



## تحلیل رفتار دینامیکی صفحات کامپوزیتی نسبتاً ضخیم دارای جدایی لایه‌ای مربعی با استفاده از روش نوار محدود اسپلاین

جمشید فضیلتی\*

پژوهشگاه هوافضا، تهران، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۲۳ خرداد ۱۳۹۵  
بازنگری: ۴ آبان ۱۳۹۵  
پذیرش: ۶ آبان ۱۳۹۵  
ارائه آنلاین: ۱۹ آبان ۱۳۹۵

### کلمات کلیدی:

رفتار دینامیکی  
مواد مرکب لایه‌ای  
نظریه مرتبه بالای برش عرضی  
روش نوار محدود  
جدایی لایه‌ای

**چکیده:** رفتار دینامیکی پل ساخته شده از مواد مرکب لایه‌ای مواج با تحریک مکانیکی هارمونیک داخل صفحه با استفاده از روش نوار محدود مورد بررسی قرار گرفته است. به صورت پیش فرض، یک محدوده جدایی لایه‌ای مربعی پیش از تحریک در ساختار پل وجود دارد. رشد ترک جدایی در مسأله مد نظر نبوده است و با توجه به خطی بودن مسأله، اثرات اصطکاک و تماس بین دو سطح جدایی لحاظ نشده است. تحریک مکانیکی داخل صفحه در راستای طولی و در حالت کلی شامل مؤلفه‌های ثابت و متغیر با زمان در نظر گرفته و مسأله کمانش استاتیک، بسامدهای طبیعی و نیز ناپایداری پارامتری مدل بررسی شده است. تحریک مکانیکی به صورت تنش در کل سطح مدل توزیع شده و رفتار دینامیکی مدل با استفاده از فرمولاسیون توسعه یافته نوار محدود اسپلاین بر پایه اصل کار مجازی و با استفاده از نظریه مرتبه سوم برش عرضی به روش تقریب مرتبه اول بولوتین استخراج می‌شود. با هدف ارائه قابلیت فرمولاسیون توسعه یافته در پیش‌بینی مشخصات رفتاری سازه، برخی مسائل موجود در منابع حل، مقایسه و سپس برخی مسائل جدید ارائه شده است. اثرات تغییر بارگذاری، لایه‌چینی و قیود مرزی بر مشخصات پایداری مدل مورد بررسی قرار گرفته است.

### ۱- مقدمه

حوزه طراحی سازه‌های فضایی، هوایی و دریایی با قیود کمترین وزن در کنار بیشترین استحکام مکانیکی ممکن شناخته می‌شوند؛ به همین دلیل سازه‌ها و ساختارهای جدار نازک کاربرد گسترده‌ای در این حوزه‌های طراحی دارند. برای یک سازه جدار نازک در بسیاری از موارد، معیار بحرانی طراحی بیش از آن که حد استحکامی ماده باشد، مسأله پایداری در شرایط مختلف تحریکات استاتیکی و دینامیکی است. سازه جدار نازک که تحت اثر تحریک مکانیکی داخل صفحه در شکل عمومی‌تر دارای مؤلفه ثابت به همراه مؤلفه متغیر با زمان هارمونیک با بسامد معین است در شرایطی دچار ناپایداری می‌شود. این ناپایداری در بسامدهای مشخصی برای تحریک با شدت کمتر از تحریک معادل کمانش نیز ممکن است، رخ بدهد. چنین مودهای ناپایداری برای سازه‌های مکانیکی و نیز شرایط برهم‌کنشی سازه-سیال می‌تواند رخ بدهد [۱].

یکی از مودهای فراگیر خرابی در مواد مرکب چند لایه، جداسازی لایه‌ها از یکدیگر است. چنین خرابی تحت اثر شرایط ضربه و تحریکات مکانیکی به ویژه بین لایه‌هایی با بیشترین اختلاف زاویه الیاف یا مشخصات مکانیکی استعداد ظهور دارد. در رخداد جدایی لایه‌ای استحکام مکانیکی سازه کاهش می‌یابد و با پدیدار شدن مودهای ناپایداری محلی با انرژی

کم، مودهای ناپایداری و خرابی کلی سازه تغییر می‌کند؛ بنابراین پیش‌بینی و محاسبه اثرات وجود جدایی بین لایه‌ها بر کاهش استحکام مکانیکی سازه و تأثیرگذاری آن بر رفتار دینامیکی سازه بسیار پراهمیت و مفید خواهد بود. برای افزایش دقت محاسباتی در سازه‌های جدار نازک نسبتاً ضخیم، نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالا مورد استفاده قرار گرفته است. اضافه کردن فرض عدم وجود فشار جانبی منجر به صفر شدن مقادیر تنش‌های عرضی ضخامت در موقعیت دو سمت ورق و ساده‌تر شدن معادلات می‌شود. استفاده از این فرض سبب می‌شود مجهولات جابه‌جایی در نظریه مرتبه بالا از تعداد ۹ به ۵ مجهول کاهش یابد؛ بنابراین فرضیات استفاده شده در مقایسه با نظریه مرتبه اول برش عرضی، علی‌رغم استفاده از همان تعداد مجهولات در تقریب میدان جابه‌جایی، محاسبات را از ورود ضرایب تصحیح برشی بی‌نیاز و تقریب دقیق‌تری از محاسبات راستای ضخامت ارائه می‌کند. پارهی و همکاران در سال ۲۰۰۰ [۲] مدلی از یک صفحه تخت دارای جدایی لایه‌ای را برای تحلیل دینامیکی ارائه کردند. معادلات اجزا محدود براساس توسعه یک جزء هشت گرهی ایزوپارامتریک و مرتبه دو با فرض تنش عرضی مرتبه اول برای هر لایه استخراج شده است. مطالعات پارامتری بر روی رفتار دینامیکی صفحات دارای جدایی لایه‌ای در شرایط قیدی متنوع، لایه‌چینی‌ها و مشخصات هندسی متفاوت ارائه شده است. هو و همکاران در سال ۲۰۰۲ [۳] ارتعاشات صفحات چند لایه نسبتاً ضخیم دارای جدایی لایه‌ای را با توسعه مدل اجزا محدود با فرضیات نظریه مرتبه

فرضیات کلاسیک و نیز مرتبه بالای برش عرضی توسعه داده شده است. محدوده جدایی لایه‌ای بدون در نظر گرفتن اصطکاک و تماس سطوح مدنظر قرار گرفته است. معادله حاکم بر مسأله به صورت معادله دیفرانسیل متیو استخراج شده و با استفاده از روش حل تقریبی مرتبه اول بولوتین و تکنیک مقدار ویژه حل شده است. مسأله کمانش استاتیکی به همراه بسامدهای طبیعی و محدوده‌های ناپایداری پارامتری سازه مطالعه و در حد امکان با نتایج ارائه شده در منابع مقایسه و صحت‌سنجی شده است. حل مسأله به روش نوار محدود اسپلاین با فرمولاسیون حاضر در سایر منابع مشاهده نشده است.

## ۲- بسط فرمولاسیون نوار محدود اسپلاین

مدل مورد تحلیل شامل صفحه تخت با هندسه مستطیلی از جنس مواد مرکب لایه‌ای و دارای محدوده مستطیلی جدایی لایه‌ای محصور در هندسه<sup>۱</sup> یا سرتاسری<sup>۲</sup> است. فرض می‌شود هندسه شامل تعداد مشخص محدوده‌های نوار شکل باشد که در طول در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند. شکل ۱ نمایی از شبکه‌بندی نوار محدود نمونه با عرض  $b$  و طول  $L$  و جزء نوار محدود به طول  $L$ ، عرض  $b_s$  را نمایش داده است. ضخامت کل مدل  $t$  است. یک ناحیه جدایی لایه‌ای محصور در داخل مدل وجود دارد. نوار محدود در معرض بارگذاری داخل صفحه است که به صورت تنش طولی یکنواخت در سراسر مدل اعمال شده است.

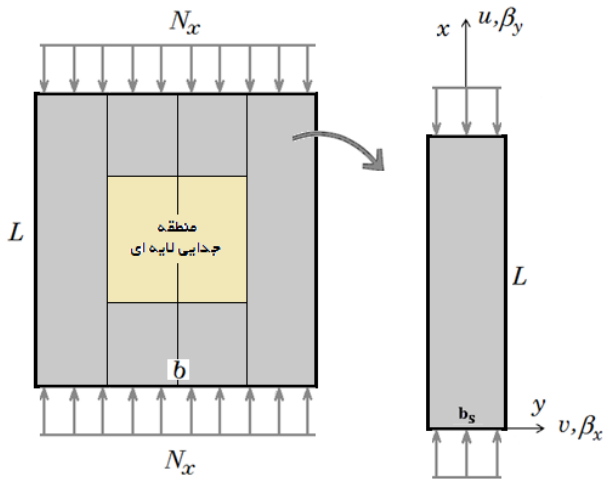


Fig. 1. Typical geometry and loading conditions of flat delaminated panel and single finite strip

شکل ۱: هندسه و بارگذاری در مدل صفحه تخت دارای جدایی لایه‌ای و نوار محدود نمونه

بارگذاری به صورت ترکیبی از تنش با مقدار ثابت (مؤلفه استاتیک بارگذاری) و تنش با مقدار متغیر با زمان به صورت تابع هارمونیک (مؤلفه دینامیکی بارگذاری) فرض شده است که به ترتیب با بالانویس‌های  $\square$  و  $\square$

بالای برش عرضی بررسی کردند. نمونه‌های مختلفی مورد بررسی قرار داده شده است و تأثیر جدایی لایه‌ای بر مشخصات رفتار ارتعاشی مدل مطالعه شده است. رویکرد تحقیق به صورتی بوده است که با استفاده از مشخصات رفتاری بتوان موقعیت و شرایط جدایی لایه‌ای را پیش‌بینی کرد. ینگ و فو در [۴] ۲۰۰۷ تحلیل پایداری پارامتری پوسته‌های استوانه‌ای چند لایه دارای محدوده جدایی لایه‌ای را بررسی کردند. روش ریلی-ریتز و استفاده از توابع پله برای میدان تغییر متغیرهای جابه‌جایی روش مورد استفاده در شبیه‌سازی پدیده است. معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسأله به صورت معادله متیو با استفاده از روش بولوتین حل شده است. در نمونه‌های عددی اثرات اندازه تحریک خارجی، اندازه و موقعیت جدایی لایه‌ای و مشخصات ماده بر بسامدهای طبیعی نمونه و محدوده ناپایداری اصلی پارامتری مورد مطالعه قرار گرفته است. موهانتی و همکاران در [۵] ۲۰۱۵ مشخصات ناپایداری پارامتری را برای صفحات چند لایه دارای جدایی لایه‌ای تحت اثر بارگذاری تناوبی داخل صفحه بررسی کردند. روش تحلیل، استفاده از فرمولاسیون اجزا محدود با فرمولاسیون برش عرضی مرتبه اول است. موده‌های ارتعاشی با استفاده از روش بولوتین استخراج شده است. اثرات سطح جدایی لایه‌ها، لایه‌چینی، نسبت تعامد خواص لایه‌ها، شکل هندسی و بارگذاری داخل صفحه بر مشخصات پایداری دینامیکی صفحات چند لایه متعامد دارای جدایی لایه‌ای بررسی شد. اویسی و همکاران در سال ۲۰۱۴ [۶] با توسعه روش نوار محدود اسپلاین مبتنی بر نظریه لایه به لایه مرتبه اول برش عرضی، مسأله ناپایداری پارامتری صفحات تخت چند لایه دارای جدایی بین لایه‌های سرتاسری را مورد تحلیل و بررسی قرار دادند. برای مدل‌سازی منطقه جدایی لایه‌ای از توابع پله و میدان جابه‌جایی متناسب استفاده شده است. نتایج صحت‌سنجی شده برای بررسی اثرات اندازه و موقعیت جدایی لایه‌ای بر رفتار کمانش، بسامدهای طبیعی و پایداری پارامتری سازه بررسی شده است. اویسی و همکاران در [۷] ۲۰۱۵ اثرات جدایی لایه‌ای سراسری عرضی را بر کمانش دینامیکی صفحات چند لایه بررسی کردند. روش نوار محدود با فرمولاسیون نیمه تحلیلی مورد استفاده قرار گرفته است. برای وارد شدن تأثیرات جدایی لایه به فرمولاسیون در میدان جابه‌جایی جملات اضافی در نظر گرفته شده است. نفوذ سطوح جداشده در یکدیگر با استفاده از روابط مناسب تماس محدود شده و حل زمانی انجام و ارائه شده است.

مؤلف در انتشارات پیشین خود مسأله ناپایداری استاتیک و دینامیک پارامتریک سازه‌های جدار نازک تخت و استوانه‌ای را با و بدون بریدگی داخلی و تقویت‌کننده‌های طولی از جنس مواد مرکب چند لایه و مواد با خواص تابعی با توسعه فرمولاسیون نوار محدود نیمه تحلیلی و اسپلاین مورد بررسی قرار داده است [۸-۱۱].

در مقاله حاضر رفتار دینامیکی سازه جدار نازک تخت نسبتاً ضخیم از جنس مواد مرکب لایه‌ای و دارای محدوده مستطیلی جدایی بین لایه‌ای تحت بارگذاری طولی داخل صفحه مورد بررسی قرار گرفته است. روش نوار محدود اسپلاین بر مبنای فرمولاسیون انرژی کامل و با در نظر گرفتن

- 1 Embedded delamination
- 2 Through the width delamination

صورت اعمال فرضیات کلاسیک صفحات صفر می‌شود. با جایگذاری توابع تخمین میدان جابه‌جایی (۲) در روابط کرنش-جابه‌جایی معادله (۳)، میدان کرنشی به صورت زیر حاصل می‌شود [۱۱].

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_x^{(0)} + z.\varepsilon_x^{(1)} + z^2.\varepsilon_x^{(2)} + z^3.\varepsilon_x^{(3)} \\ \varepsilon_y = \varepsilon_y^{(0)} + z.\varepsilon_y^{(1)} + z^2.\varepsilon_y^{(2)} + z^3.\varepsilon_y^{(3)} \\ \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^{(0)} + z.\gamma_{xy}^{(1)} + z^2.\gamma_{xy}^{(2)} + z^3.\gamma_{xy}^{(3)} \\ \gamma_{yz} = \gamma_{yz}^{(0)} + z.\gamma_{yz}^{(1)} + z^2.\gamma_{yz}^{(2)} + z^3.\gamma_{yz}^{(3)} \\ \gamma_{xz} = \gamma_{xz}^{(0)} + z.\gamma_{xz}^{(1)} + z^2.\gamma_{xz}^{(2)} + z^3.\gamma_{xz}^{(3)} \end{cases} \quad (4)$$

ترم‌های رابطه اخیر به صورت رابطه (۵) تعریف می‌شوند.

$$\begin{cases} (\varepsilon_x^{(0)}, \varepsilon_y^{(0)}, \gamma_{xy}^{(0)}) = (u^0_{,x}, v^0_{,y}, u^0_{,y} + v^0_{,x}) \\ (\varepsilon_x^{(1)}, \varepsilon_y^{(1)}, \gamma_{xy}^{(1)}) = (\beta_{x,x}, -\beta_{y,y}, \beta_{x,y} - \beta_{y,x}) \\ (\varepsilon_x^{(2)}, \varepsilon_y^{(2)}, \gamma_{xy}^{(2)}) = (0, 0, 0) \\ (\varepsilon_x^{(3)}, \varepsilon_y^{(3)}, \gamma_{xy}^{(3)}) = C.(\beta_{x,x}^*, -\beta_{y,y}^*, \beta_{x,y}^* - \beta_{y,x}^*) \\ (\gamma_{yz}^{(0)}, \gamma_{xz}^{(0)}) = C.(w^0_{,y} - \beta_y, w^0_{,x} + \beta_x) \\ (\gamma_{yz}^{(2)}, \gamma_{xz}^{(2)}) = C.(-3\beta_y^*, 3\beta_x^*) \\ (\gamma_{yz}^{(1)}, \gamma_{xz}^{(1)}) = (\gamma_{yz}^{(3)}, \gamma_{xz}^{(3)}) = (0, 0) \\ \beta_x^* = -\frac{4}{3t^2}(w^0_{,x} + \beta_x) \\ \beta_y^* = -\frac{4}{3t^2}(w^0_{,y} - \beta_y) \end{cases} \quad (5)$$

حل مسأله پایداری پنل در بارگذاری پارامتریک با استفاده از اعمال اصل کار مجازی به فرمولاسیون انرژی انجام می‌شود. انرژی کل یک نوار محدود شامل مؤلفه‌های انرژی جنبشی ( $T$ )، کار نیروهای خارجی ( $U_g$ ) و انرژی کرنشی ( $U$ ) با تعریف زیر است.

$$\Pi = U - U_g - T \quad (6)$$

مؤلفه‌های انرژی در این رابطه به شکل رابطه (۷) تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} T &= \frac{\rho t}{2} \iint (\dot{u}^{o2} + \dot{v}^{o2} + \dot{w}^{o2} + \frac{t^2}{12} (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2)) dx dy \\ U_g &= \frac{t}{2} \iint \left[ N_x \left( u^{o2}_{,x} + v^{o2}_{,x} + w^{o2}_{,x} \right) + \frac{Ct^2}{12} (\beta_{x,x}^2 + \beta_{y,x}^2) \right] dx dy \\ U &= \frac{1}{2} \iint \left[ \langle N \underline{M} O P \rangle \cdot \langle \varepsilon^{(0)} \varepsilon^{(1)} \varepsilon^{(2)} \varepsilon^{(3)} \rangle^T + \langle Q R T U \rangle \cdot \langle \gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \gamma^{(2)} \gamma^{(3)} \rangle^T \right] dx dy \end{aligned} \quad (7)$$

در این رابطه،  $\rho$  چگالی جرمی ماده، " " معرف مشتق‌گیری نسبت به زمان و بالانویس  $\square^T$  مشخصه ترانهاده ماتریسی هستند. در بیان انرژی جنبشی به صورت رابطه (۷)، برخی جملات مرتبه بالای مؤلفه‌های جابه‌جایی در بخش اینرسی چرخشی برای ساده‌سازی صرف‌نظر و حذف شده است. ضریب معرف  $C$  در رابطه (۷) در استفاده از فرضیات مرتبه بالای برش عرضی برابر با واحد است که در صورت اعمال فرضیات کلاسیک

$\square^D$  مشخص می‌شوند. مؤلفه‌های بارگذاری را می‌توان نسبت به بار معادل کماتش استاتیکی،  $N_{cr}$  بدون بعد نمود (رابطه (۱)).

$$N_x = a^S N_{cr} + a^D N_{cr} \cos \omega t \quad (1)$$

که در آن  $a^D$  و  $a^S$  به ترتیب بسامد تحریک خارجی، ضریب بارگذاری استاتیکی و ضریب بارگذاری دینامیکی هستند.

علاوه بر فرضیات کلاسیک صفحات، برای لحاظ شدن اثرات کرنش‌های برشی راستای ضخامت صفحه، نظریه مرتبه سوم برش عرضی با فرمولاسیون ردی استفاده شده است. در این فرضیات صفر شدن کرنش‌های عرضی در بالا و پایین ضخامت صفحه در نظر گرفته شده است؛ بنابراین میدان تغییر شکلی در نظر گرفته شده برای صفحه مطابق روابط (۲) خواهد بود.

$$\begin{cases} u(x, y, z; t) = u^0 + \beta_x z + C.\beta_x^* z^3 \\ v(x, y, z; t) = v^0 - \beta_y z - C.\beta_y^* z^3 \\ w(x, y, z; t) = w^0 \end{cases} \quad (2)$$

در روابط اخیر ( $u, v, w$ ) مؤلفه‌های جابه‌جایی برای هر نقطه دلخواه از صفحه و ( $u^0, v^0, w^0$ ) جابه‌جایی متناظر با آن نقطه روی صفحه میانی است.  $\beta_x$  و  $\beta_y$  چرخش‌های خط فرضی عمود بر صفحه میانی به ترتیب حول محور  $x$  و  $y$  هستند. توابع میدان جابه‌جایی روی صفحه میانی (یعنی  $u^0, v^0, w^0$ ) در نظریه کلاسیک و  $\beta_x, \beta_y, u^0, v^0, w^0$  در نظریه مرتبه بالا) به صورت حاصل ضرب توابع جابه‌جایی راستاهای طولی و عرضی در تابعیت حوزه زمان فرض شده است.

توابع تقریب میدان جابه‌جایی در راستای طولی هندسه نوار محدود به صورت مجموع یک سری توابع بی‌زیر-اسپلاین مرتبه سه در نظر گرفته شده است. تعداد توابع به انتخاب کاربر قابل تغییر خواهد بود. در راستای عرضی نوار محدود توابع جابه‌جایی از نوع لاگرانژی خطی برای جابه‌جایی‌های داخل صفحه و هرمیتی درجه سوم برای جابه‌جایی خارج از صفحه مورد استفاده قرار گرفته است [۱۱]. بر مبنای تعداد جملات سری بی‌زیر-اسپلاین در طول نوار، گره‌های محاسباتی در دو لبه نوار محدود وجود خواهد داشت. تابعیت زمانی به صورت تابع نمایشی فرض شده است. با توجه به نوع توابع تقریب مورد استفاده، هرگونه شرایط مرزی اعم از آزاد، لولایی و گیردار قابل اعمال به فرمولاسیون خواهد بود.

کرنش‌های خطی برای هندسه تخت عبارت هستند از:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = u_{,x} \\ \varepsilon_y = v_{,y} \\ \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} \\ \gamma_{yz} = C.(v_{,z} + w_{,y}) \\ \gamma_{xz} = C.(u_{,z} + w_{,x}) \end{cases} \quad (3)$$

در این رابطه علامت " " عملگر مشتق‌گیری جزئی است. ضریب معرف  $C$  در استفاده از فرضیات مرتبه بالای برش عرضی برابر با واحد است که در

$$\delta = A \sin\left(\frac{1}{2}\omega t\right) + B \cos\left(\frac{1}{2}\omega t\right) \quad (11)$$

که در آن  $A$  و  $B$  بردارهای درجات آزادی نامیده می‌شود. با جاگذاری تقریب (۱۱) در معادله حاکم (رابطه ۹) و استفاده از اتحادهای مثلثاتی جملاتی براساس ترم‌های مثلثاتی حاصل می‌شود که با فاکتورگیری از ضرایب ترم‌های سینوسی و کسینوسی مشابه و برابر با صفر قرار دادن آن‌ها دستگاه معادلات براساس بردار مجهولات جدید  $A$  و  $B$  حاصل می‌شود. پاسخ غیربدیهی دستگاه معادلات حاصل از صفر شدن دترمینان ماتریس‌های ضرایب است که به صورت حل مقدار ویژه معادله (۱۲) قابل استخراج خواهد بود.

$$\begin{pmatrix} K - a^S K_g^S + \frac{1}{2} a^D K_g^D & 0 \\ 0 & K - a^S K_g^S - \frac{1}{2} a^D K_g^D \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \omega^2 \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} = 0 \quad (12)$$

به دلیل عدم وجود فرضیات میرایی و مانند آن در روابط، معادلات حاصل، مجزا و به صورت دو مسأله مقدار ویژه قابل حل هستند. حل این دو مجموعه معادلات منتهی به استخراج نتایجی می‌شود که هر یک مرزی از منطقه ناپایداری سازه را مشخص می‌کند. برای حل مسأله، ضرایب بارگذاری استاتیکی و دینامیک ( $a^S, a^D$ ) به عنوان ورودی مسأله استفاده می‌شود و بسامد مرزهای ناپایداری سازه از حل معادلات با استفاده از الگوریتم‌های مقدار ویژه استخراج می‌شود.

### ۳- تکنیک مدل‌سازی جدایی لایه‌ای

در محدوده جدایی لایه‌ای صفحه در ضخامت یکپارچه نیست و در واقع دو صفحه با ضخامت کمتر وجود دارد. برای لحاظ شدن آثار جدایی لایه‌ای (یک جدایی لایه‌ای در ضخامت) از دو لایه نوار محدود استفاده شده است. دو لایه موصوف در تمام مساحت صفحه به جز در محدوده جدایی لایه‌ای با یکدیگر اتصال پیدا کرده‌اند. لازم است مشخصه‌های هندسی و مرتبه تقریب نوارهای محدودی که بر روی هم قرار می‌گیرند، یکسان باشد. مطابق شکل ۲ گره‌های نوارهای محدود قرار داده شده در موقعیت همسان بر روی هم قرار می‌گیرند و در تمام صفحه و روی مرز جدایی لایه‌ای به جز محدوده داخلی سطح جدایی با هم کوپل می‌شوند. برای افزایش دقت مدل‌سازی

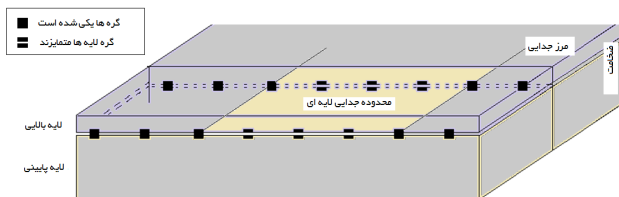


Fig. 2. Numerical technique in simulation of delamination

شکل ۲: تکنیک عددی مدل‌سازی محدوده دارای جدایی لایه‌ای

صفحات صفر می‌شود. همچنین متجه‌های نیرویی ( $N, M, O, P, Q, R, T, U$ ) مورد استفاده در روابط (۷) به شکل زیر قابل تعریف هستند.

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{O\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [D] & [E] \\ [B] & [D] & [E] & [F] \\ [D] & [E] & [F] & [I] \\ [E] & [F] & [I] & [H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^{(0)}\} \\ \{\varepsilon^{(1)}\} \\ \{\varepsilon^{(2)}\} \\ \{\varepsilon^{(3)}\} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{Bmatrix} \{Q\} \\ \{R\} \\ \{T\} \\ \{U\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A^S] & [B^S] & [D^S] & [E^S] \\ [B^S] & [D^S] & [E^S] & [F^S] \\ [D^S] & [E^S] & [F^S] & [I^S] \\ [E^S] & [F^S] & [I^S] & [H^S] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\gamma^{(0)}\} \\ \{\gamma^{(1)}\} \\ \{\gamma^{(2)}\} \\ \{\gamma^{(3)}\} \end{Bmatrix}$$

سمت راست روابط (۸) شامل ماتریس‌های سختی معادل چند لایه کامپوزیتی و جملات کرنش (تعریف رابطه ۵) است.

با جایگذاری جملات انرژی رابطه (۷) در رابطه انرژی کل (۶) و اعمال اصل کار مجازی، کمینه‌سازی انرژی کل مدل و فاکتورگیری از بردارهای درجات آزادی معادله حاکم بر مسأله برای نوار محدود به شکل ماتریسی حاصل می‌شود. با برهم گذاری ماتریس‌های نوار محدود و اعمال شرایط مرزی فیزیکی، معادلات حاکم بر مسأله به صورت معادله دیفرانسیلی متیو به شکل زیر حاصل می‌شود.

$$M\ddot{\delta} + (K - a^S K_g^S - a^D \cos \omega t K_g^D) \delta = 0 \quad (9)$$

در این معادله  $M, K, K_g^S$  و  $K_g^D$  به ترتیب ماتریس‌های کلی سازه‌ای متناظر با انرژی جنبشی، انرژی کرنشی، انرژی تنش اولیه استاتیکی و انرژی نیروهای خارجی متغیر دینامیکی و  $\delta$  بردار جامع شامل درجات آزادی غیرمقید مدل عددی است. به صورتی که

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \delta^T M \dot{\delta} \\ U &= \frac{1}{2} \delta^T K \delta \\ U_g &= \frac{1}{2} \delta^T (a^S K_g^S + a^D K_g^D) \delta \end{aligned} \quad (10)$$

درایه‌های تشکیل دهنده ماتریس‌ها در مرجع [۱۲] موجود است. در حالتی که در معادله حاکم رابطه (۹)، نیروهای خارجی وجود نداشته باشد، معادله حاکم بر مسأله ارتعاشات آزاد حاصل خواهد شد و در حالتی که اثرات زمانی و جرمی دیده نشود، معادله حاکم بر مسأله کماتش استاتیکی به دست خواهد آمد.

حل معادله حاکم به شکل معادله متیو (رابطه ۹) با استفاده از تقریب مرتبه اول بولوتین انجام شده است. تقریب بولوتین متناسب با بسامد دو برابر بسامد بارگذاری که مناطق ناپایداری بحرانی‌تر را به دست می‌دهد، مورد نظر قرار گرفته است. در این تقریب بردار درجات آزادی  $\delta$  به صورت جمله اول (مرتبه اول) از سری مثلثاتی رابطه (۱۱) در نظر گرفته می‌شود [۱].

جدول ۱: مشخصات ماده و هندسه تیر-صفحه یک سر گیردار دارای جدایی لایه ای

Table 1. Material and geometry specifications of delaminated cantilevered beam-plate

واحد	مقدار	پارامتر ماده یا هندسه
GPa	۱۳۴/۴	$E_1$
	۱۳	$E_1/E_2$
	۰/۵۰	$G_{12}/E_2$
	۰/۳۳	$\nu_{12}$
kg/m <sup>3</sup>	۱۴۸۰	$\rho$
m	۰/۱۲۷	$L$
	۱۲۵	$L/t$
	۱۰	$L/b$
	۰/۲ - ۰/۸	$d/L$

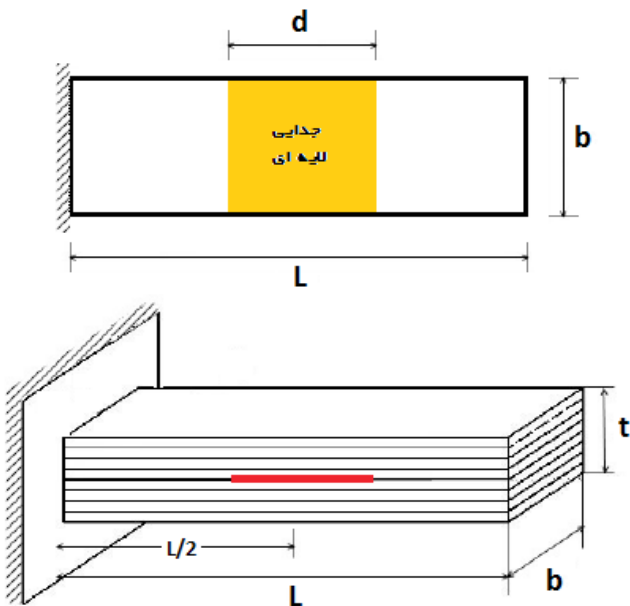


Fig. 4. Geometry and delamination of cantilevered beam-plate

شکل ۴: هندسه و موقعیت جدایی لایه ای سرتاسری در تیر-صفحه یک سرگیردار

بار بحرانی کماتش و دو بسامد طبیعی اصلی تیر در جدول ۳ ارائه و با نتایج تجربی بسامد آزاد شن و گزیدی [۱۳]، نتایج مرتبه بالای برشی رادو [۱۴] و نتایج حاصل از نوار محدود مرتبه اول برشی لایه ای اویسی و همکاران [۶] مقایسه شده است. در استخراج نتایج به دست آمده از فرمولاسیون کلاسیک و مرتبه بالای برش عرضی از دو نوار محدود در عرض قطعه استفاده شده است که نتایج حاصل از محاسبات مطابقت بسیار مناسبی را با نتایج مراجع نشان می دهد.

لازم است تعداد جملات تقریب راستای طولی و تعداد نوارهای محدود طوری انتخاب شود که مرز ناحیه جدایی لایه ای بر روی خطوط گره ای و گره ها واقع شود.

به همین روش برای مدل سازی صفحه با  $N$  جدایی لایه ای در ضخامت، تعداد  $N+1$  لایه نوار محدود لازم خواهد بود. هر لایه نوار محدود عبارت از تعدادی نوار محدود است که کل سطح مدل را در بر می گیرند؛ اما در ضخامت بخشی از لایه چینی را در خود دارد. ضخامت کل تمام لایه ها یکسان فرض شده است و برای لحاظ شدن آثار خروج از مرکزی لایه ها، از لایه های دارای ضخامت اما فاقد سفتی استفاده شده است. شکل ۳ نمونه ای از چند لایه [۹۰/۰/۰/۹۰] دارای جدایی لایه ای در میانه ضخامت و لایه های نوار محدود مورد نیاز را نمایش داده است.

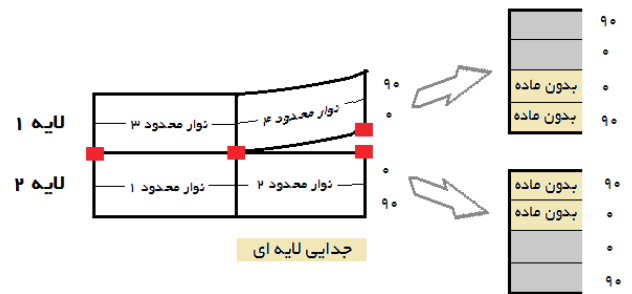


Fig. 3. Typical equivalent layups for delaminated panel layup (90/0/0/90)

شکل ۳: نمونه لایه چینی معادل برای لایه های جدا شده در چهار لایه [۹۰/۰/۰/۹۰] جهت اصلاح شرایط

#### ۴- نتایج

کد عددی نوار محدود اسپالین براساس فرمولاسیون صفحه کلاسیک و مرتبه بالای برش عرضی توسعه داده شده است. برای صفحه با یک محدود جدایی لایه ای مدل به صورت دو لایه جزئی ساخته شده است. با استفاده از حل مقدار ویژه، تحلیل کماتش استاتیکی و ارتعاشات آزاد مدل انجام و محدوده های ناپایداری پارامتری استخراج شده است.

#### ۴-۱- بررسی صحت محاسبات

تیر-صفحه یک سرگیردار هشت لایه متعامد متقارن [۰/۹۰/۰/۹۰] با نسبت طول به عرض ۱۰ و دارای منطقه جدایی لایه ای، توسط شن و گزیدی مورد آزمایش قرار گرفته و بسامدهای طبیعی اصلی آن استخراج شده است. تیر دارای منطقه جدایی لایه ای مربعی بین لایه های چهارم و پنجم در وسط طول است که در راستای عرضی تا مرزهای هندسه ادامه یافته است. مشخصات هندسی تیر و ناحیه جدایی لایه ای و ماده مطابق جدول ۱ و شکل ۴ است. برای نسبت های طول مختلف ناحیه جدایی لایه ای تحلیل انجام شده است. مدل با استفاده از ۲ نوار محدود در عرض ساخته شده است که هر یک در طول به ۱۰ بخش محاسباتی تقسیم شده است. نتایج محاسبه شده



توسط جو و همکاران [۱۵] که براساس فرمولاسیون اجزا محدود مرتبه اول برش عرضی ارائه شده، در جدول ۴ و جدول ۵ مقایسه شده است. در مدل نوار محدود از تعداد ۱۲ نوار محدود در عرض استفاده شده و هر نوار محدود در طول دارای ۱۲ بخش محاسباتی است. نتایج نشان می‌دهد استفاده از فرمولاسیون نوار محدود نتایج را با دقت مناسب پیش‌بینی نموده است. ضمن این که در هر دو نوع شرایط مرزی مورد بررسی، برای اندازه ناحیه جدایی بزرگ‌تر از نسبت یک سوم، بسامدهای محاسبه‌شده از مود دوم به بعد دارای اختلاف است که انتظار می‌رود این مسأله به شکل پیچیده‌تر مود طبیعی مدل و آثار صرف‌نظر شدن پدیده تماس در محاسبات مرتبط باشد.

برای صفحه تحت شرایط مرزی کاملاً گیردار و دارای محدوده جدایی لایه‌ای با نسبت طول وجه  $d/L=0/33$  موقعیت جدایی لایه‌ای در ضخامت تغییر داده شده و تأثیر تغییر موقعیت ارتفاعی منطقه جدایی لایه‌ای بر پنج بسامد طبیعی اصلی اول مدل با استفاده از فرمولاسیون نوار محدود مرتبه بالا بررسی شده است. نتایج تحلیل نوار محدود مرتبه بالا برش عرضی در جدول ۶ به همراه نتایج فرمولاسیون اجزا محدود مرتبه اول برش عرضی که توسط جو و همکاران [۱۵] محاسبه شده، ارائه شده است. مقایسه نتایج نشان می‌دهد که نتایج همخوانی بسیار مناسبی دارد.

#### ۴-۲- تغییرات در شرایط مرزی

پنل مربعی با و بدون ناحیه جدایی لایه‌ای در میانه ضخامت در شرایط مختلف مرزی در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی داخل صفحه کاملاً مهار شده و حرکت خارج از صفحه در مرزها به صورت گیردار، لولایی یا آزاد در نظر گرفته شده است.

برای تعداد هفت ترکیب درجات آزادی شامل چهار طرف گیردار (CCCC)، چهار طرف لولا (SSSS)، سه طرف گیردار (CCCF)، سه طرف لولا (SSSF)، دو طرف گیردار (CFCF)، دو طرف لولا (SFSF) و دو طرف گیردار-دو طرف لولا (CSCS)، نتایج بسامد طبیعی اصلی، تنش بحرانی کماتش و محدوده‌های ناپایداری پارامتری استخراج و به ترتیب در جدول ۷ و جدول ۸ و شکل ۶ نمایش داده شده است. همین نتایج برای پنل دارای ناحیه جدایی لایه‌ای با نسبت ضلع ۳۰٪ انجام شده است. نتایج نشان می‌دهد

صفحه مربعی هشت لایه متقارن  $[0/90/45/90]$  با مشخصات ارائه شده در شکل ۵ و جدول ۲، در دو حالت تحت شرایط مرزی کاملاً لولایی و نیز تحت شرایط مرزی کاملاً گیردار در نظر گرفته شده است. بسامدهای طبیعی مدل با استفاده از روش نوار محدود استخراج شده است. صفحه دارای محدوده جدایی لایه‌ای به شکل مربعی در وسط با نسبت اندازه طول ضلع یک دوم و یک سوم نسبت به ضلع پنل و در میانه ضخامت (موقعیت ۱ در شکل ۵) قرار دارد. پنج بسامد طبیعی اصلی پنل با استفاده از فرمولاسیون نوار محدود کلاسیک و مرتبه بالای برش عرضی استخراج و با نتایج ارائه شده

جدول ۲: مشخصات ماده و هندسه پنل دارای جدایی لایه‌ای

Table 2. Material and geometry specifications of delaminated panel

پارامتر ماده یا هندسه	مقدار	واحد
$E_1$	۱۳۲	GPa
$E_1/E_2$	۲۴/۶۷۳	
$G_{12}/E_2$	۰/۵۲۱	
$\nu_{12}$	۰/۲۹۱	
$\rho$	۱۴۴۰/۲	kg/m <sup>3</sup>
$L$	۰/۲۵	m
$L/t$	۱۱۷/۹۲	
$d/L$	۰/۵ - ۰/۳۳	

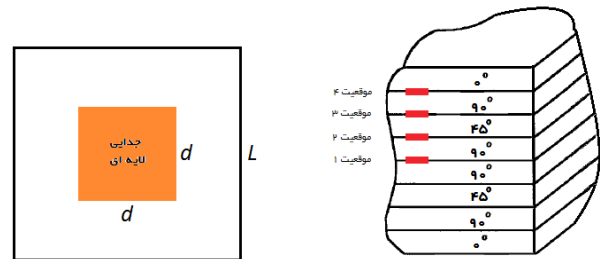


Fig. 5. geometry and location of embedded delamination

شکل ۵: هندسه و موقعیت جدایی لایه‌ای محصور

جدول ۳: بار بحرانی کماتش و بسامدهای طبیعی اصلی تیر-صفحه نازک یک سر گیردار دارای جدایی لایه‌ای

Table 3. Fundamental critical buckling load and natural frequencies of cantilevered thin beam-plate with delamination

نوار محدود حاضر نظریه مرتبه بالای برشی			نوار محدود حاضر نظریه کلاسیک			نظریه لایه ای مرتبه اول برش [۶]			نظریه مرتبه بالای برش [۱۴]			تجربی [۱۳]		$d/L$
$P_{cr}$	$w_2$	$w_1$	$P_{cr}$	$w_2$	$w_1$	$P_{cr}$	$w_2$	$w_1$	$P_{cr}$	$w_2$	$w_1$	$w_1$		
N	Hz	Hz	N	Hz	Hz	N	Hz	Hz	N	Hz	Hz	Hz		
۱۶/۳۳	۵۱۲/۵۹	۸۲/۱۰	۱۶/۳۴	۵۱۴/۸۷	۸۲/۱۶	۱۶/۲۱	۵۰۶/۵۵	۸۲/۰۳	۱۶/۳۶	۵۱۳/۳۰	۸۲/۱۲	۷۹/۸۳	۰	
۱۶/۱۶	۵۱۰/۹۰	۸۱/۱۵	۱۶/۱۸	۵۱۱/۵۲	۸۱/۲۳	۱۵/۹۳	۵۰۸/۳۷	۸۰/۷۵	۱۶/۰۸	۵۰۹/۲۴	۸۱/۱۹	۷۸/۱۷	۰/۲	
۱۴/۸۵	۴۵۰/۵۸	۷۵/۳۳	۱۴/۸۸	۴۴۵/۷۹	۷۵/۴۴	۱۵/۰۸	۴۶۵/۳۷	۷۵/۹۹	۱۵/۰۵	۴۶۹/۰۲	۷۶/۴۸	۷۵/۳۸	۰/۴	
۱۲/۲۶	۳۵۰/۱۹	۶۵/۴۰	۱۲/۳۰	۳۱۷/۳۳	۶۵/۴۴	۱۲/۹۶	۳۶۵/۸۱	۶۶/۸۳	۱۲/۷۱	۳۶۹/۰۸	۶۷/۲۶	۶۶/۹۶	۰/۶	

جدول ۴: بسامدهای طبیعی صفحه تخت لولایی دارای جدایی لایه‌ای

Table 4. Natural frequencies of flat simply supported panel with delamination region

شرایط مرزی	$d/L$	فرمولاسیون	مود یک	مود دو	مود سه	مود چهار	مود پنج
کاملاً لولایی	۰	نظریه مرتبه اول برشی [۱۵]	۱۶۴/۳۷	۴۰۴/۳۸	۴۹۲/۲۹	۶۵۸/۴۰	۸۵۴/۱۷
		نوار محدود کلاسیک	۱۶۵/۵۷	۴۰۳/۳۵	۴۹۸/۳۳	۶۵۷/۹۰	۸۳۹/۶۸
		نوار محدود مرتبه بالای برشی	۱۶۵/۶۳	۴۰۶/۰۶	۴۹۶/۶۰	۶۵۸/۸۱	۸۵۳/۵۶
	۰/۳۳	نظریه مرتبه اول برشی [۱۵]	۱۶۴/۰۷	۳۸۱/۹۴	۴۴۳/۰۴	۶۵۲/۶۵	۸۲۸/۱۵
		نوار محدود کلاسیک	۱۶۳/۱۹	۳۷۳/۳۳	۴۳۲/۳۹	۶۴۱/۶۰	۷۵۵/۵۱
		نوار محدود مرتبه بالای برشی	۱۶۳/۴۰	۳۶۰/۵۳	۴۱۲/۳۷	۶۳۸/۶۴	۷۹۸/۶۰
	۰/۵۰	نظریه مرتبه اول برشی [۱۵]	۱۶۱/۵۸	۳۴۸/۲۷	۳۷۱/۱۹	۶۳۷/۴۸	۷۰۴/۷۲
		نوار محدود کلاسیک	۱۵۶/۴۵	۳۱۸/۵۲	۳۲۷/۲۰	۴۷۷/۰۰	۵۷۵/۶۷
		نوار محدود مرتبه بالای برشی	۱۵۷/۲۵	۲۸۷/۱۴	۳۰۰/۰۹	۴۹۰/۸۶	۵۵۳/۹۴

جدول ۵: بسامدهای طبیعی صفحه تخت گیردار دارای جدایی لایه‌ای

Table 5. Natural frequencies of flat clamped panel with delamination region

شرایط مرزی	$d/L$	فرمولاسیون	مود یک	مود دو	مود سه	مود چهار	مود پنج
کاملاً گیردار	۰	نظریه مرتبه اول برشی [۱۵]	۳۴۶/۵۹	۶۵۱/۵۱	۷۸۱/۰۶	۱۰۱۷/۲۰	۱۱۹۵/۴۰
		نوار محدود کلاسیک	۳۵۳/۲۸	۶۶۸/۳۱	۷۷۹/۷۰	۹۹۳/۷۵	۱۲۰۳/۰۴
		نوار محدود مرتبه بالای برشی	۳۵۴/۱۷	۶۸۱/۴۰	۷۷۴/۳۴	۱۰۰۰/۶۳	۱۲۴۹/۲۵
	۰/۳۳	نظریه مرتبه اول برشی [۱۵]	۳۴۲/۲۵	۶۰۲/۱۲	۶۷۰/۳۸	۹۹۷/۷۷	۱۱۱۵/۳۰
		نوار محدود کلاسیک	۳۳۵/۱۷	۵۷۵/۶۱	۶۳۶/۰۱	۹۱۶/۱۸	۹۵۵/۲۲
		نوار محدود مرتبه بالای برشی	۳۳۸/۰۸	۵۵۲/۶۰	۶۰۴/۷۵	۹۳۲/۶۹	۱۰۲۲/۳۳
	۰/۵۰	نظریه مرتبه اول برشی [۱۵]	۳۳۴/۶۷	۵۷۹/۴۳	۶۵۳/۲۵	۸۵۱/۲۷	۱۰۷۴/۰۷
		نوار محدود کلاسیک	۲۶۹/۳۷	۴۶۴/۸۷	۴۸۷/۴۲	۶۷۰/۴۶	۷۷۶/۳۹
		نوار محدود مرتبه بالای برشی	۲۷۵/۷۷	۴۵۲/۴۰	۴۶۴/۶۱	۶۸۹/۲۳	۷۶۱/۲۱

جدول ۶: بسامدهای طبیعی صفحه تخت لولایی دارای جدایی لایه‌ای

Table 6. Natural frequencies of flat simply supported panel with delamination region

موقعیت جدایی لایه‌ای	فرمولاسیون	مود یک	مود دو	مود سه	مود چهار	مود پنج
بدون جدایی	نظریه مرتبه اول برشی [۱۵]	۳۴۶/۵۹	۶۵۱/۵۱	۷۸۱/۰۶	۱۰۱۷/۲۰	۱۱۹۵/۴۰
	نوار محدود مرتبه بالای برشی	۳۵۴/۱۷	۶۸۱/۴۰	۷۷۴/۳۴	۱۰۰۰/۶۳	۱۲۴۹/۲۵
موقعیت ۱	نظریه مرتبه اول برشی [۱۵]	۳۴۲/۲۵	۶۰۲/۱۲	۶۷۰/۳۸	۹۹۷/۷۷	۱۱۱۵/۳۰
	نوار محدود مرتبه بالای برشی	۳۳۸/۰۸	۵۵۲/۶۰	۶۰۴/۷۵	۹۳۲/۶۹	۱۰۲۲/۳۳
موقعیت ۲	نظریه مرتبه اول برشی [۱۵]	۳۴۲/۶۹	۶۰۸/۷۸	۶۷۳/۱۴	۱۰۰۰/۸۰	۱۱۶۱/۳۰
	نوار محدود مرتبه بالای برشی	۳۳۹/۷۸	۵۹۲/۲۵	۶۱۵/۷۹	۹۴۲/۶۷	۱۱۰۳/۵۰
موقعیت ۳	نظریه مرتبه اول برشی [۱۵]	۳۴۱/۱۰	۶۱۳/۶۴	۷۰۰/۸۴	۱۰۰۷/۸۰	۱۱۸۳/۷۰
	نوار محدود مرتبه بالای برشی	۳۴۲/۱۵	۶۰۱/۹۴	۶۷۳/۳۵	۹۴۸/۴۸	۱۱۶۱/۶۹
موقعیت ۴	نظریه مرتبه اول برشی [۱۵]	۳۴۱/۲۵	۶۴۷/۰۲	۷۰۶/۲۹	۱۰۱۰/۲۰	۱۱۹۰/۷۰
	نوار محدود مرتبه بالای برشی	۳۴۲/۸۲	۶۴۳/۷۱	۶۸۱/۸۵	۹۶۳/۲۴	۱۱۹۸/۰۰

۴-۳- تغییرات پیش بار استاتیکی ( $a^s$ )

همان نمونه در شرایط مرزی کاملاً گیردار در شرایط مختلف بارگذاری مورد تحلیل قرار گرفته است. فرض شده است بارگذاری ثابت با ضریب ۰/۲، ۰/۴، ۰/۶، ۰/۸ و ۱/۰ نسبت به بار بحرانی کمانش بر روی مدل وجود دارد و بارگذاری متغیر زمانی به آن اضافه می‌شود. نواحی ناپایداری پارامتری مدل به ازای بسامدها و شدت‌های مختلف بارگذاری متغیر استخراج شده است که در نمودار شکل ۷ نمایش داده شده است.

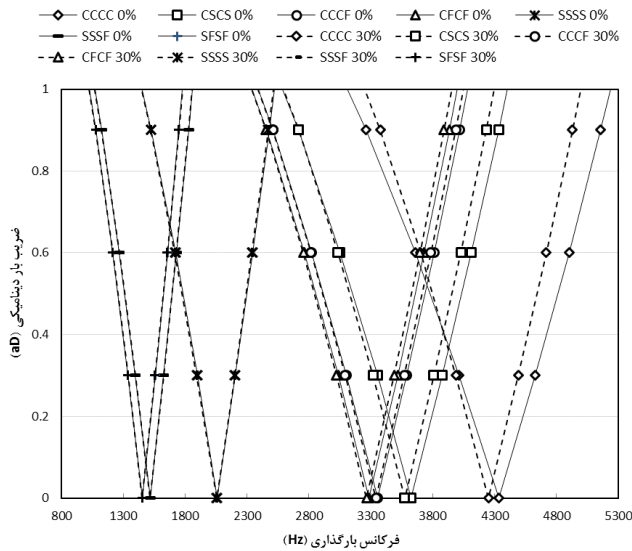


Fig. 6. Fundamental instability regions of laminated square panel with and without delamination region in different end conditions

شکل ۶: نواحی اصلی ناپایداری پارامتری پنل مربعی چند لایه با و بدون جدایی لایه‌ای در شرایط مرزی مختلف

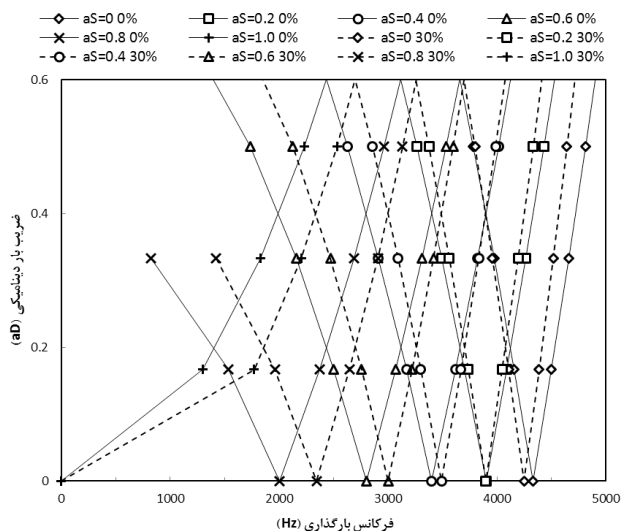


Fig. 7. Fundamental instability region of clamped square laminated plate with and without delamination zone subjected to various static pre-stresses

شکل ۷: محدوده اصلی ناپایداری پنل مربعی چند لایه کاملاً گیردار، با و بدون جدایی لایه‌ای در شرایط پیش بار مختلف

جدول ۷: بار بحرانی کمانش پنل مربعی چند لایه با و بدون جدایی لایه‌ای در شرایط مرزی مختلف، MPa

Table 7. Fundamental critical buckling load of square laminated panel with and without delamination in different boundary conditions (MPa)

شرایط مرزی	بدون ناحیه جدایش	جدایش با اندازه ۳۰ درصد
CCCC	۳۲/۶۸	۲۵/۹۶
CSCS	۲۳/۳۹	۲۱/۳۱
CCCF	۲۰/۰۹	۱۹/۵۲
CFCF	۱۹/۲۷	۱۸/۵۱
SSSS	۹/۷۰	۹/۶۵
SSSF	۵/۲۷	۵/۲۶
SFSF	۴/۸۴	۴/۸۳

جدول ۸: بسامد طبیعی اصلی پنل مربعی چند لایه با و بدون جدایی لایه‌ای در شرایط مرزی مختلف، Hz

Table 8. Fundamental natural frequency of square laminated panel with and without delamination in different boundary conditions (Hz)

شرایط مرزی	بدون ناحیه جدایش	جدایش با اندازه ۳۰ درصد
CCCC	۲۱۶۶/۶۱	۲۱۲۵/۰۷
CSCS	۱۸۱۳/۴۵	۱۷۸۶/۹۳
CCCF	۱۶۷۹/۱۳	۱۶۷۰/۴۶
CFCF	۱۶۴۳/۹۸	۱۶۳۲/۳۳
SSSS	۱۰۲۹/۷۹	۱۰۲۶/۷۳
SSSF	۷۵۸/۹۱	۷۵۸/۰۰
SFSF	۷۲۷/۰۱	۷۲۶/۲۲

جدایی لایه‌ای در این اندازه اثر قابل توجهی بر آثار شرایط مرزی نداشته است و تأثیر شرایط مرزی مهم‌تر بوده است. تأثیر ایجاد جدایی لایه‌ای بر بسامد طبیعی نمونه از مقدار بیشینه حدود ۲ درصد پنل CCCC تا مقدار کمینه حدود ۰/۱ درصد برای نمونه SFSF مشاهده شده است. همچنین بار بحرانی کمانش پنل دارای جدایی لایه‌ای از حدود ۲۰ درصد تغییر برای نمونه CCCC تا مقدار کمینه حدود ۰/۲ درصد برای نمونه SFSF دچار تغییر شده است. مقایسه نتایج محدوده‌های ناپایداری دینامیکی نشان می‌دهد، ایجاد جدایی لایه‌ای باعث کاهش بسامد بارگذاری ناپایدارکننده و در عین حال بسته‌تر شدن محدوده ناپایداری می‌شود به شکلی که کاهش نیم‌زاویه دهانه برای نوع CCCC به ۱۶ درصد می‌رسد. این تغییرات برای شرایط مرزی کمتر مهارشده، کاهش می‌یابد و قابل صرف‌نظر می‌شود. علاوه بر این بررسی‌ها نشان داد که تغییر شرایط مرزی داخل صفحه تأثیری بر رفتار ناپایداری استاتیکی و دینامیکی مدل ندارد و رفتار مدل تحت تأثیر شرایط مرزی خارج از صفحه قرار دارد.



## منابع

- [1] V.V. Bolotin, *The dynamic stability of elastic systems*, Moscow: GITTL 1956. English translation. San Francisco: Holden-Day, 1964.
- [2] P.K. Parhi, S.K. Bhattacharyya, P.K. Sinha, Hygrothermal Effects on the Dynamic Behavior of Multiple Delaminated Composite Plates And Shells, *J Sound Vibration*, 248(2) (2001) 195-214.
- [3] N. Hu, H. Fukunaga, M. Kameyama, K. Aramaki, F.K. Chang, Vibration analysis of delaminated composite beams and plates using a higher-order finite element, *International journal of mechanical sciences*, 44 (2002) 1479-1503.
- [4] J. Yang, Y. Fu, Analysis of dynamic stability for composite laminated cylindrical shells with delaminations, *Composite structures*, 78 (2007) 309-315.
- [5] J. Mohanty, S.K. Sahu, P.K. Parhi, Parametric instability of delaminated composite plates subjected to periodic in-plane loading, *Journal of vibration and control*, 21(3) (2015) 419-434.
- [6] H.R. Ovesy, J. Fazilati, M.R. Mahmoudabadi, Finite strip buckling and free vibration analysis of laminated composite plates containing delamination using a first order layerwise theory, in: *Proceedings of the 12th international conference on computational structures technology*, Tehran, (2014).
- [7] H.R. Ovesy, A. Totounferoush, S.A.M. Ghannadpour, dynamic buckling analysis of delaminated composite plates using semi-analytical finite strip method, *Journal of sound and vibration*, 343 (2015) 131-143.
- [8] J. Fazilati, H.R. Ovesy, Dynamic instability analysis of composite laminated thin-walled structures using two versions of FSM, *Composite structures*, 92(9) (2010) 2060-2065.
- [9] H.R. Ovesy, J. Fazilati, Parametric instability analysis of moderately thick FGM cylindrical panels using FSM", *Computers and structures*, 108-109 (2012) 135-143.
- [10] H.R. Ovesy, J. Fazilati, buckling and free vibration finite strip analysis of composite plates with cutout based on two different modeling approaches, *Composite Structures*, 94(3) (2012) 1250-1258.
- [11] J. Fazilati, H.R. Ovesy, Parametric instability of laminated longitudinally stiffened curved panels with cutout using higher order FSM, *Composite Structures*, 95 (2013) 691-696.
- [12] H. Foroughi, M. Azhari, Mechanical buckling and free vibration of thick functionally graded plates resting on elastic foundation using the higher order B-spline finite strip method, *Meccanica*, 49 (2014) 981.

با افزایش ضریب بار استاتیکی محدوده ناپایداری به سمت بسامدهای پایین تر تغییر موقعیت داده است و همزمان اندازه آن نیز بزرگ تر شده است. نکته مورد توجه برای مقدار بار استاتیکی برابر با بار کمانش مدل ( $a^s=1$ ) اتفاق افتاده است. مطابق محدوده ناپایداری محاسبه شده، حتی برای این حالت که سازه در شرایط کمانش استاتیکی است، اعمال بارگذاری دینامیکی به سازه توانسته است در محدوده بسامدی مشخصی (خارج از محدوده ناپایداری داخل مخروط) شرایط پایداری را در سازه ایجاد نماید. نکته مهم دیگر در این زمینه تغییر رفتار مقایسه‌ای پل دارای جدایی لایه‌ای نسبت به پل بدون نقص است تا ضریب بار استاتیکی حدود  $0/2$  محدوده بسامدی ناپایداری پل بدون نقص بالاتر از محدوده بسامدی ناپایداری پل دارای جدایی لایه است. به عبارت دیگر وضعیت پل دارای جدایی لایه‌ای بحرانی تر است؛ اما با افزایش ضریب بار استاتیکی این رابطه معکوس شده است و پل بدون نقص نسبت به نوع دارای جدایی لایه‌ای، وضعیت بحرانی تری دارد.

## ۵- جمع بندی

رفتار دینامیکی پل ساخته شده از مواد مرکب لایه‌ای دارای محدوده جدایی لایه‌ای و مواجه با تحریک دینامیکی انتهایی داخل صفحه مورد بررسی قرار گرفته است. مسأله کمانش استاتیک، بسامدهای طبیعی و نیز ناپایداری پارامتری مدل بررسی شده است. تحریک مکانیکی به صورت تنش توزیع شده در کل مدل مفروض است و رفتار دینامیکی مدل با استفاده از فرمولاسیون توسعه یافته نوار محدود بر پایه اصل کار مجازی و با استفاده از نظریه مرتبه سوم برش عرضی با استفاده از تقریب مرتبه اول بولوتین استخراج شده است. اثرات تغییر در بارگذاری و قيود مرزی بر مشخصات پایداری مدل بررسی شده است. در تحلیل فرض شده است پل پیش از تحریک شامل محدوده جدایی لایه‌ای باشد و رشد ترک جدایی لایه‌ها مدنظر نبوده است. همچنین اثرات اصطکاک و تماس بین دو سطح جدایی لحاظ نشده است. نتایج حاصل از فرمولاسیون توسعه داده شده نوار محدود اسپلین رفتار پل دارای جدایی را به ویژه در مودهای اول و به ویژه برای اندازه نواحی جدایی کمتر از یک دوم (نسبت وجه ناحیه جدایی به وجه پل) با دقت خوب پیش‌بینی کرده است. فرضیات مورد استفاده در فرمولاسیون ارائه شده نتوانسته است پایداری پل با اندازه ناحیه جدایی بزرگ را با دقت مناسب پیش‌بینی نماید و لازم است اثرات تماسی نیز به آن افزوده شود. همچنین نتایج نشان می‌دهد با بروز جدایی لایه‌ای، محدوده ناپایداری پارامتری به سمت بسامدهای کم‌تر تغییر موقعیت می‌دهد؛ اما میزان این تغییر وابسته به شدت اعمال شرایط مرزی خارج از صفحه است. همچنین برای اندازه‌های پیش‌بار بزرگ پل دارای جدایی محدوده پایداری بهتری (ناپایداری در بسامدهای بالاتر) دارد.

- approach, *International journal of solids and structures*, 39 (2002) 1949–1965.
- [15] F. Ju, H.P. Lee, K.H. Lee, Finite element analysis of free vibration of delaminated composite plates, *Composites engineering*, 5(2) (1995) 195-209.
- [13] M.-H.H. Shen, J.E. Grady, Free vibrations of delaminated beams, *AIAA Journal*, 30(5) (1992) 1361-1370.
- [14] A.G. Radu, A. Chattopadhyay, Dynamic stability analysis of composite plates including delaminations using a higher order theory and transformation matrix

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

J. Fazilati, Dynamic Behavior Analysis of Moderately Thick Composite Laminated Plates Containing Square Delamination Using Spline-Finite Strip Method, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 50(1) (2018) 63-72.

DOI: 10.22060/mej.2016.792

