



لنگش آزاد و اجباری محورهای حامل دیسک‌های نامیزان تحت اثر نیروی محوری

محمد رضا زین‌العابدینی، منصور رفیعیان*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۲ تیر ۱۳۹۵
بازنگری: ۳۱ شهریور ۱۳۹۵
پذیرش: ۲ آبان ۱۳۹۵
ارائه آنلاین: ۱۹ آبان ۱۳۹۵

کلمات کلیدی:

لنگش
محور دوار
نیروی محوری
نامیزانی

چکیده: در این پژوهش معادلات حاکم بر لنگش آزاد و اجباری یک محور حامل تعداد دلخواه دیسک استخراج شده‌است. محور با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو و افزودن اثرات ژبروسکوپی مدل‌سازی شده و دیسک‌ها به صورت اجرام متمرکز دارای اینرسی‌های انتقالی و دورانی در نظر گرفته شده‌اند. دو نوع گسترده و متمرکز از نیروی محوری نیز بر روی هر دیسک در نظر گرفته شده که تابعی از زمان بوده و محل نیروی متمرکز نیز نقطه‌ای دلخواه بر روی دیسک در نظر گرفته شده‌است. نیروی عرضی ناشی از نامیزانی جرم در دیسک‌ها و وزن کل مجموعه در تحلیل لنگش اجباری در نظر گرفته شده‌اند. برای شرایط مرزی ساده در دو طرف محور و با استفاده از روش گالرکین لنگش آزاد محور بررسی شده و سپس با استفاده از روش‌های گالرکین و نیومارک-بتا، لنگش اجباری محور مورد تحلیل قرار گرفته‌است. در تحلیل لنگش آزاد فرکانس‌های پیشرو و پسرو و همچنین دیاگرام کمپل برای محور رسم شده‌اند و در تحلیل لنگش اجباری نمودار تغییرات زمانی خیز، گشتاور خمشی و نیروی برشی در نقاط دلخواه از محور رسم شده‌اند. از نکات برجسته‌ی این تحقیق می‌توان به این مورد اشاره نمود که در مقایسه با تحلیل لنگش آزاد، لنگش اجباری محورها بسیار کم مورد توجه محققین قرار گرفته‌است که این مورد در این مقاله بررسی شده‌است. همچنین در نظر گرفتن سرعت زاویه‌ای متغیر با زمان، نیروی محوری متغیر با مکان و زمان و عدم وجود محدودیت در تعداد دیسک‌های موجود بر روی محور از دیگر نقاط برجسته‌ی این پژوهش می‌باشند؛ این موارد باعث شده‌اند که مسأله‌ی بررسی شده هر چه بیشتر به آنچه در واقعیت رخ می‌دهد نزدیک‌تر باشد.

۱- مقدمه

کاربرد بالایی تجهیزات دوار در صنایع مختلف مانند سامانه‌های انتقال قدرت، پمپ‌ها و توربین‌ها بر کسی پوشیده نیست. در طراحی مناسب یک محور مسائل گوناگونی باید در نظر گرفته شوند که از آن جمله می‌توان به تحلیل‌های تسلیم و یا خستگی در اثر تنش‌های ناشی از خمش، پیچش و نیروی محوری و همچنین تحلیل تغییر شکل محور در اثر بارهای خارجی وارد شده بر آن اشاره نمود. یکی از مسائلی که در طراحی محورها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، تحلیل دینامیکی آن می‌باشد؛ اهمیت این مسأله به حدی است که اگر محور با ضریب اطمینان بالا در تحمل تنش و یا تغییر شکل طراحی شده ولی از نظر دینامیکی تحلیل نشده باشد، یک نیروی کوچک اعمال شده در سرعت بحرانی به محور می‌تواند منجر به افزایش دامنه نوسانات محور، تولید صدای ناخوشایند، افزایش نیروی عکس‌العمل در تکیه‌گاه‌ها و در نهایت شکست ناگهانی محور گردد؛ بنابراین به منظور انجام طراحی موفق و ایمن یک محور لازم است سرعت‌های بحرانی آن نیز تعیین شوند.

در نظریه تیر اویلر-برنولی و به دلیل صرف‌نظر کردن از اینرسی دورانی، اثر ژبروسکوپی قابل مدل‌سازی نبوده و سرعت دورانی محور در معادلات ظاهر نمی‌گردد؛ بنابراین تعیین دور بحرانی محور عملاً ممکن نمی‌باشد. در مدل‌های تیر رایلی و یا تیر تیموشنکو به دلیل در نظر گرفتن اینرسی دورانی اثر ژبروسکوپی قابل مدل‌سازی خواهد بود [۱]؛ بنابراین بیشتر تحقیقات

صورت گرفته در زمینه دینامیک محورها از مدل‌های تیر رایلی و یا تیموشنکو استفاده نموده‌اند. لازم به ذکر است که در بین این دو نظریه، نظریه تیموشنکو به دلیل در نظر گرفتن تغییر شکل‌های برشی، دقت بالاتری دارد. با استفاده از نظریه تیر تیموشنکو، گریوس [۲] تأثیر در نظر گرفتن تغییر شکل برشی را بر روی سرعت‌های بحرانی محورها بررسی نمود. چوی و همکاران [۳] معادلات حاکم بر ارتعاشات عرضی دو صفحه‌ای و ارتعاشات پیچشی یک محور با ممان اینرسی نابرابر در دو صفحه را استخراج نمودند. با بهره‌گیری از نظریه تیر رایلی، جی و لی [۴] سرعت‌های بحرانی لنگش یک محور نامتقارن یکنواخت با دیسک‌های صلب را استخراج نمودند. با استفاده از همین مدل تیر، لنگش آزاد و اجباری محور ویسکوالاستیک توسط استورلا و آرچنتو [۵] بررسی شد. جون و کیم [۶] تأثیر گشتاور پیچشی را بر روی لنگش خمشی محورها بررسی نمودند. کاروندیران و زو [۷] به بررسی لنگش محورهای با تکیه‌گاه‌های ارتجاعی پرداخته و شبانه و زو [۸] تحلیل لنگش آزاد و اجباری سامانه محور و دیسک واقع شده بر روی تکیه‌گاه‌های الاستیک را بررسی نمودند. معادلات حاکم بر لنگش محور مدل شده براساس نظریه تیر تیموشنکو با اینرسی‌های دورانی نابرابر در دو راستا توسط رافا و واتا [۹] استخراج شد. گو و چنگ [۱۰] با استفاده از مدل تیر تیموشنکو پاسخ دینامیکی یک محور گردان با سرعت خیلی بالا، حامل جرم‌های متمرکز را مورد بررسی قرار دادند. شو و یانگ [۱۱] تحلیل لنگش آزاد محور رایلی را برای شش شرایط مرزی معمول ارائه کردند و بسامدهای طبیعی و شکل مودهای متناظر را به دست آوردند. افشاری و همکاران [۱۲] با

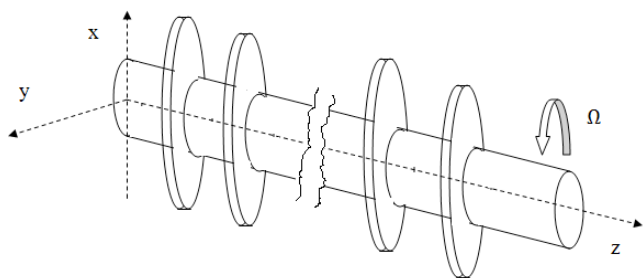


Fig. 1. Rotor and concentrated discs
شکل ۱: محور حامل دیسک‌های متمرکز

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} = \begin{cases} 2\frac{t}{t_0} - \left(\frac{t}{t_0}\right)^2 & t \leq t_0 \\ 1 & t \geq t_0 \end{cases} \quad (1)$$

که در این رابطه t_0 زمان رسیدن محور به سرعت نامی خود می‌باشد. در شکل ۲ نمودار تغییرات سرعت نشان داده شده است. لازم به ذکر است که در تحلیل لنگش آزاد از سرعت نامی محور استفاده می‌شود.

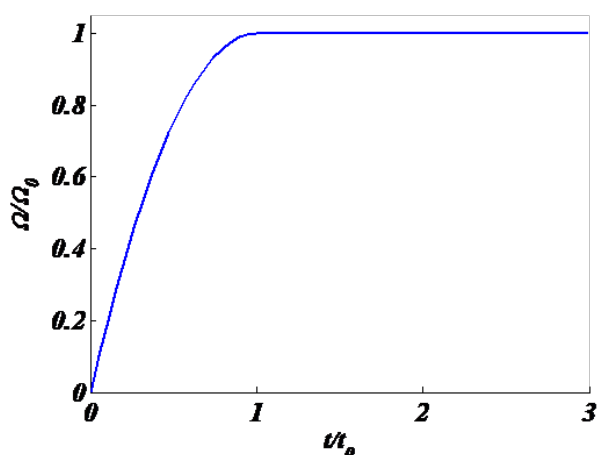


Fig. 2. Rotational speed versus the time

شکل ۲: نمودار تغییرات سرعت زاویه‌ای از آغاز حرکت تا رسیدن به سرعت نامی

به‌منظور مدل‌سازی اینرسی جرم‌های متمرکز، هر یک از این جرم‌ها (جرم i -ام) را می‌توان به شکل جرم گسترده که در فاصله‌ی z_i تا $z_i + dz$ توزیع شده است، در نظر گرفت؛ بنابراین:

$$m_i(z) = \frac{M_i}{dz} [H(z - z_i) - H(z - z_i - dz)] \quad (2)$$

که در این رابطه M_i جرم بر واحد طول برای جرم متمرکز بوده و H تابع هویساید می‌باشد. حال با فرض نقطه‌ای در نظر گرفتن جرم متمرکز می‌بایست dz را به سمت صفر میل داد که منجر به رابطه (۳) می‌گردد:

$$m_i(z) = \lim_{dz \rightarrow 0} m_i(z) = M_i \delta(z - z_i) \quad (3)$$

بهره‌گیری از روش جزئی تفاضلات مربعی به تحلیل لنگش محور تیموشنکو با چندین تغییر ناگهانی در مقطع و چندین تکیه‌گاه نمودند. تحلیل عددی آنها از نظر تعداد مقاطع پله‌دار در طول محور و تعداد تکیه‌گاه‌های میانی دارای محدودیت نبود. ایرانی و همکاران [۱۳] روش تفاضلات مربعی را به کار گرفته و حلی عددی برای لنگش طولی-پیچشی-خمشی یک محور کامپوزیتی مدل شده براساس نظریه تیر تیموشنکو ارائه نمودند. با استفاده از روش ماتریس انتقال و براساس مدل تیر تیموشنکو، ترابی و همکاران [۱۴] یک حل دقیق و بسته برای لنگش محورهای دارای چندین تغییر ناگهانی در مقطع خود و حامل چندین جرم و اینرسی متمرکز ارائه نمودند.

اخیراً محققین زیادی با روی آوردن به روش اجزا محدود تحقیقاتی را بر روی روتورها انجام داده‌اند. چاتزساواس و همکاران [۱۵] با استفاده از روش‌های اجزاء محدود و تفاضلات محدود، به‌شکل همزمان معادلات جفت‌شده دینامیکی برای محور و رینولدز در تکیه‌گاه‌ها را به شکلی عددی حل نموده و تأثیر نیروی هیدرودینامیکی در تکیه‌گاه‌ها را بر روی رفتار دینامیکی غیرخطی محور بررسی نمودند. براساس مدل تیر تیموشنکو، مدل اجزاء محدود دو گره‌ای برای تحلیل حرارتی-مکانیکی محور ترک‌دار ساخته شده از مواد مدرج تابعی توسط گاین و همکاران ارائه شد [۱۶]. با استفاده از نظریه‌های مرتبه بالا، روی و همکاران [۱۷] یک مدل اجزاء محدود برای تحلیل دینامیکی روتور ویسکوالاستیک چند لایه با چندین دیسک متمرکز ارائه نمودند. روی و دات [۱۸] مدل اجزا محدود روتورهای پلیمری و روتورهای کامپوزیتی پلیمری را ارائه نموده و سرعت‌های بحرانی و پاسخ روتور به نامیزانی را استخراج نمودند. براساس مدل ماکسول-وایچرت برای مواد ویسکوالاستیک، گانگولی و همکاران [۱۹] مدل اجزا محدود را برای تحلیل نوسانات میرای محوره‌های دوار ارائه نمودند.

با هدف گسترش کارهای انجام گرفته به‌خصوص در زمینه لنگش اجباری محورها، در این پژوهش معادلات حاکم بر لنگش آزاد و اجباری محور دارای چندین دیسک متمرکز نامیزان، تحت نیروهای محوری متغیر با زمان به‌دست آمده‌اند. روش گالربین و روش نیومارک-بتا به کار گرفته شده‌اند تا معادلات مذکور به شکلی عددی برای محور با تکیه‌گاه‌های ساده حل شوند. مثال‌های عددی ارائه شده در تحلیل‌های آزاد و اجباری نشان‌دهنده دقت بالای تحلیل ارائه شده می‌باشند.

۲- استخراج معادلات حاکم

مطابق با شکل ۱، یک محور به طول L ، قطر d در حال چرخش با سرعت دورانی Ω و حامل تعداد دلخواه دیسک در نظر گرفته شده است. با توجه به این که محور از حالت سکون شروع به دوران کرده تا به سرعت نامی Ω_0 برسد؛ در این پژوهش و به‌منظور نزدیک کردن معادلات به آنچه در عمل رخ می‌دهد، از رابطه (۱) برای تقریب تغییرات زمانی سرعت در تحلیل لنگش اجباری محور استفاده می‌گردد:

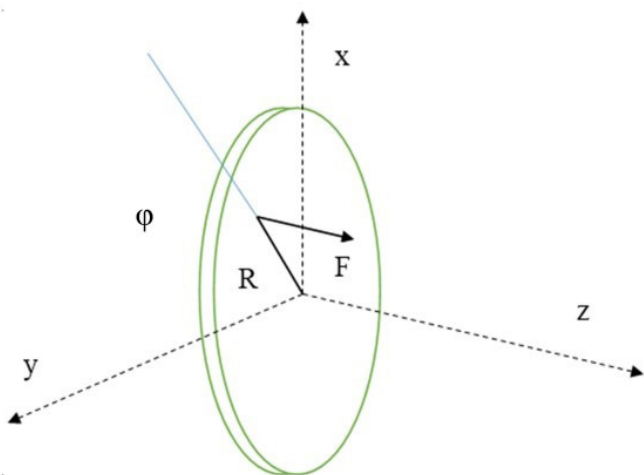


Fig. 3. situation of concentrated force on each disc

شکل ۳: موقعیت نیروی متمرکز روی هر دیسک

نیروهای محوری متمرکز وارد بر محور در محل دیسک‌ها به ترتیب منجر به ایجاد عکس‌العمل‌های R_0 و R_l در تکیه‌گاه‌های مستقر در $z=0$ و $z=L$ می‌گردد که با توجه به نامعین بودن مسأله از نظر استاتیکی باید از طریق محاسبه تغییر شکل طولی محور محاسبه گردد. می‌توان نشان داد:

$$R_0 = -\sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{z_i}{L}\right) P_i(t) \quad (9)$$

و در نتیجه نیروی محوری وارد شده به مقطع محور را می‌توان به شکل رابطه (۱۰) بیان نمود:

$$P(z, t) = -R_0 - \sum_{i=1}^N P_i(t) H(z - z_i) \quad (10)$$

در شکل‌های ۴ (الف) و ۴ (ب) یک جزء از محور به همراه نیروها و گشتاورهای وارد بر آن نشان داده شده است. با استفاده از قانون دوم نیوتن برای حرکت انتقالی در راستاهای x ، y و همچنین حرکت دورانی حول این دو محور می‌توان معادلات (۱۱) را بیان نمود:

$$\begin{aligned} F_x + \frac{\partial F_x}{\partial z} dz - F_x + \left(P + \frac{\partial P}{\partial z} dz\right) \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} dz\right) \\ - P \frac{\partial u_x}{\partial z} + f_x(x, t) = \left[\rho A + \sum_{i=1}^N M_i \delta(z - z_i)\right] dz \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ F_y + \frac{\partial F_y}{\partial z} dz - F_y + \left(P + \frac{\partial P}{\partial z} dz\right) \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} dz\right) \\ - P \frac{\partial u_y}{\partial z} + f_y(x, t) = \left[\rho A + \sum_{i=1}^N M_i \delta(z - z_i)\right] dz \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \\ M_x + \frac{\partial M_x}{\partial z} dz - M_x - \left(F_y + \frac{\partial F_y}{\partial z} dz\right) dz + m_x = \\ \left[\rho I_x + \sum_{i=1}^N I_x^i \delta(z - z_i)\right] \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} dz \end{aligned}$$

که در این رابطه δ نشان‌دهنده تابع دلتای دیراک می‌باشد. با در نظر گرفتن N جرم متمرکز بر روی محور می‌توان رابطه (۴) را برای تمامی جرم‌های متمرکز بیان نمود:

$$m(z) = \sum_{i=1}^N M_i \delta(z - z_i) \quad (4)$$

که در این رابطه N تعداد دیسک‌های متمرکز بر روی محور می‌باشد. به روش مشابه می‌توان ممان اینرسی جرمی دیسک‌ها را حول محورهای x ، y و همچنین ممان اینرسی جرمی قطبی آن‌ها را به ترتیب به شکل روابط (۱-۵) تا (۳-۵) بیان نمود:

$$I_x(z) = \sum_{i=1}^N I_x^i \delta(z - z_i) \quad (1-5)$$

$$I_y(z) = \sum_{i=1}^N I_y^i \delta(z - z_i) \quad (2-5)$$

$$I_p(z) = \sum_{i=1}^N I_p^i \delta(z - z_i) \quad (3-5)$$

در محل هر یک از دیسک‌ها نیروی محوری گسترده متغیر با زمان $q(t)$ به دیسک و در نتیجه به محور وارد می‌شود. از طرفی مطابق شکل ۳، به هر دیسک نیروی محوری متمرکز متغیر با زمان $F(t)$ نیز وارد می‌شود؛ بنابراین کل نیروی محوری وارد بر محور در محل هر دیسک $P(t)$ را می‌توان به شکل رابطه (۶) بیان نمود:

$$P_i(t) = A_s q(t) + F(t) \quad (6)$$

که در این رابطه A_s سطح تحت نیروی گسترده از دیسک می‌باشد. با توجه به این که نیروی گسترده به صورت یکنواخت در راستای مماسی دیسک توزیع شده است، هیچ‌گونه گشتاوری از طریق این نیروی محوری بر روی محور ایجاد نمی‌گردد؛ ولی از طریق نیروی محوری متمرکز یک گشتاور خمشی در محل هر دیسک به محور وارد می‌شود که براساس شکل ۳ به صورت رابطه (۷) قابل بیان است:

$$m_x = FR \cos \phi \quad m_y = -FR \sin \phi \quad (7)$$

که در این رابطه m_x و m_y به ترتیب بیانگر گشتاور خارجی وارد شده به محور بر واحد طول حول محورهای x و y می‌باشند و R و ϕ به ترتیب بیانگر شعاع و زاویه محل اثر نیروی متمرکز می‌باشند. با توجه به این که این گشتاورها بر روی هر دیسک به شکل متمرکز می‌باشند، می‌توان رابطه (۸) را برای کل محور بیان نمود:

$$\begin{aligned} m_x(z) &= \sum_{i=1}^N (F_i R_i \cos \phi_i) \delta(z - z_i) \\ m_y(z) &= -\sum_{i=1}^N (F_i R_i \sin \phi_i) \delta(z - z_i) \end{aligned} \quad (8)$$

در محور در راستاهای x و y می‌باشند که طبق نظریه تیر تیموشنکو به شکل معادلات (۱۲) بیان خواهند شد [۱]:

$$\begin{aligned} F_x &= kGA \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \varphi_y \right) & M_x &= EI_x \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} \\ F_y &= kGA \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \varphi_x \right) & M_y &= EI_y \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} \end{aligned} \quad (12)$$

که در این رابطه E و G بیانگر مدول یانگ و مدول برشی ماده بوده و k ضریب تصحیح تنش برشی می‌باشد که برای یک مقطع دایروی بر حسب ضریب پواسون (ν) از رابطه (۱۳) قابل محاسبه می‌باشد [۲۰]:

$$k = \frac{6(1+\nu)^2}{7+12\nu+4\nu^2} \quad (13)$$

با صرف نظر کردن از جملات دارای عبارت $(dz)^2$ و با توجه به دایروی بودن مقطع محور و دیسک‌ها که منجر به تساوی (۱۴) می‌گردد:

$$I_p = 2I_x = 2I_y = 2I \quad (14)$$

می‌توان روابط (۱۵) را بیان نمود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_x}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(P \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) + f_x(x, t) &= \left[\rho A + \sum_{i=1}^N M_i \delta(z - z_i) \right] \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(P \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + f_y(x, t) &= \left[\rho A + \sum_{i=1}^N M_i \delta(z - z_i) \right] \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial z} - F_y + m_x &= \left[\rho I + \sum_{i=1}^N I_i \delta(z - z_i) \right] \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \\ + 2 \left[\rho I + \sum_{i=1}^N I_i \delta(z - z_i) \right] \Omega \frac{\partial \varphi_y}{\partial t} \\ \frac{\partial M_y}{\partial z} + F_x + m_y &= \left[\rho I + \sum_{i=1}^N I_i \delta(z - z_i) \right] \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \\ - 2 \left[\rho I + \sum_{i=1}^N I_i \delta(z - z_i) \right] \Omega \frac{\partial \varphi_x}{\partial t} \end{aligned}$$

همچنین با جایگذاری رابطه (۱۴) در رابطه (۱۲) نیز می‌توان روابط (۱۶) را به دست آورد:

$$\begin{aligned} F_x &= kGA \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \varphi_y \right) & M_x &= EI \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} \\ F_y &= kGA \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \varphi_x \right) & M_y &= EI \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} \end{aligned} \quad (16)$$

و با جایگذاری روابط (۸)، (۱۰) و (۱۶) در رابطه (۱۵) و با توجه به یکنواخت بودن مقطع محور می‌توان معادلات حاکم را به شکل (۱۷) بیان نمود:

$$\begin{aligned} &+ \left[\rho I_p + \sum_{i=1}^N I_p^i \delta(z - z_i) \right] \Omega dz \frac{\partial \varphi_y}{\partial t} \\ M_y + \frac{\partial M_y}{\partial z} dz - M_y + \left(F_x + \frac{\partial F_x}{\partial z} dz \right) dz + m_y &= \\ \left[\rho I_y + \sum_{i=1}^N I_y^i \delta(z - z_i) \right] \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} dz & \\ - \left[\rho I_p + \sum_{i=1}^N I_p^i \delta(z - z_i) \right] \Omega dz \frac{\partial \varphi_x}{\partial t} & \end{aligned} \quad (11)$$

که در این رابطه I_p و I_y ، I_x ، A نشان‌دهنده مساحت مقطع محور، ممان اینرسی خمشی محور حول محورهای x و y و ممان اینرسی پیچشی آن حول محور z می‌باشند. f_x و f_y نیروی عرضی بر واحد طول در راستاهای x و y می‌باشند. همچنین u_x ، u_y ، φ_x و φ_y به ترتیب نشان دهنده جابجایی راستاهای x و y و چرخش حول این دو محور بوده، ρ بیانگر چگالی ماده‌ی محور و Ω سرعت حرکت دورانی محور حول محور z می‌باشد. از طرفی F_x ، F_y ، M_x و M_y به ترتیب بیانگر نیروی برشی و گشتاور خمشی موجود

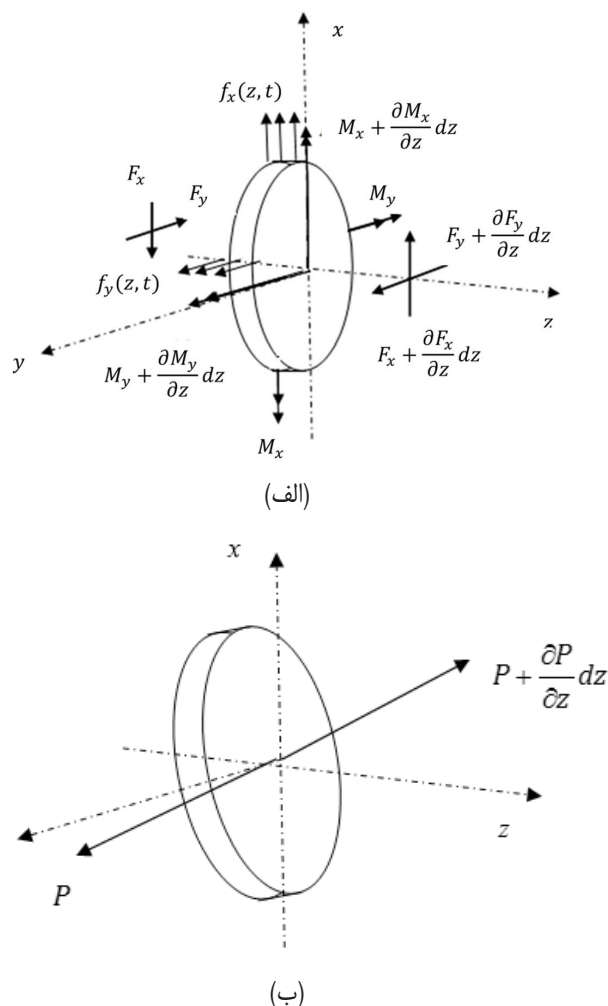


Fig. 4. An element of rotor a) shear forces and bending moments, b) axial force

شکل ۴: جزء نمونه از محور (الف) نیروهای برشی و گشتاورهای خمشی (ب) نیروی محوری

و در اثر نامیزانی نیز نیرو در هر دو راستا و به شکل رابطه (۲۱) خواهد بود:

$$f_2(x, t) = \Omega^2 \sum_{i=1}^N m_i^p e_i \left[\begin{matrix} \cos(\Omega t + \theta_i) \\ +j \sin(\Omega t + \theta_i) \end{matrix} \right] \delta(z - z_i) \quad (21)$$

که در این رابطه به ترتیب m_i ، e_i و θ_i بیانگر مقدار جرم نامیزان، شعاع نامیزانی و زاویه محل قرارگیری نامیزانی با محور x بر روی دیسک i -ام می‌باشد. حال با جمع این دو نیرو، کل نیروی عرضی وارد بر محور به شکل رابطه (۲۲) بیان می‌شود:

$$f(x, t) = -\rho A g - \sum_{i=1}^n M_i g \delta(z - z_i) + \Omega^2 \sum_{i=1}^N m_i^p e_i \left[\begin{matrix} \cos(\Omega t + \theta_i) \\ +j \sin(\Omega t + \theta_i) \end{matrix} \right] \delta(z - z_i) \quad (22)$$

بنابراین معادلات حاکم به شکل (۲۳) بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} & - \left[\rho A + \sum_{i=1}^N M_i \delta(z - z_i) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + kGA \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + j \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \\ & - \left[R_0 + \sum_{i=1}^N P_i(t) H(z - z_i) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ & - \sum_{i=1}^N P_i(t) \delta(z - z_i) \frac{\partial u}{\partial z} \\ & = \rho A g - j \Omega^2 \sum_{i=1}^N m_i^p e_i \sin(\Omega t + \theta_i) \delta(z - z_i) \\ & + \sum_{i=1}^N \left[M_i g - m_i^p e_i \Omega^2 \cos(\Omega t + \theta_i) \right] \delta(z - z_i) \\ & - \left[\rho I + \sum_{i=1}^N I_i \delta(z - z_i) \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \\ & + 2j \left[\rho I + \sum_{i=1}^N I_i \delta(z - z_i) \right] \Omega \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ & + EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - kGA \left(\varphi - j \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ & = - \sum_{i=1}^N F_i R_i e^{-j\theta_i} \delta(z - z_i) \end{aligned} \quad (23)$$

همچنین شکل مختلط نیروی برشی و گشتاور خمشی را می‌توان به شکل رابطه (۲۴) بیان نمود:

$$F = F_x + jF_y \quad M = M_x + jM_y \quad (24)$$

که با استفاده از رابطه (۱۶) به شکل رابطه (۲۵) قابل بیان است:

$$F = kGA \left(\frac{\partial u}{\partial z} + j \varphi \right) \quad M = EI \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (25)$$

برای محوری که دارای تکیه‌گاه‌های ساده می‌باشد، مقادیر جابه‌جایی و گشتاور خمشی در دو طرف محور برابر با صفر می‌باشد؛ به عبارت دیگر براساس رابطه (۲۵) داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} - \left[\rho A + \sum_{i=1}^N M_i \delta(z - z_i) \right] \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ & - \sum_{i=1}^N P_i(t) \delta(z - z_i) \frac{\partial u_x}{\partial z} + f_x(x, t) \\ & = \left[\rho A + \sum_{i=1}^N M_i \delta(z - z_i) \right] \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ & \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} - \left[\rho A + \sum_{i=1}^N M_i \delta(z - z_i) \right] \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \\ & - \sum_{i=1}^N P_i(t) \delta(z - z_i) \frac{\partial u_y}{\partial z} + f_y(x, t) \\ & = \left[\rho A + \sum_{i=1}^N M_i \delta(z - z_i) \right] \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \\ & EI \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial z^2} + kGA \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \varphi_y \right) \\ & - \sum_{i=1}^N (F_i R_i \sin \varphi_i) \delta(z - z_i) \\ & = \left[\rho I + \sum_{i=1}^N I_i \delta(z - z_i) \right] \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \\ & - 2 \left[\rho I + \sum_{i=1}^N I_i \delta(z - z_i) \right] \Omega \frac{\partial \varphi_x}{\partial t} \end{aligned} \quad (17)$$

با تعریف شکل مختلط جابه‌جایی، چرخش و نیرو به شکل رابطه (۱۸) $(j^2 = -1)$:

$$u_x + j u_y = \varphi_x + j \varphi_y = x + j y \quad (18)$$

روابط حاکم (۱۷) به شکل (۱۹) بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} & - \left[\rho A + \sum_{i=1}^N M_i \delta(z - z_i) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + kGA \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + j \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \\ & - \left[R_0 + \sum_{i=1}^N P_i(t) H(z - z_i) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ & - \sum_{i=1}^N P_i(t) \delta(z - z_i) \frac{\partial u}{\partial z} = -f(x, t) \\ & - \left[\rho I + \sum_{i=1}^N I_i \delta(z - z_i) \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \\ & + 2j \left[\rho I + \sum_{i=1}^N I_i \delta(z - z_i) \right] \Omega \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ & + EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - kGA \left(\varphi - j \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ & = - \sum_{i=1}^N F_i R_i e^{-j\theta_i} \delta(z - z_i) \end{aligned} \quad (19)$$

نیروی خارجی عرضی در اثر وزن محور و اجرام متمرکز و همچنین نیروی نامیزانی ایجاد می‌گردد؛ در اثر وزن محور نیرو فقط در راستای x بوده که به شکل رابطه (۲۰) خواهد بود:

$$f_1(x, t) = -\rho A g - \sum_{i=1}^n M_i g \delta(z - z_i) \quad (20)$$

می‌باشد، شاهد رفتاری غیرخطی از سامانه خواهیم بود.

برای تعیین شرایط اولیه در تحلیل لنگش اجباری تنها کافیت نیروی عرضی ناشی از وزن محور و دیسک‌ها در نظر گرفته شود و نیروی‌های ناشی از نامیزانی و نیروهای محوری در نظر گرفته نخواهند شد. بنابراین کافیت معادله (۳۳) به شکل (۳۱) نوشته شود:

$$kGA \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + j \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \rho A g + \sum_{i=1}^N M_i g \delta(z - z_i) \quad (31)$$

$$EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - kGA \left(\varphi - j \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0$$

و با استفاده از روش گالرکین و پاسخ‌هایی به شکل (۳۲)

$$u(z, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \quad (32)$$

$$\varphi(z, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0) \cos\left[\frac{(n-1)\pi z}{L}\right]$$

معادله (۳۳) به دست می‌آید:

$$[K_0] \{X(0)\} = \{Q\} \quad (33)$$

که در این رابطه مقدار اولیه بردار مجهولات، ماتریس $[K_0]$ و بردار بار ناشی از وزن $\{Q\}$ به شکل رابطه (۳۴) می‌باشند:

$$[K_0] = \begin{bmatrix} [a^{(11)}] & [a^{(12)}] \\ [a^{(21)}] & [a^{(22)}] \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\{X(0)\} = \begin{Bmatrix} \{a(0)\} \\ \{b(0)\} \end{Bmatrix} \quad \{Q\} = \begin{Bmatrix} \{q^{(1)}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

و درایه‌های آنها نیز با جزئیات در پیوست ب ارائه شده‌اند. بنابراین شرایط اولیه برای جابه‌جایی از رابطه (۳۵) قابل استخراج خواهند بود:

$$\{X(0)\} = [K_0]^{-1} \{Q\} \quad (35)$$

همچنین سرعت اولیه برای تمامی نقاط محور نیز برابر با صفر در نظر گرفته خواهد شد.

۴- لنگش آزاد

به منظور تعیین بسامدهای طبیعی پیشرو و پسرو محور باید لنگش آزاد محور تحلیل گردد؛ بنابراین در رابطه (۲۳) تمامی نیروهای خارجی باید برابر با صفر در نظر گرفته شوند؛ به عبارت دیگر

$$-\left[\rho A + \sum_{i=1}^N M_i \delta(z - z_i) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + kGA \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + j \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0$$

$$-\left[\rho I + \sum_{i=1}^N I_i \delta(z - z_i) \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

$$z = 0 \quad u = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

$$z = L \quad u = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (26)$$

۳- حل معادلات به روش گالرکین

به منظور حل معادلات به دست آمده از روش گالرکین استفاده شده است. به این منظور ابتدا باید پاسخ مسأله به گونه‌ای که شرایط مرزی را ارضا کند، در نظر گرفته شود. با توجه به رابطه (۲۶)، روابط زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \quad (27)$$

$$\varphi(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \cos\left[\frac{(n-1)\pi z}{L}\right]$$

که در این رابطه a_n و b_n توابعی مجهول در حوزه زمان می‌باشند. هر چند از نظر ریاضی تعداد جملات سری در این روابط بی‌نهایت می‌باشد؛ ولی در عمل تعدادی محدود (N_r) نیز کافی می‌باشد. بدیهی است که با افزایش تعداد این جملات حجم محاسبات و البته دقت پاسخ‌ها افزایش می‌یابند.

حال با جایگذاری رابطه (۲۷) در رابطه (۲۳)، ضرب کردن روابط اول و دوم به ترتیب در $\sin(m\pi z/L)$ و $\cos[(m-1)\pi z/L]$ و صفر قرار دادن انتگرال‌های خطا، معادلات (۲۸) به دست می‌آیند:

$$[m^{(11)}] \{\ddot{a}(t)\} + [k^{(11)}] \{a(t)\} + [k^{(12)}] \{b(t)\} = \{f^{(1)}\} \quad (28)$$

$$[m^{(22)}] \{\ddot{b}(t)\} + [G^{(22)}] \{b(t)\} + [k^{(21)}] \{a(t)\} + [k^{(22)}] \{b(t)\} = \{f^{(2)}\}$$

که در این رابطه ماتریس‌های $[k]$ ، $[m]$ و $[G]$ و بردار $\{f\}$ به ترتیب ماتریس‌های متناظر با جرم، سفتی و اثر ژيروسکوپیک بردار نیرو می‌باشد که به شکل جزئی‌تر در پیوست الف ارائه شده‌اند. همچنین $\{a\}$ و $\{b\}$ بردار مجهولات مسأله می‌باشند.

رابطه (۲۸) را می‌توان به شکل فشرده (۲۹) نیز بیان نمود:

$$[M] \{\ddot{X}(t)\} + [G] \{\dot{X}(t)\} + [K(t)] \{X(t)\} = \{F(t)\} \quad (29)$$

که در این رابطه

$$[M] = \begin{bmatrix} [m^{(11)}] & [0] \\ [0] & [m^{(22)}] \end{bmatrix} \quad [G] = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [G^{(22)}] \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} [k^{(11)}] & [k^{(12)}] \\ [k^{(21)}] & [k^{(22)}] \end{bmatrix} \quad \{X(t)\} = \begin{Bmatrix} \{a(t)\} \\ \{b(t)\} \end{Bmatrix} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} \{f^{(1)}\} \\ \{f^{(2)}\} \end{Bmatrix}$$

لازم به ذکر است که هرچند رابطه (۲۹) یک معادله خطی به نظر می‌رسد؛ ولی به دلیل آن که در این رابطه ماتریس سفتی تابعی از زمان

۶- نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی برای تحلیل انجام شده ارائه خواهند شد. در تمامی مثال‌های پیش‌رو در این بخش مقادیر عددی زیر برای محور و دیسک‌ها در نظر گرفته می‌شوند:

$$E = 200 \text{ GPa} \quad \nu = 0.3 \quad \rho = 7860 \text{ kg/m}^3$$

سایر مقادیر نیز به شکل جداگانه در حل مورد، بیان می‌شوند. قبل از بررسی تأثیر پارامترهای مسأله ابتدا لازم است دقت و صحت نتایج بررسی شوند. برای یک محور دو سر لولا بدون جرم‌های متمرکز بسامدهای طبیعی از رابطه زیر قابل استخراج می‌باشند [۱]:

$$\frac{\rho I}{kGA} \omega^4 - 2\Omega_0 \frac{\rho I}{kGA} \omega^3 - \left[1 + I \frac{n^2 \pi^2}{AL^2} \left(1 + \frac{E}{kG} \right) \right] \omega^2 + 2I \frac{n^2 \pi^2}{AL^2} \Omega_0 \omega + \frac{EI}{\rho A} \frac{n^4 \pi^4}{L^4} = 0 \quad (42)$$

این معادله دو ریشه مثبت و دو ریشه منفی خواهد داشت که بیانگر پیش‌رو و پس‌رو بودن مود می‌باشد. همچنین از نظر بزرگی، دو ریشه این معادله بسیار بزرگتر از دو ریشه دیگر می‌باشند؛ به عبارت دیگر دو ریشه از این معادله در مودهای پایین و دو ریشه دیگر در مودهای بالا ظاهر می‌شوند. حال یک محور را با مشخصات زیر در نظر بگیرید:

$$d = 100 \text{ mm} \quad L = 2 \text{ m} \quad \Omega_0 = 2000 \text{ rpm}$$

با در نظر گرفتن چهار جمله اول سری در رابطه (۳۷)، بسامدهای پیش‌رو و پس‌رو به‌دست آمده و در جدول ۱ بر حسب رادیان بر ثانیه ارائه شده‌اند. در این جدول نتایج به‌دست آمده از حل دقیق ارائه شده در رابطه (۴۱) نیز ارائه شده‌اند؛ همانگونه که در این جدول نشان داده شده است، تحلیل ارائه شده از دقت بسیار بالایی برخوردار می‌باشد. دلیل تطابق بسیار بالای نتایج به‌دست آمده با حل دقیق ارائه شده در مرجع [۱] آن است که توابع استفاده شده در رابطه (۳۷) دقیقاً همان توابعی هستند که در حل دقیق ارائه شده در مرجع مذکور به کار رفته‌اند.

حال به منظور ترسیم نمودار کمپیل و بررسی تأثیر محل قرارگیری دیسک‌ها بر روی آن، یک محور با مشخصات هندسی $L=4 \text{ m}$ و $d=50 \text{ mm}$ در نظر گرفته می‌شود. این محور دارای یک دیسک با قطر بیرونی ۸۰ میلی‌متر و ضخامت ۱۰ میلی‌متر در موقعیت دلخواه z_m می‌باشد. برای دو مود اول و در موقعیت‌های $L/4$ ، $L/3$ و $L/2$ برای دیسک، نمودار کمپیل در شکل‌های ۵ و ۶ رسم شده‌اند. همانگونه که در این شکل‌ها نشان داده شده است برای محور ساکن بسامدهای پیش‌رو (خطوط توپر) و پس‌رو (خط چین) با یکدیگر برابر بوده و با آغاز حرکت محور و افزایش سرعت نامی آن، بسامدهای پیش‌رو افزایش یافته و بسامدهای پس‌رو کاهش می‌یابند که دلیل این پدیده اثر ژيروسکوپیک می‌باشد. این شکل‌ها همچنین نشان می‌دهند که با نزدیک شدن دیسک به مرکز محور، بسامدهای مود اول

$$+2j \left[\rho I + \sum_{i=1}^N I_i \delta(z - z_i) \right] \Omega_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - kGA \left(\varphi - j \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 \quad (36)$$

در این حالت با استفاده از تعاریف

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{j\omega t} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \quad (37)$$

$$\varphi(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{j\omega t} \cos\left[\frac{(n-1)\pi z}{L}\right]$$

که در آن ω بسامد لنگش محور بوده و با به کارگیری روش گالرکین، می‌توان رابطه زیر را بیان نمود:

$$(\omega^2 [M] + \omega [C] + [K]) \{X\} = \{0\} \quad (38)$$

که در این رابطه

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \end{Bmatrix} \quad (39)$$

همچنین ماتریس‌های ظاهر شده در رابطه (۳۸) دارای تعریف مشابه با موارد ارائه شده در لنگش اجباری در معادلات (۲۹) و (۳۰) و همچنین پیوست الف می‌باشند به جز موارد زیر که باید اصلاح شوند:

$$k_{mn}^{(11)} = \begin{cases} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \frac{kGAL}{2} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (40)$$

$$G_{mn}^{(22)} = -2j \Omega_0 m_{mn}^{(22)}$$

به منظور به دست آوردن پاسخ غیر بدیهی صفر در رابطه (۳۸)، دترمینان ضرایب باید برابر با صفر قرار داده شود؛ به عبارت دیگر:

$$|\omega^2 [M] + \omega [C] + [K]| = 0 \quad (41)$$

با استفاده از رابطه (۴۱) بسامدهای طبیعی برای حرکت لنگش به‌دست خواهند آمد. لازم به ذکر است که با توجه به وجود ضرایب مختلط در ماتریس سفتی، تمامی ریشه‌های معادله (۴۱) - که تعداد آنها بستگی به تعداد جملات در نظر گرفته شده در رابطه (۳۷) می‌باشد - به صورت موهومی محض خواهند بود که دارای قسمت موهومی برابر نمی‌باشند (ریشه مزدوج مختلط یکدیگر نخواهند بود). مقادیر مثبت به‌دست آمده نشان‌دهنده بسامدهای پیش‌رو و مقادیر منفی بیانگر بسامدهای پس‌رو می‌باشند.

۵- لنگش اجباری

به منظور به‌دست آوردن پاسخ زمانی سامانه از روش عددی نیومارک-بتا استفاده خواهد شد که در سال ۱۹۵۹ میلادی توسط نیومارک ارائه گردید [۲۱].

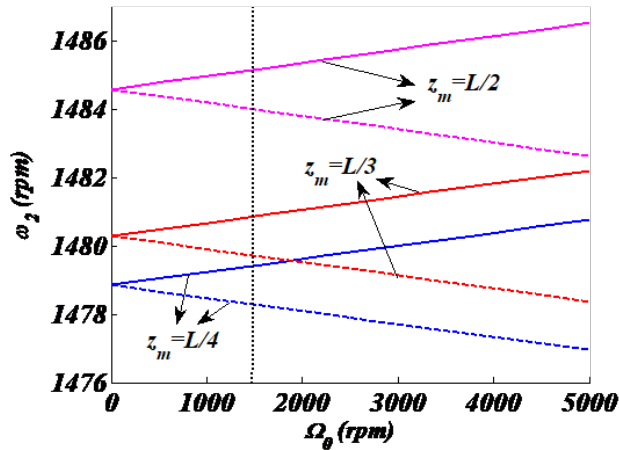


Fig. 6. Campbell diagram for second mode
شکل ۶: نمودار کمپبل برای مود دوم محور

و ضخامت ۱۵ میلی‌متر می‌باشد که فاقد نیروی محوری متمرکز و تنها دارای نیروی محوری گسترده با شدت ثابت می‌باشد. برای مقادیر مختلف شدت نیروی گسترده، نمودار کمپبل دو مود اول در شکل‌های ۷ و ۸ رسم شده‌اند. این شکل‌ها نشان می‌دهند که وجود نیروی محوری بر روی روتور می‌تواند به شکل همزمان موجب افزایش برخی بسامدها و کاهش برخی دیگر گردد؛ دلیل این مسأله در آن است که حضور نیروی محوری خارجی بر روی روتور منجر به آن می‌گردد که قسمتی از روتور تحت کشش قرار گرفته (افزایش سفتی و بسامد) و قسمتی دیگر تحت فشار قرار گیرد (کاهش سفتی و بسامد). نکته‌ای که حتما باید در نظر داشت آن است که ضمن کاهش هر یک از بسامدها، در صورت افزایش مقدار نیروی محوری مقدار بسامد به صفر رسیده که این مسأله موجب ناپایداری و کماتش محور می‌گردد.

با توجه به محدودیت کارهای انجام شده در زمینه لنگش اجباری محورها، به منظور بررسی میزان دقت تحلیل ارائه شده در این پژوهش می‌توان از مفاهیم پایه و بررسی برقراری آنها در یک مثال خاص استفاده نمود. به همین منظور یک محور با مشخصات $L=3$ m و $d=30$ mm در نظر گرفته می‌شود

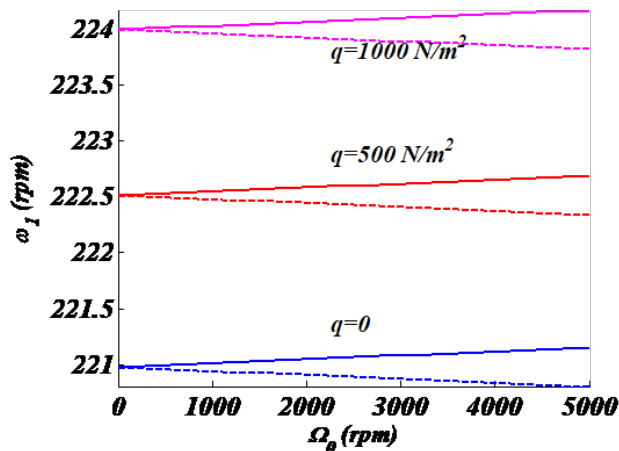


Fig. 7. Campbell diagram for first mode
شکل ۷: نمودار کمپبل برای مود اول محور

جدول ۱: اعتبارسنجی نتایج به دست آمده

Table 1. Validation of results

بسامدهای پیشرو (رادیان بر ثانیه)		
n	حل دقیق [۱]	تحلیل ارائه شده
۱	۳۱۰/۵۷۰/۵۴۳۴	۳۱۰/۵۷۰/۵۴۳۴
۲	۱۲۳۱/۵۶۹۸۷۹	۱۲۳۱/۵۶۹۸۷۹
۳	۲۷۳۲/۵۳۲۷۲	۲۷۳۲/۵۳۲۷۲
۴	۴۷۶۷/۶۸۴۳۹۷	۴۷۶۷/۶۸۴۳۹۷

بسامدهای پسرو (رادیان بر ثانیه)

n	حل دقیق [۱]	تحلیل ارائه شده
۱	۳۰۹/۹۳۱۱۱۱۲	۳۰۹/۹۳۱۱۱۱۲
۲	۱۲۲۹/۰۸۷۶۱۴	۱۲۲۹/۰۸۷۶۱۴
۳	۲۷۲۷/۲۱۰۴۹۶	۲۷۲۷/۲۱۰۴۹۶
۴	۴۷۵۸/۸۱۱۳۸۵	۴۷۵۸/۸۱۱۳۸۵

کاهش یافته و بسامدهای مود دوم افزایش می‌یابند. دلیل این مسأله نیز آن است که نقطه میانی محور در مود اول یک نقطه پادگره می‌باشد؛ در حالی که در مود دوم این نقطه یک گره می‌باشد. لازم به ذکر است که وجود جرم منجر به کاهش بسامدها می‌گردد و مقدار این کاهش با حرکت از نقاط گره به سمت نقاط پادگره بیشتر و بیشتر می‌گردد [۱۴].

در شکل‌های ۵ و ۶ نیمساز ربع اول نیز رسم شده است؛ نقاط تقاطع دیاگرام کمپبل با این نیمساز بیانگر دوره‌های بحرانی محور می‌باشند و از حرکت محور در نزدیکی این سرعت‌ها باید پرهیز گردد.

با هدف بررسی تأثیر نیروی محوری بر روی نمودار کمپبل، یک محور با مشخصات هندسی $L=4$ m و $d=30$ mm در نظر گرفته می‌شود. این محور در موقعیت $L/3$ حامل یک دیسک میزان با قطر بیرونی ۶۰ میلی‌متر

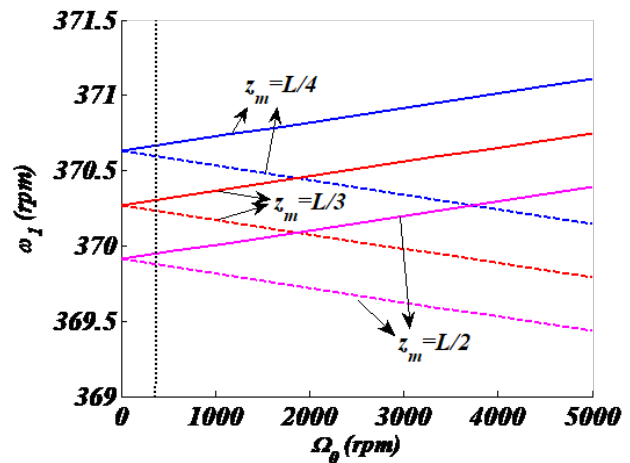


Fig. 5. Campbell diagram for first mode
شکل ۵: نمودار کمپبل برای مود اول محور

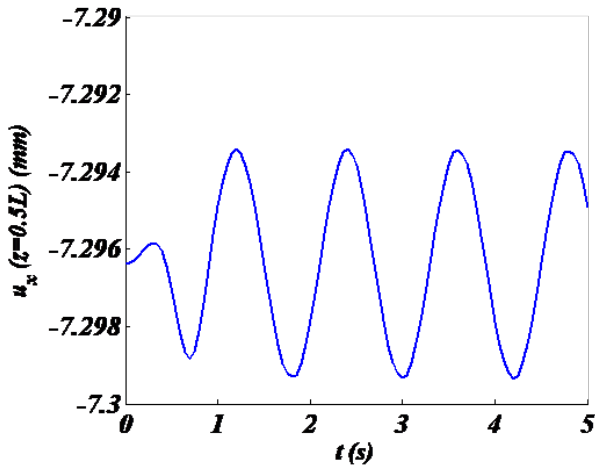


Fig. 9. The x component of displacement

شکل ۹: جابه‌جایی در راستای x

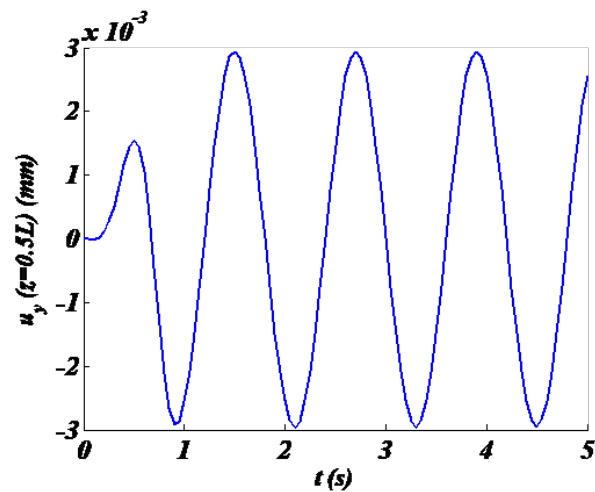


Fig. 10. The y component of displacement

شکل ۱۰: جابه‌جایی در راستای y

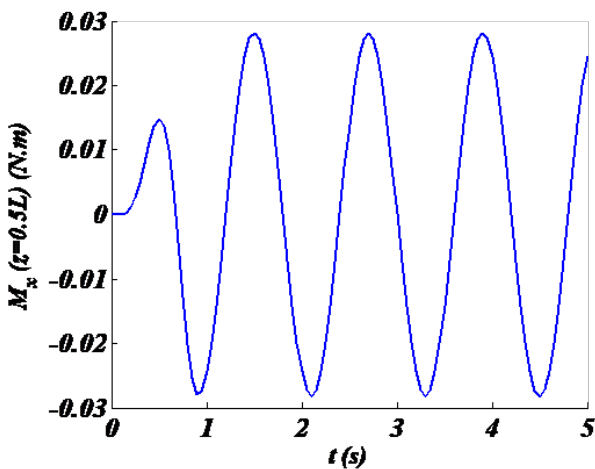


Fig. 11. The x component of bending moment

شکل ۱۱: ممان خمشی حول محور x

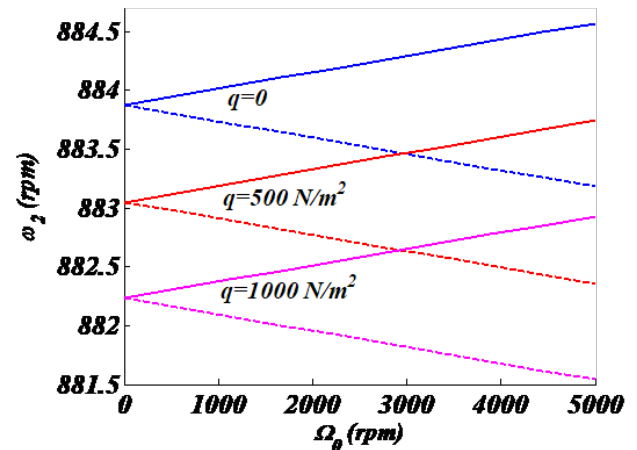


Fig. 8. Campbell diagram for second mode

شکل ۸: نمودار کمپبل برای مود دوم محور

در وسط این محور یک دیسک با قطر بیرونی ۵۰ میلی‌متر و ضخامت ۱۰ میلی‌متر قرار گرفته است. سرعت نامی این محور ۲۰ rpm و مدت زمان لازم برای رسیدن به این سرعت برابر با یک ثانیه می‌باشد. دیسک واقع شده بر روی محور دارای یک نامیزانی به اندازه $me=1500$ g.mm بوده که در آغاز حرکت دقیقاً بر محور x منطبق شده است. نیروی محوری نیز در این مثال خاص وجود ندارد تا محور دارای یک شرایط کاملاً متقارن باشد.

با در نظر گرفتن پنج جمله اول در سری (رابطه ۲۷) و گام زمانی $\Delta t=0.05$ s در روش نیومارک-بتا، نمودار تغییرات زمانی جابه‌جایی، گشتاور خمشی و نیروی برشی در وسط محور در شکل‌های ۹ تا ۱۴ رسم شده‌اند. همانگونه که در این شکل‌ها نشان داده شده است، محور دارای یک پاسخ گذار بوده و پس از آن به یک حالت پایدار رسیده و مؤلفه‌های جابه‌جایی، گشتاور خمشی و نیروی برشی بین دو مقدار نوسان می‌کنند؛ به عبارت دیگر به دلیل نامیزانی موجود با آغاز چرخش محور حول نقطه تعادل استاتیکی خود شروع به نوسان کرده و این نوسان منجر به ایجاد گشتاور خمشی متغیر با زمان می‌گردد که در تحلیل خستگی برای محور بسیار لازم می‌باشد.

مقایسه بین شکل‌های ۹ و ۱۰ و همچنین شکل‌های ۱۱ و ۱۲ نشان می‌دهد که مقدار جابه‌جایی و گشتاور خمشی در صفحه‌ی x-z به مراتب بیشتر از مقادیر متناظر در صفحه متقابل می‌باشند که دلیل این مسأله کم بودن مقدار نامیزانی در این محور در مقایسه با نیروی گرانش و وزن خود محور و دیسک واقع بر آن می‌باشد. این نمودارها همچنین نشان می‌دهند که مقدار نیروی برشی در وسط محور برابر با صفر می‌باشد (مقدار ناچیز به دست آمده ناشی از تقریب حل عددی می‌باشد) که با توجه به تقارن محور تأییدی بر صحت تحلیل ارائه شده می‌باشد.

همچنین خط سیر حرکت تار خنثی نیز در شکل ۱۵ نشان داده شده است. این شکل نشان می‌دهد که روتور ابتدا یک چرخش گذرا داشته و پس از آن و به دلیل نامیزانی موجود، روتور یک لنگش حول نقطه تعادل استاتیکی خود انجام می‌دهد. این شکل به خوبی نشان می‌دهد که دامنه حرکت پایدار در هر دو راستا یکسان بوده و لنگش محور تقریباً در یک شکل دایروی

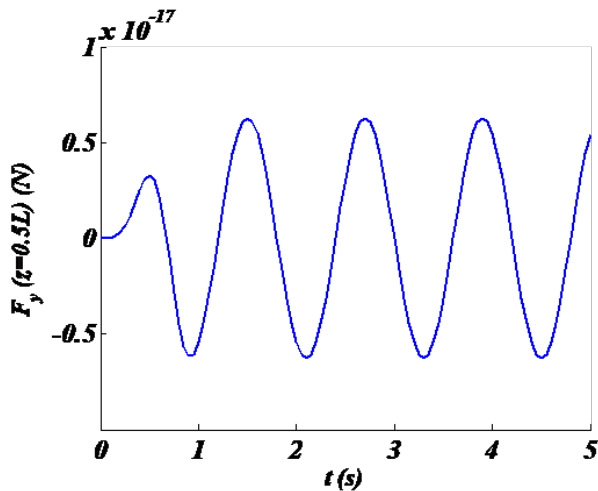


Fig. 14. The y component of shear force
شکل ۱۴: نیروی برشی در راستای y

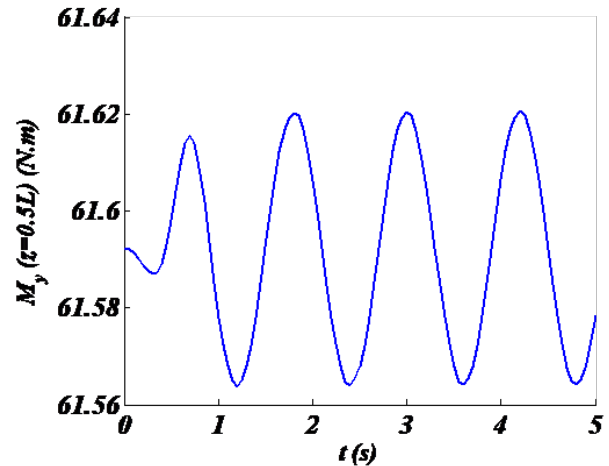


Fig. 12. The y component of bending moment
شکل ۱۲: ممان خمشی حول محور y

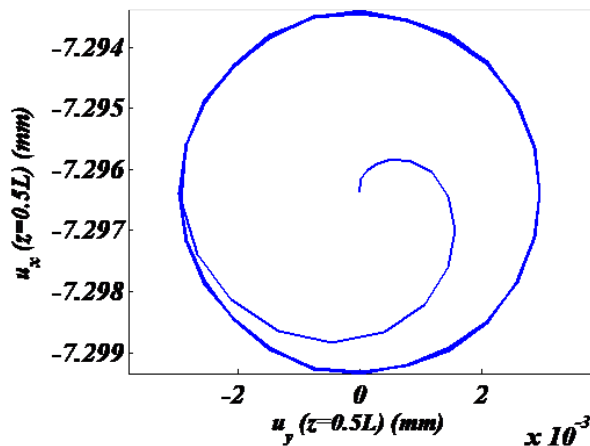


Fig. 15. Neutral trajectory at the center point of shaft
شکل ۱۵: خط سیر تار خنثی در نقطه مرکزی محور

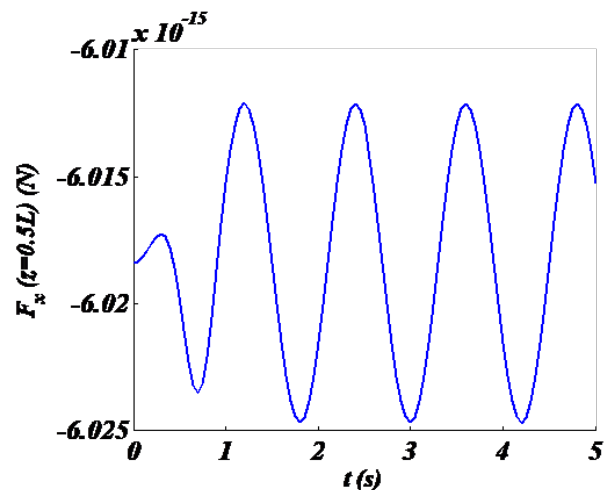


Fig. 13. The x component of shear force
شکل ۱۳: نیروی برشی در راستای x

بیشتر محور، تعداد بیشتر دیسک‌های نامیزان واقع بر آن و البته بیشتر بودن مقدار سرعت نامی آن می‌باشند. نکته دیگری که می‌توان به آن اشاره نمود آن است که با دقت در این شکل‌ها می‌توان نتیجه گرفت که در این محور مقدار مؤلفه‌های جابه‌جایی، گشتاور خمشی و نیروی برشی در هر دو صفحه تقریباً هم‌اندازه و قابل مقایسه با یکدیگر می‌باشند؛ دلیل این مسأله در آن است که تعداد دیسک‌های نامیزان و سرعت نامی محور نسبت به حالت قبلی بیشتر بوده و نیروی نامیزانی ایجاد شده در این مثال قابل توجه می‌باشد.

همچنین خط سیر حرکت تار خنثی نیز در شکل ۲۲ نشان داده شده است. این شکل نشان می‌دهد که به دلیل نامیزانی موجود، روتور یک لنگش حول نقطه تعادل استاتیکی خود انجام می‌دهد. مقایسه این شکل با شکل ۱۵ نشان می‌دهد که خط سیر تار خنثی محور همواره به شکل دایره نزدیک نبوده و در این مثال خاص تار خنثی محور تقریباً در یک مسیر مستقیم حرکت می‌کند.

صورت می‌پذیرد. لازم به ذکر است که در حالت کلی لنگش در یک مسیر بیضوی رخ می‌دهد [۱].

به عنوان یک مثال از یک محور نامتقارن، یک محور با مشخصات $L=5$ m و $d=60$ mm در نظر گرفته شده است. سرعت نامی محور 100 rpm و مدت زمان لازم برای رسیدن به این سرعت برابر با دو ثانیه می‌باشد. بر روی این محور سه دیسک قرار گرفته‌اند که مشخصات آنها و نیروی محوری وارد بر هر یک در جدول ۲ ارائه شده‌اند.

با در نظر گرفتن پنج جمله اول در سری (رابطه ۲۷) و گام زمانی $\Delta t=0.05$ s در روش نیومارک-بتا، نمودار تغییرات زمانی جابه‌جایی، گشتاور خمشی و نیروی برشی در وسط محور در شکل‌های ۱۶ تا ۲۱ رسم شده‌اند. مقایسه بین نتایج این محور با محور بررسی شده در مثال قبلی نشان می‌دهد که هر چند در این مثال قطر محور دو برابر مثال قبلی می‌باشد؛ ولی مقادیر جابه‌جایی، گشتاور خمشی و نیروی برشی ایجاد شده در آن بیشتر از مقادیر متناظر در محور بررسی شده در مثال قبلی می‌باشند که دلایل آن طول

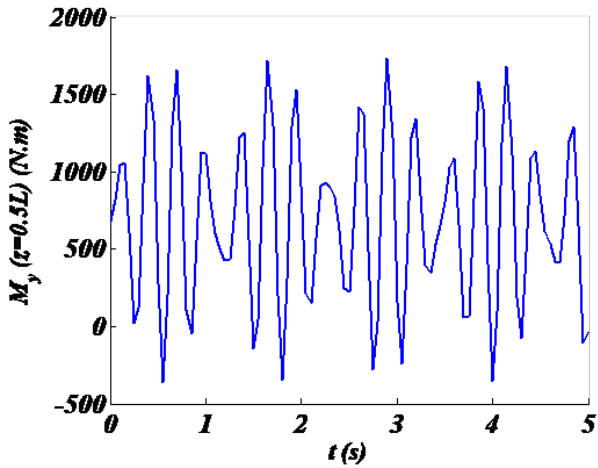


Fig. 19. The y component of bending moment

شکل ۱۹: ممان خمشی حول محور y

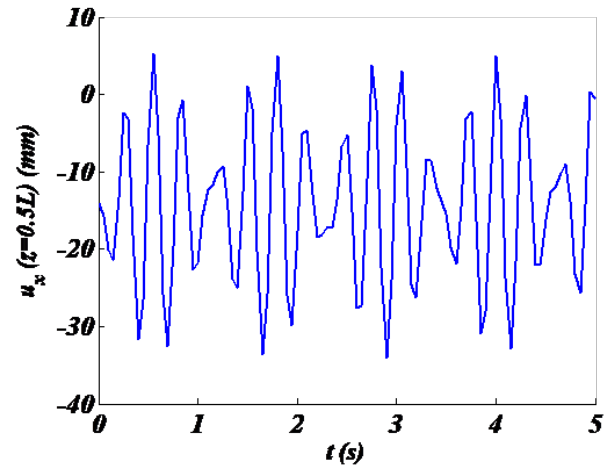


Fig. 16. The x component of displacement

شکل ۱۶: جابه‌جایی در راستای x

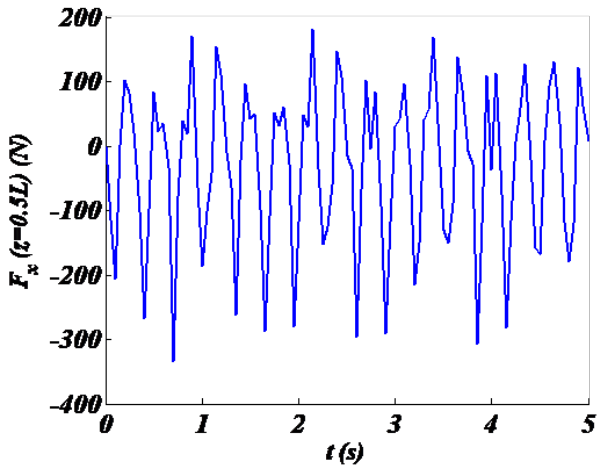


Fig. 20. The x component of shear force

شکل ۲۰: نیروی برشی در راستای x

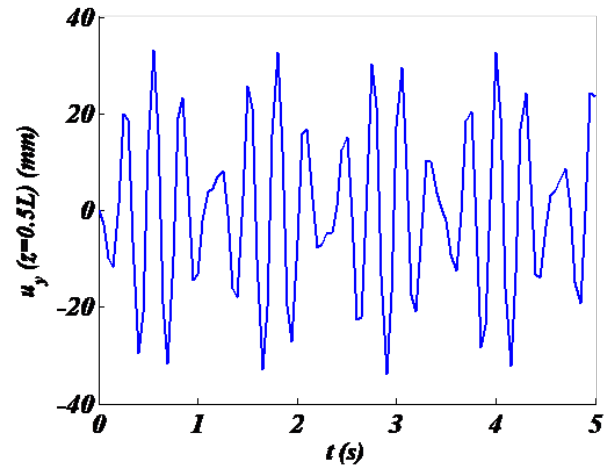


Fig. 17. The y component of displacement

شکل ۱۷: جابه‌جایی در راستای y

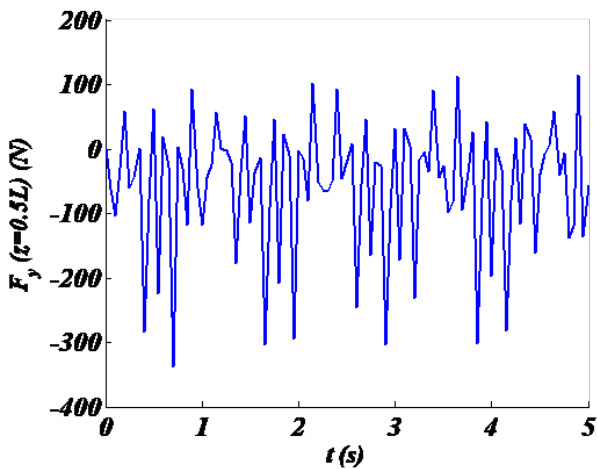


Fig. 21. The y component of shear force

شکل ۲۱: نیروی برشی در راستای y

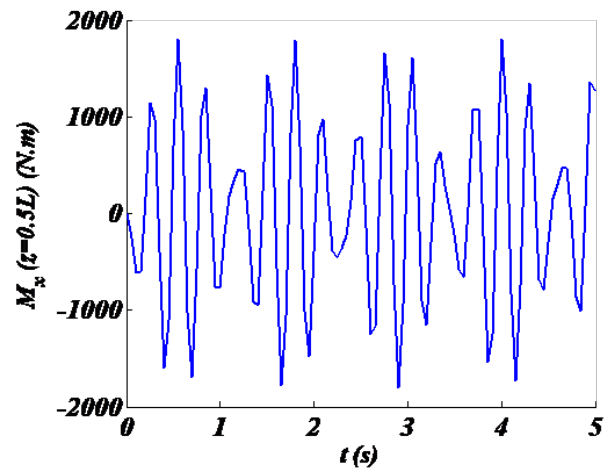


Fig. 18. The x component of bending moment

شکل ۱۸: ممان خمشی حول محور x

جدول ۲: مشخصات دیسک‌ها و نیروی وارد بر هر یک از آنها

Table 2. Properties of the unbalanced discs	
موقعیت دیسک‌ها	[L/4 L/2 3L/4]
قطر بیرونی، mm	[۸۰ ۹۰ ۸۵]
ضخامت، mm	[۱۰ ۱۵ ۱۵]
مقدار نامیزانی، g.mm	[۱۰۰۰ ۳۰۰۰ ۵۰۰]
موقعیت نامیزانی نسبت به محور x در آغاز حرکت، درجه	[۴۵ ۸۰ ۱۲۰]
نیروی محوری گسترده، kN/m ²	[۲۰ ۴۰ ۵۰] × sin(20t)
نیروی متمرکز، kN	[۱۰ ۵ ۲۰] × sin(20t)
شعاع اثر نیروهای متمرکز، mm	[۳۵ ۴۰ ۴۰]
زاویه اثر نیروهای متمرکز، درجه	[۰ ۱۰۰ ۲۲۰]

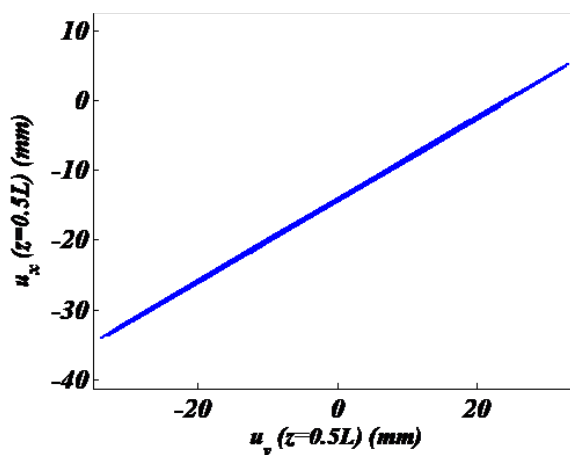


Fig. 22. Validation of results

شکل ۲۲: خط سیر تار خنثی در نقطه مرکزی محور

هنگامی که مقدار نامیزانی و یا سرعت دورانی محور کوچک باشند، تأثیر جرم خود محور و اجزای متصل به آن بر پاسخ دینامیکی روتور به مراتب بیشتر بوده و هنگامی که مقدار نامیزانی و یا سرعت دورانی محور قابل توجه باشند، تأثیر نامیزانی در مقایسه با جرم خود محور و اجزای متصل به آن قابل توجه می‌باشد. نتایج عددی نشان دادند که مسیر لنگش محور در حالت کلی به شکل بیضی بوده و بسته به مشخصات مسأله، این مسیر می‌تواند به دایره و یا حتی خط صاف نزدیک گردد.

نکته آخری که می‌توان به آن اشاره نمود، آن است که در صورت تغییر شرایط مرزی اگر بتوان تابع شکل مناسب را برای ارضای آن شرایط پیدا نمود (رابطه (۲۷))، می‌توان تحلیل ارائه شده را به محورهای دارای سایر شرایط مرزی نیز تعمیم داد.

پیوست

پیوست الف

درایه‌های ماتریس‌های جرم، سفتی و اثر ژبروسکوپیک و بردار نیرو که در رابطه (۲۸) ظاهر شده‌اند به شکل زیر می‌باشند:

$$k_{mn}^{(11)} = \begin{cases} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \frac{(kGA - R_0)L}{2} + \frac{m\pi}{2L} \sum_{i=1}^N P_i(t) \sin\left(\frac{2m\pi z_i}{L}\right) & m = n \\ -\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \sum_{i=1}^N P_i(t) \int_{z_i}^L \sin^2\left(\frac{m\pi z}{L}\right) dz & \\ \frac{n\pi}{L} \sum_{i=1}^N P_i(t) \cos\left(\frac{n\pi z_i}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi z_i}{L}\right) & m \neq n \\ -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sum_{i=1}^N P_i(t) \int_{z_i}^L \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) dz & \end{cases}$$

$$k_{mn}^{(12)} = j \frac{kGA(n-1)\pi}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{(n-1)\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) dz$$

$$f_m^{(1)} = -\rho AgL \frac{1 - \cos(m\pi)}{m\pi} + \sum_{i=1}^N \{m_i^p e_i \Omega^2 [\cos(\Omega t + \theta_i) + j \sin(\Omega t + \theta_i)] - M_i g\} \sin\left(\frac{m\pi z_i}{L}\right)$$

$$m_{mn}^{(22)} = \rho I \int_0^L \cos\left[\frac{(n-1)\pi z}{L}\right] \cos\left[\frac{(m-1)\pi z}{L}\right] dz + \sum_{i=1}^N I_i \cos\left[\frac{(n-1)\pi z_i}{L}\right] \cos\left[\frac{(m-1)\pi z_i}{L}\right]$$

$$G_{mn}^{(22)} = -2j \Omega m_{mn}^{(22)}$$

$$K_{mn}^{(21)} = -\frac{jkGA n \pi}{L} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \cos\left[\frac{(m-1)\pi z}{L}\right] dz$$

$$k_{mn}^{(22)} = \left\{ EI \left[\frac{(n-1)\pi}{L}\right]^2 + kGA \right\} \int_0^L \cos\left[\frac{(n-1)\pi z}{L}\right] \cos\left[\frac{(m-1)\pi z}{L}\right] dz$$

$$f_m^{(2)} = \sum_{i=1}^N F_i R_i e^{-j\phi_i} \cos\left[\frac{(m-1)\pi z_i}{L}\right]$$

پیوست ب

درایه‌های ماتریس [K₀] و بردار {Q} که در رابطه (۳۲) ظاهر شده‌اند

۷- جمع بندی نتایج

در این پژوهش دستگاه معادلات حاکم بر لنگش آزاد و اجباری محورهای حامل چندین دیسک متمرکز دارای نامیزانی، تحت نیروهای محوری گسترده و متمرکز متغیر با زمان به دست آمدند. روش‌های عددی گالرکین و نیومارک-بتا استفاده شده‌اند و برای محور با تکیه‌گاه‌های ساده معادلات به‌دست آمده حل شده‌اند. مثال‌های ارائه شده نشان دادند که تحلیل ارائه شده دارای دقت قابل قبولی بوده و نتایج با دقت خوبی به‌دست می‌آیند. تحلیل نمودار کمپل در ارتعاشات آزاد نشان داد که مقدار بسامدهای پیشرو و پسرو محور با تغییر محل دیسک‌ها و تغییر شدت نیروی وارد بر آنها تغییر می‌کند. نکته مهمی که در این زمینه باید در نظر داشت، آن است که وجود نیروی محوری باعث افزایش برخی بسامدها و کاهش برخی دیگر می‌گردد تا حدی که این کاهش می‌تواند منجر به ایجاد ناپایداری در محور دوار و کماتش آن گردد.

با توجه به نتایج به‌دست آمده در تحلیل ارتعاشات اجباری می‌توان گفت

به شکل زیر می‌باشند:

spindle under the action of a moving mass, *Journal of sound and vibration*, 278(4-5) (2004) 1131-1146.

- [11] G. Sheu, S.-M. Yang, Dynamic analysis of a spinning Rayleigh beam, *International Journal of Mechanical Sciences*, 47(2) (2005) 157-169.
- [12] H. Afshari, M. Irani, K. Torabi, Free whirling analysis of multi-step Timoshenko rotor with multiple bearing using DQEM, *Modares Mechanical Engineering*, 14(10) (2014) 109-120.
- [13] M. Irani, A. Mohebbi, H. Afshari, Longitudinal-Torsional and Two Plane Transverse Vibrations of a Composite Timoshenko Rotor, *Journal of Solid Mechanics*, 8(2) (2016) 418-434.
- [14] K. Torabi, H. Afshari, H. Najafi, Whirling analysis of axial-loaded multi-step Timoshenko rotor carrying concentrated masses, *Journal of solid mechanics*, 9(1) (2017) 138-156.
- [15] I. Chatzisavvas, A. Boyaci, P. Koutsovasilis, B. Schweizer, Influence of hydrodynamic thrust bearings on the nonlinear oscillations of high-speed rotors, *Journal of Sound and Vibration*, 380 (2016) 224-241.
- [16] D. Gayen, D. Chakraborty, R. Tiwari, Whirl frequencies and critical speeds of a rotor-bearing system with a cracked functionally graded shaft-Finite element analysis, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 61 (2017) 47-58.
- [17] H. Roy, S. Chandraker, J. Dutt, T. Roy, Dynamics of multilayer, multidisc viscoelastic rotor-An operator based higher order classical model, *Journal of Sound and Vibration*, 369 (2016) 87-108.
- [18] H. Roy, J. Dutt, Dynamics of polymer and polymer composite rotors-An operator based finite element approach, *Applied Mathematical Modelling*, 40(3) (2016) 1754-1768.
- [19] S. Ganguly, A. Nandi, S. Neogy, A state space viscoelastic shaft finite element for analysis of rotors, *Procedia Engineering*, 144 (2016) 374-381.
- [20] T. Kaneko, On Timoshenko's correction for shear in vibrating beams, *Journal of Physics D: Applied Physics*, 8(16) (1975) 1927.
- [21] N.M. Newmark, A method of computation for structural dynamics, *Journal of the engineering mechanics division*, 85(3) (1959) 67-94.

$$a_{mn}^{(11)} = \begin{cases} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \frac{kGAL}{2} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

$$a_{mn}^{(12)} = j \frac{kGA(n-1)\pi}{L} \int_0^L \sin\left[\frac{(n-1)\pi z}{L}\right] \sin\left[\frac{m\pi z}{L}\right] dz$$

$$a_{mn}^{(21)} = -\frac{jkGAN\pi}{L} \int_0^L \cos\left[\frac{n\pi z}{L}\right] \cos\left[\frac{(m-1)\pi z}{L}\right] dz$$

$$a_{mn}^{(22)} = \left\{ EI \left[\frac{(n-1)\pi}{L}\right]^2 + kGA \right\} \int_0^L \cos\left[\frac{(n-1)\pi z}{L}\right] \cos\left[\frac{(m-1)\pi z}{L}\right] dz$$

$$q_m^{(1)} = -\rho AgL \frac{1 - \cos(m\pi)}{m\pi} - \sum_{i=1}^N M_i g \sin\left(\frac{m\pi z_i}{L}\right)$$

منابع

- [1] G. Genta, *Dynamics of rotating systems*, Springer Science & Business Media, 2007.
- [2] R. Grybos, The effect of shear and rotary inertia of a rotor at its critical speeds, *Archive of applied mechanics*, 61(2) (1991) 104-109
- [3] S. Choi, C. Pierre, A. Ulsoy, Consistent modeling of rotating Timoshenko shafts subject to axial loads, *Journal of vibration and acoustics*, 114(2) (1992) 249-259.
- [4] Y.-G. Jei, C.-W. Lee, Modal analysis of continuous asymmetrical rotor-bearing systems, *Journal of Sound and Vibration*, 152(2) (1992) 245-262.
- [5] F. Sturla, A. Argento, Free and forced vibrations of a spinning viscoelastic beam, *Journal of vibration and acoustics*, 118(3) (1996) 463-468.
- [6] O. Jun, J. Kim, Free bending vibration of a multi-step rotor, *Journal of sound and vibration*, 224(4) (1999) 625-642.
- [7] S. Karunendiran, J. Zu, Free vibration analysis of shafts on resilient bearings using Timoshenko beam theory, *Journal of vibration and acoustics*, 121(2) (1999) 256-258.
- [8] N. Shabaneh, J.W. Zu, Dynamic analysis of rotor-shaft systems with viscoelastically supported bearings, *Mechanism and machine theory*, 35(9) (2000) 1313-1330.
- [9] F.A. Raffa, F. Vatta, Equations of motion of an asymmetric Timoshenko shaft, *Meccanica*, 36(2) (2001) 201-211.
- [10] U. Gu, C. Cheng, Vibration analysis of a high-speed

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

M. R. Zeinolabedini and M. Rafeeyan, Free and Forced Whirling Analyses of Rotors with Multiple Unbalanced Discs

Under Axial Force, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 50(1) (2018) 175-188.

DOI: 10.22060/mej.2016.777



