نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۴۹، شماره ۴، سال ۱۳۹۶، صفحات ۷۴۳ تا ۷۵۸
DOI: 10.22060/mej.2016.763

ارتعاشات آزاد خطی و غیرخطی صفحه مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک مستطیلی شکل براساس نظریۀ تغییر شکل برشی مرتبه سوم

علیرضا شوشتری*، رامین منتشلو

[۱] گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی دانشگاه بوعلی سینا، همدان، ایران

چکیده: در این مقاله ارتعاشات آزاد خطی و غیرخطی یک ورق مستطیل شکل مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک مورد بررسی قرار گرفته است. با شرایط مرزی مساله به صورت تکیه گاه ساده در نظر گرفته شده است. بر این اساس معادلات حرکت ورق مستطیل شکل بر پایه تئوری برشی مرتبه سوم و با محهسبه مقادیر انرژی جنبشی و پتانسیل و بر اساس اصل هامیلتون به دست آمده‌اند. سپس با توجه به خواص مدرج بودن صفحه، سطوح بالا و پایین ورق تحت اختلاف پتانسیل‌های الکتریکی و مغناطیسی قرار داده شده و با استفاده از قوانین گاوس برای حالت‌های الکترواستاتیک و مگنتواستاتیک، رفتار الکتریکی و مغناطیسی مدل شده است. پس از تبدیل معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی به معادلات دیفرانسیل معمولی ، معادله حرکت و رابطه‌ای تحلیلی برای تعیین فرکانس طبیعی خطی، نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی با استفاده از تئوری اغتشاشات و به روش لیندشتات پوانکاره به دست آمده‌اند. پس از صحه‌گذاری مدل پیشنهادی با استفاده از مقایسه فرکانس‌های طبیعی خطی با نتایج موجود و منتشر شده، تعدادی مثال عددی برای بررسی اثر پتانسیل‌های الکتریکی-مغناطیسی و تغییر پارامترهای هندسی و نوع پراکندگی ساختار در ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک بر روی رفتار ارتعاشی خطی و غیرخطی ورق‌های مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک ارائه شده است.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۲۸ دی ۱۳۹۴
بازنگری: ۲۲ اردیبهشت ۱۳۹۵
پذیرش: ۲۷ تیر ۱۳۹۵
ارائه آنلاین: ۱۵ شهریور ۱۳۹۵

کلمات کلیدی:
ورق هوشمند مدرج تابعی
نظریۀ تغییر شکل برشی مرتبه سوم
قوانین گاوس
روش لیندشتات پوانکاره
ارتعاشات آزاد

۱- مقدمه

در طی سال‌های اخیر نوع جدیدی از مواد مدرج تابعی[۱] مورد توجه ویژه قرار گرفته‌اند. این مواد تحت عنوان مواد مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک[۲] شناخته می‌شوند و دسته جدیدی از مواد مدرج تابعی را شامل می‌شوند که همبستگی بین میدان‌های مکانیکی، الکتریکی و مغناطیسی را در بردارند و چون می‌توانند انرژی را میان این سه شکل تبدیل کنند، کاربرد مستقیمی در حسگرها و محرک‌ها، کنترل ارتعاشات در سازه‌ها و غیره دارند. همبستگی مگنتوالکتریک این مواد از طریق روابط تنش-کرنش صورت می‌گیرد.

فریرا و همکاران [۱] بسامدهای طبیعی ورق مربعی شکل مدرج تابعی را برای شرایط مرزی مختلف به‌دست آوردند. حسینی هاشمی و همکاران [۲، ۳] ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی شکل مدرج تابعی را به ازای شرایط مرزی مختلف بررسی نموده و پاسخ تحلیلی برای آن به دست آوردند. ارتعاشات غیرخطی ورق‌های مدرج تابعی نیز موضوع تحقیقات زیادی بوده است [۶-۴].

پاسخ دینامیکی خطی و غیرخطی ورق‌های پیزوالکتریک از نوع مدرج تابعی نیز توسط محققان زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است. ردِی و چنگ [۷] یک ورق مدرج تابعی را درنظر گرفته و با فرض اتصال یک لایه پیزوالکتریک بر روی سطح فلزی این ورق مدرج تابعی و با اعمال بارگذاری ترمومکانیکی بر روی سطح سرامیکی، ارتعاش ورق هیبریدی حاصل را بررسی کرده و دامنه ارتعاشات را با استفاده از اعمال ولتاژ به لایه پیزوالکتریک خنثی نمودند. لیو [۸] رفتار پس کمانش ورق‌های مستطیلی شکل مدرج تابعی را که عملگرهای پیزوالکتریک بر سطح آن چسبانده شده است، براساس نظریۀ برشی مرتبه سوم تحلیل نمود. کوپیال [۹] بسامدهای طبیعی و شکل مودهای ورق پیزوالکتریک مستطیلی شکل را با شرایط مرزی ساده برای دو نوع شرط مرزی الکتریکی مدار باز و مدار بسته مورد بررسی قرار داده است. شِن [۱۰] پس کمانش پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با عملگرهای پیزوالکتریک را در اثر فشار محوری ترکیب شده با بارهای الکتریکی در محیط گرم تحلیل نموده است. چِن [۱۱] از روش گلرکین فاقد المان[۳] برای تجزیه‌وتحلیل کمانش و بررسی پایداری ورق‌های مستطیلی پیزوالکتریک مدرج تابعی که در معرض توزیع غیریکواخت نیروها، گرما و ولتاژ می‌باشند، استفاده نمود. از روش اجزا محدود [۱۴-۱۲] و روش‌های تحلیلی پرتوربیشن [۱۷-۱۵] نیز برای حل مسأله ارتعاش غیرخطی ورق مدرج تابعی تحت بارهای حرارتی، مکانیکی و الکتریکی استفاده شده است.

نزدیک دو دهه است که تحلیل و بررسی حرکت استاتیکی و دینامیکی سازه‌های مگنتو-الکترو-الاستیک مورد توجه قرار گرفته است. پان [۱۸] در

1 Functionally graded materials (FGM)
2 Functionally graded magneto-electro-elastic (FGMEE)
3 Element-free Galerkin method

نویسنده عهده‌دار مکاتبات: shooshta@basu.ac.ir

سال ۲۰۰۱ برای اولین بار یک ورق چندلایه‌ای مگنتو-الکترو-الاستیک را به صورت تحلیلی بررسی کرده و جواب‌های ورق چندلایه‌ای را برحسب تکثیرکننده‌های ماتریسی بیان نمود. بانگل و گانسان [۱۹، ۲۰] از روش اجزا محدود، به ترتیب، برای تحلیل ارتعاشات خطی ورق‌ها و پوسته‌های استوانه‌ای مگنتو-الکترو-الاستیک چندلایه‌ای و مدرج تابعی استفاده نمودند. ارتعاش آزاد و تصادفی ورق‌های مستطیلی شکل مگنتو-الکترو-الاستیک در تماس با سیال [۲۱]، کمانش و ارتعاش پوسته استوانه‌ای مگنتو-الکترو-الاستیک براساس نظریهٔ برشی مرتبه بالا [۲۲] نیز مورد بررسی قرار گرفته‌اند. چن و همکاران [۲۳] مسأله ارتعاش آزاد ورق‌های مگنتو-الکترو-الاستیک چندلایه‌ای با شرایط مرزی ترکیبی گیردار/آزاد حل نمودند. لی و ژانگ [۲۴]، رضوی و شوشتری [۲۵] از نظریهٔ برشی مرتبه اول، به ترتیب، برای تعیین بسامدهای طبیعی ورق و پوسته دو انحنایی مگنتوالکترو-الاستیک بر روی یک بستر الاستیک استفاده کرده و اثرات ضرایب بستر و بسامدهای الکتریکی و مغناطیسی را بر روی بسامد طبیعی تعیین نمودند. انصاری و همکاران ارتعاش غیرخطی نانو تیر مگنتو-الکترو-الاستیک را براساس مدل تیر تیموشنکو و نظریهٔ الاستیسیته غیرموضعی[1] [۲۶] و نظریهٔ برشی مرتبه سوم غیرموضعی [۲۷] تحلیل نمودند.

با وجود اینکه تحقیقات مختلفی درباره حرکت غیرخطی استاتیکی و دینامیکی ورق‌ها و پوسته‌های مگنتو-الکترو-الاستیک چندلایه‌ای و تک‌لایه‌ای [۳۴-۲۸] و کنترل ارتعاشات غیرخطی سازه‌های هوشمند مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک توسط کاتیمانی و رای [۳۵] انجام شده‌است؛ اما تاکنون هیچ مطالعه تحلیلی درباره ارتعاشات خطی و غیرخطی این نوع از مواد و ورق‌های هوشمند مدرج تابعی بر مبنای نظریهٔ برشی مرتبه سوم و همچنین تأثیر پارامترهای هندسی و پراکندگی ساختار در مواد مدرج تابعی بر این بسامدها انجام نشده است.

در این تحقیق، از نظریهٔ برشی مرتبه سوم برای تعیین معادلات حرکت ورق استفاده شده است تا نتایج مدل ارائه شده برای ورق‌های نسبتاً ضخیم نیز قابل استفاده باشند. ورق به صورت مستطیلی بوده و دارای تکیه‌گاه ساده در هر چهار لبه خود می‌باشد (شکل ۱). رفتار الکتریکی و مغناطیسی ورق با استفاده از قانون گاوس در حالت‌های الکترواستاتیک و مگنتواستاتیک تعیین گردیده‌اند. پس از تعیین معادلات حرکت، از روش تحلیلی برای تعیین معادله حرکت ورق استفاده شده است.

۲- معادلات ساختاری

معادلات ساختاری برای مواد مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک خطی به صورت زیر نوشته می‌شوند [۳۶]:

$$\sigma = C\varepsilon + e(-E) + q(-H) \qquad (۱)$$

$$D = e^{T}\varepsilon - \hat{\imath}(-E) - d(-H) \qquad (۲)$$

1 Nonlocal

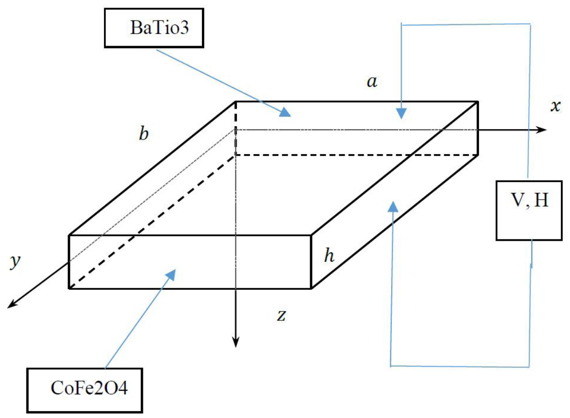

Fig. 1. FGM rectangular plate and It's electrical and magnetic load

شکل ۱: صفحه مدرج تابعی با نحوه بارگذاری مربوطه

$$B = q^{T}\varepsilon - d(-E) - \mu(-H) \qquad (۳)$$

که برای یک ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک ایزوتروپ ضرایب در حالت بسط یافته به صورت زیر می‌باشند [۳۲]:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11}(z) & C_{12}(z) & 0 & 0 & 0 \\ C_{21}(z) & C_{22}(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55}(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}(z) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31}(z) \\ 0 & 0 & e_{32}(z) \\ 0 & e_{24}(z) & 0 \\ e_{15}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & q_{31}(z) \\ 0 & 0 & q_{32}(z) \\ 0 & q_{24}(z) & 0 \\ q_{15}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۴)$$

$$\in = \begin{bmatrix} \in_{11}(z) & 0 & 0 \\ 0 & \in_{22}(z) & 0 \\ 0 & 0 & \in_{33}(z) \end{bmatrix}, \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{11}(z) & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{22}(z) & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33}(z) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_{11}(z) & 0 & 0 \\ 0 & d_{22}(z) & 0 \\ 0 & 0 & d_{33}(z) \end{bmatrix}$$

در روابط بالا $\boldsymbol{\sigma}$ و ε به ترتیب بردار تنش و کرنش، **D** و **B** به ترتیب بردار جابه‌جایی الکتریکی و چگالی شار مغناطیسی، **E** و **H** به ترتیب بردار میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی، **C**، $\in$ و μ به ترتیب ضرایب ماتریس الاستیک، دی‌الکتریک و نفوذپذیری مغناطیسی، $\boldsymbol{e}$ و $\boldsymbol{q}$، $\boldsymbol{d}$ به ترتیب ضرایب ماتریس پیزوالکتریک و پیزومغناطیس، مگنتو-الکتریک هستند.

۳- مدل تحلیلی خواص مؤثر مواد مدرج تابعی

اگر ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک از دو فاز پیزوالکتریک $BaTiO_3$ (B) و پیزومغناطیس $CoFe_2O_4$ (C) طوری تشکیل شده باشد که

تغییر تدریجی خواص ماده در راستای ضخامت و از سطح پایین به سطح بالا باشد، (شکل ۱)، کسر حجمی فاز B در جهت ضخامت و مطابق قانون توانی به صورت زیر توصیف می‌گردد [۲۰]:

$$V_B = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p \quad (۵)$$

که در آن h ضخامت ورق، z معرف مختصه ضخامت که $0 \le z \le h$ و p پارامتر توانی حقیقی و مثبتی است. همچنین قانون مخلوط‌ها و نخسین قانون خطی کلاسیک ترکیب‌ها برای مواد دو جزئی به‌ترتیب به صورت زیر نوشته می‌شوند [۲۰]:

$$\begin{aligned} &V_B + V_C = 1 \\ &P_{eff} = P_B V_B + P_C V_C \end{aligned} \quad (۶)$$

با ترکیب معادلات (۵) تا (۶) تغییرات خواص مؤثر الاستیک، پیزوالکتریک، پیزومغناطیس، دی‌الکتریک و نفوذپذیری مغناطیسی در دمای ثابت به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} C_{ij}(z) &= (C_B - C_C)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p + C_C \\ e_{ij}(z) &= (e_B - e_C)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p + e_C \\ q_{ij}(z) &= (q_B - q_C)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p + q_C \\ \in_{ij}(z) &= (\in_B - \in_C)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p + \in_C \\ \mu_{ij}(z) &= (\mu_B - \mu_C)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p + \mu_C \\ \rho(z) &= (\rho_B - \rho_C)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p + \rho_C \end{aligned} \quad (۷)$$

تغییرات ضریب دی‌الکتریک مؤثر برای چند مورد مختلف توان p در عرض ضخامت ورق در شکل ۲ نشان داده شده است.

لی [۳۸] با استفاده از تجزیه‌وتحلیل میکرومکانیکی ماده مرکب متشکل از دو فاز B-C نشان داد که اندازه مدول مگنتو-الکتریک (d_{33}) غیر صفر بوده و وابسته به عواملی مانند روش ترکیب مواد و کسر حجمی هر یک از دو فاز است. تحقیقات اخیر نشان داده‌اند در حالتی که ورق تحت پتانسیل الکتریکی یا مغناطیسی قرار دارد و هدف مطالعه رفتار دینامیکی ارتعاشی ورق باشد اثر ضریب مگنتو-الکتریک بر بسامد ارتعاشی بسیار ناچیز است و می‌توان از آن صرف‌نظر نمود.

۴- مدل‌سازی مسأله

با صرف‌نظر کردن از اثرات ترم‌های اینرسی صفحه‌ای و دورانی معادلات حاکم بر ارتعاشات آزاد عرضی یک ورق مگنتو-الکترو-الاستیک مدرج تابعی

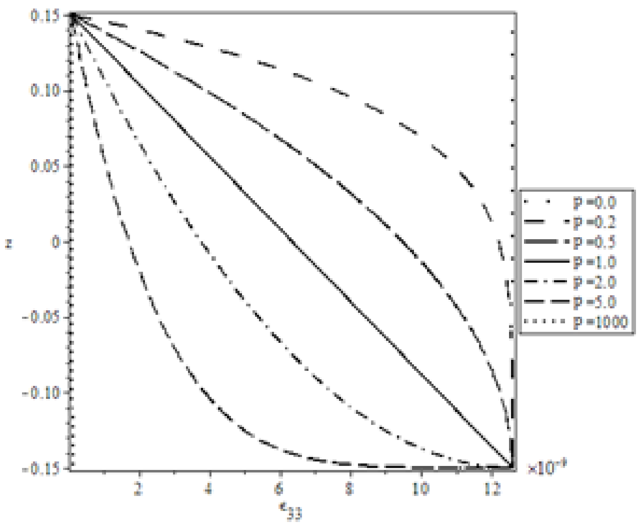

Fig. 2. Change of dielectric coefficient $\in_{33}$ for some amount of *P*

شکل ۲: تغییرات ضریب دی‌الکتریک $\in_{33}$ برای چند مورد p

در نظریهٔ برشی مرتبه سوم به صورت زیر نوشته می‌شوند [۳۹]:

$$N_{xx,x} + N_{xy,y} = I_0 u_{,tt} + (I_1 - c_1 I_3)\phi_{x,tt} - c_1 I_3 w_{0,tt} \quad (۸)$$

$$N_{yy,y} + N_{xy,x} = I_0 v_{0,tt} + (I_1 - c_1 I_3)\phi_{y,tt} - c_1 I_3 w_{0,tt} \quad (۹)$$

$$\begin{aligned} &\left(N_{yy,y} + N_{xy,x}\right) w_{0,y} + \left(N_{xx,x} + N_{xy,y}\right) w_{0,x} + N_{yy} w_{0,yy} \\ &+ N_{xy} w_{0,xy} + N_{xx} w_{0,xx} + c_1\left(P_{xx,xx} + 2P_{xy,xy} + P_{yy,yy}\right) \\ &+ \left(Q_{x,x} - c_2 R_{x,x}\right) + \left(Q_{y,y} - c_2 R_{y,y}\right) \\ &= I_0 w_{0,tt} - c_1^2 I_6\left(w_{0,ttxx} + w_{0,ttyy}\right) + c_1 I_3\left(u_{0,tt} + v_{0,tt}\right) \\ &\quad + c_1\left(I_4 - c_1 I_6\right)\left(\phi_{x,xtt} + \phi_{y,ytt}\right) - c_1^2 I_6\left(w_{0,xxtt} + w_{0,yytt}\right) \end{aligned} \quad (۱۰)$$

$$\begin{aligned} &M_{xx,x} + M_{xy,y} - c_1 P_{xx,x} - c_1 P_{xy,y} + \left(Q_x - c_2 R_x\right) \\ &= -c_1\left(I_4 - c_1 I_6\right) w_{0,ttx} + \left(I_2 - 2c_1 I_4 + c_1^2 I_6\right)\phi_{x,tt} \\ &\quad + \left(I_1 - c_1 I_3\right) u_{0,tt} - c_1\left(I_4 - c_1 I_6\right) w_{0,xtt} \end{aligned} \quad (۱۱)$$

$$\begin{aligned} &M_{yy,y} + M_{xy,x} - c_1 P_{yy,y} - c_1 P_{xy,x} + \left(Q_y - c_2 R_y\right) \\ &= -c_1\left(I_4 - c_1 I_6\right) w_{0,ytt} + \left(I_2 - 2c_1 I_4 + c_1^2 I_6\right)\phi_{y,tt} \\ &\quad + \left(I_1 - c_1 I_3\right) v_{0,tt} - c_1\left(I_4 - c_1 I_6\right) w_{0,ytt} \end{aligned} \quad (۱۲)$$

که در آن علامت '،' مشتق نسبی نسبت به تغییر مکان‌های تعمیم یافته u_0 ، v_0 و w_0 (تغییر جابه‌جایی‌های یک نقطه از ورق در صفحه $z=0$) و ϕ_x ، ϕ_y (چرخش نرمال‌های عرضی، به ترتیب، حول محورهای y و x) و کمیت‌های $N_{\alpha\beta}$ منتجه‌های نیروی صفحه‌ای[۱]، $M_{\alpha\beta}$ منتجه‌های ممان[۲]، $Q_{\alpha\beta}$

1 In-Plane Force Resultants
2 Moment Resultants

منتجه‌های نیروی عرضی[1] و $P_{\alpha\beta}$ و $R_{\alpha\beta}$ منتجه‌های تنش مرتبه بالاتر[2] و I_i ممان‌های اینرسی جرمی[3] هستند که برای ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک در نظریهٔ برشی مرتبه سوم به صورت زیر است [۳۹]:

$$\begin{Bmatrix} N_{\alpha\beta} \\ M_{\alpha\beta} \\ P_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\alpha\beta} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^3 \end{Bmatrix} dz, \quad \begin{Bmatrix} Q_{\alpha\beta} \\ R_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\alpha\beta}\begin{Bmatrix}1\\ z^2\end{Bmatrix} dz$$
$$I_i = \int_{-h/2}^{h/2} z^i \rho(z)\, dz \quad (i=0,1,2,3,4,6) \tag{۱۳}$$

در واقع معادلات حرکت (۸) الی (۱۲) را می‌توان با استفاده از محاسبه تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل برحسب توابع تنش، کرنش و استفاده از اصل همیلتون تعیین نمود که به علت حجم بالای محاسبات آورده نشده است.

با توجه به این‌که ارتعاشات عرضی مد نظر است، می‌توان از جملات اینرسی مربوط به جابه‌جایی‌های تعمیم یافته u_0 ، v_0 و دوران‌های عرضی ϕ_x ، ϕ_y صرف نظر شود که در این صورت معادلات (۸) تا (۱۲) به صورت زیر کاهش می‌یابند:

$$N_{xx,x} + N_{xy,y} = -c_1 I_3 w_{0,tt} \tag{۱۴}$$

$$N_{yy,y} + N_{xy,x} = -c_1 I_3 w_{0,tt} \tag{۱۵}$$

$$\begin{aligned} &\left(N_{yy,y} + N_{xy,x}\right)w_{0,y} + \left(N_{xx,x} + N_{xy,y}\right)w_{0,x} + N_{yy}w_{0,yy} \\ &+ N_{xy}w_{0,xy} + N_{xx}w_{0,xx} + c_1\left(P_{xx,xx} + 2P_{xy,xy} + P_{yy,yy}\right) \\ &+ \left(Q_{x,x} - c_2R_{x,x}\right) + \left(Q_{y,y} - c_2R_{y,y}\right) \\ &= I_0 w_{0,tt} - c_1^2 I_6\left(w_{0,ttxx} + w_{0,ttyy}\right) - c_1^2 I_6\left(w_{0,xxtt} + w_{0,yytt}\right) \end{aligned} \tag{۱۶}$$

$$\begin{aligned} &M_{xx,x} + M_{xy,y} - c_1P_{xx,x} - c_1P_{xy,y} + \left(Q_x - c_2R_x\right) \\ &= -c_1\left(I_4 - c_1I_6\right)w_{0,ttx} - c_1\left(I_4 - c_1I_6\right)w_{0,xtt} \end{aligned} \tag{۱۷}$$

$$\begin{aligned} &M_{yy,y} + M_{xy,x} - c_1P_{yy,y} - c_1P_{xy,x} + \left(Q_y - c_2R_y\right) \\ &= -c_1\left(I_4 - c_1I_6\right)w_{0,ytt} - c_1\left(I_4 - c_1I_6\right)w_{0,ytt} \end{aligned} \tag{۱۸}$$

با جایگذاری معادلات (۱)-(۴) به همراه کرنش‌های غیرخطی متناظر در معادلات (۱۳) و با فرض این‌که میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در راستای ضخامت (z) باشند، منتجه‌های نیرو ممان و منتجه‌های تنش مرتبه بالا در معادلات (۱۴)-(۱۸) به صورت زیر تعیین می‌گردند:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = &\left[\begin{bmatrix} A_{11}^{ela} & A_{12}^{ela} & 0 \\ A_{21}^{ela} & A_{22}^{ela} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66}^{ela} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11}^{ela} & B_{12}^{ela} & 0 \\ B_{21}^{ela} & B_{22}^{ela} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^{ela} \end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix}\varepsilon^0 \\ \varepsilon^1 \\ \varepsilon^3\end{Bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} c_1E_{11}^{ela} & c_1E_{12}^{ela} & 0 \\ c_1E_{21}^{ela} & c_1E_{22}^{ela} & 0 \\ 0 & 0 & c_1E_{66}^{ela} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon^0 \\ \varepsilon^1 \\ \varepsilon^3\end{Bmatrix} - \int_{-h/2}^{+h/2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31}(z) \\ 0 & 0 & e_{32}(z) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Phi_{,z}\end{Bmatrix}dz \\ &- \int_{-h/2}^{+h/2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & q_{31}(z) \\ 0 & 0 & q_{32}(z) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Psi_{,z}\end{Bmatrix}dz \end{aligned} \tag{۱۹}$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = &\left[\begin{bmatrix} B_{11}^{ela} & B_{12}^{ela} & 0 \\ B_{21}^{ela} & B_{22}^{ela} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^{ela} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11}^{ela} & D_{12}^{ela} & 0 \\ D_{21}^{ela} & D_{22}^{ela} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^{ela} \end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix}\varepsilon^0 \\ \varepsilon^1 \\ \varepsilon^3\end{Bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} c_1F_{11}^{ela} & c_1F_{12}^{ela} & 0 \\ c_1F_{21}^{ela} & c_1F_{22}^{ela} & 0 \\ 0 & 0 & c_1F_{66}^{ela} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon^0 \\ \varepsilon^1 \\ \varepsilon^3\end{Bmatrix} - \int_{-h/2}^{+h/2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31}(z) \\ 0 & 0 & e_{32}(z) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Phi_{,z}\end{Bmatrix}z\,dz \\ &- \int_{-h/2}^{+h/2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & q_{31}(z) \\ 0 & 0 & q_{32}(z) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Psi_{,z}\end{Bmatrix}z\,dz \end{aligned} \tag{۲۰}$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \end{Bmatrix} = &\left[\begin{bmatrix} E_{11}^{ela} & E_{12}^{ela} & 0 \\ E_{21}^{ela} & E_{22}^{ela} & 0 \\ 0 & 0 & E_{66}^{ela} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{11}^{ela} & F_{12}^{ela} & 0 \\ F_{21}^{ela} & F_{22}^{ela} & 0 \\ 0 & 0 & F_{66}^{ela} \end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix}\varepsilon^0 \\ \varepsilon^1 \\ \varepsilon^3\end{Bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} c_1H_{11}^{ela} & c_1H_{12}^{ela} & 0 \\ cH_{21}^{ela} & c_1H_{22}^{ela} & 0 \\ 0 & 0 & c_1H_{66}^{ela} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon^0 \\ \varepsilon^1 \\ \varepsilon^3\end{Bmatrix} - \int_{-h/2}^{+h/2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31}(z) \\ 0 & 0 & e_{32}(z) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Phi_{,z}\end{Bmatrix}z^3dz \\ &- \int_{-h/2}^{+h/2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & q_{31}(z) \\ 0 & 0 & q_{32}(z) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Psi_{,z}\end{Bmatrix}z^3dz \end{aligned} \tag{۲۱}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^{ela} & 0 & -c_2D_{44}^{ela} & 0 \\ 0 & A_{55}^{ela} & 0 & -c_2D_{55}^{ela} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\gamma^0 \\ \gamma^2\end{Bmatrix} \tag{۲۲}$$

$$\begin{Bmatrix} R_x \\ R_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{44}^{ela} & 0 & -c_2F_{44}^{ela} & 0 \\ 0 & D_{55}^{ela} & 0 & -c_2F_{55}^{ela} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\gamma^0 \\ \gamma^2\end{Bmatrix} \tag{۲۳}$$

مؤلفه‌های ماتریس‌های فوق که بیانگر اثر مؤلفه‌های مربوط به خواص الاستیک و مگنتو-الکتریک ورق هستند، در پیوست (الف) آورده شده‌اند. همچنین از روابط $E_z=-\Phi_{,z}$ و $H_z=-\Psi_{,z}$ در معادلات بالا استفاده شده است که Φ پتانسیل الکتریکی و Ψ پتانسیل مغناطیسی می‌باشند.

قوانین گوس برای حالت‌های الکترواستاتیک و مگنتواستاتیک، به صورت زیر هستند:

$$D_{x,x} + D_{y,y} + D_{z,z} = 0 \tag{۲۴}$$

$$B_{x,x} + B_{y,y} + B_{z,z} = 0 \tag{۲۵}$$

با استفاد از دو معادله (۲۴) و (۲۵) گرادیان پتانسیل‌های الکتریکی و مغناطیسی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\Phi_{,z} = \left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\right)\frac{e_{31}(z)}{\epsilon_{33}(z)} + \left(\varepsilon_{xx}^{(3)} + \varepsilon_{yy}^{(3)}\right)\frac{e(z)}{\epsilon_{33}(z)} + \Phi_0 \tag{۲۶}$$

1 Transverse Force Resultants
2 Higher-Order Stress Resultants
3 Mass Moments Of Inertia

$$\Psi_{,z}=\left(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}\right)\frac{q_{31}(z)}{\mu_{33}(z)}+\left(\varepsilon_{xx}^{(3)}+\varepsilon_{yy}^{(3)}\right)\frac{q(z)}{\mu_{33}(z)}+\Psi_0 \tag{۲۷}$$

که در آن Φ_0 و Ψ_0 ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند و با توجه به شرایط مرزی الکتریکی و مغناطیسی زیر به دست می‌آیند (V_0 و Ω_0 به ترتیب پتانسیل‌های الکتریکی و مغناطیسی هستند).

$$\begin{aligned}&\Phi(x,y,-h/2)=0,\Phi(x,y,+h/2)=V_0\\&\Psi(x,y,-h/2)=0,\Psi(x,y,+h/2)=\Omega_0\end{aligned} \tag{۲۸}$$

و

$$\begin{aligned}&e(z)=\int e_{15}(z)\left(\frac{3c_1z^2-1}{c_1}\right)dz\\&q(z)=\int q_{15}(z)\left(\frac{3c_1z^2-1}{c_1}\right)dz\end{aligned} \tag{۲۹}$$

با جایگذاری معادلات (۲۶) و (۲۷) در معادلات (۱۹) – (۲۳) N، M و P در ترم‌های u_0، v_0، w_0، ϕ_x و ϕ_y به دست می‌آیند. سپس با استفاده از معادلات (۱۹)–(۲۳) پنج معادله دیفرانسیل حرکت جزئی غیرخطی در ترم کرنش‌ها به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}&A_{11}u_{0,xx}+A_{66}u_{0,yy}+\left(A_{11}-A_{66}\right)v_{0,xy}+\left(B_{11}-c_1E_{11}-c_1\delta_1\right)\phi_{x,xx}\\&+\left(B_{66}-c_1E_{66}\right)\phi_{x,yy}+\left(B_{11}-c_1E_{11}-B_{66}+c_1E_{66}-c_1\delta_1\right)\phi_{y,yx}\\&+A_{11}w_{0,x}w_{0,xx}+A_{66}w_{0,x}w_{0,yy}+\left(A_{11}-A_{66}\right)w_{0,y}w_{0,xy}-\\&c_1\left(E_{11}+\delta_1\right)w_{0,xxx}-c_1\left(E_{11}+\delta_1\right)w_{0,yyx}=-c_1I_3\ddot{w}_{0,x}\end{aligned} \tag{۳۰}$$

$$\begin{aligned}&\left(A_{11}-A_{66}\right)u_{0,xy}+A_{66}v_{0,xx}+A_{11}v_{0,yy}+\left(A_{11}-A_{66}\right)w_{0,x}w_{0,yx}\\&+\left(B_{66}-c_1E_{66}\right)\phi_{y,xx}+\left(B_{11}-c_1E_{11}-c_1\delta_1\right)\phi_{y,yy}-c_1\left(E_{11}+\delta_1\right)\\&+A_{66}w_{0,y}w_{0,xx}+A_{11}w_{0,y}w_{0,yy}-c_1\left(E_{11}+\delta_1\right)w_{0,yxx}w_{0,yyy}\\&+\left(B_{11}-c_1E_{11}-B_{66}+c_1E_{66}-c_1\delta_1\right)\phi_{x,xy}=-c_1I_3\ddot{w}_{0,y}\end{aligned} \tag{۳۱}$$

$$\begin{aligned}&\left(A_{11}-2A_{66}\right)u_{0,x}w_{0,yy}+A_{11}u_{0,x}w_{0,xx}+2A_{66}u_{0,y}w_{0,yx}\\&+\left(A_{11}-A_{66}\right)w_{0,y}u_{0,yx}+A_{11}w_{0,x}u_{0,yy}+A_{11}w_{0,x}u_{0,xx}\\&+c_1E_{11}u_{0,xxx}+c_1E_{11}u_{0,yyx}+2A_{66}v_{0,x}w_{0,yx}+A_{11}v_{0,y}w_{0,yy}\\&+\left(A_{11}-2A_{66}\right)v_{0,y}w_{0,xx}+A_{11}w_{0,y}v_{0,yy}+A_{66}w_{0,y}v_{0,xx}\\&+\left(A_{11}-A_{66}\right)w_{0,x}v_{0,yx}+c_1E_{11}v_{0,yyy}+c_1E_{11}v_{0,yxx}\\&+\frac{1}{2}A_{11}w_{0,y}^2w_{0,xx}+\left(c_2^2F_{44}-2c_2D_{44}+A_{44}\right)w_{0,xx}\\&+\left(c_2^2F_{44}-2c_2D_{44}+A_{44}\right)w_{0,yy}-c_1\delta_1w_{0,yy}w_{0,yy}\\&-2c_1\left(E_{11}-3E_{66}+\delta_1\right)w_{0,yy}w_{0,xx}-c_1\delta_1w_{0,xx}w_{0,xx}\\&+2\left(c_1E_{11}-3E_{66}\right)w_{0,yx}^2+2A_{11}w_{0,y}w_{0,x}w_{0,yx}\\&+\frac{3}{2}A_{11}w_{0,x}^2w_{0,xx}-c_1\delta_1w_{0,x}w_{0,xxx}-c_1\delta_1w_{0,x}w_{0,yyx}\\&-c_1\delta_1w_{0,y}w_{0,yxx}-c_1\delta_1w_{0,y}w_{0,yyy}-c_1^2\left(H_{11}+\delta_3\right)w_{0,xxxx}\\&-2c_1^2\left(H_{11}+\delta_3\right)w_{0,yyxx}-c_1^2\left(H_{11}+\delta_3\right)w_{0,yyyy}\\&+\left(B_{11}-c_1\left(E_{11}+\delta_1\right)+2c_1E_{66}-2B_{66}\right)\phi_{x,x}w_{0,yy}\\&-\left(c_2^2F_{44}+2c_2D_{44}-A_{44}\right)\phi_{x,x}+\left(2B_{66}-c_1E_{66}\right)\phi_{x,y}w_{0,yx}\\&+\left(B_{11}-c_1\left(E_{11}+\delta_1\right)+c_1E_{66}-B_{66}\right)w_{0,y}\phi_{x,yx}\\&+\left(B_{11}-c_1\left(E_{11}+\delta_1\right)\right)w_{0,x}\phi_{x,xx}+\Omega w_{0,yy}\\&+\left(B_{66}-c_1E_{66}\right)w_{0,x}\phi_{x,yy}+\left(c_1F_{11}-c_1^2\left(H_{11}+\delta_3\right)\right)\phi_{x,xxx}\\&+Vw_{0,xx}+\left(c_1F_{11}-c_1^2\left(H_{11}+\delta_3\right)\right)\phi_{x,yyx}\\&-\left(c_2^2F_{44}+2c_2D_{44}-A_{44}\right)\phi_{y,y}+\frac{1}{2}A_{11}w_{0,x}^2w_{0,yy}+\frac{3}{2}A_{11}w_{0,y}^2w_{0,yy}\\&+\left(B_{11}-c_1\left(E_{11}+\delta_1\right)\right)\phi_{y,y}w_{0,yy}+\left(B_{66}-c_1E_{66}\right)w_{0,y}\phi_{y,xx}\\&+\left(2B_{66}-c_1E_{66}\right)\phi_{y,x}w_{0,yx}+\left(B_{11}-c_1\left(E_{11}+\delta_1\right)\right)\phi_{x,x}w_{0,xx}\\&+\left(B_{11}-c_1\left(E_{11}+\delta_1\right)+c_1E_{66}-B_{66}\right)\phi_{y,y}w_{0,xx}\\&+\left(B_{11}-c_1\left(E_{11}+\delta_1\right)\right)w_{0,y}\phi_{y,yy}+\left(c_1F_{11}-c_1^2\left(H_{11}+\delta_3\right)\right)\phi_{y,yxx}\\&+\left(B_{11}-c_1\left(E_{11}+\delta_1\right)+c_1E_{66}-B_{66}\right)w_{0,x}\phi_{y,yx}\\&+\left(c_1F_{11}-c_1^2\left(H_{11}+\delta_3\right)\right)\phi_{y,yyy}=I_0\ddot{w}_0-c_1^2I_6\ddot{w}_{0,xx}-c_1^2I_6\ddot{w}_{0,yy}\end{aligned} \tag{۳۲}$$

$$\begin{aligned}&(B_{11}-c_1E_{11})u_{0,xx}+(-c_1E_{11}+c_1E_{66}+B_{11}-B_{66})v_{0,yx}\\&+\left(B_{66}-c_1E_{66}\right)u_{0,yy}+\left(c_1E_{11}-c_1E_{66}-B_{11}+B_{66}\right)w_{0,y}w_{0,yx}\\&+\left(B_{66}-c_1E_{66}\right)w_{0,x}w_{0,yy}-c_1\left(c_1\left(-H_{11}-\delta_3\right)+F_{11}+\delta_2\right)w_{0,xxx}\\&+\left(B_{11}-c_1E_{11}\right)w_{0,x}w_{0,xx}-c_1\left(c_1\left(-H_{11}-\delta_3\right)+F_{11}+\delta_2\right)w_{0,yyx}\\&+\left(c_1^2\left(H_{11}+\delta_3\right)-c_1\left(2F_{11}+\delta_2\right)+D_{11}\right)\phi_{x,xx}\\&+\left(c_1^2H_{66}-2c_1F_{66}+D_{66}\right)\phi_{x,yy}+c_1^2\left(H_{11}-H_{66}+\delta_3\right)\phi_{y,yx}\\&+\left(-c_1\left(2F_{11}-2F_{66}+\delta_2\right)+D_{11}-D_{66}\right)\phi_{y,yx}\\&-\left(c_2^2F_{44}-2c_2D_{44}+A_{44}\right)\phi_x-\left(c_2^2F_{44}-2c_2D_{44}+A_{44}\right)w_{0,x}\\&=c_1\left(c_1I_6-I_4\right)\ddot{w}_{0,x}\end{aligned} \tag{۳۳}$$

$$\begin{aligned}&(B_{66}-c_1E_{66})v_{0,xx}+(-c_1E_{11}+c_1E_{66}+B_{11}-B_{66})u_{0,yx}\\&+\left(B_{66}-c_1E_{66}\right)w_{0,y}w_{0,xx}+\left(c_1E_{11}-c_1E_{66}-B_{11}+B_{66}\right)w_{0,x}w_{0,yx}\\&+\left(B_{11}-c_1E_{11}\right)w_{0,y}w_{0,yy}-c_1\left(c_1\left(-H_{11}-\delta_3\right)+F_{11}+\delta_2\right)w_{0,yyy}\\&+\left(B_{11}-c_1E_{11}\right)v_{0,yy}-c_1\left(c_1\left(-H_{11}-\delta_3\right)+F_{11}+\delta_2\right)w_{0,yxx}\\&+\left(c_1^2\left(H_{11}+\delta_3\right)-c_1\left(2F_{11}+\delta_2\right)+D_{11}\right)\phi_{y,yy}\\&+\left(c_1^2H_{66}-2c_1F_{66}+D_{66}\right)\phi_{y,xx}-\left(c_2^2F_{44}-2c_2D_{44}+A_{44}\right)w_{0,y}\\&+\left(c_1^2\left(H_{11}-H_{66}+\delta_3\right)-c_1\left(2F_{11}-2F_{66}+\delta_2\right)+D_{11}-D_{66}\right)\phi_{x,yx}\\&-\left(c_2^2F_{44}-2c_2D_{44}+A_{44}\right)\phi_y=c_1\left(c_1I_6-I_4\right)\ddot{w}_{0,y}\end{aligned} \tag{۳۴}$$

در این معادلات، A_{ij} سختی‌های کششی، B_{ij} سختی‌های همبستگی خمشی–کششی و D_{ij} سختی‌های خمشی نامیده می‌شوند. E_{ij} ، F_{ij} و H_{ij} سختی‌های مرتبه بالای ضخامت را شامل می‌شوند که سهم تأثیر کمی در پاسخ ورق‌های نازک یا نسبتاً نازک همگن دارند.

مشخصات هندسی و شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در هر چهار لبه و بدون امکان حرکت صفحه‌ای در لبه‌ها[1] ورق مدرج تابعی مگنتو–الکترو–الاستیک در شکل ۳ نشان داده شده است.

جابه‌جایی‌ها و چرخش‌ها متناظر با این شرایط مرزی به صورت زیر هستند:U

$$u_0(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}U_{mn}(t)\,\mathrm{Cos}\,\alpha x\ \mathrm{Sin}\,\beta y \tag{۳۵}$$

1 Immovable Simply Support

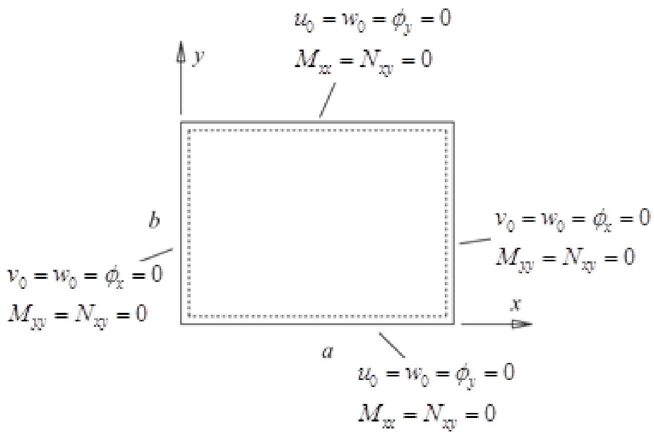

Fig. 3. Geometrical characteristic and boundary conditions of FGMEE plate

شکل ۳: مشخصات هندسی و شرایط مرزی ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک

$$v_0(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}(t)\,\mathrm{Sin}\,\alpha x\ \mathrm{Cos}\,\beta y$$
$$w_0(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} hW_{mn}(t)\,\mathrm{Sin}\,\alpha x\ \mathrm{Sin}\,\beta y$$
$$\phi_x(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} X_{mn}(t)\,\mathrm{Cos}\,\alpha x\ \mathrm{Sin}\,\beta y$$
$$\phi_y(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn}(t)\,\mathrm{Sin}\,\alpha x\ \mathrm{Cos}\,\beta y$$

به طوری‌که $\alpha=m\pi/a$ و $\beta=n\pi/b$ بوده و $(m.n)$ نشان‌دهنده مود حرکتی ورق می‌باشد و توابع $Y.X.W.V.U$ توابع زمانی مربوط به هریک از جابه‌جایی‌ها می‌باشند.

با جایگذاری رابطه (۳۵) در معادلات (۳۰) و (۳۱) و (۳۳) (۳۴) و اعمال روش گلرکین بر روی هر پنج معادله، معادلات دیفرانسیل معمولی (برای اختصار زیرنویس 'mn' نوشته نشده‌اند) زیر حاصل می‌گردند:

$$\begin{aligned}
&K_{1,1}U(t)+K_{1,2}V(t)+K_{1,3}X(t)+K_{1,4}Y(t)\\
&\quad=-K_{1,5}W(t)_{,tt}-K_{1,6}W(t)-K_{1,7}W^2(t)\\
&K_{2,1}U(t)+K_{2,2}V(t)+K_{2,3}X(t)+K_{2,4}Y(t)\\
&\quad=-K_{2,5}W(t)_{,tt}-K_{2,6}W(t)-K_{2,7}W^2(t)\\
&K_{4,1}U(t)+K_{4,2}V(t)+K_{4,3}X(t)+K_{4,4}Y(t)\\
&\quad=-K_{4,5}W(t)_{,tt}-K_{4,6}W(t)-K_{4,7}W^2(t)\\
&K_{5,1}U(t)+K_{5,2}V(t)+K_{5,3}X(t)+K_{5,4}Y(t)\\
&\quad=-K_{5,5}W(t)_{,tt}-K_{5,6}W(t)-K_{5,7}W^2(t)
\end{aligned} \tag{۳۶}$$

و معادله (۳۲) با استفاده از این روش به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
&L_{3,1}U(t)+L_{3,2}V(t)+L_{3,3}X(t)+L_{3,4}Y(t)\\
&+L_{3,5}U(t)W(t)+L_{3,6}V(t)W(t)\\
&+L_{3,7}X(t)W(t)+L_{3,8}Y(t)W(t)+L_{3,9}W(t)_{,tt}\\
&+L_{3,10}W(t)+L_{3,11}W^2(t)+L_{3,12}W^3(t)=0
\end{aligned} \tag{۳۷}$$

حال با توجه به این‌که در این مقاله نوسانات عرضی مد نظر می‌باشد، همه متغیرهای زمانی روابط (۳۵) با استفاده از دستگاه معادلات (۳۶) برحسب $W(t)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$U(t)=L_{1,1}W(t)_{,tt}+L_{1,2}W(t)+L_{1,3}W^2(t) \tag{۳۸}$$

$$V(t)=L_{2,1}W(t)_{,tt}+L_{2,2}W(t)+L_{2,3}W^2(t) \tag{۳۹}$$

$$X(t)=L_{4,1}W(t)_{,tt}+L_{4,2}W(t)+L_{4,3}W^2(t) \tag{۴۰}$$

$$Y(t)=L_{5,1}W(t)_{,tt}+L_{5,2}W(t)+L_{5,3}W^2(t) \tag{۴۱}$$

با جایگذاری معادلات (۳۸) - (۴۱) در معادله (۳۷)، معادله حرکت غیرخطی ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک به صورت زیر ساده می‌شود:

$$Z_1W_{,tt}+Z_2W+Z_3WW_{,tt}+Z_4W^2+Z_5W^3=0 \tag{۴۲}$$

در رابطه فوق، Z_i $(i=1.2....5)$ ضرایب ثابتی هستند که تابع خواص ورق می‌باشند: Z_1 و Z_5 تابع چگالی و مؤلفه‌های سفتی ورق بوده و واحدشان kg^5m^5/s^8 می‌باشد؛ در حالی که Z_2، Z_3 و Z_4 فقط تابع مؤلفه‌های سفتی ورق بوده و واحدشان kg^5m^5/s^{10} می‌باشد. مقدار ضرایب $K_{i,j}$، $L_{r,s}$ و Z_l در پیوست (ب) آورده شده‌اند.

در ادامه با معرفی زمان بی‌بعد به صورت $\tau=(t/a)\sqrt{C_{11_{\max}}/\rho_{0_{\max}}}$ [۳۱] که در آن t زمان، τ زمان بی‌بعد و a طول ورق $C_{11_{\max}}$ ضریب الاستیک ماده پیزوالکتریک و $\rho_{0_{\max}}$ چگالی ماده مگنتواستریکتیو هستند. معادله (۴۲) به صورت بی‌بعد زیر نوشته می‌شود:

$$W_{,\tau\tau}+\omega^2W+\alpha_1WW_{,\tau\tau}+\alpha_2W^2+\alpha_3W^3=0 \tag{۴۳}$$

در رابطه بالا، ω فرکانس طبیعی خطی بی‌بعد، α_2، α_3 و ضریب جمله سختی غیرخطی است که فقط شامل مؤلفه‌های ماتریس‌های سختی می‌باشد و α_1 ضرایب جملات اینرسی غیرخطی می‌باشند که علاوه بر مؤلفه‌های سختی، شامل ترم‌های چگالی نیز است و مقادیر آنها در پیوست (پ) آمده‌اند.

۵- حل معادله غیرخطی حرکت

در این بخش به حل معادله دیفرانسیل غیرخطی بی‌بعد به‌دست آمده، یعنی معادله (۴۳) با استفاده از روش تقریبی- تحلیلی لیندشتات- پوانکاره پرداخته می شود [۴۰].

در ابتدا با جاگذاری $T=\omega_{NL}\tau$ در معادله (۴۳) به دست می‌آید:

$$\omega_{NL}^2W_{,TT}+\omega^2W+\alpha_1\omega_{NL}^2WW_{,TT}+\alpha_2W^2+\alpha_3W^3=0 \tag{۴۴}$$

و با توجه به روش حل مورد نظر توابع ω_{Nl} و W به‌صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$\omega_{NL} = \omega + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 \quad (۴۵)$$

$$W = \varepsilon W_1 + \varepsilon^2 W_2 + \varepsilon^3 W_3 \quad (۴۶)$$

اگر نتیجه در ترم‌های توانی از پارامتر ε که یک پارامتر بی‌بعد کوچک است باز نویسی شود، معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$W_{1,TT} + W_1 = 0 \quad (۴۷)$$

$$W_{2,TT} + W_2 = -2\frac{\omega_1}{\omega}W_{1,TT} - \frac{\alpha_2}{\omega^2}W_1{}^2 - \alpha_1 W_1 W_{1,TT} \quad (۴۸)$$

$$\begin{aligned} W_{3,TT} + W_3 = &-\left(\frac{\omega_1^2}{\omega^2} + 2\frac{\omega_2}{\omega}\right)W_{1,TT} - 2\frac{\omega_1}{\omega}W_{2,TT} - 2\frac{\alpha_2}{\omega^2}W_1 W_2 \\ &-\frac{\alpha_3}{\omega^2}W_1{}^3 - 2\alpha_1 W_1 W_{1,TT} - \alpha_1\left(W_2 W_{1,TT} + W_1 W_{2,TT}\right) \end{aligned} \quad (۴۹)$$

جواب معادله (۴۷) به صورت زیر است:

$$W_1 = r\cos(T + \theta) = r\cos(\Theta) \quad (۵۰)$$

که در آن $r = w_{max}/h$ اشاره به جابه‌جایی بی‌بعد اولیه دارد. اگر معادله (۵۰) در معادله (۴۸) جایگذاری شود، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$W_{2,TT} + W_2 = 2r\frac{\omega_1}{\omega}\cos(\Theta) + r^2\frac{\alpha_1\omega^2 - \alpha_2}{2\omega^2}\left(1 + \cos(2\Theta)\right) \quad (۵۱)$$

برای این که معادله (۵۱) دارای جواب‌های متناوب باشد و همگرایی حل برآورده گردد، ضریب $\cos(\Theta)$ باید برابر صفر باشد؛ بنابراین:

$$\omega_1 = 0 \quad (۵۲)$$

سپس از جایگذاری معادلات (۵۰)، (۵۱) و (۵۲) در معادله (۴۹) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} W_{3,TT} + W_3 = &+\alpha_1 r^2\cos(2\Theta) + \alpha_1 r^2 \\ &-\left(\frac{2}{3}\alpha_1\left(\frac{\alpha_1\omega^2 - \alpha_2}{\omega^2}\right) + \frac{1}{4}\frac{\alpha_3}{\omega^2}\right)r^2\cos(3\Theta) \\ &\left(2\frac{\omega_2}{\omega^2} - \frac{5}{6}\frac{\alpha_2}{\omega}\frac{\alpha_1\omega^2 - \alpha_2}{\omega^2} - \frac{3}{4}\frac{\alpha_3}{\omega^2} + \frac{\alpha_1}{12}\frac{\alpha_1\omega^2 - \alpha_2}{\omega^2}\right)r^2\cos(\Theta) \end{aligned} \quad (۵۳)$$

همانند معادله (۵۱) ضرایب $\cos(\Theta)$ در معادله (۵۳) باید مساوی صفر باشند؛ بنابراین به دست خواهد آمد:

$$\omega_2 = \left(\frac{5}{12}\frac{\alpha_2}{\omega}\frac{\alpha_1\omega^2 - \alpha_2}{\omega^2} + \frac{3}{8}\frac{\alpha_3}{\omega} - \frac{\omega\alpha_1}{24}\frac{\alpha_1\omega^2 - \alpha_2}{\omega^2}\right)r^2 \quad (۵۴)$$

از جایگذاری معادلات (۵۴) و (۵۲) در معادله (۴۵) نسبت بسامد طبیعی غیرخطی به بسامد طبیعی خطی به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد که بیانگر یک رابطه تحلیلی برای بسامد طبیعی غیرخطی ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک می‌باشد.

$$\frac{\omega_{NL}}{\omega_L} = \left[1 + \left(\frac{5}{6}\frac{\alpha_2}{\omega^2}\frac{\alpha_1\omega^2 - \alpha_2}{\omega^2} + \frac{3}{4}\frac{\alpha_3}{\omega^2} + \frac{\alpha_1}{12}\frac{\alpha_1\omega^2 - \alpha_2}{\omega^2}\right)r^2\right]^{1/2} \quad (۵۵)$$

۶- بررسی نتایج و تأثیر پارامترها

حال با توجه به روابط به‌دست آمده در بخش قبل ابتدا به صحه‌گذاری نتایج به‌دست آمده پرداخته می‌شود و سپس اثر پارامترهای مختلف هندسی و خواص مواد بر بسامدهای طبیعی خطی و غیرخطی برای مسأله مورد نظر تحقیق می‌گردد.

در جدول ۱ خواص مواد سازنده ورق آمده است. همان‌طور که قبلاً بیان گردیده بود ورق FGMEE مورد نظر از دو فاز پیزوالکتریک باریوم تیتانات ($BaTiO_3$) یا فاز (B) و فاز پیزومغناطیس فریت کبالت $CoFe_2O_4$ یا فاز (C) طوری تشکیل شده باشد که تغییر تدریجی خواص ماده در راستای ضخامت و از سطح پایین به سطح بالا باشد، یعنی سطح بالای ورق غنی از ماده پیزوالکتریک و سطح پایین ورق غنی از ماده پیزومغناطیس باشد.

جدول ۱: خواص ماده مگنتو-الکترو-الاستیک [۳۲]

Table 1. Properties of Magneto-Electro-Elastic Materials [32]

	$CoFe_2O_4$ (C)	$BaTiO_3$ (B)
C_{11} (10^9 N/m^2)	۲۸۶/۰	۱۶۶/۰
C_{12}	۱۷۳/۰	۷۷/۰۰
C_{44}	۴۵/۳۰	۴۳/۰۰
C_{66}	۵۶/۵۰	۴۴/۵۰
e_{15} (C/m^2)	۰/۰۰۰	۱۱/۶۰
e_{31}	۰/۰۰۰	-۴/۴۰۰
$\in_{33}$ (10^{-9} C^2/Nm^2)	۰/۰۹۳	۱۱/۶۰
μ_{33} (10^{-6} Ns^2/C^2)	۱۵۷/۰	۱۰/۰۰
q_{15} (N/Am)	۵۵۰/۰	۰/۰۰۰
q_{31}	۵۸۰/۳	۰/۰۰۰
d_{ij} (10^{-9} Ns/VC)	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
ρ (Kg/m^3)	۵۳۰۰	۵۸۰۰

در جدول‌های ۲ تا ۵ بسامدهای خطی بی‌بعد ورق ایزوتروپ، پیزوالکتریک و پیزومغناطیس برای $a=b=$۱m و $h=$۰/۳m آورده شده است. ذکر این نکته ضروری است که مقدار بسامد طبیعی خطی اول سامانه (ω) از رابطه (۴۳) و از ضریب W به‌دست می‌آید.

از مقایسه نتایج این تحقیق و نتایج HSDT مشخص می‌شود که نتایج به‌دست آمده در این تحقیق مطابقت خوبی با نتایج ذکر شده دارند و اختلاف ناچیزی بین نتایج تحقیق حاضر و نتایج مرجع [۴۲] موجود است. دلیل این

اختلاف، صرف‌نظر کردن از ترم‌های اینرسی دورانی و صفحه‌ای می‌باشد. در این حالت نتایج هم برای مواد پیزو الکتریک (B) و مواد پیزو مغناطیس (C) تطابق خوبی دارد.

جدول ۲: بسامدهای خطی بی‌بعد ورق ایزوتروپ با خواص مؤثر الاستیک فاز B

Table 2. Non-dimensional linear natural frequency of isotropic plate in phase (B)

روش حل	(m,n)			
	(۱,۱)	(۱,۲)	(۲,۲)	(۳,۱)
تحقیق حاضر	۲/۳۹۶۵	۴/۵۵۹۴	۶/۲۲۵۶	۷/۱۶۸۹
HSDT*	۲/۳۹۹۷	۴/۶۸۷۴	۶/۵۰۰۲	۶/۵۹۸۲

* از مرجع [۴۲]

جدول ۳: بسامدهای خطی بی‌بعد ورق ایزوتروپ با خواص مؤثر الاستیک فاز C

Table 3. Non-dimensional linear natural frequency of isotropic plate in phase (C)

روش حل	(m,n)			
	(۱,۱)	(۱,۲)	(۲,۲)	(۳,۱)
تحقیق حاضر	۲/۰۷۲۲	۳/۸۸۳۸	۵/۲۱۴۹	۵/۹۶۸۸
HSDT*	۲/۰۶۴۶	۳/۸۳۳۴	۵/۱۹۶۳	۶/۰۰۹۰

* از مرجع [۴۲]

جدول ٤: بسامدهای خطی بی‌بعد ورق پیزوالکتریک فاز B

Table 4. Non-dimensional linear natural frequency of piezoelectric plate phase (B)

روش حل	(m,n)			
	(۱,۱)	(۱,۲)	(۲,۲)	(۳,۱)
تحقیق حاضر	۲/۳۲۲۹	۴/۵۶۷۸	۶/۲۳۴۶	۷/۱۷۸۳
HSDT*	۲/۴۰۴۶	۴/۶۹۳۰	۶/۵۰۵۲	۶/۶۱۹۳

* از مرجع [۴۲]

جدول ۵: بسامدهای خطی بی‌بعد ورق پیزوالکتریک فاز C

Table 5. Non-dimensional linear natural frequency of piezo-magnetic plate phase (C)

روش حل	(m,n)			
	(۱,۱)	(۱,۲)	(۲,۲)	(۳,۱)
تحقیق حاضر	۲/۷۶۰۰	۳/۸۹۱۸	۵/۲۱۹۷	۵/۹۷۴۰
HSDT*	۲/۶۶۷۲	۳/۸۳۵۷	۵/۱۹۸۰	۶/۰۱۰۵

* از مرجع [۴۲]

در جدول ۶ بسامدهای خطی برای چند مورد مختلف ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک برحسب تغییرات گرادیان خواص مؤثر مواد (p) و مشخصات هندسی برای مود (m,n) محاسبه شده است. مشاهده می‌گردد که با افزایش پارامتر توانی p بسامد طبیعی ورق افزایش می‌یابد.

جدول ٦: بسامدهای خطی بی‌بعد ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک متشکل از دو فاز B و C

Table 6. Non-dimensional linear natural frequency of FGM-MEE plate with phase B and C

P	(m,n)		
	(۱,۱)	(۱,۲)	(۲,۲)
۰/۲	۱/۸۵۳۳	۳/۶۰۵۴	۴/۹۰۰۴
۱/۰	۱/۹۶۹۲	۳/۷۷۷۵	۵/۱۰۷۱
۵/۰	۲/۰۶۹۰	۳/۹۲۴۰	۵/۲۸۲۰
۱۰۰۰	۲/۱۶۶۰	۴/۰۶۳۰	۵/۴۵۱۰

در شکل ۴ و ۵ اثر پتانسیل الکتریکی (V_0) و پتانسیل مغناطیسی (Ω_0) بر روی بسامد طبیعی خطی بی‌بعد ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک نشان داده شده است. از شکل ۴ مشاهده می‌شود که اختلاف پتانسیل الکتریکی مثبت باعث کاهش مقدار بسامد طبیعی خطی و اختلاف پتانسیل مغناطیسی مثبت باعث افزایش مقدار این بسامد می‌شود. از شکل ۵ نیز مشاهده می‌شود که اختلاف پتانسیل الکتریکی منفی باعث افزایش مقدار بسامد طبیعی خطی و اختلاف پتانسیل مغناطیسی منفی باعث کاهش مقدار این بسامد می‌شود. علاوه بر این، از مشاهده همین دو شکل نتیجه می‌شود که تأثیر اختلاف پتانسیل الکتریکی در افزایش یا کاهش مقدار بسامد در ورق با خواص مؤثر نزدیک پیزوالکتریک (فاز B)، بیشتر از تأثیر آن در افزایش یا کاهش مقدار این بسامد در ورق با خواص مؤثر نزدیک به پیزومغناطیس (فاز C) است و نیز تأثیر اختلاف پتانسیل مغناطیسی در افزایش یا کاهش مقدار این بسامد در ورق با خواص مؤثر نزدیک پیزوالکتریک (فاز B)، کم‌تر از تأثیر آن در افزایش یا کاهش مقدار این بسامد در ورق با خواص مؤثر نزدیک به پیزومغناطیس (فاز C) است.

برای درک اثر پارامترهای هندسی در بسامد طبیعی خطی دو مفهوم نسبت ضخامت کل به طول کل (h/a) و نسبت عرض کل به طول کل (b/a) معرفی می‌شوند. همان طور که در شکل ۶ نشان داده شده‌است، نتیجه می‌شود که با افزایش نسبت ضخامت به طول مقدار بسامد خطی طبیعی بی‌بعد افزایش می‌یابد و با کاهش نسبت ضخامت به طول مقدار این بسامد کاهش می‌یابد؛ درنتیجه اثر تغییرات این پارامتر هندسی و تغییرات بسامد طبیعی خطی بی بعد باهم نسبت مستقیم دارند.

همچنین، از مشاهده شکل ۷ نتیجه می‌شود با افزایش نسبت عرض کل به طول کل بسامد طبیعی خطی بی‌بعد کاهش می‌یابد و این کاهش در بسامد طبیعی خطی بی‌بعد در نسبت عرض به طول بزرگ‌تر بیشتر است.

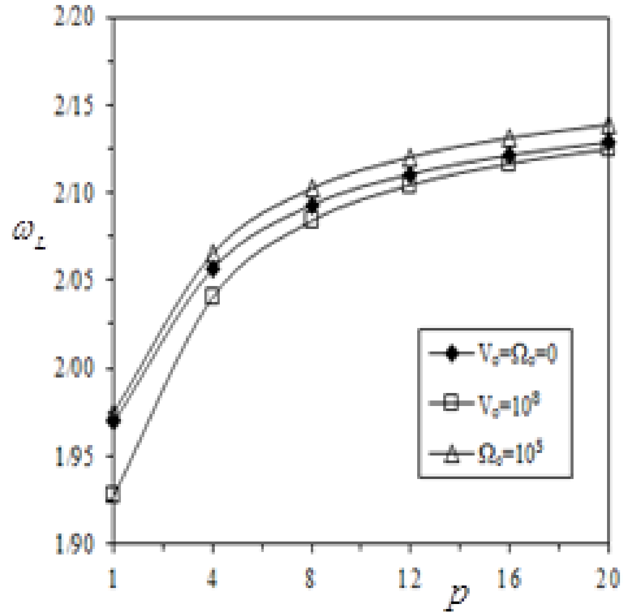

Fig. 4. Non-dimensional linear natural frequency with the effect of positive electric and magnetic load

شکل ٤: تغییرات بسامد طبیعی خطی بی‌بعد در اثر اعمال پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی مثبت

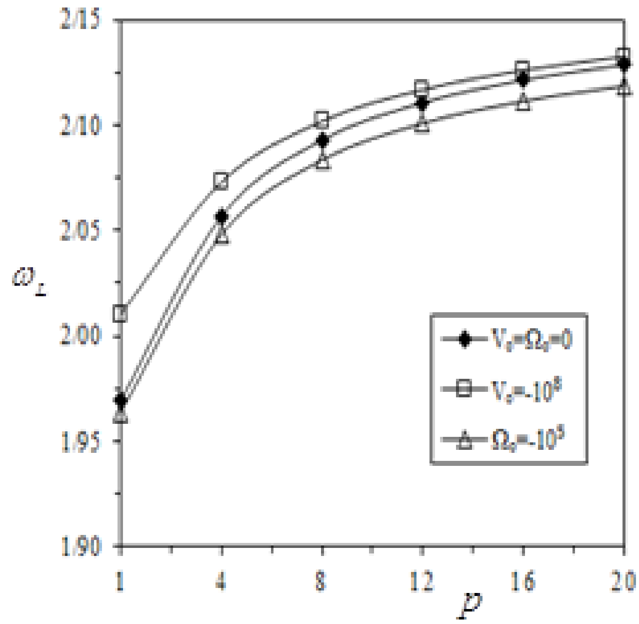

Fig. 5. Non-dimensional linear natural frequency with the effect of negative electric and magnetic load

شکل ٥: تغییرات بسامد طبیعی خطی بی بعد در اثر اعمال پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی منفی

دلیل این امر می‌تواند در افزایش مقدار اینرسی ورق نهفته باشد؛ به عبارت دیگر با افزایش نسبت عرض به طول، ورق از حالت مربعی به ورق مستطیلی تغییر شکل می‌دهد که این امر باعث افزایش قابل توجه اینرسی سامانه و در نتیجه کاهش بسامد خطی سامانه می‌شود؛ به‌طوری‌که در نسبت عرض به طول ۱۰ بسامد خطی کمترین مقدار را دارد.

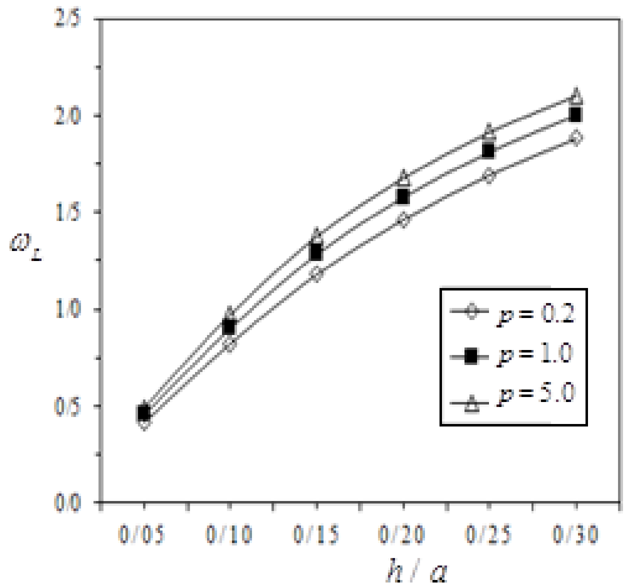

Fig. 6. Change of linear non-dimensional natural frequency with ratio of thickness to dimension of plate

شکل ٦: تغییرات بسامد طبیعی خطی بی‌بعد برحسب نسبت ضخامت کل به طول (h/a)

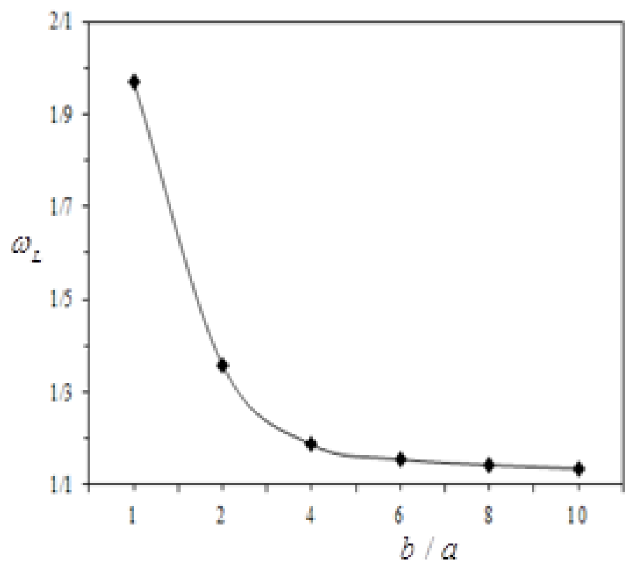

Fig. 7. Change of linear non-dimensional natural frequency with ratio of thickness aspect ratio of plate

شکل ۷: تغییرات بسامد طبیعی خطی بی‌بعد نسبت به تغییرات طول کل به عرض کل (b/a)

در ادامه نسبت بسامد طبیعی غیرخطی به بسامد طبیعی خطی ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک به ازای تغییر در پارامترهای مذکور مورد بررسی قرار گرفته‌اند و نتایج در جدول‌های ۷ و ۸ و شکل‌های ۸ تا ۱۱ (منحنی‌های دامنه-بسامد) نشان داده شده‌اند. همان‌طور که از شکل ۸ و جدول ۷ مشاهده می‌شود تغییر خواص مؤثر ورق از پیزوالکتریک به پیزومغناطیس باعث افزایش نسبت بسامد طبیعی غیرخطی به بسامد طبیعی خطی می‌گردد.

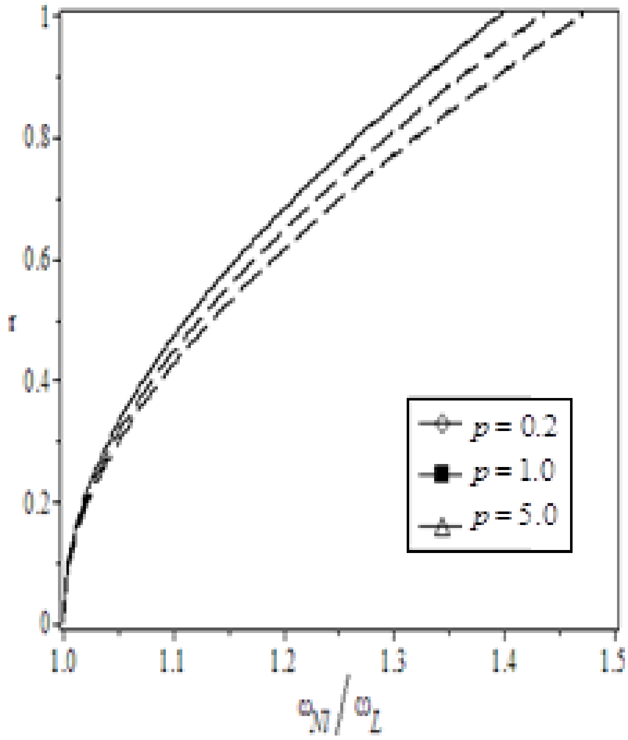

Fig. 8. Effect of changing the amount of (p) on the non-dimensional ratio of non-linear natural frequency

شکل ۸: اثر تغییر گردیان مؤثر خواص (p) بر نسبت بسامد غیرخطی

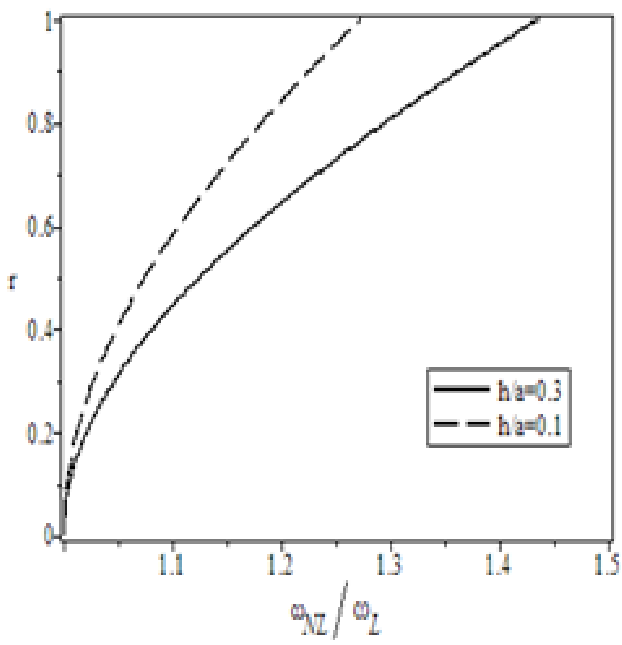

Fig. 9. Effect of ratio of thickness to dimension on nonlinear frequency-response curve

شکل ۹: اثر تغییر نسبت ضخامت کل به طول کل (h/a) بر روی منحنی دامنه -بسامد غیرخطی

از طرفی، با توجه به شکل ۹ افزایش نسبت ضخامت کل به طول کل (h/a) باعث افزایش نسبت بسامد طبیعی غیرخطی به بسامد طبیعی خطی و کاهش نسبت ضخامت کل به طول کل باعث کاهش نسبت بسامد

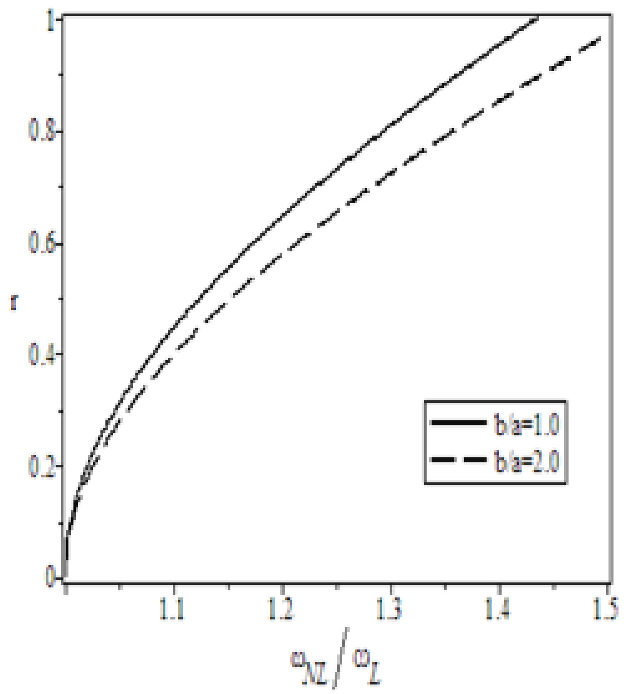

Fig. 10. Effect of aspect ratio on nonlinear frequency-response curve

شکل ۱۰: اثر تغییر نسبت عرض کل به طول کل (b/a) بر روی منحنی دامنه -بسامد غیرخطی

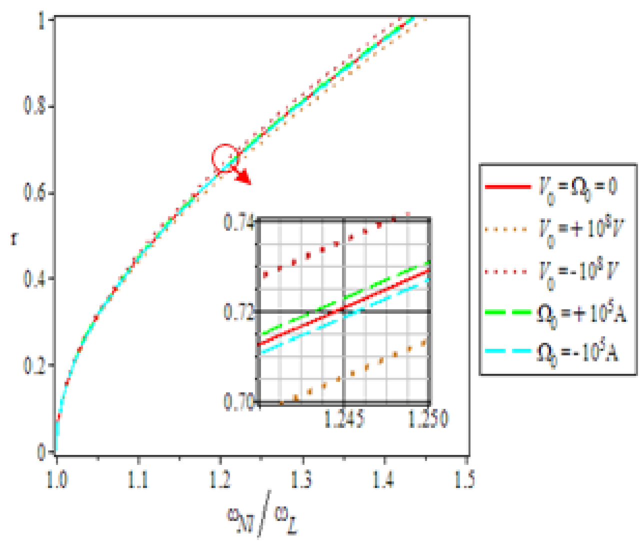

Fig. 11. Effect of positive and negative electric and magnetic potential on nonlinear frequency- response curve near phase (B)

شکل ۱۱: اثر پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی مثبت و منفی بر منحنی دامنه – بسامد غیرخطی در خواص مؤثر نزدیک فاز B

طبیعی غیرخطی به بسامد طبیعی خطی می‌گردد. از مشاهده شکل ۱۰ نتیجه می‌شود که افزایش نسبت عرض کل به طول کل (b/a) باعث افزایش نسبت بسامد طبیعی غیرخطی به بسامد طبیعی خطی و کاهش نسبت عرض کل به طول کل باعث کاهش نسبت بسامد طبیعی غیرخطی به بسامد طبیعی خطی می‌گردد.

جدول ۷: نسبت بسامد طبیعی غیرخطی به بسامد طبیعی خطی ورق مدرج تابعی مکنتو-الکترو-الاستیک به ازای تغییر در خواص مؤثر (p)

Table 7. Change of nonlinear natural frequency to linear natural frequency ratio of FGM-MEE plate with the changing op parameter (p)

P	w_{max}/h					
	۰/۰	۰/۲	۰/٤	۰/٦	۰/۸	۱/۰
۰	۱/۰۰۰۰۰	۱/۰۱۸۲۵	۱/۰۷۱۱۲	۱/۱۵۳۸۷	۱/۲۶۰۶۳	۱/۳۸۵۸۶
۰/۲	۱/۰۰۰۰۰	۱/۰۱۸۸۶	۱/۰۷۳۴۷	۱/۱۵۸۷۸	۱/۲۶۸۶۱	۱/۳۹۷۱۹
۱/۰	۱/۰۰۰۰۰	۱/۰۲۰۹۷	۱/۰۸۱۴۳	۱/۱۱۷۵۳	۱/۲۹۵۳۴	۱/۴۳۵۰۰
۵/۰	۱/۰۰۰۰۰	۱/۰۲۳۰۹	۱/۰۸۹۳۹	۱/۱۹۱۷۱	۱/۳۲۱۷۲	۱/۴۷۲۱۰
۱۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰	۱/۰۲۳۱۴	۱/۰۸۹۶۰	۱/۱۹۲۱۶	۱/۳۲۲۴۶	۱/۴۷۳۱۴

اثر پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی بر روی نسبت بسامد طبیعی غیرخطی به بسامد طبیعی خطی متفاوت از تأثیر این پارامتر در بسامد طبیعی خطی بی‌بعد است؛ به‌طوری که پتانسیل الکتریکی مثبت (شکل ۱۱)، پتانسیل مغناطیسی منفی (شکل ۱۲) باعث افزایش نسبت بسامد طبیعی غیرخطی به بسامد طبیعی خطی، پتانسیل الکتریکی منفی (شکل ۱۲) و پتانسیل مغناطیسی مثبت (شکل ۱۱) باعث کاهش نسبت بسامد طبیعی غیرخطی به بسامد طبیعی خطی می‌شوند.

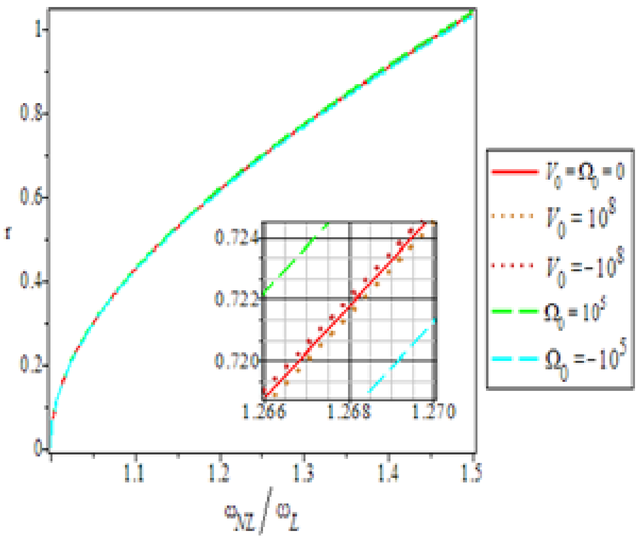

Fig. 12. Effect of positive and negative electric and magnetic potential on nonlinear frequency- response curve near phase (C)

شکل ۱۲: اثر پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی مثبت و منفی بر منحنی دامنه – بسامد غیرخطی در خواص مؤثر نزدیک فاز C

همچنین با توجه به دو شکل ۱۱ و ۱۲ و نمودار ۷ مشاهده می‌شود در ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک اگر گرادیان خواص مؤثر ورق نزدیک فاز B (p های پایین یا پیزوالکتریک) باشد اثر پتانسیل الکتریکی بر منحنی دامنه بسامد و نسبت بسامد طبیعی غیرخطی به بسامد طبیعی خطی بیشتر از اثر پتانسیل مغناطیسی است. از طرفی، اگر در ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک گرادیان خواص مؤثر ورق نزدیک به خواص فاز C باشد (pهای بالا یا پیزومغناطیس) اثر پتانسیل مغناطیسی بر روی منحنی دامنه بسامد و نسبت بسامد طبیعی غیرخطی به بسامد طبیعی خطی بیشتر از اثر پتانسیل الکتریکی است.

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله ارتعاشات آزاد خطی و غیرخطی ورق‌های هوشمند مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک مستطیلی شکل با شرط تکیه‌گاهی ساده و با استفاده از نظریهٔ برشی مرتبه سوم، مورد بررسی قرار گرفت. قوانین گاوس برای حالت‌های الکترواستاتیک و مگنتواستاتیک به منظور دستیابی به معادلات حرکت غیرخطی و روش لیندشتات پوانکاره برای تعیین رابطه‌ای تحلیلی جهت نسبت بسامد طبیعی غیرخطی به بسامد طبیعی خطی استفاده گردید. همچنین چندین مثال عددی برای بررسی اثر پارامترهای مختلف، از جمله پارامترهای هندسی، خواص مؤثر، بارگذاری الکتریکی و مغناطیسی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی ورق‌های هوشمند مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک ارائه شد. با توجه به پارامترهای مؤثر در ارتعاشات غیرخطی این نوع از مواد هوشمند مدرج تابعی و با به‌کار بردن آن در ساختار سازه‌های هوشمند می‌توان با تغییر نسبت ضخامت به طول ورق و یا انتخاب مناسب نسبت عرض به طول آن و یا تغییر خواص مؤثر مواد مدرج تابعی مقدار بسامد طبیعی مورد نظر در ارتعاشات آزاد را در این نوع سازه‌های هوشمند ایجاد و اثرات نامطلوب نوسانی را پیش‌بینی و کنترل نمود.

پیوست

پیوست (الف)

روابط زیر برای ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو الاستیک ایزوتوروپ موجود می‌باشند:

$$C_{11}=C_{22}\,,\; C_{12}=C_{11}-2C_{66}$$

$$X_{ij}^{ela}+X_{ij}^{me}=X_{ij}\,,\; i,j=1,2$$
$$X_{12}=X_{11}-2X_{66},\; X=A,B,D,E,F,H$$

مؤلفه‌های ماتریسی مربوط به خواص الاستیک و مگنتو-الکتریک در معادلات (۱۹) – (۲۳) ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک که در آنها

χ_{ij}^{ela} ها مؤلفه‌های مربوط به خواص الاستیک و χ_{ij}^{me} ها و δ_i^{me} ها شامل مؤلفه‌های مربوط به اثر مگنتو–الکترو است که مؤلفه‌های ماتریسی آن‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(A_{ij}^{ela}, B_{ij}^{ela}, D_{ij}^{ela}, E_{ij}^{ela}, F_{ij}^{ela}, H_{ij}^{ela}) = \int_{-h/2}^{+h/2} C_{ij}(z)(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6)dz \quad (i, j = 1,2,6) \tag{الف–۱}$$

$$(A_{ij}^{ela}, D_{ij}^{ela}, F_{ij}^{ela},) = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}(z)(1, z^2, z^4,)dz \quad (i, j = 4,5) \tag{الف–۲}$$

$$(A_{ij}^{me}, B_{ij}^{me}, D_{ij}^{me}, E_{ij}^{me}, F_{ij}^{me}, H_{ij}^{me}) = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{e_{31}(z)}{\epsilon_{33}(z)} - \frac{V_1}{h}\right) e_{31}(z)(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6)dz + \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{q_{31}(z)}{\mu_{33}(z)} - \frac{\Omega_1}{h}\right) q_{31}(z)(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6)dz \tag{الف–۳}$$

$$\left(\delta_1^{me}, \delta_2^{me}, \delta_3^{me}\right) = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{e(z)}{\epsilon_{33}(z)} e_{31}(z) - \frac{V_2}{h} e_{31}(z)\right)(1, z, z^3)dz + \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{q(z)}{\mu_{33}(z)} q_{31}(z) - \frac{\Omega_2}{h} q_{31}(z)\right)(1, z, z^3)dz \tag{الف–۴}$$

$$I_i = \int_{-h/2}^{h/2} z^i \rho(z)dz \quad (i = 0,1,2,3,4,6) \tag{الف–۵}$$

$$\Phi_0 = \frac{1}{h}\left(V_0 - \left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\right)V_1 - \left(\varepsilon_{xx}^{(3)} + \varepsilon_{yy}^{(3)}\right)V_2\right) \tag{الف–۶}$$

$$\Psi_0 = \frac{1}{h}\left(\Omega_0 - \left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\right)\Omega_2 - \left(\varepsilon_{xx}^{(3)} + \varepsilon_{yy}^{(3)}\right)\Omega_1\right) \tag{الف–۷}$$

$$V_1 = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{e_{31}(z)}{\epsilon_{33}(z)}dz, \quad V_2 = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{e(z)}{\epsilon_{33}(z)}dz \tag{الف–۸}$$

$$\Omega_1 = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{q_{31}(z)}{\mu_{33}(z)}dz, \quad \Omega_2 = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{q(z)}{\mu_{33}(z)}dz \tag{الف–۹}$$

پیوست (ب)

ضرایب دستگاه معادلات (۳۶):

$$K_{1,1} = -\frac{1}{4}\frac{\left(a^2 n^2 A_{66} + b^2 m^2 A_{11}\right)\pi^2}{a\,b}$$

$$K_{1,2} = -\frac{1}{4} n\,m\left(A_{11} - A_{66}\right)\pi^2$$

$$K_{1,3} = \frac{1}{4}\frac{\left(a^2\left(E_{66} c_1 - B_{66}\right)n^2 + \left(\left(E_{11} + \delta_1\right)c_1 - B_{11}\right)m^2 b^2\right)\pi^2}{a\,b}$$

$$K_{1,4} = \frac{1}{4} n\,m\left(\left(E_{11} - E_{66} + \delta_1\right)c_1 - B_{11} + B_{66}\right)\pi^2$$

$$K_{1,5} = \frac{1}{4} c_1 I_3 h\,b\,\pi\,m$$

$$K_{1,6} = \frac{1}{4}\frac{\pi^3 c_1 m\left(a^2 n^2 + b^2 m^2\right)\left(E_{11} + \delta_1\right)h}{b\,a^2}$$

$$K_{1,7} = \frac{1}{9}\frac{1}{b\,a^2 n}\left(\pi\left(\left((-1)^m\right)^2 + (-1)^m + 1\right)\left(A_{11}\left(a^2 n^2 + b^2 m^2\right)\left((-1)^n\right)^2 + A_{11}\left(a^2 n^2 + b^2 m^2\right)(-1)^n + \left(a^2 n^2 - 2 b^2 m^2\right)A_{11} - 3 a^2 n^2 A_{66}\right)\left((-1)^m - 1\right)h^2\left((-1)^n - 1\right)\right)$$

$$K_{2,1} = -\frac{1}{4} n\,m\left(A_{11} - A_{66}\right)\pi^2$$

$$K_{2,2} = -\frac{1}{4}\frac{\pi^2\left(a^2 n^2 A_{11} + b^2 m^2 A_{66}\right)}{a\,b}$$

$$K_{2,3} = \frac{1}{4} n\,m\left(\left(E_{11} - E_{66} + \delta_1\right)c_1 - B_{11} + B_{66}\right)\pi^2$$

$$K_{2,4} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2\left(b^2\left(E_{66} c_1 - B_{66}\right)m^2 + a^2 n^2\left(\left(E_{11} + \delta_1\right)c_1 - B_{11}\right)\right)}{a\,b}$$

$$K_{2,5} = \frac{1}{4} h\,I_3 c_1 a\,\pi\,n$$

$$K_{2,6} = \frac{1}{4}\frac{c_1 n\,\pi^3\left(a^2 n^2 + b^2 m^2\right)\left(E_{11} + \delta_1\right)h}{a\,b^2}$$

$$K_{2,7} = \frac{1}{9}\frac{1}{a\,b^2 m}\left(\pi h^2\left(A_{11}\left(a^2 n^2 + b^2 m^2\right)\left((-1)^m\right)^2 + A_{11}\left(a^2 n^2 + b^2 m^2\right)(-1)^m + \left(-2 a^2 n^2 + b^2 m^2\right)A_{11} - 3 b^2 m^2 A_{66}\right)\left(\left((-1)^n\right)^2 + (-1)^n + 1\right)\left((-1)^n - 1\right)\left((-1)^m - 1\right)\right)$$

$$K_{4,1} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2\left(a^2\left(E_{66} c_1 - B_{66}\right)n^2 + b^2 m^2\left(E_{11} c_1 - B_{11}\right)\right)}{a\,b}$$

$$K_{4,2} = \frac{1}{4} n\,\pi^2\left(\left(E_{11} - E_{66}\right)c_1 - B_{11} + B_{66}\right)m$$

$$K_{4,4} = \frac{1}{4} m\left(\left(H_{66} - \delta_3 - H_{11}\right)c_1^2 + \left(2 F_{11} - 2 F_{66} + \delta_2\right)c_1 - D_{11} + D_{66}\right)n\,\pi^2$$

$$K_{4,5} = \frac{1}{4} c_1 h\,b\,\pi\,m\left(-I_6 c_1 + I_4\right)$$

$$K_{4,6} = \frac{1}{2}\frac{1}{b\,a^2}\left(\pi h\left(\frac{1}{2}\left(a^2 n^2 + b^2 m^2\right)c_1\left(\left(-H_{11} - \delta_3\right)c_1 + F_{11} + \delta_2\right)\pi^2 + a^2 b^2\left(-\frac{1}{2} F_{44} c_2^2 + D_{44} c_2 - \frac{1}{2} A_{44}\right)\right)m\right)$$

$$K_{4,7} = \frac{1}{9}\frac{1}{b\,a^2 n}\left(\left((-1)^n - 1\right)\left(\left(a^2 n^2 + b^2 m^2\right)\left(-E_{11} c_1 + B_{11}\right)\left((-1)^n\right)^2 + \left(a^2 n^2 + b^2 m^2\right)\left(-E_{11} c_1 + B_{11}\right)(-1)^n + n^2\left(\left(-E_{11} + 3 E_{66}\right)c_1 + B_{11} - 3 B_{66}\right)a^2 - 2 b^2 m^2\left(-E_{11} c_1 + B_{11}\right)\right)\pi\left((-1)^m - 1\right)h^2\left(\left((-1)^m\right)^2 + (-1)^m + 1\right)\right)$$

$$K_{5,1} = \frac{1}{4} n\,\pi^2\left(\left(E_{11} - E_{66}\right)c_1 - B_{11} + B_{66}\right)m$$

$$K_{5,2} = \frac{1}{4}\frac{\left(b^2\left(E_{66} c_1 - B_{66}\right)m^2 + a^2 n^2\left(E_{11} c_1 - B_{11}\right)\right)\pi^2}{b\,a}$$

$$K_{5,3} = \frac{1}{4} m\left(\left(H_{66} - \delta_3 - H_{11}\right)c_1^2 + \left(2 F_{11} - 2 F_{66} + \delta_2\right)c_1 - D_{11} + D_{66}\right)n\,\pi^2$$

$$K_{5,4} = -\frac{1}{4}\frac{1}{b\,a}\left(\left(b^2\left(H_{66} c_1^2 - 2 F_{66} c_1 + D_{66}\right)m^2 + \left(c_1^2\left(H_{11} + \delta_3\right) + \left(-2 F_{11} - \delta_2\right)c_1 + D_{11}\right)n^2 a^2\right)\pi^2 + a^2 b^2\left(F_{44} c_2^2 - 2 D_{44} c_2 + A_{44}\right)\right)$$

$$K_{5,5} = \frac{1}{4} c_1 h\,a\,\pi\,n\left(-I_6 c_1 + I_4\right)$$

$$K_{5,6} = \frac{1}{2}\frac{1}{b^2 a}\left(h\left(\frac{1}{2}\left(a^2 n^2 + b^2 m^2\right)c_1\left(\left(-H_{11} - \delta_3\right)c_1 + F_{11} + \delta_2\right)\pi^2 + a^2 b^2\left(-\frac{1}{2} F_{44} c_2^2 + D_{44} c_2 - \frac{1}{2} A_{44}\right)\right)n\,\pi\right)$$

$$K_{5,7} = \frac{1}{9}\frac{1}{m\,b^2 a}\left(\pi\left(\left((-1)^n\right)^2 + (-1)^n + 1\right)h^2\left(\left(a^2 n^2 + b^2 m^2\right)\left(-E_{11} c_1 + B_{11}\right)\left((-1)^m\right)^2 + \left(a^2 n^2 + b^2 m^2\right)\left(-E_{11} c_1 + B_{11}\right)(-1)^m + \left(\left(-E_{11} + 3 E_{66}\right)c_1 + B_{11} - 3 B_{66}\right)m^2 b^2 - 2 a^2 n^2\left(-E_{11} c_1 + B_{11}\right)\right)\left((-1)^n - 1\right)\left((-1)^m - 1\right)\right)$$

ضرایب مربوط به معادله (۳۷):

$$L_{3,1}=\frac{1}{4}\,\frac{\pi^3 c_1 E_{11}(a^2n^2+b^2m^2)\,m}{b\,a^2}$$

$$L_{3,2}=\frac{1}{4}\,\frac{\pi^3 c_1 E_{11}(a^2n^2+b^2m^2)\,n}{b^2\,a}$$

$$\begin{aligned}L_{3,3}&=\frac{1}{4}\,\frac{1}{b\,a^2}\Big(m\pi\Big(\Big(\big(-H_{11}-\delta_3\big)c_1+F_{11}\Big)(a^2n^2+b^2m^2)\,c_1\pi^2-a^2b^2\Big(F_{44}c_2^2\\&\quad-2\,\mathrm{D}_{44}c_2+A_{44}\Big)\Big)\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{3,4}&=\frac{1}{4}\,\frac{1}{a\,b^2}\Big(\Big(\Big(\big(-H_{11}-\delta_3\big)c_1+F_{11}\Big)(a^2n^2+b^2m^2)\,c_1\pi^2-a^2b^2\Big(F_{44}c_2^2\\&\quad-2\,\mathrm{D}_{44}c_2+A_{44}\Big)\Big)\,n\pi\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{3,5}=\frac{1}{3}\,\frac{1}{a^2bn}\Big(&\pi h\Big(\Big(\frac{2}{3}A_{11}(a^2n^2+b^2m^2)\big((-1)^n\big)^2+\frac{2}{3}A_{11}(a^2n^2+b^2m^2)(-1)^n\\&+\Big(-\frac{1}{3}a^2n^2-\frac{4}{3}b^2m^2\Big)A_{11}+a^2n^2A_{66}\Big)\big((-1)^m\big)^2+\Big(\frac{2}{3}A_{11}(a^2n^2\\&+b^2m^2)\big((-1)^n\big)^2+\frac{2}{3}A_{11}(a^2n^2+b^2m^2)(-1)^n+\Big(-\frac{1}{3}a^2n^2-\frac{4}{3}b^2m^2\Big)A_{11}\\&+a^2n^2A_{66}\Big)(-1)^m+\Big(\Big(-\frac{4}{3}a^2n^2-\frac{1}{3}b^2m^2\Big)A_{11}+3a^2n^2A_{66}\Big)\big((-1)^n\big)^2+\Big(\Big(\\&-\frac{4}{3}a^2n^2-\frac{1}{3}b^2m^2\Big)A_{11}+3a^2n^2A_{66}\Big)(-1)^n+A_{11}\Big(\frac{2}{3}a^2n^2+\frac{2}{3}b^2m^2\Big)\\&-2a^2n^2A_{66}\Big)\big((-1)^n-1\big)\big((-1)^m-1\big)\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{3,6}=\frac{2}{9}\,\frac{1}{a\,b^2m}\Big(&\Big(\Big(A_{11}(a^2n^2+b^2m^2)\big((-1)^n\big)^2+A_{11}(a^2n^2+b^2m^2)(-1)^n+\Big(\\&-\frac{1}{2}a^2n^2-2b^2m^2\Big)A_{11}+\frac{9}{2}b^2m^2A_{66}\Big)\big((-1)^m\big)^2+\Big(A_{11}(a^2n^2+b^2m^2)\big((-1)^n\big)^2\\&+A_{11}(a^2n^2+b^2m^2)(-1)^n+\Big(-\frac{1}{2}a^2n^2-2b^2m^2\Big)A_{11}+\frac{9}{2}b^2m^2A_{66}\Big)(-1)^m\\&+\Big(\Big(-2a^2n^2-\frac{1}{2}b^2m^2\Big)A_{11}+\frac{3}{2}b^2m^2A_{66}\Big)\big((-1)^n\big)^2+\Big(\Big(-2a^2n^2\\&-\frac{1}{2}b^2m^2\Big)A_{11}+\frac{3}{2}b^2m^2A_{66}\Big)(-1)^n+A_{11}(a^2n^2+b^2m^2)-3b^2m^2A_{66}\Big)\big((-1)^m\\&-1\big)\pi\big((-1)^n-1\big)h\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{3,7}=\frac{2}{9}\,\frac{1}{a^2bn}\Big(&h\big((-1)^n-1\big)\big((-1)^m-1\big)\Big(\Big(\Big(\big(-E_{11}-\delta_1\big)c_1+B_{11}\Big)(a^2n^2\\&+b^2m^2)\big((-1)^n\big)^2+\Big(\big(-E_{11}-\delta_1\big)c_1+B_{11}\Big)(a^2n^2+b^2m^2)(-1)^n+\Big(\frac{1}{2}n^2\big(E_{11}\\&-3E_{66}+\delta_1\big)a^2+2b^2m^2\big(E_{11}+\delta_1\big)\Big)c_1-\frac{1}{2}n^2\big(B_{11}-3B_{66}\big)a^2-2b^2m^2B_{11}\Big)\\&\big((-1)^m\big)^2+\Big(\Big(\big(-E_{11}-\delta_1\big)c_1+B_{11}\Big)(a^2n^2+b^2m^2)\big((-1)^n\big)^2+\Big(\big(-E_{11}-\delta_1\big)c_1\\&+B_{11}\Big)(a^2n^2+b^2m^2)(-1)^n+\Big(\frac{1}{2}n^2\big(E_{11}-3E_{66}+\delta_1\big)a^2+2b^2m^2\big(E_{11}\\&+\delta_1\big)\Big)c_1-\frac{1}{2}n^2\big(B_{11}-3B_{66}\big)a^2-2b^2m^2B_{11}\Big)(-1)^m+\Big(\Big(2\Big(E_{11}-\frac{9}{4}E_{66}\\&+\delta_1\Big)n^2a^2+\frac{1}{2}b^2m^2\big(E_{11}+\delta_1\big)\Big)c_1-2n^2\Big(B_{11}-\frac{9}{4}B_{66}\Big)a^2-\frac{1}{2}b^2m^2B_{11}\Big)\\&\big((-1)^n\big)^2+\Big(\Big(2\Big(E_{11}-\frac{9}{4}E_{66}+\delta_1\Big)n^2a^2+\frac{1}{2}b^2m^2\big(E_{11}+\delta_1\big)\Big)c_1-2n^2\Big(B_{11}\\&-\frac{9}{4}B_{66}\Big)a^2-\frac{1}{2}b^2m^2B_{11}\Big)(-1)^n+\Big(-n^2\big(E_{11}-3E_{66}+\delta_1\big)a^2-b^2m^2\big(E_{11}\\&+\delta_1\big)\Big)c_1+n^2\big(B_{11}-3B_{66}\big)a^2+b^2m^2B_{11}\Big)\pi\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{3,8}=\frac{2}{9}\,\frac{1}{a\,b^2m}\Big(&h\Big(\Big(\Big(\big(-E_{11}-\delta_1\big)c_1+B_{11}\Big)(a^2n^2+b^2m^2)\big((-1)^n\big)^2+\Big(\big(-E_{11}\\&-\delta_1\big)c_1+B_{11}\Big)(a^2n^2+b^2m^2)(-1)^n+\Big(2m^2\Big(E_{11}-\frac{9}{4}E_{66}+\delta_1\Big)b^2\\&+\frac{1}{2}a^2n^2\big(E_{11}+\delta_1\big)\Big)c_1-2m^2\Big(B_{11}-\frac{9}{4}B_{66}\Big)b^2-\frac{1}{2}a^2n^2B_{11}\Big)\big((-1)^m\big)^2+\Big(\Big(\Big(\\&-E_{11}-\delta_1\big)c_1+B_{11}\Big)(a^2n^2+b^2m^2)\big((-1)^n\big)^2+\Big(\big(-E_{11}-\delta_1\big)c_1+B_{11}\Big)(a^2n^2\\&+b^2m^2)(-1)^n+\Big(2m^2\Big(E_{11}-\frac{9}{4}E_{66}+\delta_1\Big)b^2+\frac{1}{2}a^2n^2\big(E_{11}+\delta_1\big)\Big)c_1\\&-2m^2\Big(B_{11}-\frac{9}{4}B_{66}\Big)b^2-\frac{1}{2}a^2n^2B_{11}\Big)(-1)^m+\Big(\Big(\frac{1}{2}m^2\big(E_{11}-3E_{66}+\delta_1\big)b^2\\&+2a^2n^2\big(E_{11}+\delta_1\big)\Big)c_1-\frac{1}{2}m^2\big(B_{11}-3B_{66}\big)b^2-2a^2n^2B_{11}\Big)\big((-1)^n\big)^2\\&+\Big(\Big(\frac{1}{2}m^2\big(E_{11}-3E_{66}+\delta_1\big)b^2+2a^2n^2\big(E_{11}+\delta_1\big)\Big)c_1-\frac{1}{2}m^2\big(B_{11}-3B_{66}\big)b^2\\&-2a^2n^2B_{11}\Big)(-1)^n+\Big(-m^2\big(E_{11}-3E_{66}+\delta_1\big)b^2-a^2n^2\big(E_{11}+\delta_1\big)\Big)c_1+m^2\big(B_{11}\\&-3B_{66}\big)b^2+a^2n^2B_{11}\Big)\big((-1)^n-1\big)\big((-1)^m-1\big)\pi\Big)\end{aligned}$$

$$L_{3,9}=-\frac{1}{4}\,\frac{h\Big(\pi^2c_1^2(a^2n^2+b^2m^2)\,\mathrm{I}_6+a^2b^2\,\mathrm{I}_0\Big)}{b\,a}$$

$$\begin{aligned}L_{3,10}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{b^3a^3}\Big(&\pi^2\Big(\Big(\Big(-\frac{1}{2}F_{44}c_2^2+\mathrm{D}_{44}c_2-\frac{1}{2}A_{44}\Big)b^2-\frac{1}{2}c_1^2n^2\pi^2\big(H_{11}+\delta_3\big)\Big)a^2\\&-\frac{1}{2}c_1^2b^2m^2\pi^2\big(H_{11}+\delta_3\big)\Big)(a^2n^2+b^2m^2)\,h\Big)-\frac{1}{4}\,\frac{h\big(\Omega\pi^2a^2mn^3+\pi^2Vb^2m^3n\big)}{b\,m\,a\,n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{3,11}=-\frac{2}{9}\,\frac{1}{b^3a^3mn}\Big(&\pi^2\big((-1)^m-1\big)c_1\big((-1)^n-1\big)h^2\Big(\Big(\delta_1(a^2n^2+b^2m^2)^2\big((-1)^n\big)^2\\&+\delta_1(a^2n^2+b^2m^2)^2(-1)^n-2b^4m^4\delta_1-3\Big(E_{11}-3E_{66}+\frac{5}{6}\delta_1\Big)m^2n^2b^2a^2\\&-\frac{1}{2}n^4\delta_1a^4\Big)\big((-1)^m\big)^2+\Big(\delta_1(a^2n^2+b^2m^2)^2\big((-1)^n\big)^2+\delta_1(a^2n^2+b^2m^2)^2(-1)^n\\&-2b^4m^4\delta_1-3\Big(E_{11}-3E_{66}+\frac{5}{6}\delta_1\Big)m^2n^2b^2a^2-\frac{1}{2}n^4\delta_1a^4\Big)(-1)^m+\Big(-2n^4\delta_1a^4\\&-3\Big(E_{11}-3E_{66}+\frac{5}{6}\delta_1\Big)m^2n^2b^2a^2-\frac{1}{2}b^4m^4\delta_1\Big)\big((-1)^n\big)^2+\Big(-2n^4\delta_1a^4\\&-3\Big(E_{11}-3E_{66}+\frac{5}{6}\delta_1\Big)m^2n^2b^2a^2-\frac{1}{2}b^4m^4\delta_1\Big)(-1)^n+n^4\delta_1a^4+3\Big(E_{11}\\&-3E_{66}+\frac{2}{3}\delta_1\Big)m^2n^2b^2a^2+b^4m^4\delta_1\Big)\Big)\end{aligned}$$

$$L_{3,12}=-\frac{1}{128}\,\frac{h^3\pi^4A_{11}\big(9a^4n^4+2a^2b^2m^2n^2+9b^4m^4\big)}{b^3a^3}$$

ضرایب مربوط به معادلات (۳۸) – (۴۱):

$$\begin{aligned}L_{1,1}=\Big(&\big(K_{4,4}K_{5,5}-K_{4,5}K_{5,4}\big)K_{2,3}+\big(-K_{4,3}K_{5,5}+K_{4,5}K_{5,3}\big)K_{2,4}+K_{2,5}\big(K_{4,3}K_{5,4}\\&-K_{4,4}K_{5,3}\big)\Big)K_{1,2}+\Big(\big(-K_{4,4}K_{5,5}+K_{4,5}K_{5,4}\big)K_{2,2}+\big(K_{4,2}K_{5,5}\\&-K_{4,5}K_{5,2}\big)K_{2,4}-K_{2,5}\big(K_{4,2}K_{5,4}-K_{4,4}K_{5,2}\big)\Big)K_{1,3}+\Big(\big(K_{4,3}K_{5,5}\\&-K_{4,5}K_{5,3}\big)K_{2,2}+\big(-K_{4,2}K_{5,5}+K_{4,5}K_{5,2}\big)K_{2,3}+K_{2,5}\big(K_{4,2}K_{5,3}-K_{4,3}K_{5,2}\big)\Big)\\&K_{1,4}-K_{1,5}\Big(\big(K_{4,3}K_{5,4}-K_{4,4}K_{5,3}\big)K_{2,2}+\big(-K_{4,2}K_{5,4}+K_{4,4}K_{5,2}\big)K_{2,3}\\&+K_{2,4}\big(K_{4,2}K_{5,3}-K_{4,3}K_{5,2}\big)\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{1,2}=-\Big(&\big(-K_{4,4}K_{5,6}+K_{4,6}K_{5,4}\big)K_{2,3}+\big(K_{4,3}K_{5,6}-K_{4,6}K_{5,3}\big)K_{2,4}-K_{2,6}\big(K_{4,3}K_{5,4}\\&-K_{4,4}K_{5,3}\big)\Big)K_{1,2}-\Big(\big(K_{4,4}K_{5,6}-K_{4,6}K_{5,4}\big)K_{2,2}+\big(-K_{4,2}K_{5,6}\\&+K_{4,6}K_{5,2}\big)K_{2,4}+K_{2,6}\big(K_{4,2}K_{5,4}-K_{4,4}K_{5,2}\big)\Big)K_{1,3}-\Big(\big(-K_{4,3}K_{5,6}\\&+K_{4,6}K_{5,3}\big)K_{2,2}+\big(K_{4,2}K_{5,6}-K_{4,6}K_{5,2}\big)K_{2,3}-K_{2,6}\big(K_{4,2}K_{5,3}-K_{4,3}K_{5,2}\big)\Big)\\&K_{1,4}-\Big(\big(K_{4,3}K_{5,4}-K_{4,4}K_{5,3}\big)K_{2,2}+\big(-K_{4,2}K_{5,4}+K_{4,4}K_{5,2}\big)K_{2,3}\\&+K_{2,4}\big(K_{4,2}K_{5,3}-K_{4,3}K_{5,2}\big)\Big)K_{1,6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{1,3}=-\Big(&\big(-K_{4,4}K_{5,7}+K_{4,7}K_{5,4}\big)K_{2,3}+\big(K_{4,3}K_{5,7}-K_{4,7}K_{5,3}\big)K_{2,4}-K_{2,7}\big(K_{4,3}K_{5,4}\\&-K_{4,4}K_{5,3}\big)\Big)K_{1,2}-\Big(\big(K_{4,4}K_{5,7}-K_{4,7}K_{5,4}\big)K_{2,2}+\big(-K_{4,2}K_{5,7}\\&+K_{4,7}K_{5,2}\big)K_{2,4}+K_{2,7}\big(K_{4,2}K_{5,4}-K_{4,4}K_{5,2}\big)\Big)K_{1,3}-\Big(\big(-K_{4,3}K_{5,7}\\&+K_{4,7}K_{5,3}\big)K_{2,2}+\big(K_{4,2}K_{5,7}-K_{4,7}K_{5,2}\big)K_{2,3}-K_{2,7}\big(K_{4,2}K_{5,3}-K_{4,3}K_{5,2}\big)\Big)\\&K_{1,4}-K_{1,7}\Big(\big(K_{4,3}K_{5,4}-K_{4,4}K_{5,3}\big)K_{2,2}+\big(-K_{4,2}K_{5,4}+K_{4,4}K_{5,2}\big)K_{2,3}\\&+K_{2,4}\big(K_{4,2}K_{5,3}-K_{4,3}K_{5,2}\big)\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{2,1}=\Big(&\big(-K_{4,4}K_{5,5}+K_{4,5}K_{5,4}\big)K_{2,3}+\big(K_{4,3}K_{5,5}-K_{4,5}K_{5,3}\big)K_{2,4}-K_{2,5}\big(K_{4,3}K_{5,4}\\&-K_{4,4}K_{5,3}\big)\Big)K_{1,1}+\Big(\big(K_{4,4}K_{5,5}-K_{4,5}K_{5,4}\big)K_{2,1}+\big(-K_{4,1}K_{5,5}\\&+K_{4,5}K_{5,1}\big)K_{2,4}+K_{2,5}\big(K_{4,1}K_{5,4}-K_{4,4}K_{5,1}\big)\Big)K_{1,3}+\Big(\big(-K_{4,3}K_{5,5}\\&+K_{4,5}K_{5,3}\big)K_{2,1}+\big(K_{4,1}K_{5,5}-K_{4,5}K_{5,1}\big)K_{2,3}-K_{2,5}\big(K_{4,1}K_{5,3}-K_{4,3}K_{5,1}\big)\Big)\\&K_{1,4}-K_{1,5}\Big(\big(-K_{4,3}K_{5,4}+K_{4,4}K_{5,3}\big)K_{2,1}+\big(K_{4,1}K_{5,4}-K_{4,4}K_{5,1}\big)K_{2,3}\\&-K_{2,4}\big(K_{4,1}K_{5,3}-K_{4,3}K_{5,1}\big)\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{2,2}=-\Big(&\big(K_{4,4}K_{5,6}-K_{4,6}K_{5,4}\big)K_{2,3}+\big(-K_{4,3}K_{5,6}+K_{4,6}K_{5,3}\big)K_{2,4}+K_{2,6}\big(K_{4,3}K_{5,4}\\&-K_{4,4}K_{5,3}\big)\Big)K_{1,1}-\Big(\big(-K_{4,4}K_{5,6}+K_{4,6}K_{5,4}\big)K_{2,1}+\big(K_{4,1}K_{5,6}\\&-K_{4,6}K_{5,1}\big)K_{2,4}-K_{2,6}\big(K_{4,1}K_{5,4}-K_{4,4}K_{5,1}\big)\Big)K_{1,3}-\Big(\big(K_{4,3}K_{5,6}\\&-K_{4,6}K_{5,3}\big)K_{2,1}+\big(-K_{4,1}K_{5,6}+K_{4,6}K_{5,1}\big)K_{2,3}+K_{2,6}\big(K_{4,1}K_{5,3}-K_{4,3}K_{5,1}\big)\Big)\\&K_{1,4}-K_{1,6}\Big(\big(-K_{4,3}K_{5,4}+K_{4,4}K_{5,3}\big)K_{2,1}+\big(K_{4,1}K_{5,4}-K_{4,4}K_{5,1}\big)K_{2,3}\\&-K_{2,4}\big(K_{4,1}K_{5,3}-K_{4,3}K_{5,1}\big)\Big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L_{2,3} = -\Big(&\big((K_{4,4}K_{5,7} - K_{4,7}K_{5,4})K_{2,3} + (-K_{4,3}K_{5,7} + K_{4,7}K_{5,3})K_{2,4} + K_{2,7}(K_{4,3}K_{5,4} \\
&- K_{4,4}K_{5,3})\big)K_{1,1} - \big((-K_{4,4}K_{5,7} + K_{4,7}K_{5,4})K_{2,1} + (K_{4,1}K_{5,7} \\
&- K_{4,7}K_{5,1})K_{2,4} - K_{2,7}(K_{4,1}K_{5,4} - K_{4,4}K_{5,1})\big)K_{1,3} - \big((K_{4,3}K_{5,7} \\
&- K_{4,7}K_{5,3})K_{2,1} + (-K_{4,1}K_{5,7} + K_{4,7}K_{5,1})K_{2,3} + K_{2,7}(K_{4,1}K_{5,3} - K_{4,3}K_{5,1})\big) \\
&K_{1,4} - K_{1,7}\big((-K_{4,3}K_{5,4} + K_{4,4}K_{5,3})K_{2,1} + (K_{4,1}K_{5,4} - K_{4,4}K_{5,1})K_{2,3} \\
&- K_{2,4}(K_{4,1}K_{5,3} - K_{4,3}K_{5,1})\big)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{4,1} = \Big(\big(&(K_{4,4}K_{5,5} - K_{4,5}K_{5,4})K_{2,2} + (-K_{4,2}K_{5,5} + K_{4,5}K_{5,2})K_{2,4} + K_{2,5}(K_{4,2}K_{5,4} \\
&- K_{4,4}K_{5,2})\big)K_{1,1} + \big((-K_{4,4}K_{5,5} + K_{4,5}K_{5,4})K_{2,1} + (K_{4,1}K_{5,5} \\
&- K_{4,5}K_{5,1})K_{2,4} - K_{2,5}(K_{4,1}K_{5,4} - K_{4,4}K_{5,1})\big)K_{1,2} + \big((K_{4,2}K_{5,5} \\
&- K_{4,5}K_{5,2})K_{2,1} + (-K_{4,1}K_{5,5} + K_{4,5}K_{5,1})K_{2,2} + K_{2,5}(K_{4,1}K_{5,2} - K_{4,2}K_{5,1})\big) \\
&K_{1,4} + K_{1,5}\big((-K_{4,2}K_{5,4} + K_{4,4}K_{5,2})K_{2,1} + K_{2,2}(K_{4,1}K_{5,4} - K_{4,4}K_{5,1}) \\
&- (K_{4,1}K_{5,2} - K_{4,2}K_{5,1})K_{2,4}\big)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{4,2} = \Big(&\big((K_{4,4}K_{5,6} - K_{4,6}K_{5,4})K_{2,2} + (-K_{4,2}K_{5,6} + K_{4,6}K_{5,2})K_{2,4} + K_{2,6}(K_{4,2}K_{5,4} \\
&- K_{4,4}K_{5,2})\big)K_{1,1} + \big((-K_{4,4}K_{5,6} + K_{4,6}K_{5,4})K_{2,1} + (K_{4,1}K_{5,6} \\
&- K_{4,6}K_{5,1})K_{2,4} - K_{2,6}(K_{4,1}K_{5,4} - K_{4,4}K_{5,1})\big)K_{1,2} + \big((K_{4,2}K_{5,6} \\
&- K_{4,6}K_{5,2})K_{2,1} + (-K_{4,1}K_{5,6} + K_{4,6}K_{5,1})K_{2,2} + K_{2,6}(K_{4,1}K_{5,2} - K_{4,2}K_{5,1})\big) \\
&K_{1,4} + K_{1,6}\big((-K_{4,2}K_{5,4} + K_{4,4}K_{5,2})K_{2,1} + K_{2,2}(K_{4,1}K_{5,4} - K_{4,4}K_{5,1}) \\
&- (K_{4,1}K_{5,2} - K_{4,2}K_{5,1})K_{2,4}\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{4,3} = \Big(&\big((K_{4,4}K_{5,7} - K_{4,7}K_{5,4})K_{2,2} + (-K_{4,2}K_{5,7} + K_{4,7}K_{5,2})K_{2,4} + K_{2,7}(K_{4,2}K_{5,4} \\
&- K_{4,4}K_{5,2})\big)K_{1,1} + \big((-K_{4,4}K_{5,7} + K_{4,7}K_{5,4})K_{2,1} + (K_{4,1}K_{5,7} \\
&- K_{4,7}K_{5,1})K_{2,4} - K_{2,7}(K_{4,1}K_{5,4} - K_{4,4}K_{5,1})\big)K_{1,2} + \big((K_{4,2}K_{5,7} \\
&- K_{4,7}K_{5,2})K_{2,1} + (-K_{4,1}K_{5,7} + K_{4,7}K_{5,1})K_{2,2} + K_{2,7}(K_{4,1}K_{5,2} - K_{4,2}K_{5,1})\big) \\
&K_{1,4} + K_{1,7}\big((-K_{4,2}K_{5,4} + K_{4,4}K_{5,2})K_{2,1} + K_{2,2}(K_{4,1}K_{5,4} - K_{4,4}K_{5,1}) \\
&- (K_{4,1}K_{5,2} - K_{4,2}K_{5,1})K_{2,4}\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{5,1} = \Big(&\big((-K_{4,3}K_{5,5} + K_{4,5}K_{5,3})K_{2,2} + (K_{4,2}K_{5,5} - K_{4,5}K_{5,2})K_{2,3} - K_{2,5}(K_{4,2}K_{5,3} \\
&- K_{4,3}K_{5,2})\big)K_{1,1} + \big((K_{4,3}K_{5,5} - K_{4,5}K_{5,3})K_{2,1} + (-K_{4,1}K_{5,5} \\
&+ K_{4,5}K_{5,1})K_{2,3} + K_{2,5}(K_{4,1}K_{5,3} - K_{4,3}K_{5,1})\big)K_{1,2} + \big((-K_{4,2}K_{5,5} \\
&+ K_{4,5}K_{5,2})K_{2,1} + (K_{4,1}K_{5,5} - K_{4,5}K_{5,1})K_{2,2} - K_{2,5}(K_{4,1}K_{5,2} - K_{4,2}K_{5,1})\big) \\
&K_{1,3} - K_{1,5}\big((-K_{4,2}K_{5,3} + K_{4,3}K_{5,2})K_{2,1} + (K_{4,1}K_{5,3} - K_{4,3}K_{5,1})K_{2,2} \\
&- K_{2,3}(K_{4,1}K_{5,2} - K_{4,2}K_{5,1})\big)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{5,2} = -\Big(&\big((K_{4,3}K_{5,6} - K_{4,6}K_{5,3})K_{2,2} + (-K_{4,2}K_{5,6} + K_{4,6}K_{5,2})K_{2,3} + K_{2,6}(K_{4,2}K_{5,3} \\
&- K_{4,3}K_{5,2})\big)K_{1,1} - \big((-K_{4,3}K_{5,6} + K_{4,6}K_{5,3})K_{2,1} + (K_{4,1}K_{5,6} \\
&- K_{4,6}K_{5,1})K_{2,3} - K_{2,6}(K_{4,1}K_{5,3} - K_{4,3}K_{5,1})\big)K_{1,2} - \big((K_{4,2}K_{5,6} \\
&- K_{4,6}K_{5,2})K_{2,1} + (-K_{4,1}K_{5,6} + K_{4,6}K_{5,1})K_{2,2} + K_{2,6}(K_{4,1}K_{5,2} - K_{4,2}K_{5,1})\big) \\
&K_{1,3} - \big((-K_{4,2}K_{5,3} + K_{4,3}K_{5,2})K_{2,1} + (K_{4,1}K_{5,3} - K_{4,3}K_{5,1})K_{2,2} \\
&- K_{2,3}(K_{4,1}K_{5,2} - K_{4,2}K_{5,1})\big)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{5,3} = -\Big(&\big((K_{4,3}K_{5,7} - K_{4,7}K_{5,3})K_{2,2} + (-K_{4,2}K_{5,7} + K_{4,7}K_{5,2})K_{2,3} + K_{2,7}(K_{4,2}K_{5,3} \\
&- K_{4,3}K_{5,2})\big)K_{1,1} - \big((-K_{4,3}K_{5,7} + K_{4,7}K_{5,3})K_{2,1} + (K_{4,1}K_{5,7} \\
&- K_{4,7}K_{5,1})K_{2,3} - K_{2,7}(K_{4,1}K_{5,3} - K_{4,3}K_{5,1})\big)K_{1,2} - \big((K_{4,2}K_{5,7} \\
&- K_{4,7}K_{5,2})K_{2,1} + (-K_{4,1}K_{5,7} + K_{4,7}K_{5,1})K_{2,2} + K_{2,7}(K_{4,1}K_{5,2} - K_{4,2}K_{5,1})\big) \\
&K_{1,3} - K_{1,7}\big((-K_{4,2}K_{5,3} + K_{4,3}K_{5,2})K_{2,1} + (K_{4,1}K_{5,3} - K_{4,3}K_{5,1})K_{2,2} \\
&- K_{2,3}(K_{4,1}K_{5,2} - K_{4,2}K_{5,1})\big)\Big)
\end{aligned}
$$

ضرایب مربوط به معادله حرکت (۴۲):

$$Z_1 = L_{1,1}L_{3,1} + L_{2,1}L_{3,2} + L_{3,3}L_{4,1} + L_{3,4}L_{5,1} + L_{3,9}$$

$$Z_2 = L_{1,2}L_{3,1} + L_{2,2}L_{3,2} + L_{3,3}L_{4,2} + L_{3,4}L_{5,2} + L_{3,10}$$

$$Z_3 = L_{1,1}L_{3,5} + L_{2,1}L_{3,6} + L_{3,7}L_{4,1} + L_{3,8}L_{5,1}$$

$$
\begin{aligned}
Z_4 = &L_{1,2}L_{3,5} + L_{1,3}L_{3,1} + L_{2,2}L_{3,6} + L_{2,3}L_{3,2} + L_{3,3}L_{4,3} + L_{3,4}L_{5,3} + L_{3,7}L_{4,2} \\
&+ L_{3,8}L_{5,2} + L_{3,11}
\end{aligned}
$$

$$Z_5 = L_{1,3}L_{3,5} + L_{2,3}L_{3,6} + L_{3,7}L_{4,3} + L_{3,8}L_{5,3} + L_{3,12}$$

پیوست (پ)

$$\omega^2 = \frac{\lambda Z_2}{Z_1}, \alpha_1 = \frac{Z_3}{Z_1}, \alpha_i = \frac{\lambda Z_{i+2}}{Z_1} \,(i = 2,3,4),\; \lambda = \left(\frac{t}{\tau}\right)^2$$

منابع

[1] A. Ferreira, R. Batra, C. Roque, L. Qian, R. Jorge, Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method, *Composite Structures*, 75(1-4) (2006) 593-600.

[2] S. Hosseini-Hashemi, M. Fadaee, S.R. Atashipour, A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, 53(1) (2011) 11-22.

[3] S. Hosseini-Hashemi, M. Fadaee, S.R. Atashipour, Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure, *Composite Structures*, 93(2) (2011) 722-735.

[4] A. Allahverdizadeh, R. Oftadeh, M. Mahjoob, M. Naei, Homotopy perturbation solution and periodicity analysis of nonlinear vibration of thin rectangular functionally graded plates, *Acta Mechanica Solida Sinica*, 27(2) (2014) 210-220.

[5] N.D. Duc, P.H. Cong, N.D. Tuan, P. Tran, V.M. Anh, V.D. Quang, Nonlinear vibration and dynamic response of imperfect eccentrically stiffened shear deformable sandwich plate with functionally graded material in thermal environment, *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 18(4) (2016) 445-473.

[6] P. Malekzadeh, A. Alibeygi Beni, Nonlinear free vibration of in-plane functionally graded rectangular plates, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 22(8) (2015) 633-640.

[7] J. Reddy, Z.-Q. Cheng, Three-dimensional solutions of smart functionally graded plates, *Journal of Applied Mechanics*, 68(2) (2001) 234-241.

[8] K. Liew, J. Yang, S. Kitipornchai, Postbuckling of piezoelectric FGM plates subject to thermo-electro-mechanical loading, *International Journal of Solids and Structures*, 40(15) (2003) 3869-3892.

[9] P. Cupiał, Three-dimensional natural vibration analysis and energy considerations for a piezoelectric rectangular plate, *Journal of sound and vibration*, 283(3-5) (2005) 1093-1113.

[10] H.-S. Shen, Postbuckling of axially loaded FGM hybrid cylindrical shells in thermal environments, *Composites Science and Technology*, 65(11-12) (2005) 1675-1690.

[11] X. Chen, Z. Zhao, K.M. Liew, Stability of piezoelectric FGM rectangular plates subjected to non-uniformly distributed load, heat and voltage, *Advances in Engineering software*, 39(2) (2008) 121-131.

[12] V. Fakhari, A. Ohadi, P. Yousefian, Nonlinear free and forced vibration behavior of functionally graded plate with piezoelectric layers in thermal environment,

[25] S. Razavi, A. Shooshtari, Free vibration analysis of a magneto-electro-elastic doubly-curved shell resting on a Pasternak-type elastic foundation, *Smart Materials and Structures*, 23(10) (2014) 105003.

[26] R. Ansari, R. Gholami, H. Rouhi, Size-dependent nonlinear forced vibration analysis of magneto-electro-thermo-elastic Timoshenko nanobeams based upon the nonlocal elasticity theory, *Composite Structures*, 126 (2015) 216-226.

[27] R. Ansari, E. Hasrati, R. Gholami, F. Sadeghi, Nonlinear analysis of forced vibration of nonlocal third-order shear deformable beam model of magneto–electro–thermo elastic nanobeams, *Composites Part B: Engineering*, 83 (2015) 226-241.

[28] S. Kattimani, M. Ray, Smart damping of geometrically nonlinear vibrations of magneto-electro-elastic plates, *Composite structures*, 114 (2014) 51-63.

[29] A. Milazzo, Large deflection of magneto-electro-elastic laminated plates, *Applied Mathematical Modelling*, 38(5-6) (2014) 1737-1752.

[30] M. Rao, R. Schmidt, K.-U. Schröder, Geometrically nonlinear static FE-simulation of multilayered magneto-electro-elastic composite structures, *Composite Structures*, 127 (2015) 120-131.

[31] S. Razavi, A. Shooshtari, Nonlinear free vibration of magneto-electro-elastic rectangular plates, *Composite Structures*, 119 (2015) 377-384.

[32] A. Shooshtari, S. Razavi, Linear and nonlinear free vibration of a multilayered magneto-electro-elastic doubly-curved shell on elastic foundation, *Composites Part B: Engineering*, 78 (2015) 95-108.

[33] A. Shooshtari, S. Razavi, Large amplitude free vibration of symmetrically laminated magneto-electro-elastic rectangular plates on Pasternak type foundation, *Mechanics Research Communications*, 69 (2015) 103-113.

[34] S. Kattimani, M. Ray, Control of geometrically nonlinear vibrations of functionally graded magneto-electro-elastic plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, 99 (2015) 154-167.

[35] E. Pan, F. Han, Exact solution for functionally graded and layered magneto-electro-elastic plates, *International Journal of Engineering Science*, 43(3-4) (2005) 321-339.

[36] J.Y. Li, Magnetoelectroelastic multi-inclusion and inhomogeneity problems and their applications in composite materials, *International Journal of Engineering Science*, 38(18) (2000) 1993-2011.

[37] J.N. Reddy, *An introduction to the finite element method*, McGraw-Hill New York, 1993.

Composite Structures, 93(9) (2011) 2310-2321.

[13] S. Panda, D. Chakraborty, Piezo-viscoelastically damped nonlinear frequency response of functionally graded plates with a heated plate-surface, *Journal of Vibration and Control*, 22(2) (2016) 320-343.

[14] S. Panda, D. Chakraborty, Harmonically exited nonlinear vibration of heated functionally graded plates integrated with piezoelectric composite actuator, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 26(8) (2015) 931-951.

[15] H.-S. Shen, Nonlinear bending analysis of unsymmetric cross-ply laminated plates with piezoelectric actuators in thermal environments, *Composite Structures*, 63(2) (2004) 167-177.

[16] X.-L. Huang, H.-S. Shen, Nonlinear free and forced vibration of simply supported shear deformable laminated plates with piezoelectric actuators, *International Journal of Mechanical Sciences*, 47(2) (2005) 187-208.

[17] H.-S. Shen, Nonlinear thermal bending response of FGM plates due to heat conduction, *Composites Part B: Engineering*, 38(2) (2007) 201-215.

[18] E. Pan, Exact solution for simply supported and multilayered magneto-electro-elastic plates, *Journal of applied Mechanics*, 68(4) (2001) 608-618.

[19] R.K. Bhangale, N. Ganesan, Static analysis of simply supported functionally graded and layered magneto-electro-elastic plates, *International Journal of Solids and Structures*, 43(10) (2006) 3230-3253.

[20] R.K. Bhangale, N. Ganesan, Free vibration of simply supported functionally graded and layered magneto-electro-elastic plates by finite element method, *Journal of sound and vibration*, 294(4-5) (2006) 1016-1038.

[21] T.-P. Chang, Deterministic and random vibration analysis of fluid-contacting transversely isotropic magneto-electro-elastic plates, *Computers & Fluids*, 84 (2013) 247-254.

[22] Z. Lang, L. Xuewu, Buckling and vibration analysis of functionally graded magneto-electro-thermo-elastic circular cylindrical shells, *Applied Mathematical Modelling*, 37(4) (2013) 2279-2292.

[23] J. Chen, P. Heyliger, E. Pan, Free vibration of three-dimensional multilayered magneto-electro-elastic plates under combined clamped/free boundary conditions, *Journal of Sound and Vibration*, 333(17) (2014) 4017-4029.

[24] Y. Li, J. Zhang, Free vibration analysis of magnetoelectroelastic plate resting on a Pasternak foundation, *Smart materials and structures*, 23(2) (2013) 025002.

of magneto-electro-elastic plates using a higher order finite element model, *Composite structures*, 91(4) (2009) 421-426.

[38] A.H. Nayfeh, D.T. Mook, *Nonlinear oscillations*, John Wiley & Sons, 2008.

[39] J.M.S. Moita, C.M.M. Soares, C.A.M. Soares, Analyses

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

A. Shooshtari and R. Mantashloo, Linear and Nonlinear Free Vibration of a Functionally Graded Magneto-electro-elastic Rectangular Plate Based on the Third Order Shear Deformation Theory, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 49(4) (2018) 743-758.
DOI: 10.22060/mej.2016.763