \text{Log} R_i - R_o^2 \text{Log} R_o)}{R_i^2 - R_o^2} \right) \xi_1 \quad (۹-ج)$$

در روابط (۹)  $\mu$  مدول برشی،  $\nu$  ضریب پواسون،  $\alpha$  ضریب انبساط حرارتی و  $Bi$  عدد بیو می‌باشند. با جایگذاری تنش طولی (رابطه ۸) در انتگرال تابع وزن (رابطه ۳) و نیز در نظر گرفتن اثر فشار روی سطح ترک، حل بسته ضرایب شدت تنش حرارتی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} K(a) = & (\varphi_1 + P_i) \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \left( \frac{20}{3} + 2 M_1 + M_3 \right) \\ & - 4 \mu \xi_1 \sqrt{\frac{2}{\pi a}} M_1 R_i \text{Log} \left[ \frac{a+R_i}{R_i} \right] \\ & - 4 \mu \xi_1 \sqrt{\frac{2a}{\pi}} M_1 (\text{Log} [a+R_i] - 1) \\ & - 4 \mu \xi_1 \sqrt{\frac{8a}{\pi}} (\text{Log} [R_i] - 2) \\ & - 4 \mu \xi_1 \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sqrt{a+R_i} \text{Log} \left[ \frac{\sqrt{a+R_i} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+R_i} - \sqrt{a}} \right] \\ & - \mu \xi_1 \frac{16}{9} \sqrt{\frac{2}{\pi a}} (a(3 \text{Log} [R_i] - 8) - 6 R_i) \\ & + \mu \xi_1 \frac{16}{3a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{(a+R_i)^3} \text{Log} \left[ \frac{\sqrt{a+R_i} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+R_i} + \sqrt{a}} \right] \\ & + 8 \mu \xi_1 \sqrt{\frac{1}{8\pi a}} M_2 R_i \left( 1 + 2 \text{Log} \left[ \frac{R_i}{a+R_i} \right] \right) \\ & + 8 \mu \xi_1 \sqrt{\frac{1}{8\pi a^3}} M_2 R_i^2 \text{Log} \left[ \frac{R_i}{a+R_i} \right] \end{aligned} \quad (۱۰)$$

$$-4 \mu \xi_1 \sqrt{\frac{a}{8\pi}} M_2 (2 \text{Log} [a+R_i] - 3)$$

همانطوری که در رابطه (۱۰) مشاهده می‌شود، این رابطه قابلیت برآورد ضرایب شدت تنش نقطه عمقی ترک نیم‌بیضی محیطی به ازای انواع بارگذاری‌های ترمومکانیکی را دارد؛ به نحوی که معادله ارائه شده صرفاً تابع پارامترهای هندسی ترک و شرایط بارگذاری است و این امر منجر به ساده شدن فرآیند محاسبه ضرایب شدت تنش ترک مذکور می‌شود.

### ۴- صحنه‌سنجی

به منظور صحنه‌سنجی نتایج، ضرایب شدت تنش بی‌بعد شده  $(K_N = K_I / P_i \sqrt{\pi a / Q})$  حاصل از روش تابع وزن (رابطه ۱۰) در دو نوع خاص بارگذاری با نتایج سایر مقالات مقایسه شده است. در ابتدا استوانه در حالت اعمال بار تک محوره کششی قرار گرفته است (که ماهیت آن صفر قرار دادن همه مقادیر معادلات (۹) در رابطه (۱۰) می‌باشد) و نتایج در جدول ۳ ارائه شده است. با بررسی و مقایسه نتایج ارائه شده در این جدول، ملاحظه می‌شود که نتایج استاندارد انرژی بریتانیا [۱] تقریباً در همه موارد، حد بالاتری را نسبت به نتایج تابع وزن نشان می‌دهد که این امر به دلیل محافظه‌کارانه‌تر بودن استاندارد است. از طرف دیگر نتایج تجربی حاصل از آزمون فتوالاستیسیته [۱۱] کاملاً منطبق بر مقادیر حاصل از روش تابع وزن می‌باشد و خطایی در آن مشاهده نمی‌شود.

در حالت دوم بارگذاری، استوانه تحت فشار داخلی قرار گرفته و نتایج ضرایب شدت تنش بی‌بعد شده با نتایج حاصل از حل با استفاده از روش استاندارد API 579 [۲] در شکل ۳ مقایسه شده است. در این استاندارد جهت محاسبه ضرایب شدت تنش در استوانه، ابتدا باید منحنی درجه چهار به تابع توزیع تنش اعمالی به صورت زیر برازش شود:

$$\sigma(r) = \sum_{i=0}^4 A_i (r/t)^i \quad (۱۱)$$

که در آن  $A_i$  بیانگر ضرایب برازش به منحنی تنش است. پس از مشخص شدن منحنی تابع تنش، ضرایب شدت تنش بی‌بعد شده به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$K_N = \sum_{i=0}^4 G_i A_i (x/t)^i \quad (۱۲)$$

که در آن ثوابت  $G_i$  در قالب جداول مختلف به‌ازای ابعاد مختلف هندسه ترک در استاندارد ارائه شده است. همچنین در مواردی که ضرایب در استاندارد موجود نباشد می‌توان از درون‌یابی استفاده نمود. از این‌رو با استفاده از این روش، نتایج ضرایب شدت تنش محاسبه شده از حل بسته رابطه (۱۰) به‌ازای مقادیر نسبت منظر ۱ و  $a/c = 0.25, 0.5$  و عمق نسبی‌های مختلف (که در جداول استاندارد موجود است) با نتایج مشابه ارائه شده در استاندارد API 579 مقایسه شده است حداکثر خطای دو روش کمتر از ۵/۵ درصد می‌باشد. همچنین ملاحظه می‌شود که مقادیر حاصل از روش استاندارد API

### ۵- نتایج

جهت تحلیل حرارتی، استوانه تحت فشار داخلی  $P_i=10$  MPa و فشار خارجی  $P_o=0/1$  MPa قرار گرفته است. همچنین سطح داخلی استوانه تحت انتقال حرارت جابه‌جایی سیال با دمای  $\theta_s=-100$  °C قرار گرفته است. نوع جابجایی اجباری با عدد بیو  $(Bi=R_i h/k)$  تعیین شده و خواص فیزیکی ماده مورد استفاده در جدول ۴ ارائه شده است.

جدول ۴: خواص ماده مورد استفاده در استوانه

Table 4. Material properties of the cylinder and fluid

مقدار	واحد	خاصیت
$11/7 E-6$	$1/^\circ C$	ضریب انبساط حرارتی
۴۳	W/m.K	ضریب هدایت گرمایی
۲۰۷	GPa	مدول یانگ
۰/۳	-	ضریب پواسون

نتایج ضرایب شدت تنش بی‌بعد شده بر حسب اعداد بیو و عمق‌های نسبی مختلف در حالت بارگذاری ترمومکانیکی به‌ازای نسبت منظرهای مختلف در شکل‌های ۴ تا ۶ ارائه شده است. همانگونه که ملاحظه می‌شود، با افزایش عدد بیو که معرف نوع اجباری انتقال حرارت جابه‌جایی است، مقادیر ضرایب شدت تنش افزایش می‌یابد؛ به طوری که در حالت بیو بی‌نهایت که ماهیت هم‌دمایی جدار داخلی با دمای سیال را دارد، در همه نسبت‌های منظر و عمق‌های نسبی بیشترین مقدار ضریب شدت تنش اتفاق می‌افتد. این به آن معنی است که حل مسأله انتقال حرارت از نوع هدایتی نتایج حد بالا و محافظه‌کارانه را ارائه می‌دهد.

اثر افزایش عمق نسبی ترک نیم‌بیضوی محیطی در اعداد بیو پایین همواره با افزایش ضریب شدت تنش همراه است و تابع نسبت منظر ترک نمی‌باشد؛ اما در اعداد بیو بالا این مسأله متفاوت است. به عبارت دیگر در حالتی که نوع انتقال حرارت اجباری تر شود در ترک با نسبت منظر پائین (ترک کشیده) با افزایش عمق نسبی ضرایب شدت تنش کاهش می‌یابند و همچنین نرخ کاهش ضرایب شدت تنش با افزایش نسبت منظر بیشتر می‌شود.

جهت اطمینان حاصل کردن از صحت تحلیل حاضر، ضرایب شدت تنش ترمومکانیکی محاسبه شده به کمک رابطه (۱۰) در حالت هم‌دمایی جدار داخلی با دمای سیال، با حل حاصل از استاندارد API 579 [۲] به‌ازای اعداد بیو  $Bi=0/1$  و  $Bi=\infty$  در شکل‌های ۴ تا ۶ مقایسه شده است. در این استاندارد باید در هر حالت ابعادی و بارگذاری یک منحنی مرتبه چهارم به توزیع تنش برآزش گردد و سپس با استفاده از ضرایب تصحیح مقادیر شدت تنش محاسبه گردد. نتایج حل بسته ارائه شده تطابق خوبی با نتایج استاندارد نشان می‌دهد.

تغییرات ضرایب شدت تنش بی‌بعد شده بر حسب نسبت منظرها و عمق

تقریباً در همه موارد، حد بالاتری نسبت به حل بسته ارائه شده داراست که حاکی از محافظه‌کارانه بودن استاندارد در عین دقت بالای آن می‌باشد.

جدول ۳: مقایسه ضرایب شدت تنش بی‌بعد شده به‌ازای بارگذاری کشش یکنواخت در ترک نیم‌بیضوی محیطی در استوانه

Table 3. Comparison of normalized stress intensity factors for circumferential semi-elliptical cracks in the cylinder for uniform load

استاندارد بریتانیا [۱]	روشن اجزا محدود [۶]	تجربی [۱۱]	تابع وزن	a/t	a/c
۱/۱۳	۱/۱۳	-	۱/۱۲	۰/۲	
۱/۲۶	۱/۲۷	-	۱/۲۵	۰/۴	۰/۲۵
۱/۵۹	۱/۵۹	-	۱/۶۲	۰/۸	
۱/۰۸	۱/۰۸	-	۱/۰۶	۰/۲	
۱/۱۵	۱/۱۴	-	۱/۱۰	۰/۴	۰/۵
۱/۲۹	۱/۲۸	-	۱/۲۶	۰/۸	
-	-	۱/۰۷	۱/۰۷	۰/۴	
-	-	۱/۱۳	۱/۱۳	۰/۶	۰/۶۶
-	-	۱/۲۱	۱/۲۱	۰/۸	
۱/۰۴	۱/۰۵	-	۱/۰۰	۰/۲	
۱/۰۷	۱/۰۷	-	۱/۰۳	۰/۴	
۱/۰۹	۱/۰۸	-	۱/۰۵	۰/۶	
۱/۱۲	۱/۱۱	-	۱/۰۷	۰/۸	

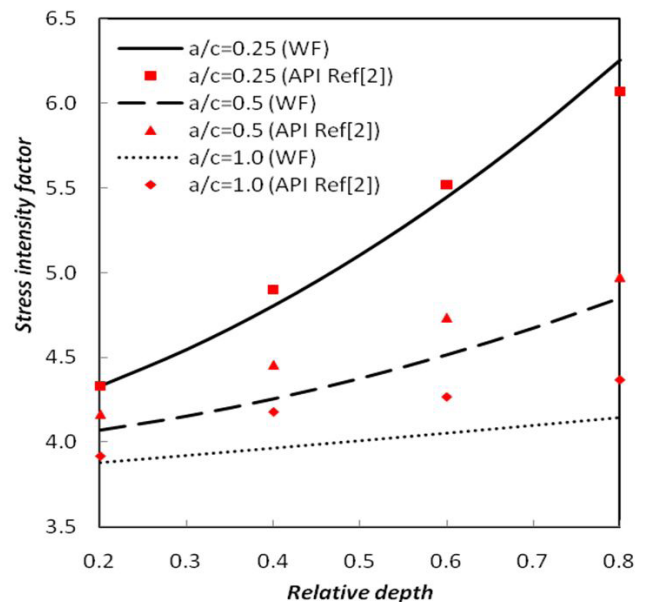


Fig. 3. Variation of normalized stress intensity factors for internal pressure

شکل ۳: تغییرات ضرایب شدت تنش بی‌بعد شده ناشی از فشار داخلی استوانه



حرارت در استوانه، ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد؛ به عبارت دیگر هر قدر ترک کشیده‌تر باشد بحرانی‌تر است.

بیان این نکته ضروری است که در حالتی که از روش‌های تحلیلی نتوان توزیع تنش حرارتی را تعیین کرد، می‌توان به صورت عددی یا تجربی توزیع تنش حرارتی در استوانه بدون ترک را به دست آورد و پس از برآزش تابع به نتایج مجزای به دست آمده از حل، با وارد کردن توزیع تنش مذکور در انتگرال تابع وزن (رابطه (۳)) و استفاده از تابع وزن ارائه شده در این مقاله، ضرایب شدت تنش حرارتی را مورد محاسبه قرار داد. برای انتگرال‌گیری

نسبی‌های مختلف در حالت بارگذاری ترمومکانیکی به‌ازای مقادیر مختلف عدد بیو در شکل‌های ۷ تا ۹ ارائه شده است. همانگونه که ملاحظه می‌شود در اعداد بیو بالا ضرایب شدت تنش ترک‌های کم‌عمق نسبت به عمیق بیشتر است که بیانگر بحرانی‌تر بودن این نوع ترک‌ها از منظر طراحی است. این در حالی است که در اعداد بیو پایین که فرایند انتقال حرارت به آرامی صورت می‌گیرد، ترک‌های عمیق دارای ضرایب شدت تنش بزرگتر می‌باشند و بحرانی‌تر هستند. نکته قابل توجه دیگر اثر نسبت منظر در نوع رفتار ترک می‌باشد. با افزایش نسبت منظر (دایروی‌تر شدن ترک) و فارغ از نوع انتقال

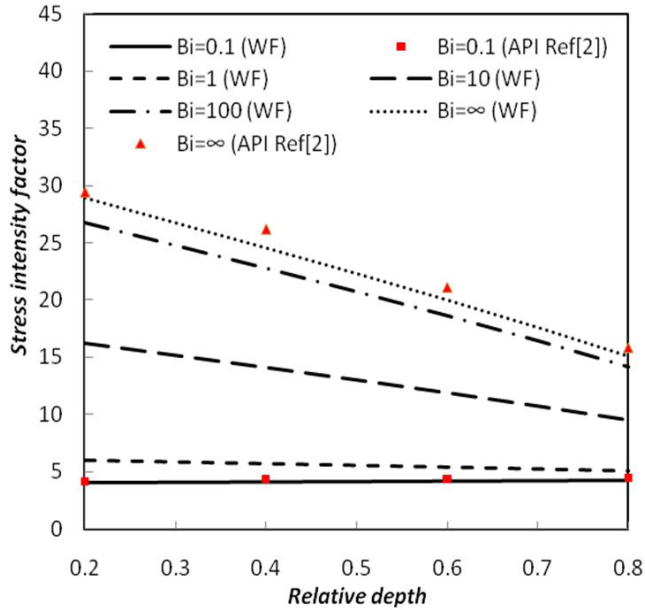


Fig. 6. Variation of stress-intensity factor for  $a/c = 1$

شکل ۶: تغییرات ضرایب شدت تنش به‌ازای نسبت منظر  $a/c = 1$

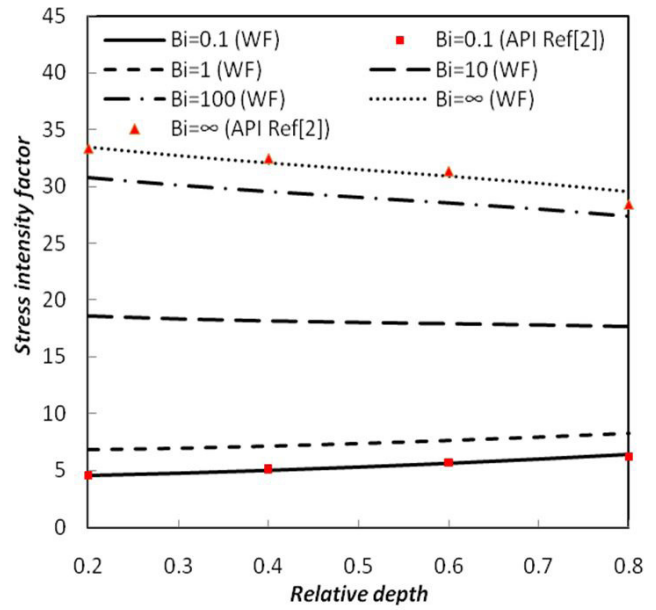


Fig. 4. Variation of stress-intensity factor for  $a/c = 0.25$

شکل ۴: تغییرات ضرایب شدت تنش به‌ازای نسبت منظر  $a/c = 0.25$

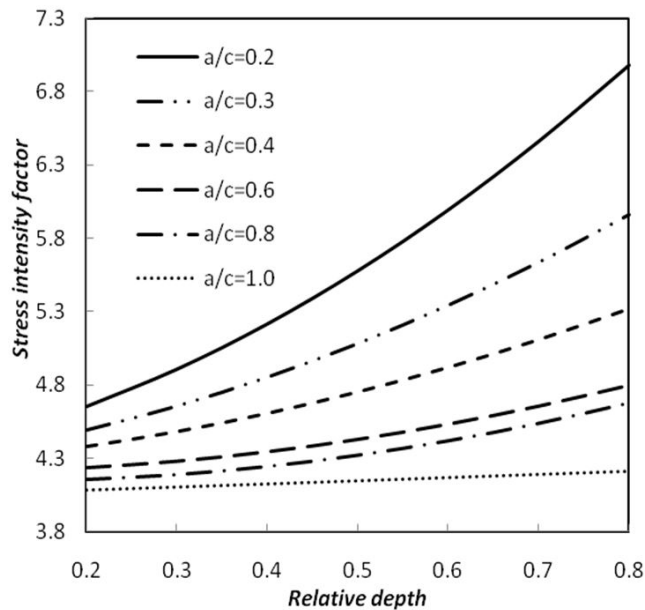


Fig. 7. Variation of stress-intensity factor for  $Bi = 0.1$

شکل ۷: تغییرات ضرایب شدت تنش به‌ازای عدد بیو  $Bi = 0.1$

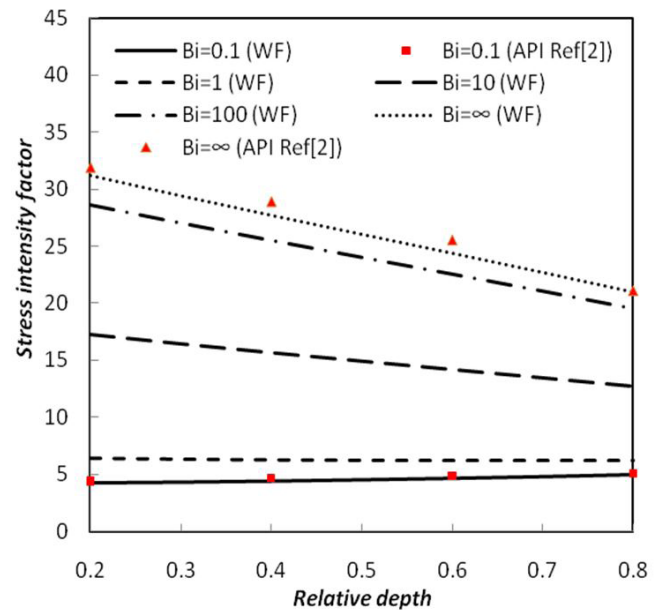


Fig. 5. Variation of stress-intensity factor for  $a/c = 0.5$

شکل ۵: تغییرات ضرایب شدت تنش به‌ازای نسبت منظر  $a/c = 0.5$

## ۶- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله مسأله ترک نیم‌بیضوی محیطی واقع در سطح داخلی استوانه تحت فشار که حامل سیال سرد و انتقال حرارت از نوع جابه‌جایی اجباری می‌باشد، با استفاده از روش تابع وزن تحلیل شده است. نتایج تحلیل نشان می‌دهد که حل حالت انتقال حرارت اجباری، مقادیر ضرایب شدت تنش کمتری را نسبت به حالت انتقال حرارت هدایتی (اعمال دما در سطح داخلی استوانه) ارائه می‌دهد، لذا حل هدایت حرارتی محافظه‌کارانه‌تر است. همچنین لزوماً بیشینه ضریب شدت تنش در ترک‌های عمیق‌تر رخ نمی‌دهد بلکه هر قدر نوع انتقال حرارت اجباری‌تر گردد، ترک‌های کم‌عمق بحرانی‌تر هستند. همچنین ترک‌های کشیده‌تر همواره ضرایب شدت تنش بالاتری نسبت به ترک‌های دایروی شکل دارند.

## منابع

- [1] S. Al Laham, S.I. Branch, R. Ainsworth, *Stress intensity factor and limit load handbook*, British Energy Generation Limited, 1998.
- [2] *Standard 579-1/ASME FFS-1 Fitness for Service*, Houston, TX: American Petroleum Institute, 2007.
- [3] M. Kuna, *Finite elements in fracture mechanics*, Springer, 2013.
- [4] X. Lin, R. Smith, Fatigue growth prediction of internal surface cracks in pressure vessels, *Journal of Pressure Vessel Technology*, 120(1) (1998) 17-23.
- [5] C. Poette, S. Albaladejo, Stress intensity factors and influence functions for circumferential surface cracks in pipes, *Engineering Fracture Mechanics*, 39(4) (1991) 641-650.
- [6] M. Bergman, Stress intensity factors for circumferential surface cracks in pipes, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 18(10) (1995) 1155-1172.
- [7] M. Bergman, B. Brickstad, Stress intensity factors for circumferential cracks in pipes analyzed by FEM using line spring elements, *International Journal of Fracture*, 47(1) (1991) R17-R19.
- [8] C. Wallbrink, D. Peng, R. Jones, Assessment of partly circumferential cracks in pipes, *International Journal of Fracture*, 133(2) (2005) 167-181.
- [9] M. Perl, V. Bernshtein, 3-D stress intensity factors for arrays of inner radial lunular or crescentic cracks in a typical spherical pressure vessel, *Engineering Fracture Mechanics*, 77(3) (2010) 535-548.
- [10] M. Perl, V. Bernshtein, 3-D stress intensity factors for arrays of inner radial lunular or crescentic cracks in thin and thick spherical pressure vessels, *Engineering Fracture Mechanics*, 78(7) (2011) 1466-1477.
- [11] X.-M. Kong, S.-T. Zheng, Z.-Y. Cui, Studies on stress

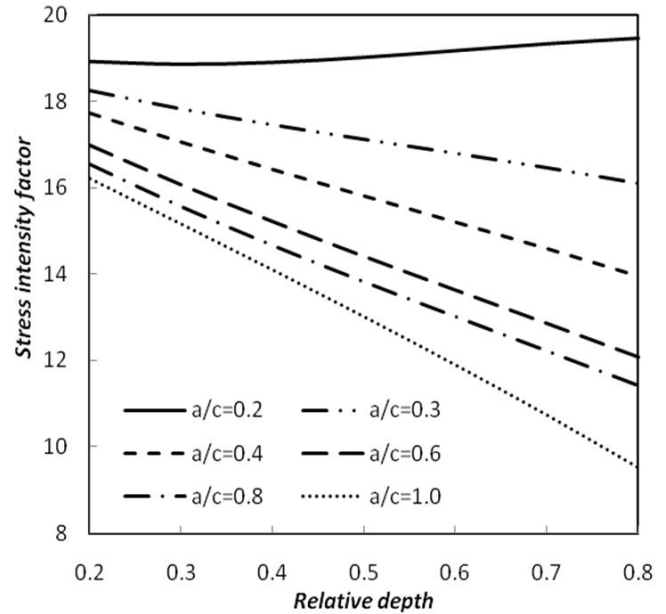


Fig. 8. Variation of stress-intensity factor for  $Bi = 10$

شکل ۸: تغییرات ضرایب شدت تنش به‌ازای عدد بیو ۱۰

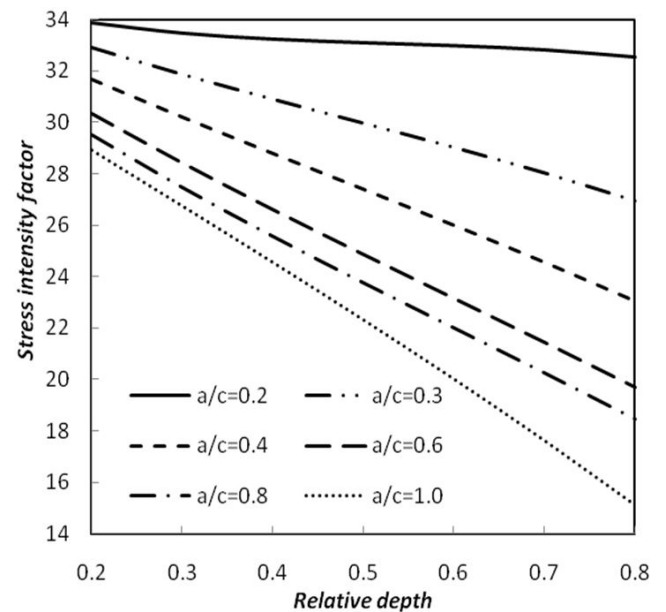


Fig. 9. Variation stress-intensity factor for  $Bi = \infty$   
(The cylinder is applied to internal temperature)

شکل ۹: تغییرات ضرایب شدت تنش به‌ازای عدد بیو بینهایت (اعمال دما در سطح داخلی)

عددی از انتگرال تابع وزن می‌توان از انتگرال‌گیری مبتنی بر مدل‌سازی خطی [۲۷] و یا مدل‌سازی سهموی [۲۸] استفاده نمود. نکته قابل توجه دیگر در امکان استفاده از تابع وزن جهت استخراج ضرایب شدت تنش در حالتی که توزیع تنش دارای گرادین زیاد است، نهفته است؛ زیرا در این حالت استاندارد دارای خطای زیادی است چرا که برای هر نوع بارگذاری از برازش و جمع آثار مرتبه چهار استفاده می‌کند که در برخی موارد از دقت کافی برخوردار نیست.

- under tensile load, *Journal of Mechanical Science and Technology*, 24(3) (2010) 681-686.
- [20] H. Bueckner, Novel principle for the computation of stress intensity factors, *Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik & Mechanik*, 50(9) (1970).
- [21] J.R. Rice, Some remarks on elastic crack-tip stress fields, *International Journal of Solids and Structures*, 8(6) (1972) 751-758.
- [22] H. Petroski, J. Achenbach, Computation of the weight function from a stress intensity factor, *Engineering Fracture Mechanics*, 10(2) (1978) 257-266.
- [23] G. Glinka, G. Shen, Universal features of weight functions for cracks in mode I, *Engineering Fracture Mechanics*, 40(6) (1991) 1135-1146.
- [24] A. Zareei, *Determination of weight function and stress intensity factors for circumferential semi-elliptical cracks in cylinders*, Master's thesis in Aerospace Engineering, Faculty of Aerospace Engineering, Malek-Ashtar University of technology, 2015.
- [25] S.M. Nabavi, R. Azad, The effect of term numbers of a weight function on the accuracy of stress intensity factors in a cracked cylinder, in: *Proceedings of the 20th ISME Mechanical Engineering Conference*, Shiraz University, Shiraz, Iran, 2012.
- [26] R.B. Hetnarski, M.R. Eslami, G. Gladwell, *Thermal stresses: advanced theory and applications*, Springer, 2009.
- [27] A. Moftakhar, G. Glinka, Calculation of stress intensity factors by efficient integration of weight functions, *Engineering Fracture Mechanics*, 43(5) (1992) 749-756.
- [28] S.M. Nabavi, A. Shahani, Dynamic stress intensity factors for a longitudinal semi-elliptical crack in a thick-walled cylinder, *International Journal of Engineering, Science and Technology*, 6(5) (2014) 57-77.
- intensity factor KI of surface cracks in a cylinder under remote tension loads, *Engineering Fracture Mechanics*, 33(1) (1989) 105-111.
- [12] S.M.Nabavi, M. Kamyab, Determination of transient thermal stress intensity factors for circumferential cracks in cylinders. in: *Proceedings of the 20th ISME Mechanical Engineering Conference*, Shiraz University, Shiraz, Iran, (2012)
- [13] F. Delale, F. Erdogan, Application of the line-spring model to a cylindrical shell containing a circumferential or axial part-through crack, *Journal of Applied Mechanics*, 49(1) (1982) 97-102.
- [14] H. Grebner, U. Strathmeier, Stress intensity factors for circumferential semielliptical surface cracks in a pipe under thermal loading, *Engineering Fracture mechanics*, 22(1) (1985) 1-7.
- [15] V. Kumar, M. German, B. Schumacher, Analysis of elastic surface cracks in cylinders using the line-spring model and shell finite element method, *Journal of Pressure Vessel Technology*, 107(4) (1985) 403-411.
- [16] I. Sattari-Far, Stress intensity factors for circumferential through-thickness cracks in cylinders subjected to local bending, *International Journal of Fracture*, 53(1) (1992) R9-R13.
- [17] N.S. HUH, Elastic T stress estimates for circumferential surface-cracked cylinders, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 29(1) (2006) 57-69.
- [18] A. El Hakimi, P. Le Grogneq, S. Hariri, Numerical and analytical study of severity of cracks in cylindrical and spherical shells, *Engineering Fracture Mechanics*, 75(5) (2008) 1027-1044.
- [19] D.H. Cho, S.W. Woo, Y.-S. Chang, J.-B. Choi, Y.-J. Kim, M.J. Jhung, Y.H. Choi, Enhancement of J estimation for typical nuclear pipes with a circumferential surface crack

Please cite this article using:

S. M. Nabavi and A. Zareei, Determination of Steady State Thermal Stress Intensity Factors for Semi-Elliptical Circumferential Cracks in Cylinders, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 49(4) (2018) 665-672.  
DOI: 10.22060/mej.2016.725

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

