نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۴۹، شماره ۴، سال ۱۳۹۶، صفحات ۷۳۱ تا ۷۴۲
DOI: 10.22060/mej.2016.732

تحلیل ارتعاشات آزاد تیر متورق با پارامترهای تصادفی

علی اصغر علیزاده[۱]، رمضانعلی جعفری تلوکلائی[۲]*

[۱]دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران
[۲]دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل، ایران

تاریخچه داوری:
دریافت: ۲۰ دی ۱۳۹۴
بازنگری: ۲۱ اسفند ۱۳۹۴
پذیرش: ۲۰ اردیبهشت ۱۳۹۵
ارائه آنلاین: ۲۳ مرداد ۱۳۹۵

کلمات کلیدی:
ارتعاشات اتفاقی
میدان‌های تصادفی
شبیه‌سازی مونت کارلو
تیر متورق
اجزا محدود

چکیده: در این مقاله، برای اولین بار تحلیل ارتعاشات تصادفی تیر متورق با درنظرگرفتن موقعیت قائم تورق و مدول یانگ به صورت پارامترهای تصادفی انجام شده است. در ابتدا تیر متورق به چهار تیر فرعی و سالم تقسیم شده است. سپس با معرفی یک جز تیر و براساس نظریهٔ کلاسیک تیرها، انرژی‌های جنبشی و پتانسیل یک جزء نمونه واقع شده در هر یک از تیرهای فرعی استخراج شده است. جزء مرتبه بالای درنظرگرفته شده دارای سه گره شامل دو گره انتهایی و یک گره میانی بوده که هر گره دارای دو درجه آزادی خیز و شیب می‌باشند. با استفاده از انرژی‌های مذکور، ماتریس‌های سفتی و جرم هر جزء به‌دست آمده‌اند. در ادامه با سرهم کردن ماتریس‌های مذکور و با درنظرگرفتن شرایط پیوستگی برای اجزای مجاور تورق، ماتریس‌های جرم و سفتی کل تیر به‌دست آمده است. در اعمال شرایط پیوستگی، خیز و شیب گره‌های واقع شده در مرز تورق با یکدیگر برابر قرار داده شده‌اند. در نهایت پس از اعمال شرایط مرزی، معادلات دیفرانسیل حاکم بر سامانه به شکل ماتریسی به‌دست آمده است. سپس با مدل‌سازی پارامترهای تصادفی به صورت میدان‌های تصادفی، معادله دیفرانسیل قطعی حاکم بر سامانه به یک معادله دیفرانسیل تصادفی تبدیل می‌شود. میدان‌های تصادفی پیوسته، توسط روش‌های گسسته‌سازی نقطه–وسط و میانگین موضعی گسسته می‌شوند. در پایان با به‌کارگیری روش شبیه‌سازی مونت کارلو در هر حلقه تکرار، هر معادله دیفرانسیل تصادفی به یک معادله دیفرانسیل قطعی تبدیل می‌شود. به منظور بررسی ارتعاشات آزاد، مسألهٔ مقدار ویژه برای به‌دست آوردن بسامدها و شکل مدهای سامانه حل می‌شود؛ در نتیجه با داشتن مقادیر ویژه سامانه، خواص آماری مربوط به مشخصات ارتعاشات آزاد تیر مانند میانگین، انحراف استانده و تابع چگالی احتمال به‌دست آمده و اثر پارامترهای مختلف تیر و تورق بر آن مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین جهت بررسی صحت روابط استخراج شده و نیز برنامه‌های کامپیوتری نوشته شده، بسامدهای قطعی تیر با نتایج دیگران مقایسه شده و انطباق بسیار مناسبی مشاهده شده است.

۱- مقدمه

تحلیل سازه‌ها در مهندسی با عنایت به کاربرد آن از اهمیت بسیار بالایی برخوردار است. یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین سازه‌ها، تیرها می‌باشند که در بسیاری از کاربردها در محیطی تحت بار دینامیکی قرار دارند. لذا پیش‌بینی رفتار دینامیکی آنها کمک بسیاری خواهد کرد تا از حوادث زیان‌بار جلوگیری به عمل آید. از طرفی تیرها به آسیب بسیار حساس بوده و مشخصات دینامیکی آنها به شدت تحت تأثیر آسیب قرار می‌گیرند. از مهم‌ترین آسیب‌ها می‌توان به تورق اشاره کرد که می‌تواند ناشی از فرایندهای ساخت و یا اعمال بارهای خارجی هنگام استفاده از سازه باشد. با توجه به موقعیت‌های طولی و قائم تورق و همچنین اندازه آن، خواص ارتعاشی تیرها نظیر بسامدها و شکل مودهای متناظر به شدت تحت تأثیر قرار گرفته و می‌توانند کاملاً متفاوت از یک تیر سالم باشند. تاکنون مطالعات زیادی جهت تعیین مشخصات ارتعاشی تیر متورق با پارامترهای هندسی قطعی برای تورق انجام شده در حالی‌که در بسیاری از مواقع تعیین مشخصات هندسی تورق، غیرممکن بوده و در نتیجه بررسی ارتعاشات اتفاقی تیر با پارامترهای تصادفی برای تورق ضروری به نظر می‌رسد. مطالعه حاضر می‌تواند مبنایی جهت استفاده در آزمون‌های غیرمخرب باشد.

به طور معمول تحلیل ارتعاشات آزاد تیر متورق بر مبنای مدهای آزاد [۱] و مقید [۲] مورد بررسی قرار گرفته است. در تحلیل تیرهای متورق براساس مد آزاد فرض می‌شود که تیرهای فرعی واقع شده در ناحیه تورق تنها در مرزهای تورق با یکدیگر ارتباط داشته و هیچ‌گونه قیدی در ناحیه تورق برای تیرهای مذکور درنظر گرفته نمی‌شود. واضح است هرچند براساس مد آزاد بازشوندگی لایه‌ها در نیم سیکل از حرکت ارتعاشی آنها مشاهده می‌شود (مزیت اصلی این نوع مدل‌سازی) اما در نیم سیکل دوم از حرکت ارتعاشی آنها رسوخ بین لایه‌ها اتفاق می‌افتد (ایراد اساسی این مدل‌سازی). در مقابل در تحلیل بر مبنای مد مقید فرض می‌شود که تیرهای مذکور دارای جابه‌جایی دینامیکی برابر در تمام مدت حرکت دینامیکی می‌باشند. در این نوع مدل‌سازی، اگرچه از رسوخ تیرهای فرعی در لایه‌های واقع شده در ناحیه تورق جلوگیری می‌کند؛ (مزیت این نوع مدل‌سازی) اما نمی‌تواند بازشوندگی لایه‌ها را پیش‌بینی کند (ایراد مدل‌سازی مقید). در یک دهه گذشته، مطالعات بسیاری برای تحلیل ارتعاشات قطعی تیر متورق انجام شده است. شن و گریدی [۳] نتایج آزمایشگاهی برای مشخصات ارتعاشی تیر متورق را ارائه کرده‌اند. جعفری و همکارانش [۴] ارتعاشات اجباری تیر تحت حرکت حرکت نوسانگر یک درجه آزادی را مورد بررسی قرار داده‌اند. نشان داده شده است که خیز بیشینه در تیر به شدت از مشخصات هندسی تورق تأثیر می‌پذیرد. همچنین کارگرنوین و همکارانش [۵] پاسخ تحلیلی جهت مطالعه مشخصات ارتعاشی تیر کامپوزیتی چندلایه متورق ارائه کرده‌اند.

نویسنده عهده‌دار مکاتبات: ra.jafari@nit.ac.ir

عدم قطعیت یک پدیدهٔ ناشناخته در دنیای فناوری و طبیعت محسوب می‌شود [۶]. مهندسین به صورت پیوسته با عدم قطعیت‌ها در طراحی سامانه‌های مختلف مواجه می‌شوند که باید توانایی به‌دست آوردن پاسخ این سامانه‌ها را در حضور عدم قطعیت‌های مختلف داشته باشند. این عدم قطعیت‌ها می‌تواند ناشی از خطای مدل‌سازی، تغییرات ذاتی موجود در پارامترهای سامانه و محیط اطراف، نداشتن دانش کافی در مورد سامانه و عوامل دیگر باشد. تجزیه‌وتحلیل تیرهای متورق به طور معمول با فرض قطعی بودن پارامترهای سامانه انجام می‌شود. با این وجود، واضح است که موقعیت دقیق تورق را نمی‌توان به طور قطعی به‌دست آورد و در مدل‌سازی تورق نیز میزانی از عدم قطعیت وجود خواهد داشت. بنابراین، به دلیل عدم قطعیت‌های موجود در تیرهای متورق شایسته است از رویکردی احتمال‌اندیشانه برای تجزیه‌وتحلیل ارتعاشی این نوع سامانه‌ها بهره جست.

رامو و جانسن [۷] تیری با مدول یانگ تصادفی را بررسی کرده‌اند که نیروهایی نامعین بر تیر اعمال می‌شود. در این پژوهش، از روش اجزا محدود و میانگین‌های موضعی پارامترهای تصادفی، برای به‌دست آوردن پارامترهای آماری بار کمانشی استفاده شده است. چنگ و ژیاو [۸] ارتعاش آزاد یک تیر با پارامترهای تصادفی تحت بار محوری را با الگوریتمی براساس اجزا محدود تصادفی بررسی کرده‌اند. آنها با استفاده از ترکیب روش‌های پاسخ سطح، روش اجزا محدود و شبیه‌سازی مونت‌کارلو توانستند پاسخ فرکانسی تیر را به‌دست آورند. جانسن و کودا [۹] مشخصات آماری و احتمالی نیروی کمانشی تیر کامپوزیتی با پارامترهای تصادفی را به‌دست آورده‌اند. در این پژوهش، از میدان‌های تصادفی مکان پیوسته برای مدل‌سازی پارامترهای تصادفی استفاده شده است. ایرانی و سازش [۱۰] ارتعاشات اتفاقی تیری با مقطع متغیر را تحت تحریک اتفاقی گسترده ایستا با تابع چگالی احتمال گاوسی مورد بررسی قرار داده‌اند. علیزاده و میردامادی [۱۱] ارتعاشات آزاد و تجزیه‌وتحلیل قابلیت اطمینان را برای لوله‌های حامل سیال مورد بررسی قرار دادند. آنها با درنظرگرفتن پارامترهای سازه‌ای لوله‌های حامل سیال به عنوان میدان‌های تصادفی، توانستند با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو احتمال رخداد ناپایداری دیورژانس را به‌دست آورند.

در این مقاله، با توجه به وجود عدم قطعیت در خواص مکانیکی تیر (مدول یانگ) و موقعیت قائم تورق، برای نخستین بار با رویکردی احتمال‌اندیشانه به مطالعهٔ ارتعاشات آزاد تیرهای متورق پرداخته می‌شود. مدل‌سازی تیر متورق براساس نظریهٔ کلاسیک تیرها می‌باشد. در آغاز این تیر را به چهار تیر سالم تقسیم کرده که در مرزهای تورق به یکدیگر متصل می‌باشند. این چهار تیر را تیرهای فرعی می‌نامیم. سپس با استفاده از انرژی‌های جنبشی و پتانسیل کل تیر و روش اجزا محدود، شکل ماتریسی معادلات حرکت به دست می‌آید. در این پژوهش، هر یک از پارامترهای تصادفی به صورت یک میدان تصادفی در نظر گرفته می‌شوند. سپس، با استفاده از دو روش متفاوت گسسته‌سازی، این میدان‌های تصادفی به منظور به‌کارگیری بهینه در روش اجزا محدود، به بردارهای تصادفی تبدیل می‌شوند. در نهایت، با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو و ترکیب آن با روش اجزا محدود، ویژگی‌های آماری سامانه نظیر میانگین، انحراف استانده (انحراف استاندارد) و تابع چگالی احتمال بسامدها و شکل مدهای سامانه محاسبه می‌شوند. همچنین، تحلیل ارتعاشات آزاد تیر مذکور براساس مدهای آزاد و مقید و برای شرایط مرزی گوناگون انجام می‌شود.

۲- فرمول‌بندی یقین‌اندیشانه تیر متورق

در شکل ۱ یک تیر متورق به طول L (متر)، ارتفاع h (متر) و عرض b (متر) نشان داده شده است. دستگاه مختصات متناظر با محورهای طولی، عرضی و قائم تیر به ترتیب با (z, y, x) درنظر گرفته شده است.

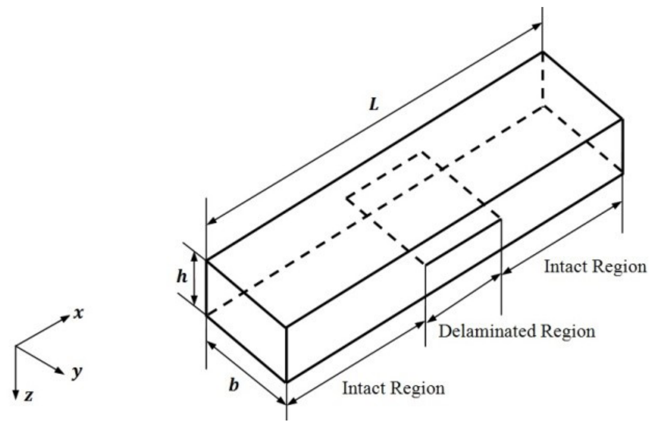


Fig. 1. Schematic of the beam with a delamination

شکل ۱: شماتیکی از تیر با یک تورق

همان‌طور که در شکل ۲ مشخص است، تیر متورق براساس موقعیت تورق به چهار تیر فرعی سالم تقسیم شده که دارای مشخصات هندسی $L_i \times h_i$ $(i=۱\text{-}۴)$ می‌باشد که در آن h_2 و h_3 به ترتیب ضخامت تیرهای ۲ و ۳ بوده و $h_1=h_4=h$ و $L_2=L_3=L-L_1-L_4$ می‌باشد.

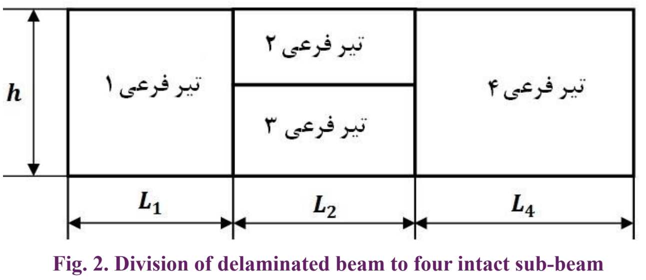
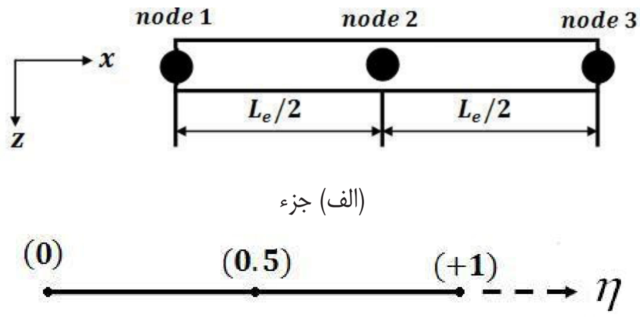


Fig. 2. Division of delaminated beam to four intact sub-beam

شکل ۲: تقسیم تیر متورق به چهار تیر فرعی سالم

در این مقاله جهت تحلیل دینامیکی مسأله مذکور از روش اجزا محدود استفاده شده است. با توجه به شکل ۳، جزء مرتبه بالای درنظر گرفته شده دارای سه گره شامل دو گره انتهایی و یک گره میانی می‌باشد که هر گره نیز دارای دو درجه آزادی شامل تغییر مکان قائم (w) و مشتق آن (w') می‌باشد.

میدان تغییر مکان جزء را می‌توان با استفاده از توابع میان‌یابی هرمیتی به صورت زیر به‌دست آورد:



(ب) مختصات محلی جزء

Fig. 3. a) Element, b) Local coordinate of element
Considered element and local coordinate of it

شکل ۳: جزء درنظرگرفته شده و مختصات محلی آن

$$w=\sum_{i=1}^{3}\left(\Lambda_{2i-1}(\eta)w_i+\Lambda_{2i}(\eta)w'_i\right)=[\Lambda]\{\delta\} \quad (۱)$$

که در آن متغیر $(\eta=x/L_e)$ بیانگر مختصات محلی جزء بوده و $\{\delta\}$ بردار درجه آزادی جزء می‌باشد. همچنین، توابع شکل هرمیتی به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1(\eta)&=1-23\eta^2+66\eta^3-68\eta^4+24\eta^5\\
\Lambda_2(\eta)&=L_e\left(\eta-6\eta^2+13\eta^3-12\eta^4+4\eta^5\right)\\
\Lambda_3(\eta)&=16\eta^2-32\eta^3+16\eta^4\\
\Lambda_4(\eta)&=L_e\left(-8\eta^2+32\eta^3-40\eta^4+16\eta^5\right)\\
\Lambda_5(\eta)&=7\eta^2-34\eta^3+52\eta^4-24\eta^5\\
\Lambda_6(\eta)&=L_e\left(-\eta^2+5\eta^3-8\eta^4+4\eta^5\right)
\end{aligned} \quad (۲)$$

حال به منظور به‌دست آوردن ماتریس‌های جرم و سفتی جزء، انرژی‌های جنبشی و پتانسیل یک جزء تیر را می‌نویسیم. انرژی جنبشی یک جزء براساس نظریهٔ کلاسیک به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$T_e=\frac{1}{2}\int_0^{L_e} m_e w_{,t}^2 b dx \quad (۳)$$

که در آن:

m_e : جرم بر واحد سطح (کیلوگرم بر مترمربع)

کاما: مشتق‌گیری نسبت به متغیر ظاهر شده پس از آن

همچنین، انرژی پتانسیل کرنشی هر جزء به صورت زیر بیان می‌شود:

$$U_e=\frac{1}{2}\int_0^{L_e}(EI)^e w_{,xx}^{\ 2} b dx \quad (۴)$$

با قراردادن میدان جابه‌جایی از رابطه (۱) در انرژی‌های جنبشی و پتانسیل، ماتریس‌های جرم و سفتی جزء محاسبه می‌شوند:

$$\mathrm{T}=\frac{1}{2}\{\dot{\delta}\}^T\left[M^e\right]\{\dot{\delta}\} \quad (۵-\text{الف})$$

$$U=\frac{1}{2}\{\delta\}^T\left[K^e\right]\{\delta\} \quad (۵-\text{ب})$$

که در آن:

$$\left[M^e\right]=\int_0^1 m_e[\Lambda]^T[\Lambda] L_e b\, d\eta \quad (۶-\text{الف})$$

$$\left[K^e\right]=\int_0^1 (EI)^e[\Lambda]_{,xx}^{\ T}[\Lambda]_{,xx} L_e b\, d\eta \quad (۶-\text{ب})$$

ماتریس‌های جرم و سفتی فوق برای هر جزء از تیرهای فرعی ۱ تا ۴ قابل استفاده است و تنها کافی است برای هر تیر فرعی جرم واحد سطح (m_e) و سفتی $(EI)^e$ مختص آن را در رابطه (۶) جایگزین کنیم. با استفاده از سرهم کردن ماتریس‌های جرم و سفتی تمامی اجزای تیر، معادلات حرکت سامانه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$[M]\{\ddot{a}\}+[K]\{a\}=0 \quad (۷)$$

که در آن $\{a\}$ ، $\{\ddot{a}\}$ بردار درجات آزادی و شتاب پس از اعمال شرایط مرزی تیر اصلی و نیز شرایط پیوستگی در دو انتهای تورق می‌باشند. قابل ذکر است با توجه به میدان تغییرمکان حاکم بر تیرهای فرعی، گره‌های واقع شده در مرز تیرهای فرعی ۱، ۲ و ۳ در انتهای سمت چپ تورق و نیز گره‌های واقع شده در مرز تیرهای ۲، ۳ و ۴ در انتهای سمت راست تورق، خیز و شیب برابر درنظر گرفته شده که بیانگر شرایط پیوستگی در دو انتهای تورق است؛ به عبارت دیگر با توجه به شکل ۴ می‌توان نوشت:

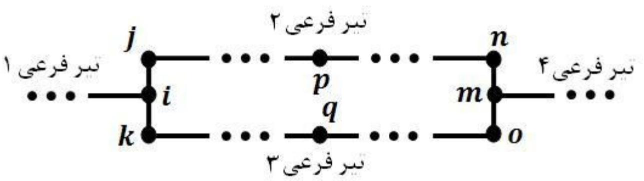


Fig. 4. The nodes located at the border of sub-beams

شکل ٤: گره‌های واقع شده در مرز تیرهای فرعی

$$\begin{aligned}
&w_i=w_j=w_k, \quad \theta_i=\theta_j=\theta_k\\
&w_m=w_n=w_o, \quad \theta_m=\theta_n=\theta_o
\end{aligned} \quad (۸)$$

در ادامه با فرض حرکت هارمونیک $(\{a\}=\{a_0\}e^{i\omega t})$، خواهیم داشت:

$$\left([K]-\omega^2[M]\right)\{a_0\}=\{0\} \quad (۹)$$

که در آن:

ω : بسامد سامانه (هرتز)

$\{a_0\}$: بردار شکل مد متناظر (متر)

حال به منظور تجزیه‌وتحلیل ارتعاشات آزاد سامانه می‌توان از روش

مقادیر ویژه استفاده کرد. نکته قابل ذکر این است که جهت مدل‌سازی براساس مدل مدهای مقید و آزاد، بین تیرهای فرعی ۲ و۳ فنرهایی با سفتی k قرار داده شده که به انرژی پتانسیل کرنشی تیرهای فرعی ۲ و ۳ اضافه شده است [۵]؛ به عبارت دیگر بین دو گره متناظر p و q (شکل ۴) واقع شده بر تیرهای فرعی ۲ و ۳ فنر الاستیک خطی قرار داده شده است. واضح است که مقادیر سفتی صفر و بسیار بالا به ترتیب بیانگر مدهای آزاد و مقید می‌باشند. همچنین جهت روشن شدن بهتر مفهوم بازشوندگی و عدم بازشوندگی لایه‌ها به ترتیب در مدل‌سازی مدهای آزاد و مقید شکل ۵ ترسیم شده است. همان‌طور که از مدل‌سازی مد آزاد و از شکل ۵–الف مشاهده می‌شود دو گره متناظر و نمونه p و q در تیرهای فرعی ۲ و ۳ دارای دامنه ارتعاشات متفاوتی هستند و لذا بازشوندگی در یک نیم سیکل ارتعاشی و رسوخ در نیم سیکل دیگر روی می‌دهد. در مقابل در مد مقید دامنه ارتعاشی تیرهای فرعی ۲ و ۳ با یکدیگر برابر بوده و لذا پدیده بازشوندگی در این نوع مدل‌سازی مشاهده نشده و از رسوخ لایه‌ها نیز در حین حرکت ارتعاشی جلوگیری می‌کند. برای مطالعه بیشتر به مراجع [۵–۱] مراجعه شود.

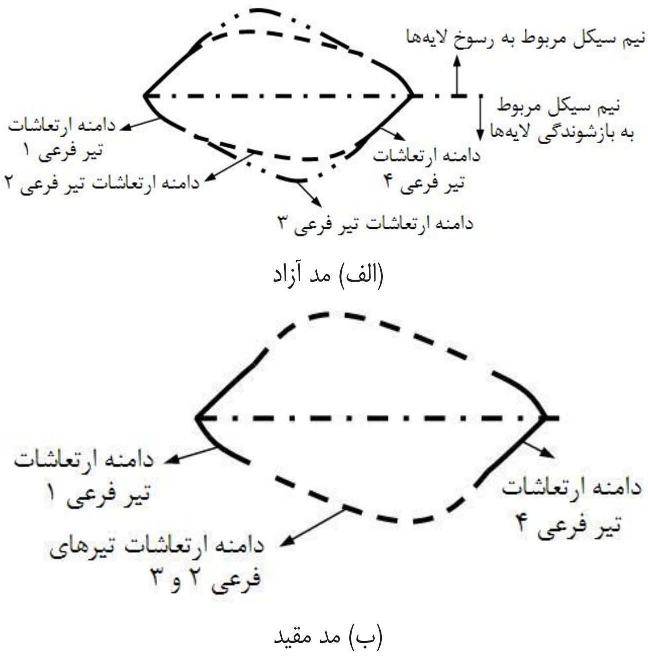


Fig. 5. a) Free mode, b) Constrained mode modeling based on free and constrained modes

شکل ۵: مدل‌سازی براساس مدهای آزاد و مقید

۳- تجزیه‌وتحلیل احتمال‌اندیشانه تیر متورق

با تصادفی درنظرگرفتن پارامترهای سامانه، نظیر مدول یانگ و ارتفاع قائم تورق، معادلات حرکت حاکم بر تیر متورق به معادلات دیفرانسیل تصادفی تبدیل می‌شوند. برای حل این معادلات ابتدا باید میدان‌های تصادفی را با استفاده از روش‌های گسسته‌سازی به بردارهای تصادفی تبدیل کرد و سپس با روش شبیه‌سازی مونت کارلو و ترکیب آن با روش اجزا محدود پاسخ‌های آماری سامانه را به‌دست آورد.

۳- ۱- گسسته‌سازی میدان‌های تصادفی

به منظور به‌کارگیری آسان‌تر میدان‌های تصادفی در معادلات اجزا محدود، از روش‌های گسسته‌سازی استفاده می‌شود. در این روش‌ها یک میدان تصادفی توسط مجموعه‌ای محدود از متغیرهای تصادفی تقریب زده می‌شود. روش‌های گسسته‌سازی میدان‌های تصادفی را می‌توان به سه دسته کلی تقسیم کرد: روش‌های گسسته‌سازی نقطه‌ای، میانگین‌گیری و بسط به صورت سری. در این پژوهش، از روش‌های گسسته‌سازی نقطه‌ای و میانگین‌گیری استفاده می‌شود که در ادامه توضیح مختصری از آنها ارائه شده است.

به طور کلی روش‌های گسسته‌سازی نقطه‌ای به گونه‌ای عمل می‌کنند که مقدار میدان در نقطه خاصی از هر بازه به عنوان مقدار میدان تصادفی در آن بازه انتخاب می‌شود. سازوکارهای متفاوتی برای انتخاب این نقطه خاص وجود دارد که باعث به وجود آمدن روش‌های مختلفی در این زمینه نیز شده است. اگر آن نقطه خاص، نقطه میانی هر بازه در نظر گرفته شود، روش مذکور روش گسسته‌سازی نقطه وسط نامیده می‌شود که پرکاربردترین روش در این زمینه نیز می‌باشد. در این روش، در آغاز میدان تصادفی بر روی یک شبکه گسسته‌سازی می‌شود و سپس به منظور توصیف میدان تصادفی، از مقدار آن در نقاط میانی هر جزء، یعنی x_i^c، استفاده می‌شود؛ به عبارتی، در این روش هر میدان تصادفی توسط متغیرهای تصادفی میانی هر جزء تخمین زده می‌شود:

$$\hat{X}\left(x\right)=X\left(x_i^c\right)=b_i \quad , \quad X\in\Omega_i \tag{۱۰}$$

شایان ذکر است که میانگین و کوواریانس این روش و میدان تصادفی اصلی با هم برابر خواهند بود؛ در نتیجه داریم:

$$E\left[b_i\right]=E\left[X\left(x_i^c\right)\right]=m \tag{۱۱}$$

$$B_{ij}=\text{cov}\left(b_i,b_j\right)=B_x\left(x_i^c,x_j^c\right) \tag{۱۲}$$

اما در روش گسسته‌سازی میانگین‌گیری، متغیرهای اتفاقی عبارتند از انتگرال‌های وزنی میدان تصادفی بر روی یک دامنه. برای نمونه در روش میانگین موضعی، میدان تصادفی توسط یک میدان ثابت تخمین زده می‌شود که این میدان ثابت خود به‌وسیلهٔ میانگین‌گیری از میدان پیوسته در هر جز Ω_i محاسبه می‌شود [۱۲]:

$$\hat{X}\left(x\right)=\frac{\int X\left(x\right)d\Omega}{\int d\Omega}=b_i\,,\quad X\in\Omega_i \tag{۱۳}$$

گشتاورهای آماری مرتبه اول و دوم متغیرهای تصادفی را می‌توان بر حسب گشتاورهای آماری میدان تصادفی بیان کرد:

$$E\left(b_i\right)=\frac{\int E\left[X\left(x\right)\right]d\Omega}{\left|\Omega_i\right|}=m \qquad (۱۴)$$

$$E\left(b_i\right)=\frac{\int E\left[X\left(x\right)\right]d\Omega}{\left|\Omega_i\right|}=m \qquad (۱۵)$$

ونمارک [۱۲] عبارتی تحلیلی برای میدان‌های همگن یک بعدی بر روی یک شبکه منظم به‌دست آورد؛ به عنوان مثال، هم‌پراش بین دو المان U و U' از رابطۀ زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(U,U')=&\frac{\sigma^2}{2UU'}\left(U_0^2\gamma\left(U_0\right)-U_1^2\gamma\left(U_1\right)\right.\\&\left.-U_2^2\gamma\left(U_2\right)+U_3^2\gamma\left(U_3\right)\right)\end{aligned} \qquad (۱۶)$$

که در آن σ انحراف استانده، γ تابع پراش (واریانس) می‌باشد و از رابطۀ زیر به‌دست می‌آید:

$$\gamma(\mathrm{L})=\frac{2}{L}\int_0^L\left(1-\frac{k}{L}\right)\rho\left(k\right)dk \qquad (۱۷)$$

همچنین U_0 ، U_1 ، U_2 و U_3 بازه‌هایی هستند که در شکل ۶ نمایش داده شده‌اند. قابل ذکر است که در این مقاله جهت گسسته‌سازی میدان تصادفی، تعداد اجزای میدان مذکور با تعداد اجزای روش اجزا محدود برابر درنظر گرفته شده‌اند.

پس از گسسته‌سازی میدان تصادفی توسط روش‌های نقطه-وسط و میانگین موضعی، نوبت به تولید میدان تصادفی می‌رسد تا بتوان با قرار دادن آن در معادلات، مسأله تصادفی را تبدیل به یک مسأله قطعی کرد. برای تولید یک میدان تصادفی ابتدا یک بردار تصادفی مستقل گاوسی Z با میانگین و انحراف استانده مورد نظر مسأله تولید می‌کنیم. همچنین، تعداد درایه‌های این بردار تصادفی برابر با تعداد اجزا محدود می‌باشد. سپس ماتریس هم‌پراش (B) با استفاده از معادله (۱۲) برای روش نقطه-وسط و با استفاده از معادله (۱۶) برای روش میانگین موضعی به‌دست می‌آید. درنهایت با استفاده از تجزیه چولسکی تابع هم‌پراش می‌توان بردار وابسته متغیر تصادفی $\vec{X}$ را به صورت زیر به‌دست آورد:

$$\vec{X}=\overline{X}+CZ \qquad (۱۸)$$

که در آن C یک ماتریس پایین مثلثی است و از تجزیۀ چولسکی ماتریس هم‌پراش محاسبه می‌شود. باید توجه داشت که ماتریس هم‌پراش، ماتریسی مثبت معین می‌باشد.

۳- ۲- روش شبیه‌سازی مونت کارلو

با تصادفی درنظرگرفتن پارامترهای سامانه، معادلات حاکم بر سامانه نیز به معادلات دیفرانسیل تصادفی تبدیل می‌شود. روش‌های مختلفی به منظور حل معادلات دیفرانسیل تصادفی ارائه شده است که یکی از آنها روش شبیه‌سازی مونت کارلو می‌باشد. به‌عنوان تعریفی ساده و کامل از روش شبیه‌سازی مونت-کارلو، می‌توان این روش را به آزمایشگاهی مجازی تشبیه کرد که امکان انجام تعداد دلخواهی از آزمایش را بدون هزینه برای محقق فراهم می‌نماید. در واقع این روش یک مسألۀ احتمالاتی را به یک مسألۀ آماری تبدیل می‌کند. بارزترین مزیت این روش به‌دست آوردن پاسخ‌های دقیق با استفاده از شمار زیادی شبیه‌سازی، برای تمامی مسائلی است.

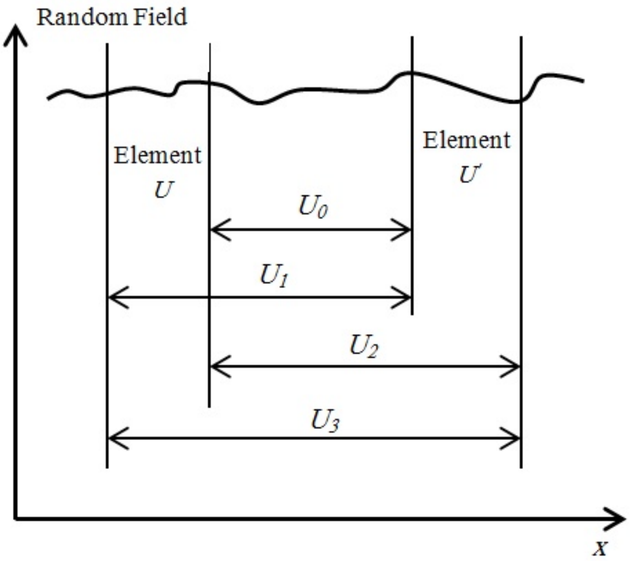


Fig. 6. Definition of the distances used in the covariance relation between local averages [12]

شکل ٦: بازه‌های تعریف شده در رابطۀ کوواریانس بین میانگین‌های موضعی [۱۲]

که پاسخ قطعی آنها مشخص می‌باشد. هرچند که هزینۀ محاسباتی این روش در برخی مسائل بسیار بالاست. در این روش، ابتدا با استفاده از روش‌های گسسته‌سازی و با توجه به تابع همبستگی پارامترهای تصادفی، هریک از میدان‌های تصادفی به متغیرهای تصادفی وابسته تبدیل می‌شوند. سپس، هر یک از این متغیرهای تصادفی تولید شده به یکی از اجزا تخصیص داده می‌شود و به کمک روش اجزا محدود می‌توان یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای متقن (قطعی) به‌دست آورد. تکرار روند بالا و تولید میدان‌های تصادفی جدید به معادلات دیفرانسیل قطعی دیگری ختم می‌شود. با به‌دست آوردن پاسخ هریک از این معادلات دیفرانسیل متقن و انجام تجزیه‌وتحلیل آماری و احتمالی بر روی این نتایج می‌توان به پاسخ‌های آماری سامانه از قبیل میانگین، انحراف استانده و تابع چگالی احتمال دست یافت. در روش مونت کارلو، خطا برابر با $\sigma/\sqrt{N}$ می‌باشد، که در آن σ انحراف استانده و N تعداد نمونه‌های مورد نیاز برای شبیه‌سازی می‌باشد. آشکارا هرچه شمار نمونه‌های شبیه‌سازی بیشتر باشد، این روش دارای خطای کمتری می‌باشد؛ اما از سوی دیگر، هزینۀ محاسباتی ناشی از افزایش شمار شبیه‌سازی‌ها باید درنظر گرفته شود.

٤- نتایج شبیه‌سازی

به منظور راستی‌آزمایی روش، در آغاز به حل معادلات دیفرانسیل قطعی حاکم بر سامانه پرداخته می‌شود و نتایج فرکانسی به‌دست آمده با کارهای دیگران مقایسه می‌شود. سپس، با درنظرگرفتن پارامترهای سامانه نظیر مدول یانگ و ارتفاع قائم تورق به عنوان میدان‌های تصادفی، تأثیر اتفاقی بودن این پارامترها بر روی سامانه ارزیابی می‌شود. در این مقاله، پاسخ‌های سامانه برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف مانند تیر با تکیه‌گاه ساده، تیر یک‌سر درگیر و تیر دو سر گیردار به‌دست آمده است. همچنین ارتعاشات آزاد سامانه برمبنای مدهای آزاد و مقید انجام شده است.

۴- ۱- پاسخ معادلات دیفرانسیل متقن

جهت بررسی صحت و سقم روابط و برنامه‌های نوشته شده، بسامدهای مد اول و دوم تیر با خواص داده شده در مرجع [۲] مقایسه شده است.

همان‌طور که جدول ۱ و جدول ۲ پیداست نتایج به‌دست آمده با نتایج ارائه شده توسط مرجع [۲] کاملاً هم‌خوانی دارد.

۴- ۲- پاسخ معادلات دیفرانسیل تصادفی

پس از حصول اطمینان از صحت روش پیاده شده، نوبت به بررسی سامانه با دیدگاه تصادفی است. همان‌طور که پیشتر نیز گفته شد، در این پژوهش پارامترهای مدول یانگ و ارتفاع قائم تورق به صورت میدان‌های تصادفی مدل‌سازی می‌شوند که می‌توان آنها را به صورت زیر تعریف کرد:

$$E=\overline{E}\left(1+a(x)\right) \qquad (\text{الف} -۱۹)$$

$$h_2=\overline{h}_2\left(1+b(x)\right) \qquad (\text{ب} -۱۹)$$

که در آن‌ها $\overline{E}$ و $\overline{h}_2$ به ترتیب مقدارهای میانگین مدول یانگ و ارتفاع

جدول ۱: مقایسه نتایج فرکانسی برای مدهای اول و دوم تیر یک‌سر گیردار با تورق در صفحه میانی $h_2/h=1/2$

Table 1. Comparison the first and second modes of frequency results for cantilevered beam with delamination in mid-plane ($h_2/h=1/2$)

نمونه		پارامترهای تورق		مد اول (هرتز) [۲]		مد دوم (هرتز) [۲]		مقاله حاضر	
شماره	L(mm)	L_1(mm)	L_d(mm)	تجربی	تحلیلی	تجربی	تحلیلی	مد اول	مد دوم
۱	۲۰۰	–	۰	۳۳/۷	۳۳/۹۰	۲۰۹/۹	۲۱۲/۵۳	۳۳/۶۲	۲۱۰/۷۳
۲	۲۵۰	۱۳۸/۵	۱۴	۲۱/۸	۲۲/۰۴	۱۳۶/۲	۱۳۸/۱	۲۱/۵۱	۱۳۵/۸۵
۳	۲۵۰	۱۱۸/۲۵	۶۱/۵	۲۱/۸	۲۱/۸۶	۱۳۵/۹	۱۳۷/۰۱	۲۱/۳۵	۱۳۴/۸۸
۴	۲۰۰	۷۴/۷۵	۴۲/۵	۳۳/۲	۳۳/۶۳	۲۰۸/۷	۲۱۱/۳۴	۳۳/۴	۲۰۹/۹
۵	۱۸۰	۴۷/۲۵	۷۳/۵	۴۰/۱	۴۰	۲۴۷/۴	۲۴۸/۶۵	۳۹/۶۵	۲۴۶/۸۹
۶	۱۶۵	۳۲/۵	۷۳/۵	۴۶/۱	۴۶/۴۹	۲۷۴/۲	۲۷۳/۲۹	۴۶/۳۷	۲۷۴/۱
۷	۱۵۰	۱۸/۲۵	۶۱/۵	۵۵	۵۷/۷۲	۲۹۹/۵	۳۰۶/۳۵	۵۶/۵۳	۳۰۰/۵۹

جدول ۲: مقایسه نتایج فرکانسی برای مدهای اول و دوم تیر یک‌سر گیردار با تورق در $h_2/h=1/3$

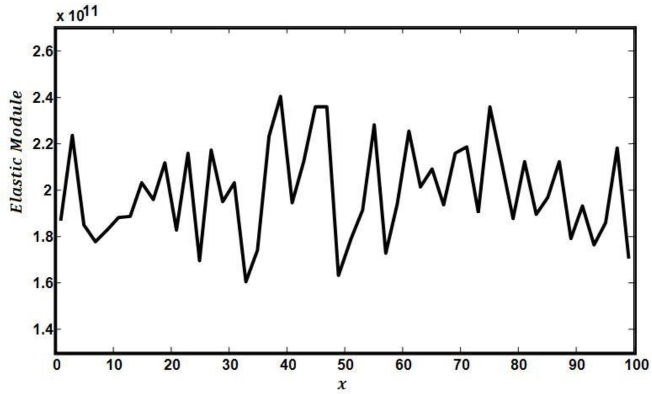
Table 2. Comparison the first and second modes of frequency results for cantilevered beam with delamination in mid-plane ($h_2/h=1/3$)

نمونه		پارامترهای تورق		مد اول (هرتز) [۲]			مد دوم (هرتز) [۲]			مقاله حاضر	
شماره	L(mm)	L_1(mm)	L_d(mm)	تجربی	مد مقید	مد آزاد	تجربی	مد مقید	مد آزاد	مد اول	مد دوم
۱	۲۴۰	۱۹/۲۵	۱۵۳/۵	۳۱/۶	۳۲/۳۷	۳۲/۲۶	۱۷۲/۱	۱۷۶/۴۶	۱۵۹/۸۶	۳۱/۱۱	۱۷۰/۲۹
۲	۲۲۰	۶۶	۱۰۴	۴۰/۴	۴۰/۶۲	۴۰/۶۱	۲۴۷/۹	۲۵۸/۶۲	۲۵۱/۸۵	۴۰/۰۲	۲۵۲/۷۶
۳	۱۷۰	۱۶	۱۰۴	۶۱/۹	۶۳/۶۷	۶۳/۶۵	۳۷۸/۴	۳۵۱/۸	۳۲۶/۳	۶۲/۸۳	۳۶۷/۱۴
۴	۲۲۵	۷۲	۱۳۳	۳۸/۲	۳۸/۵۳	۳۸/۵	۲۳۳/۷	۲۳۶/۸۵	۲۱۹/۹۷	۳۸/۴۹	۲۳۱/۴۹
۵	۱۷۵	۲۲	۱۳۳	۵۶/۹	۵۸/۰۶	۵۷/۹۷	۳۳۹/۳	۳۴۶/۵	۲۴۸/۹۶	۵۶/۵۱	۳۳۷/۰۴
۶	۲۰۰	۴۵	۱۲۲	۴۶/۶	۴۷/۲۱	۴۷/۱۸	۲۹۱	۲۹۷/۰۶	۲۶۰/۸۸	۴۶/۴۱	۲۹۲/۰۳
۷	۲۲۵	۷۱	۱۳۴	۴۰/۱	۳۹/۵۷	۳۹/۵۴	۲۳۷/۹	۲۴۳/۶۶	۲۲۳/۱۳	۳۹/۴۳	۲۳۰/۴
۸	۱۷۵	۲۱	۱۳۴	۶۰/۶	۵۹/۵۷	۵۹/۴۸	۳۵۸/۶	۳۵۴/۱۷	۲۴۷/۸۷	۵۹/۳	۳۵۴/۳۸

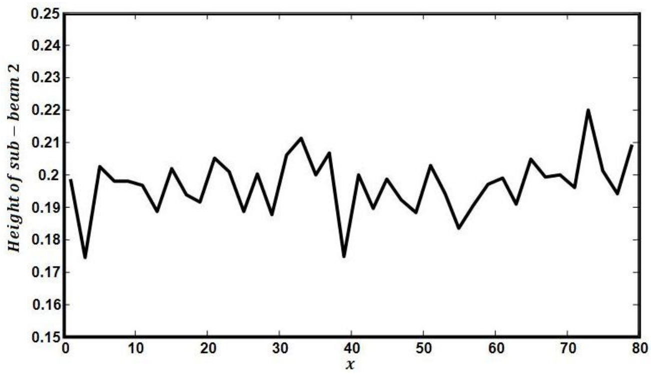
قائم تورق می‌باشند. همچنین $a(x)$ و $b(x)$ دو میدان تصادفی و پیوسته مستقل تک متغیره گاوسی می‌باشند که میانگین آنها برابر صفر و انحراف استانده هر یک از این میدان‌ها، به ترتیب برابر ۰/۱ و ۰/۰۵ فرض می‌شود؛ همچنین مقادیر طول، ارتفاع، عرض، چگالی و میانگین مدول یانگ تیر به ترتیب در زیر داده شده است:

$$L=100m,\ h=1m,\ b=1m,\ \overline{E}=200\times10^{9}\,\text{Pa},\ \rho=7800kg/m^{3}$$

در شکل ۷ یک نمونه از میدان‌های تصادفی برای پارامترهای مدول یانگ و ارتفاع قائم تورق ترسیم شده است.



(الف) مدول یانگ



(ب) ارتفاع قائم تورق

Fig. 7. a) Modulus of Elasticity, b) Height of the delamination one sample of random field for modulus of elasticity and height of the delamination as stochastic parameters

شکل ۷: یک نمونه از میدان تصادفی برای پارامترهای تصادفی مدول یانگ و ارتفاع قائم تورق

شایان ذکر است که تورق به صورت مرکزی ($L_1=L_4$) درنظر گرفته شده است. از طرفی، تابع همبستگی میدان‌های $a(x)$ و $b(x)$ به صورت نمایی فرض می‌شود؛ زیرا به خوبی می‌تواند شرایط مسائل مهندسی را برای یک میدان تصادفی لحاظ کند (شکل ۸) و همچنین در بسیاری از مقالات علمی در زمینهٔ مهندسی (به عنوان مثال در مرجع [۱۳]) از این تابع به منظور توصیف میدان تصادفی استفاده شده است:

$$\rho(k)=e^{-\frac{k}{l}} \tag{۲۰}$$

که در آن k بازهٔ بین دو نقطه و l طول همبستگی می‌باشد. از طرفی می‌دانیم هرچه که طول همبستگی عدد بزرگتری انتخاب شود، میدان تصادفی بیشتر شبیه به یک متغیر تصادفی عمل می‌کند؛ لذا در این مقاله طول همبستگی برابر مقدار پنج فرض شده است. برای تجزیه‌وتحلیل احتمال‌اندیشانه و به‌دست آوردن پاسخ‌های آماری سامانه، از شبیه‌سازی‌های مونت کارلو با ده هزار حلقه شبیه‌سازی استفاده می‌شود. همچنین، از هر دو روش گسسته‌سازی نقطه–وسط و میانگین موضعی برای گسسته‌سازی میدان‌های تصادفی استفاده می‌شود. البته به دلیل دقیق‌تر بودن روش گسسته‌سازی میانگین موضعی، بیشتر از این روش برای گسسته‌سازی میدان‌های تصادفی استفاده شده است. از طرفی به منظور مشاهده بهتر تفاوت بین مدهای آزاد و مقید، از مقادیر مختلف برای طول و ارتفاع قائم تورق استفاده شده است.

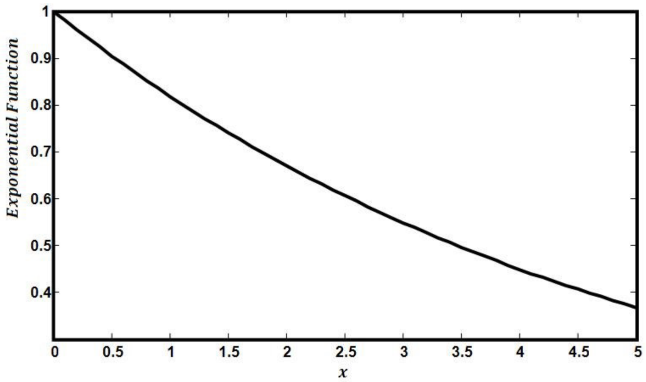


Fig. 8. Exponential correlation function

شکل ۸: تابع همبستگی نمایی

۴– ۲– ۱– میانگین بسامدها

میانگین بسامد مدهای اول و دوم تیر متورق با شرایط مرزی مختلف و روش گسسته‌سازی میانگین موضعی در جدول ۳ ارائه شده است. تورق در صفحه میانی تیر درنظرگرفته شده است. قابل ذکر است منظور از مد اول قطعی این است که تمامی پارامترهای سامانه به صورت قطعی درنظرگرفته شوند. همچنین به منظور مقایسهٔ مناسب نتایج حالت‌های قطعی و تصادفی، مقدار میانگین پارامترهای تصادفی با مقادیر قطعی برابر درنظر گرفته شده‌اند. همان‌طور که مشخص است مقادیر میانگین بسامدها تفاوت چندانی با حالت قطعی ندارد و همین تفاوت اندک نیز به دلیل حضور عبارت h_2^3 در معادلات (وجود ممان اینرسی I در معادله ۶–ب) می‌باشد؛ زیرا برای محاسبه میانگین پاسخ‌ها باید از تابع امید ریاضی استفاده کرد. از طرفی با توجه به معادله حاکم بر مسأله (معادله ۷) و معادلات اجزا محدود مرتبط (معادلات ۶)، مدول یانگ به صورت خطی در معادلات ظاهر می‌شود؛ لذا امید ریاضی آن برابر مقدار میانگین آن می‌باشد؛ اما ارتفاع قائم تورق به صورت توان ۳ در معادلات سامانه ظاهر می‌شود (ممان اینرسی در معادله ۶–ب) که دیگر امید ریاضی آن برابر خود میانگین این پارامتر نمی‌باشد که این اختلاف باعث به

وجود آمدن تفاوتی اندک میان بسامدهای قطعی و مقدار میانگین بسامد مد اول در جدول ۳ شده است. نکته حائز اهمیت دیگر آن است که با توجه به اینکه تورق دارای طول کوتاهی بوده و همچنین در صفحه میانی تیر واقع شده است در نتیجه میانگین بسامدهای پیش‌بینی شده براساس مدهای آزاد و مقید تقریباً یکسان می‌باشد. همان‌طور که از مدل‌سازی مدهای آزاد و مقید می‌توان دریافت تفاوت بین بسامدهای پیش‌بینی شده توسط این دو مدل، مبنایی جهت تشخیص بازشوندگی تیرهای فرعی ۲ و ۳ و نیز شدت آن در حین حرکت ارتعاشی می‌باشد؛ درنتیجه در این حالت بازشوندگی قابل توجهی در تیر متورق روی نمی‌دهد؛ همچنین با توجه به نتایج ارائه شده، مدهای آزاد و مقید به ترتیب حدود پایین و بالای میانگین بسامد را ارائه می‌دهند.

در جدول ۴ میانگین بسامد مدهای اول و دوم برای تیر یک‌سر گیردار و با دو روش گسسته‌سازی نقطه–وسط و میانگین موضعی و همچنین دو مقدار مختلف برای پارامترهای تورق ارائه شده است. همان‌طور که مشخص است با ازدیاد طول تورق و کاهش ارتفاع تورق در تیر فرعی ۲، تفاوت بین مقادیر میانگین بسامد براساس مدهای آزاد و مقید افزایش یافته که نشان‌دهنده بازشوندگی تیرهای فرعی ۲ و ۳ در حین حرکت ارتعاشی می‌باشد. همچنین اختلاف کمی میان بسامدهای حاصل از روش گسسته‌سازی نقطه–وسط و میانگین موضعی وجود دارد. با توجه به ماهیت این دو روش، می‌توان گفت که روش میانگین موضعی دقیق‌تر بوده و با افزایش تعداد شبیه‌سازی‌های مونت کارلو نتایج حاصل از این دو روش به یکدیگر میل می‌کنند.

۴- ۲- ۲- انحراف استانده بسامدها

انحراف استانده بسامد مدهای اول و دوم سامانه برای شرایط مرزی مختلف و روش گسسته‌سازی میانگین موضعی در جدول ۵ ارائه شده است. همان‌طور که از این جدول مشخص است مقدار انحراف استانده برای مدهای آزاد و مقید برابر می‌باشند که نشان‌دهنده عدم وجود پدیده بازشوندگی لایه‌های بالا و پایین تورق در تیر متورق می‌باشد. از طرفی مقدار انحراف استانده برای تیر دو سر گیردار و تیر یک‌سر گیردار به ترتیب دارای بیشترین و کمترین مقدار می‌باشد.

در جدول ۶ انحراف استانده بسامد مدهای اول و دوم برای تیر یک‌سر گیردار و با دو روش گسسته‌سازی نقطه–وسط و میانگین موضعی و همچنین دو مقدار مختلف برای پارامترهای تورق ارائه شده است. قابل ذکر است که در این حالت نتایج مدهای آزاد و مقید یکسان می‌باشد. همان‌طور که در مرجع [۱۳] پیش‌بینی شده است روش گسسته‌سازی نقطه–وسط از کرانه بالا و روش گسسته‌سازی میانگین موضعی از کرانه پایین به مقدار عددی پراش میدان تصادفی در هر جزء میل می‌کند. با توجه به نتایج به‌دست آمده در این پژوهش، مقدار انحراف استانده برای روش میانگین موضعی کمتر از روش نقطه–وسط می‌باشد که در انطباق کامل با مرجع [۱۳] می‌باشد؛ به عبارتی، به کمک این دو روش، یک بازه برای مقدار انحراف استانده بسامدهای سامانه به‌دست می‌آید که کران پایین این بازه توسط روش گسسته‌سازی میانگین موضعی و کران بالای آن توسط روش گسسته‌سازی نقطه–وسط مشخص می‌شود. همچنین، با توجه به جدول مذکور می‌توان گفت که مقادیر مختلف برای طول و ارتفاع تورق تاثیر زیادی بر انحراف استانده بسامدها

جدول ۳: میانگین بسامد مدهای اول و دوم ($\bar{h}_2=0.5h$ ، $L_2=0.2L$)

Table 3. Mean values of first and second modes frequencies ($h_2=0.5h$, $L_2=0.2L$)

	تکیه‌گاه ساده		دو سر گیردار		یک سر گیردار	
	آزاد	مقید	آزاد	مقید	آزاد	مقید
مد اول قطعی	۰/۹۸۰	۰/۹۸۰	۲/۶۶۱	۲/۶۶۱	۰/۴۵۱	۰/۴۵۱
میانگین مد اول	۰/۹۷۲	۰/۹۷۲	۲/۶۴۵	۲/۶۵۰	۰/۴۴۸	۰/۴۴۹
میانگین مد دوم	۵/۳۴۷	۵/۳۴۷	۸/۱۳۹	۸/۱۵۳	۲/۳۲۱	۲/۳۳

جدول ٤: میانگین بسامد مدهای اول و دوم برای پارامترهای مختلف تورق

Table 4. Mean values of first and second modes frequencies for different delamination parameters

	میانگین موضعی $L_2=0.2L$ $\bar{h}_2=0.5L$		نقطه–وسط $L_2=0.2L$ $\bar{h}_2=0.5L$		میانگین موضعی $L_2=0.8L$ $\bar{h}_2=0.2L$	
	آزاد	مقید	آزاد	مقید	آزاد	مقید
میانگین مد اول	۰/۴۴۸	۰/۴۴۹	۰/۴۴۹	۰/۴۵	۰/۴۰۲	۰/۴۰۴
میانگین مد دوم	۲/۳۲۱	۲/۳۳	۲/۳۲۵	۲/۳۳۲	۲/۰۳۲	۲/۴۸۶

جدول ۵: انحراف استانده بسامد مدهای اول و دوم ($\bar{h}_2=0.5h$ ، $L_2=0.2L$)

Table 5. Standard deviation of first and second modes frequency ($h_2=0.5h$, $L_2=0.2L$)

	تکیه‌گاه ساده		دو سر گیردار		یک سر گیردار	
	آزاد	مقید	آزاد	مقید	آزاد	مقید
انحراف استانده مد اول	۰/۰۱۲	۰/۰۱۲	۰/۰۲۸	۰/۰۲۸	۰/۰۰۵	۰/۰۰۵
انحراف استانده مد دوم	۰/۰۴۷	۰/۰۴۷	۰/۰۷۷	۰/۰۷۷	۰/۰۲۷	۰/۰۲۸

جدول ٦: انحراف استانده بسامد مدهای اول و دوم برای پارامترهای مختلف تورق (نتایج برابر برای مدهای آزاد و مقید)

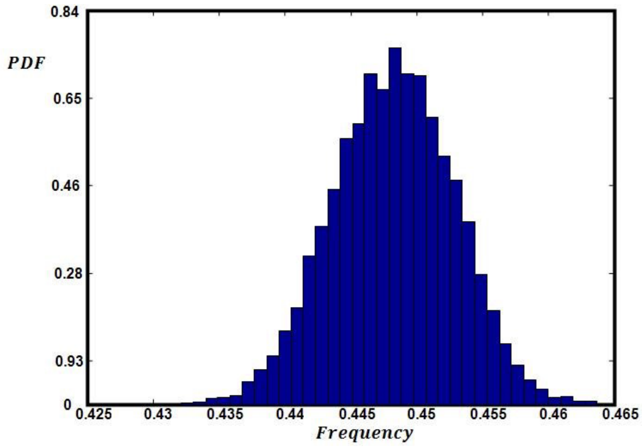
Table 6. Standard deviation of first and second modes frequency for different delamination parameters (equal results for free and constrained modes)

	میانگین موضعی $L_2=0.2L$ $\bar{h}_2=0.5L$	نقطه–وسط $L_2=0.2L$ $\bar{h}_2=0.5L$	میانگین موضعی $L_2=0.8L$ $\bar{h}_2=0.2L$
انحراف استانده مد اول	۰/۰۰۵	۰/۰۰۷	۰/۰۰۵
انحراف استانده مد دوم	۰/۰۲۷	۰/۰۴	۰/۰۲۵

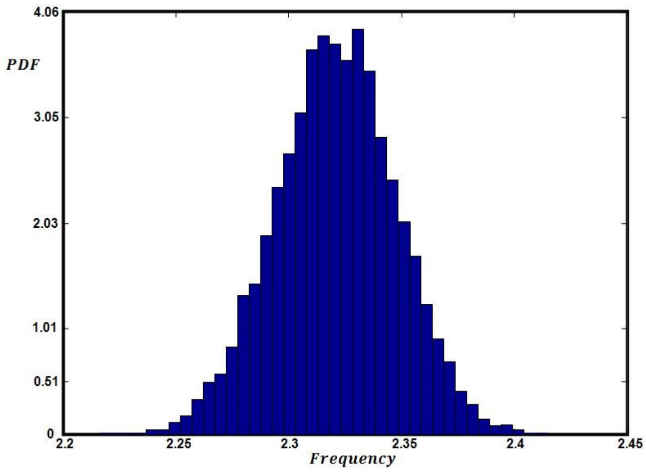
ندارد؛ هرچند که تأثیر قابل توجهی بر مقدار میانگین بسامدها دارد (به جدول ۴ مراجعه شود).

۴- ۲- ۳- تابع چگالی احتمال بسامدها

تابع چگالی احتمال به تابعی گفته می‌شود که توزیع آماری یک متغیر تصادفی را به فرم نقطه‌ای نمایش دهد. در شکل ۹- الف و شکل ۹- ب تابع چگالی احتمال بسامد مدهای آزاد اول و دوم برای تیر یک‌سر درگیر با پارامترهای تورق (L_2=0.2L ، $\bar{h}_2$=0.5h) نشان داده شده است. همان‌طور که از این شکل‌ها پیداست به دلیل گاوسی فرض کردن میدان‌های تصادفی سامانه، تابع چگالی احتمال بسامدهای مختلف شکل زنگوله‌ای خود را حفظ می‌کنند.



(الف) مد اول



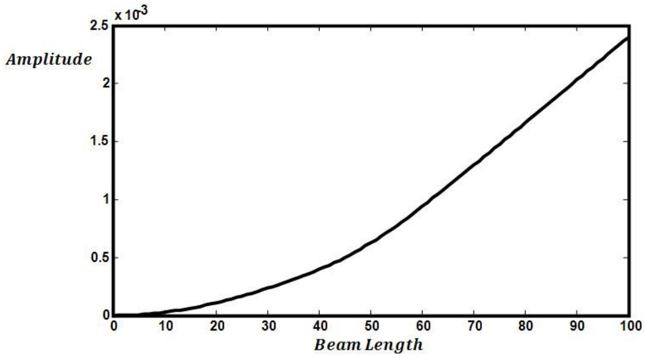
(ب) مد دوم

Fig. 9. a) First mode, b) second mode
Probability density functions of cantilevered beam for first and second modes in (h_2=0.5h, L_2=0.2L)

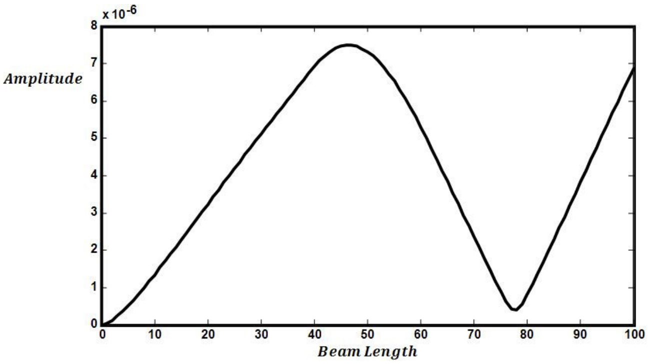
شکل ۹: تابع چگالی احتمال برای مدهای اول و دوم تیر یک سرگیردار در حالت ($\bar{h}_2$=0.5h ، L_2=0.2L)

۴- ۲- ۴- میانگین و انحراف استانده شکل مد اول سامانه

میانگین و انحراف استانده شکل مد اول تیر یک سر گیردار براساس مد آزاد و با پارامترهای تورق (L_2=0.2L ، $\bar{h}_2$=0.5h) به ترتیب در شکل ۱۰ (الف) و شکل ۱۰ (ب) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود به‌دلیل وجود تورق با طول کوتاه و نیز واقع شده در صفحه میانی تیر، بازشوندگی لایه‌ها مشاهده نشده است؛ به عبارت دیگر تیرهای فرعی ۲ و ۳ دارای دامنه ارتعاشی برابر می‌باشند.



(الف) میانگین شکل مد اول



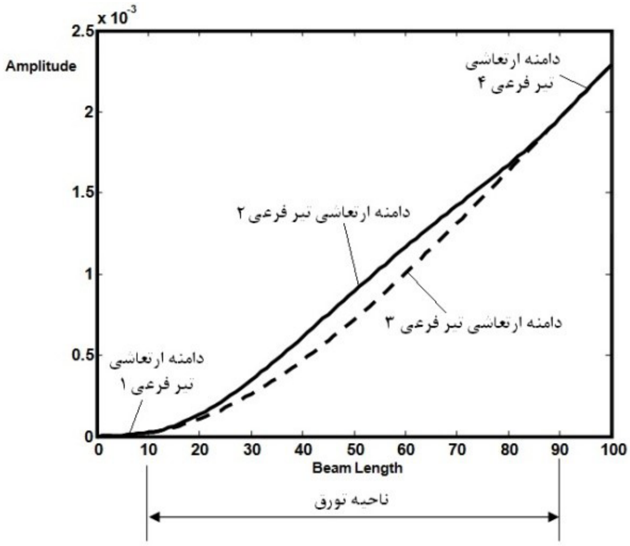
(ب) انحراف استانده مد اول

Fig. 10. a) Mean value of first mode shape, b) Standard deviation of second mode shape
Mean value and standard deviation of first mode shape for cantilevered beam with delamination parameters (h_2=0.5h, L_2=0.2L)

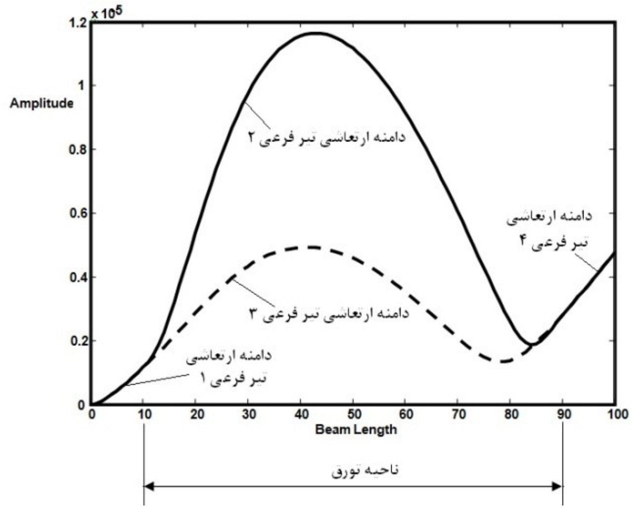
شکل ۱۰: میانگین و انحراف استانده شکل مد اول برای تیر یک سر گیردار با پارامترهای تورق ($\bar{h}_2$=0.5h ، L_2=0.2L)

حال به منظور بررسی تأثیر پارامترهای تورق بر شکل مدهای سامانه و نیز وجود پدیده بازشوندگی بین تیرهای فرعی ۲ و ۳ در حین حرکت ارتعاشی، میانگین و انحراف استانده شکل مد اول تیر یک‌سر گیردار براساس مد آزاد در حالت (L_2=0.8L ، $\bar{h}_2$=0.2h) به ترتیب در شکل ۱۱ (الف) و شکل ۱۱ (ب) رسم شده است. همان‌طور که از این شکل پیداست، با افزایش طول تورق و نیز نزدیکی آن به سطح آزاد با کاهش ارتفاع آن، می‌توان به وضوح بازشوندگی تورق را مشاهده کرد.

از طرفی، این بازشوندگی بر روی انحراف استانده نیز تأثیر زیادی داشته و همان‌طور که مشخص است بین مقدار انحراف استانده برای شکل مد تیر فرعی شماره ۲ و تیر فرعی شماره ۳ تفاوت زیادی وجود دارد. این بازشوندگی باعث می‌شود که مقدار میانگین لایه‌های ۲ و ۳ متفاوت از یکدیگر باشند. از طرفی، می‌دانیم که مقدار انحراف استانده برای هر پارامتر به مقدار میانگین



(الف) میانگین مد اول



(ب) انحراف استانده مد اول

Fig. 11. a) Mean value of first mode shape, b) Standard deviation of second mode shape
Mean value and standard deviation of first mode shape for cantilevered beam with delamination parameters (h_2=0.2h, L_2=0.8L)

شکل ۱۱: میانگین و انحراف استانده شکل مد اول برای تیر یک سر گیردار با پارامترهای تورق ($\bar{h}_2$=0.2h ، L_2=0.8L)

آن نیز وابسته است؛ بنابراین تفاوت میان میانگین‌های مد اول لایه‌های ۲ و ۳ باعث به‌وجود آمدن تفاوت بین انحراف استانده آنها نیز می‌شود. البته با مشاهدۀ نمودارهای شکل ۱۰ نیز می‌توان دریافت که زمانی که مقدار میانگین لایه‌های ۲ و ۳ با یکدیگر برابر باشد انحراف استاندۀ این لایه‌ها نیز با یکدیگر برابر می‌باشند که در واقع بیانگر این است که بازشوندگی تیرهای واقع شده در منطقه تورق رخ نمی‌دهد.

۴- ۲- ۵- تأثیر انحراف استانده پارامترهای ورودی بر روی پاسخ‌ها

میانگین و انحراف استانده بسامد مد آزاد اول تیر یک‌سر گیردار در حالت $\bar{h}_2$=0.2h ، L_2=0.8L برای مقادیر مختلف انحراف استانده پارامترهای

جدول ۷: تأثیر انحراف استانده پارامترهای ورودی بر روی پاسخ‌های فرکانسی مد آزاد اول تیر یک سر گیردار در حالت ($\bar{h}_2$=0.5h ، L_2=0.2L)

Table 7. The effect of input parameters standard deviation on the frequency response of the first free mode of a cantilevered beam in (h_2=0.5h, L_2=0.2L)

	σ_E= ۰/۰۵ σ_{h_2}=۰/۰۲۵	σ_E= ۰/۱ σ_{h_2}=۰/۰۵	σ_E= ۰/۱۵ σ_{h_2}=۰/۰۷۵	σ_E= ۰/۲ σ_{h_2}=۰/۱
مقدار میانگین	۰/۴۰۳۶	۰/۴۰۲	۰/۳۹۹۰	۰/۳۹۴۶
انحراف استانده	۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۵	۰/۰۰۷	۰/۰۱۰۳

ورودی در جدول ۷ ارائه شده است. همان‌طور که مشخص است با افزایش انحراف استانده پارامترهای ورودی، میانگین بسامد مد اول کاهش می‌یابد و از طرفی انحراف استانده بسامد مد اول افزایش می‌یابد که امری بدیهی است. نکته قابل ذکر انتهایی این است که هدف نویسندگان در مقاله حاضر ارائه استراتژی جهت تعیین مشخصه‌های ارتعاشات اتفاقی سازه‌های معیوب بوده و در نتیجه مسأله ساده‌ای جهت میل به هدف درنظر گرفته شده است. در به‌کارگیری عملی مسأله حاضر باید مسأله‌های پیچیده‌تری را مورد تحلیل قرار داد. علاوه بر آن از اهداف نویسندگان در آینده جهت کاربردی کردن مسأله مذکور و با عنایت به پاسخ ارتعاشات اتفاقی تیر متورق در مقاله حاضر، پیش‌بینی موقعیت تورق در سازه می‌باشد.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله مشخصات ارتعاشات تصادفی تیر متورق با به‌کارگیری روش اجزا محدود به همراه روش مونت کارلو ارائه شده است. در آغاز با توجه به مکان تورق، تیر متورق به چهار تیر فرعی سالم تقسیم شده که در مرزهای تورق به یکدیگر متصل شده‌اند. سپس با استفاده از انرژی‌های پتانسیل و جنبشی کل تیر و روش اجزا محدود، ماتریس‌های جرم و سفتی سامانه به‌دست آمده‌اند. از طرفی به دلیل حضور عدم قطعیت ذاتی در پارامترهای سازه و تورق نظیر مدول یانگ و ارتفاع قائم تورق، این پارامترها به عنوان میدان‌های تصادفی مدل‌سازی شده‌اند. در ادامه با استفاده از روش‌های گسسته‌سازی نقطه–وسط و میانگین موضعی، این میدان‌های تصادفی به بردارهای تصادفی تبدیل شده‌اند. سپس اثر پارامترهای تصادفی مذکور بر مقادیر فرکانسی و همچنین شکل مدهای سامانه بررسی شده و نتایج زیر به‌دست آمده است:

- به دلیل اندک بودن انحراف استانده پارامترهای تصادفی، مقدار میانگین بسامدهای مد اول و دوم برای حالت تورق میانی با طول کم تقریباً برابر با مقادیر این بسامدها در حالت قطعی می‌باشد. درصورتی که مقدار میانگین بسامد مد اول برای حالت تورق با طول زیاد و نزدیک به سطح آزاد تفاوت نسبتاً زیادی با حالت قطعی دارد.
- با افزایش طول و کاهش ارتفاع تورق، تفاوت مقادیر میانگین فرکانسی براساس مدهای آزاد و مقید افزایش می‌یابد.

- مقدار انحراف استانده بسامدهای سامانه براساس مدهای آزاد و مقید با یکدیگر برابر می‌باشد.
- مقدار انحراف استانده بسامدهای سامانه برای روش گسسته‌سازی نقطه–وسط، بیشتر از مقادیر متناظر آنها برای روش گسسته‌سازی میانگین موضعی می‌باشد.
- مقادیر مختلف طول و ارتفاع تورق تأثیر قابل توجهی بر انحراف استانده بسامدها نداشته در حالی‌که تأثیر زیادی بر مقدار میانگین بسامدها دارد.
- به دلیل گاوسی فرض کردن میدان‌های تصادفی سامانه، تابع چگالی احتمال بسامدهای مختلف شکل زنگوله‌ای خود را حفظ می‌کنند.
- با افزایش طول تورق و کاهش ارتفاع آن می‌توان بازشوندگی تورق را در میانگین شکل مد اول تیر مشاهده کرد.
- بازشوندگی تورق به دلیل تأثیر بر روی میانگین شکل مد اول، تأثیر زیادی بر روی انحراف استانده شکل مد اول نیز دارد.
- با افزایش انحراف استانده پارامترهای ورودی، میانگین بسامد مد اول کاهش می‌یابد و از طرفی انحراف استانده بسامد مد اول افزایش می‌یابد.

فهرست علائم

$a(x)$	یک میدان تصادفی گاوسی
$\{a_0\}$	بردار شکل مد متناظر، m
B_{ij}	ماتریس هم‌پراش
b	عرض تیر، m
$b(x)$	یک میدان تصادفی گاوسی
C	تجزیه چولسکی ماتریس هم‌پراش
E	مدول یانگ، Pa
E	مقدار میانگین مدول یانگ، Pa
h	ارتفاع تیر، m
h_2	ضخامت تیر ۲، m
h_2	مقدار میانگین ضخامت تیر ۲، m
h_3	ضخامت تیر ۳، m
I	ممان اینرسی، m^4
$[K]$	ماتریس سفتی
L	طول تیر، m
l	طول همبستگی، m
$[M]$	ماتریس جرم
m	میانگین میدان تصادفی
m_e	جرم بر واحد سطح، kg/m^2
N	تعداد شبیه‌سازی‌های مونت کارلو
T	انرژی جنبشی، N.m
U	انرژی پتانسیل، N.m
w	تغییر مکان قائم تیر، m
X	یک میدان تصادفی

علائم یونانی

γ	تابع پراش
$\{\delta\}$	بردار درجه آزادی جزء
η	مختصات محلی جزء
ρ	تابع همبستگی
σ	انحراف استانده
ω	بسامد سامانه، Hz

منابع

[1] J.T.S. Wang, Y.Y. Liu, J.A. Gibby, Vibration of split beams, *Journal of Sound and Vibration*, 84(4) (1982) 491-502.

[2] P.M. Mujumdar, S. Suryanarayan, Flexural vibrations of beams with delaminations, *Journal of Sound and Vibration*, 125(3) (1988) 441-461.

[3] M.H. Shen, J.E. Grady, Free vibrations of delaminated beams, *AIAA Journal*, 30(5) (1992) 1361-1370.

[4] R.A. Jafari-Talookolaei, M.H. Kargarnovin, M.T. Ahmadian, On the dynamic response of a delaminated composite beam under the motion of an oscillating mass, *Journal of Composite Materials*, 46(22) (2012) 2863-2877.

[5] M.H. Kargarnovin, M.T. Ahmadian, R.A. Jafari-Talookolaei, M. Abedi, Semi-analytical solution for the free vibration analysis of generally laminated composite Timoshenko beams with single delamination, *Composites: Part B*, 45 (2013) 587-600.

[6] E. Nikolaidis, D.M. Ghiocel, S. Singhal, *Engineering Design Reliability Handbook*, CRC Press, United States of America, 2005.

[7] S.A. Ramu, R. Ganesan, Stability analysis of a stochastic column subjected to stochastically distributed loadings using the finite element method, *Finite Element in Analysis and Design*, 11 (1992) 105-115.

[8] J. Cheng, R. Xiao, Probabilistic free vibration analysis of beams subjected to axial loads, *Advances in Engineering Software*, 38 (2007) 31-38.

[9] R. Ganesan, V.K. Kowda, Buckling of composite beam-columns with stochastic properties, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 24 (2005) 513-543.

[10] S. Irani, S. Sazesh, Random vibration of cantilever tapered beam under stochastic excitation, *Modares Mechanical Engineering*, 13 (2013) 138-145 (In Persian).

[11] A.A. Alizadeh, H. Mirdamadi, Free vibration and divergence instability of pipes conveying fluid with uncertain structural parameters, *Modares Mechanical Engineering*, 15 (2015) 247-254 (In Persian).

[12] E. Vanmarche, *Random Fields- Analysis and Synthesis*, The MIT Press, United States of America, 1983.

[13] A.D. Kiureghian, J.B. Ke, The stochastic finite element method in structural reliability, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 3 (1988) 83-91.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

A.A. Alizadeh and R.-A. Jafari-Talookolaei, Free Vibration Analysis of a Delaminated Beam with Stochastic Parameters, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 49(4) (2018) 731-742.

DOI: 10.22060/mej.2016.732