



## مدلسازی جابه‌جایی آزاد نانوسیال اکسید آلومینیم-آب درون محفظه مربعی منحنی با استفاده از روش شبکه‌ای بولتزمن

مهدی حسینی آبادشاپوری، محمد حسن سعیدی\*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۲۸ مهر ۱۳۹۴  
بازنگری: ۱۹ بهمن ۱۳۹۴  
پذیرش: ۹ اسفند ۱۳۹۴  
ارائه آنلاین: ۲۳ مرداد ۱۳۹۵

### کلمات کلیدی:

جابجایی آزاد  
نانوسیال  
روش شبکه‌ای بولتزمن  
عدد ناسلت متوسط  
مرز منحنی

**چکیده:** در پژوهش حاضر جابجایی آزاد نانوسیال آب و اکسید آلومینیم در یک محفظه مربعی با مرزهای منحنی در قسمت بالا و پایین محفظه، به روش شبکه‌ای بولتزمن مورد مطالعه قرار گرفته است. برای حل معادلات سرعت و دما از روش نه‌سرعت (D2Q9) استفاده شده است. همچنین برای بررسی تاثیر اندازه نانوذرات بر عدد ناسلت متوسط جریان، از روش دوجزیی استفاده شده است و برای هر جز (آب و نانوذرات) معادلات جداگانه‌ای حل شده است. دو نیروی بویانسی و پسا برای کوپل کردن معادلات دو جزء در نظر گرفته شده است. در این پژوهش، عدد رایلی از  $10^2$  تا  $10^6$  متغیر است در حالی که اندازه نانوذرات سه مقدار مختلف ۲۰، ۵۰ و ۱۰۰ نانومتر را می‌پذیرد. کسر حجمی نانوذرات بین ۰ تا ۵ درصد متغیر می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که نقش نانوذرات در افزایش عدد ناسلت متوسط جریان به صورت افزایش عدد رایلی موثر جریان در کانتورهای دما و جریان قابل مشاهده می‌باشد. همچنین با استفاده از روش دوجزیی، امکان تحلیل عددی تاثیر اندازه نانوذرات بر روی عدد ناسلت متوسط جریان حاصل می‌گردد. نتایج حاکی از آن است که اندازه نانوذرات تاثیر معکوسی بر روی عدد ناسلت جریان دارد. در انتها، براساس نتایج به دست آمده از مدلسازی، رابطه‌ای برای پیش‌بینی عدد ناسلت متوسط نانوسیال وابسته به عدد رایلی، کسر حجمی نانوذرات و اندازه نانوذرات ارائه شده است.

### ۱- مقدمه

بولتزمن روش‌هایی برای مدلسازی جریان سیال و نیز بسیاری فرآیندهای ماکروسکوپی دیگر که از طریق معادلات دیفرانسیلی قابل توصیف باشند، هستند. این روش‌ها با روش‌های دینامیک مولکولی از یک سو و نیز با روش‌های مبتنی بر گسسته‌سازی معادلات پاره‌ای (نظیر روش‌های تفاضل محدود، حجم محدود و المان محدود) از سوی دیگر متفاوت می‌باشند [۳]. علاوه بر این، استفاده از روش شبکه‌ای بولتزمن در کنار سادگی اعمال روابط و شرایط مرزی، این امکان را نیز فراهم می‌آورد تا نتایج در اندازه مش‌های کمتر در مقایسه با روش‌های عددی مرسوم و نیز با سرعت همگرایی بالاتر به دست آید [۴]. به همین دلیل در مقاله حاضر از روش شبکه‌ای بولتزمن برای مدلسازی استفاده شده است.

استفاده از نانوسیالات در مقایسه با سیال پایه امکان افزایش انتقال حرارت را برای سیستم‌های حرارتی فراهم می‌سازد. دشمن‌زیاری و همکاران [۱] در یک بررسی تجربی با استفاده از نانوذرات اکسید آلومینیوم و آب نشان دادند که استفاده از نانوذرات سبب افزایش نرخ انتقال حرارت کلی تا ۱۴ درصد می‌گردد. آنها در این پژوهش سه درصد حجمی ۰/۵، ۱ و ۱/۵ درصد را مورد مطالعه قرار دادند. تحقیقات متعدد تجربی که امکان بهبود رسانایی حرارتی به کمک نانوسیالات را نشان داد، محققان را برآن داشت تا برای ارائه مدل‌های بهتر و نیز بررسی متنوع‌تر این نوع از سیالات به مدلسازی عددی روی بیاورند. پنگ و همکاران [۲] با در نظر گرفتن مواردی نظیر جابجایی در مقیاس نانو و نانولایه سیال در اطراف نانوذرات مدلی را برای توضیح رفتار نانوسیالات ارائه نمودند و نشان دادند که امکان افزایش ضریب هدایت حرارتی نانوسیال تا ۶۴/۴ درصد نسبت به سیال پایه وجود دارد. از آنجا که بهبود رسانایی ناشی از فرآیندهایی در مقیاس نانوذرات معلق می‌باشد، روش‌های عددی که مبتنی بر این اندازه‌ها و مکانیزم‌های حاکم بر آن هستند امکان توفیق بیشتری دارند. در این میان، روش‌های دینامیک مولکولی و شبکه‌ای بولتزمن دارای اهمیت بیشتری می‌باشند و بیشتر مورد استفاده قرار گرفته‌اند. روش‌های سلول خودکار شبکه‌ای گاز و شبکه‌ای

ابونادا و همکاران [۵] روشی عددی را برای مدلسازی جریان و انتقال حرارت نانوسیالات درون یک محفظه نیمه‌پر از نانوسیال که دارای گرمکن بود، ارائه کردند. در این روش عدد رایلی بین  $10^3$  تا  $10^5$  و کسر حجمی نانوذرات بین ۰ تا ۹ درصد متغیر بود. آن‌ها گزارش کردند که مهمترین پارامتر موثر در نتایج اندازه و محل گرمکن می‌باشد. ژو و همکاران [۶] با استفاده از روش هیبریدی شبکه‌ای بولتزمن به بررسی جریان و انتقال حرارت در نانوسیالات پرداختند. در این روش، هندسه به دو بخش تقسیم می‌گردد که در بخش اول (با گرادیان‌های بالا) با مش ریز، روش شبکه‌ای بولتزمن دوفازی استفاده می‌گردد درحالی‌که در بخش دوم با مش درشت‌تر، معادلات بولتزمن تک‌فازی (با مشخصات و خواص میانگین‌گیری شده) حل

محققان در زمینه مناسب و یا نامناسب بودن استفاده از نانوذرات برای افزایش نرخ انتقال حرارت وجود دارد و عمده این تفاوت‌ها ناشی از اندازه نانوذرات و مشخصه‌های نانوسیال مورد مطالعه می‌باشد.

یکی از محدودیت‌های اکثر پژوهش‌هایی که در زمینه مدلسازی نانوسیالات به روش شبکه‌ای بولتزن انجام شده است [۷-۱۵]، مدلسازی همگن و تک‌فاز جریان بدون در نظر گرفتن فرآیندهای انتقال در مقیاس نانو می‌باشد. در این مدل، دو جزء به صورت همگن در نظر گرفته می‌شوند و بنابراین خواص نانوسیال نظیر چگالی و هدایت حرارتی با استفاده از خواص سیال پایه و نانوذرات تخمین زده می‌شوند. در مورد چگالی، این تخمین غالباً به صورت یک میانگین‌گیری وزنی با استفاده از کسر حجمی نانوذرات می‌باشد و مهم‌تر از همه در زمینه هدایت حرارتی، رابطه‌ای که عمدتاً استفاده شده است، رابطه ماکسول-گارنت [۱۸] و یا رابطه هیلتون-کراسر [۱۹] می‌باشد. اما نشان داده شده است که این روابط می‌توانند سبب بروز خطای قابل ملاحظه در نتایج گردند [۱۶].

می‌توان عدد ناسلت متوسط نانوسیال را برای یک جریان جابجایی آزاد به شکل زیر تعریف نمود [۲۰]:

$$Nu_{ave} = F \left( Ra, Pr, \phi, d, \frac{k^{np}}{k^f}, \frac{\rho^{np} c_p^{np}}{\rho^f c_p^f} \right) \quad (1)$$

که در رابطه فوق،  $Ra$  عدد رایلی،  $Pr$  عدد پراتل،  $\phi$  کسر حجمی نانوذرات،  $d$  قطر نانوذرات،  $k$  هدایت حرارتی،  $\rho$  چگالی و  $c_p$  ظرفیت ویژه گرمایی می‌باشد. بالانویس  $f$  مربوط به سیال و  $np$  مربوط به نانوذرات می‌باشد. لازم به ذکر است که عدد ناسلت برای نانوسیالات می‌تواند وابسته به شکل ذرات (در صورت غیرکروی بودن) و نیز مشخصات هندسی و شرایط مرزی سیستم نیز باشد که این موارد به پیچیدگی بررسی نانوسیالات می‌افزاید. با توجه به رابطه (۱)، یکی از پارامترهای موثر در زمینه بررسی نانوسیالات، اندازه نانوذرات می‌باشد. همانطور که پیشتر اشاره شد، عمده پژوهش‌های مبتنی بر روش شبکه‌ای بولتزن برای نانوسیالات از روش تک‌جزیی بهره می‌برند [۷-۱۵]. برای بررسی اثر اندازه نانوذرات باید نیروهای خارجی وابسته به اندازه ذرات در معادلات مربوط به نانوذرات قید گردند. از آنجاکه این مدل‌ها تک‌جزیی می‌باشند و برای هر دو جزء نانوذرات و سیال پایه تنها یک معادله مشترک حل می‌گردد، امکان در نظر گرفتن این نیروها وجود ندارد و به همین دلیل از این نیروها در مطالعات صرف‌نظر شده است. اما در روش دو جزیی می‌توان نیروها را به صورت مستقل به هر جزء اعمال نمود و اثر پارامتر اندازه نانوذرات را مورد بررسی قرار داد.

در مقایسه با مدلسازی تک‌جزیی، در زمینه مدلسازی دو جزیی نانوسیالات تحقیقات زیادی انجام نشده است. ژوان و یائو [۲۱] مدل دو جزیی را برای نانوسیالات ارائه نمودند. در این مدل، چهار نیروی خارجی در نظر گرفته شد که عبارتند از: بویانسی، براونی، پتانسیل بین نانوذرات و پسا. کی و همکاران [۲۲] براساس این مدل به بررسی نانوسیالات در جابجایی آزاد پرداختند. آنها نشان دادند که اضافه کردن نانوذرات به سیال می‌تواند به بهبود مشخصات

می‌گردد. ایده اولیه استفاده از چنین روشی برای نانوسیالات از مقایسه اندازه و کسر حجمی کوچک نانوذرات در مقایسه با سیال به وجود آمده است. آنها نشان دادند که استفاده از این روش می‌تواند هزینه‌های محاسباتی را کاهش دهد. کفایتی و همکاران [۷] به بررسی عددی نانوسیال حاوی آب و اکسید سیلیسیم به روش شبکه‌ای بولتزن پرداختند. آنها اثر این نانوسیال را در جابجایی طبیعی در محفظه‌های با نسبت منظر بین ۰/۵ تا ۲ و اعداد رایلی بین ۱۰<sup>۳</sup> تا ۱۰<sup>۵</sup> مورد بررسی قرار دادند. کفایتی [۸] به بررسی اثر میدان مغناطیسی بر روی جابجایی طبیعی نانوسیال حاوی آب و نانوذرات مس در یک حفره مگنتوهیدرودینامیک و با توزیع دمای سینوسی بر روی یک دیواره پرداخت. نعمتی و همکاران [۹] به بررسی نانوسیالات درون یک حفره پرداختند. در این پژوهش اثر نوع نانوذرات مس، اکسید مس و اکسید آلومینیم بررسی شده است. آنها گزارش دادند که اثر کسر حجمی نانوذرات برای مس بیشترین و برای اکسید آلومینیم کمترین می‌باشد. لای و ینگ [۱۰] مدلی برای انتقال حرارت جابجایی نانوسیال اکسید آلومینیم و آب ارائه نمودند. نتایج آنها نشان می‌داد که عدد ناسلت متوسط با افزایش عدد رایلی و کسر حجمی ذرات افزایش می‌یابد. گو و همکاران [۱۱] به مدلسازی انتقال حرارت نانوسیالات در جابجایی طبیعی درون یک محفظه مربعی پرداختند. آنها نتیجه گرفتند که ناسلت متوسط برای نانوسیال در مقایسه با سیال پایه (آب)، در اعداد رایلی‌های مختلف متفاوت است. ینگ و لای [۱۲] از روش شبکه‌ای بولتزن برای مدلسازی نانوذرات درون یک میکروکانال در اعداد رینولدز پایین استفاده نمودند. آنها در تحقیقات خود به دو نکته اشاره کردند. استفاده از نانوذرات درون میکروکانال سبب می‌گردد که توزیع دما نسبت به حالت استفاده از سیال پایه یکنواخت‌تر گردد و همچنین افزایش کسر حجمی و عدد رینولدز منجر به افزایش عدد ناسلت می‌گردد. ژو و همکاران [۱۳] به مدلسازی جابجایی آزاد نانوسیالات با استفاده از روش شبکه‌ای بولتزن در اعداد رایلی پایین پرداختند و نتیجه گرفتند که با افزایش عدد رایلی، عدد ناسلت نرمالایز شده، که نسبت عدد ناسلت نانوسیال به عدد ناسلت متوسط سیال پایه در عدد رایلی یکسان می‌باشد، کاهش می‌یابد. بارانیا و همکاران [۱۴] به بررسی نانوسیالات در جابجایی طبیعی درون یک محفظه مربعی پرداختند. آنها در میانه این محفظه المانی را در نظر گرفتند و در مدلسازی خود اثر زاویه و اندازه این المان را بررسی نمودند. آنها گزارش نمودند که استفاده از نانوذرات منجر به افزایش عدد ناسلت گردید. سجادی و همکاران [۱۵] با بهره‌گیری از روش شبکه‌ای بولتزن در یک محفظه مربعی نشان دادند که با افزایش عدد رایلی و کسر حجمی نانوذرات عدد ناسلت نرمالایز شده افزایش می‌یابد. مقایسه نتایج ژو و همکاران [۱۳] با نتایج تحقیقات سجادی و همکاران [۱۵] یکی از دلایل نیاز به تحقیق بیشتر در زمینه تاثیر نانوذرات را به خوبی روشن می‌سازد. این اختلاف در نتایج به دست آمده در نانوسیالات، محدود به این مورد نمی‌گردد و در موارد متعددی گزارش شده است [۱۶]. در این زمینه مطالعه عددی و تجربی انجام شده توسط حداد و همکاران [۱۷] نشان می‌دهد که تفاوت عمده‌ای در گزارش‌های ارائه شده توسط سایر

## ۲- هندسه مساله

هندسه استفاده شده در این مقاله، یک محفظه مربعی است که وجوه بالا و پایینی آن نیم دایره می‌باشند. شکل ۱ شماتیک هندسه استفاده شده را نشان می‌دهد. نسبت منظر، نسبت بین قطر نیم‌دایره‌ها و دیواره صاف، برابر با یک فرض شده است. وجوه کناری در دماهای بی‌بعد ثابت  $0.5$  و  $-0.5$  ثابت فرض شده‌اند درحالی‌که وجوه منحنی دارای شرط مرزی آدیاباتیک می‌باشند. در زمینه علت استفاده از این هندسه (هندسه دارای مرزهای منحنی) می‌توان به دو مورد کلی اشاره نمود: نخست، عمده سیستم‌های خنک‌کاری از نوع لوله‌ای با مرزهای منحنی می‌باشند و سیستم‌های مبتنی بر مرزهای کارترزینی نظیر کانال کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد و دوم، همانطور که در بخش مقدمه به آن اشاره شد، استفاده از روش شبکه‌ای بولتزمن در سیستم‌های با مرز منحنی با چالش‌هایی همراه است و بنابراین نیاز به تحقیق بیشتر در این زمینه برای ارائه راهکار و یا تعیین روش مناسب برای اعمال شرط مرزی وجود دارد. به همین منظور، در این مقاله از مرزهای منحنی در هندسه مورد مطالعه استفاده شده است و از میان روش‌های موجود، روشی که برای مساله حاضر دارای بهترین همخوانی و نتایج بوده است استفاده و گزارش شده است.

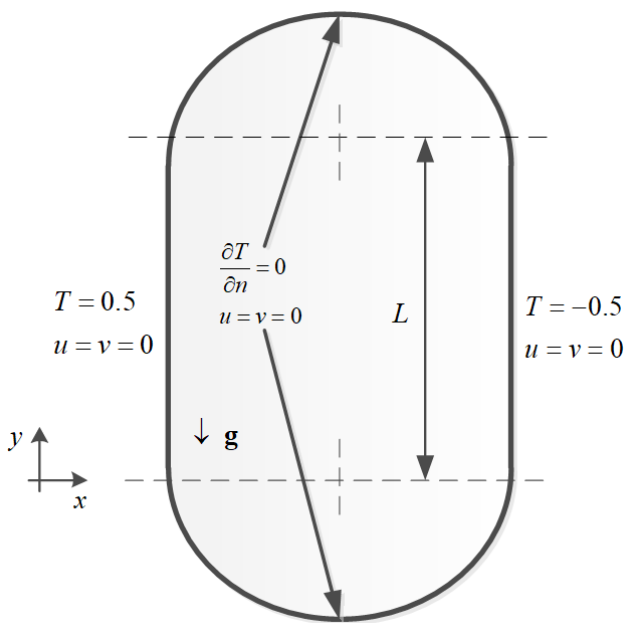


Fig. 1. Schematic diagram of the geometry used for the current simulation  
 شکل ۱: شماتیک هندسه استفاده شده در مساله حاضر

### ۲-۱- شرایط مرزی

برای شرط مرزی هیدرودینامیکی بر روی دیواره‌های جانبی، از شرط باونس‌بک استفاده شده است. برای افزایش دقت این روش، از مدلی که توسط پن و همکاران [۲۸] بر مبنای درون‌یابی مرتبه دوم می‌باشد، استفاده شده است.

با استفاده از این روش، دقت مرتبه دوم در اعمال شرط مرزی حاصل

حرارتی سیال پایه بیانجامد؛ هر چند در این زمینه اطلاعات کمی زیادی ارائه نکردند.

یکی از چالش‌های استفاده از روش شبکه‌ای بولتزمن، استفاده آن در هندسه دارای مرزهای غیر کارترزینی می‌باشد. عموماً روش شبکه‌ای بولتزمن در شبکه‌های کارترزینی اعمال شده است. در زمینه مرزهای منحنی نیز کارهایی طی سالیان اخیر ارائه شده است. ساده‌ترین روشی که برای در نظر گرفتن دیواره‌های منحنی در روش شبکه‌ای بولتزمن انجام می‌شود، تقریب پله‌ای آن با دیواره‌های کارترزینی می‌باشد [۲۳]. در این روش مقادیر تعادلی برای تابع توزیع در دیواره قرار داده می‌شود که در اعداد رینولدز بالا تقریب مناسبی نمی‌باشد. همچنین، این روش در مش‌های درشت چندان دقیق نمی‌باشد [۴]. روش‌های دیگر عمدتاً بر این پایه ارائه شده‌اند که تابع توزیع بر روی دیواره به صورت مجموع و یا میان‌یابی از مقادیر تابع توزیع تعادلی و غیر تعادلی فرض شده و برای هر یک از این ترم‌ها روابطی ارائه می‌گردد؛ روش برون‌یابی گو و ژنگ [۲۴] یکی از این روش‌ها می‌باشد. در این روش، بخش غیر تعادلی تابع توزیع برای نقطه روی مرز بر حسب فاصله‌ای که تا نقاط همجوار درون سیال دارد، برون‌یابی می‌گردد. سه روش دیگر توسط فلیپووا و هائل [۲۵] و می و همکاران [۲۶] و یان و زو [۲۷] ارائه گردید. در این روش‌ها، تابع توزیع بر روی دیواره به سه بخش تقسیم می‌گردد: تابع توزیع در نقطه سیال مجاور، تابع توزیع تعادلی مجازی و ترم سرعت ناشی از بسط چاپمن-انزکوگ تابع توزیع پس از ضربه. در هر یک از روش‌ها روابط متفاوتی برای محاسبه ترم‌های دوم و سوم ارائه شده است. مزیت روش‌های می و همکاران [۲۶] و یان و زو [۲۷] در مقایسه با روش فلیپووا و هائل [۲۵] در دقت مرتبه دوم روش آنها می‌باشد. علاوه بر این، روش یان و زو [۲۷] شامل بخشی مجزا برای مدلسازی معادله حرارتی نیز می‌باشد. در این مقاله نیز از روش ارائه شده توسط یان و زو [۲۷] استفاده شده است.

در این مقاله جریان و انتقال حرارت در جایجایی آزاد نانوسیال اکسید آلومینیم و آب در یک محفظه مربعی با مرزهای منحنی به روش شبکه‌ای بولتزمن در محدوده اعداد رایلی  $10^2$  تا  $10^6$  انجام شده است. برای غلبه بر محدودیت‌های پیشین، از روش دو جزئی برای مدلسازی استفاده شده است. یکی از نوآوری‌های مقاله حاضر در مقایسه با پژوهش‌های پیشین مطالعه کمی تاثیر اندازه نانوذرات بر انتقال حرارت نانوسیالات به روش شبکه‌ای بولتزمن می‌باشد. به این منظور، اندازه ذرات نانوسیال نیز تغییر داده شده و بین سه مقدار  $20$ ،  $50$  و  $100$  نانومتر متغیر می‌باشد. کسر حجمی نانوذرات نیز بین  $0.05$  تا  $0.2$  درصد متغیر می‌باشد. نوآوری دیگر مقاله مطالعه تاثیر حضور نانوذرات بر روی کانتورهای دما و خطوط جریان با استفاده از روش شبکه‌ای بولتزمن می‌باشد. در انتها اثر هر یک از پارامترها بر روی عدد ناسلت مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

برای شرط مرزی حرارتی دیواره‌های جانبی از رابطه آنتی-بانوس‌بک استفاده شده است [۲۹]. در این حالت مقدار مجهول بر روی دیواره از رابطه زیر برای هر جزء محاسبه خواهد شد:

$$h_{\bar{r}}(x_f, t_n + \Delta t) = -\tilde{h}_i(x_f, t_n) + 2\sqrt{3}\theta_w \quad (۴)$$

که در رابطه فوق  $\theta_w$  از دمای معلوم دیواره‌های جانبی به دست خواهد آمد.

همانطور که در بخش مقدمه ذکر گردید، شرط مرزی برای بخش منحنی براساس روش یان و زو [۲۷] انجام می‌گردد. شماتیکی از یک مرز منحنی در شکل ۲ نشان داده شده است. مطابق شکل ۲ اولین نقطه محاسباتی درون سیال در مجاورت مرز را  $x_f$  نقطه بعدی در راستای  $e_i$  را  $x_{ff}$  نقطه فرضی روی مرز را  $x_b$  و نقطه درون مرز جامد  $x_s$  نامیده می‌گردد. در واقع برای نقطه  $x_{ff}$  رابطه  $x_{ff} = x_f + e_i \Delta t$  برقرار می‌باشد. می‌توان مقدار پس از برخورد تابع توزیع را برای نقطه درون مرز جامد براساس بسط چابمن-انسکوگ از رابطه زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(x_s, t) = & \tilde{f}_i(x_f, t) - \chi [\tilde{f}_i(x_f, t) - f_i^{eq}(x_f, t)] + \\ & \omega_i \rho(x_f, t) \frac{3}{c^2} e_i \cdot [\chi(\mathbf{u}_{bf} - \mathbf{u}_f) - 2\mathbf{u}_w] \end{aligned} \quad (۵)$$

که در رابطه فوق،  $\mathbf{u}_{bf}$  سرعت مجازی برای میان‌یابی،  $\mathbf{u}_w$  سرعت دیواره،  $\mathbf{u}_f = \mathbf{u}(x_f, t)$  برابر با سرعت سیال در نقطه  $x_f$  و  $\chi$  یک پارامتر می‌باشد. توضیحات بیشتر در زمینه محاسبه مقادیر مجهول در رابطه فوق در مطالعه [۲۶] به تفصیل آمده است.

به طور مشابه برای شرط مرزی حرارتی نیز باید مقدار پس از برخورد تابع توزیع در نقطه درون جامد تعیین گردد. به این منظور می‌توان رابطه زیر را ارائه نمود [۲۶]:

$$\tilde{h}_i(x_s, t_n) = \tilde{h}_i^{eq}(x_s, t_n) + \left(1 - \frac{1}{\tau_h}\right) \tilde{h}_i^{neq}(x_s, t_n) \quad (۶)$$

برای هر دو بخش تعادلی و غیر تعادلی در رابطه بالا روابطی برحسب مقادیر دما، سرعت و نیز پارامتر  $\Omega$  ارائه شده است که جزییات روش محاسبه این مقادیر را می‌توان در مطالعات [۲۶ و ۲۷] مشاهده نمود.

### ۳- روش شبکه‌ای بولتزمن

روش تک‌زمان استراحت بی‌جی کی برای حل معادلات هیدرودینامیکی و حرارتی مطابق معادلات زیر در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است:

$$f_i^\sigma(x + e_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i^\sigma(x, t) - \frac{1}{\tau_f} (f_i^\sigma - f_i^{\sigma, eq}) \quad (۷)$$

$$h_i^\sigma(x + e_i \Delta t, t + \Delta t) = h_i^\sigma(x, t) - \frac{1}{\tau_h} (h_i^\sigma - h_i^{\sigma, eq}) \quad (۸)$$

که در رابطه فوق،  $f$  تابع توزیع هیدرودینامیکی،  $h$  تابع توزیع حرارتی،  $\tau_f$

می‌گردد. در این حالت پارامتر زیر برای آخرین نقطه مجاور دیواره مطابق شکل ۲ تعریف می‌گردد:

$$\Omega = \frac{|x_f - x_b|}{|x_f - x_s|} \quad (۲)$$

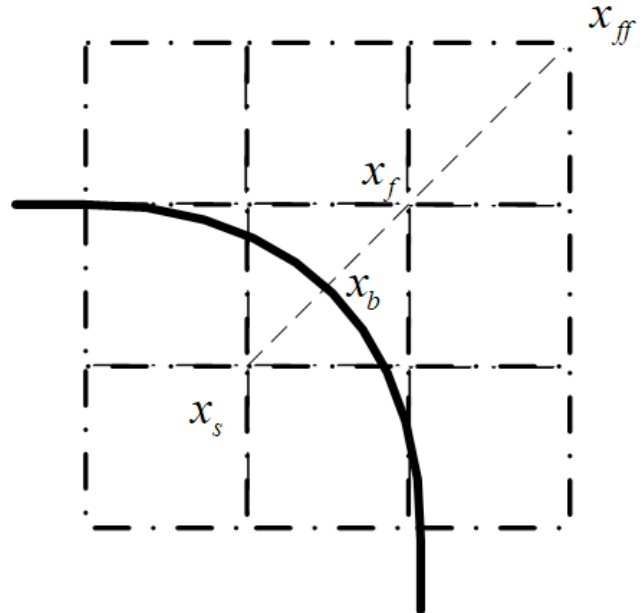


Fig. 2. Schematic configuration of computational nodes near a curved boundary

### شکل ۲: شماتیک نقاط محاسباتی در مجاورت یک مرز منحنی

البته لازم به ذکر است که شکل ۲ برای مرز منحنی ترسیم شده است اما در حالت مرز صاف نیز از پارامتر  $\Omega$  برای تعیین مقدار تابع توزیع استفاده شده است. با استفاده از پارامتر فوق و براساس روش درون‌یابی مرتبه دوم بانوس‌بک رابطه زیر برای یک دیواره سمت راست برقرار خواهد بود:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(x_f, t_n + \Delta t) = & \begin{cases} \Omega(1 + 2\Omega)\tilde{f}_i(x_f, t_n) + (1 - 4\Omega^2)f_i(x_f, t_n + \Delta t) - \\ \Omega(1 - 2\Omega)f_i(x_{west}, t_n + \Delta t) & \Omega < 0.5 \\ \frac{2\Omega - 1}{\Omega}\tilde{f}_i(x_f, t_n) + \frac{1}{\Omega(2\Omega + 1)}\tilde{f}_i(x_f, t_n) + \\ \frac{(1 - 2\Omega)}{(1 + 2\Omega)}\tilde{f}_i(x_{west}, t_n) & \Omega \geq 0.5 \end{cases} \end{aligned} \quad (۳)$$

که در رابطه فوق،  $x_f$  نقطه مجاور دیواره و  $x_{west}$  مربوط به همسایه غربی این نقطه می‌باشد. علامت بار بر روی اندیس  $i$  نشان‌دهنده جهت مخالف می‌باشد به این معنی که  $e_i = -e_i$ . در واقع برای نقاط محاسباتی درون محدوده سیال  $e_i$  در جهت نزدیک شدن به دیواره و  $e_i$  در جهت دور شدن از دیواره می‌باشد و برای نقاط جامد (که در بخش شرایط مرزی منحنی بیشتر مورد استفاده قرار خواهد گرفت) جهت‌ها برعکس خواهد بود. علامت مد نشان‌دهنده مقدار تابع توزیع پس از برخورد می‌باشد. رابطه مشابهی برای دیوار سمت چپ نیز برقرار است.

$$h_i^{\sigma,eq} = \omega_i \rho c_p T \left[ 1 + \frac{3}{c^2} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u} \right] \quad (15)$$

در اینصورت، رابطه زیر بین تابع توزیع حرارتی و دما می‌توان برقرار است [۲۱]:

$$\theta^\sigma = \sum_{i=0}^8 h_i^\sigma, T = \frac{\sum_{\sigma} \theta^\sigma}{\sum_{\sigma} \rho^\sigma c_p^\sigma} \quad (16)$$

که در رابطه بالا انرژی داخلی هر جزء می‌باشد.

#### ۴- مدلسازی نانوسیالات

در این مقاله از روش دو جزئی برای مدلسازی نانوسیال استفاده شده است. به این معنی که دو معادله یکی برای جزء سیال پایه و دیگری برای جزء نانوذرات استفاده شده است. از آنجاکه براساس رابطه (۱۰)، ضریب استراحت هیدرودینامیکی وابسته به ویسکوزیته سینماتیک می‌باشد و این متغیر برای نانوذرات وجود ندارد، از رابطه تجربی زیر برای تعیین ویسکوزیته سینماتیک سیال استفاده می‌گردد [۳۲] و برای محاسبه ضریب استراحت هر دو جزء مورد استفاده قرار خواهد گرفت:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho^f} = \frac{\mu^f [1 + 10.6\phi + (10.6\phi)^2]}{\rho^f} \quad (17)$$

که در رابطه بالا،  $\mu$  ویسکوزیته دینامیک می‌باشد. نشان داده شده است که رابطه فوق تا کسر حجمی معادل ۱۰ درصد حداکثر ۶ درصد خطا خواهد داشت [۳۲].

#### ۴-۱- نیروهای خارجی

یکی از ویژگی‌های مدلسازی حاضر در مقایسه با مدلسازی‌های پیشین که بر پایه روش تک جزئی می‌باشند، در نظر گرفتن نیروهای خارجی به صورت مجزا برای هر جزء می‌باشد. به این ترتیب این امکان فراهم می‌گردد تا اثر پارامتر اندازه نانوذرات در نتایج نهایی مورد مطالعه کمی قرار گیرد. در کنار نیروی پیشران حرارتی که ناشی از تغییرات چگالی سیال در جریان جابجایی آزاد است، چهار نیروی بویانسی، پسا، پتانسیل بین نانوذرات و براونی نیروهای مهم در این مدلسازی می‌باشند [۳۳]. هر چند براساس نتایج پیشین [۲۲]، از اثرات دو نیروی پتانسیل بین نانوذرات و براونی در مقایسه با نیروهای پسا و بویانسی صرف نظر می‌گردد. براساس تقریب بوزینسک، می‌توان نیروی پیشران در جریان جابجایی آزاد را به شکل زیر مدل نمود:

$$\mathbf{F}_T = \mathbf{g} \beta (T - \frac{T_h + T_c}{2}) \quad (18)$$

نیروی بویانسی نیز به دلیل اختلاف چگالی سیال و نانوذرات وجود دارد که از طریق رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

ضریب استراحت هیدرودینامیکی،  $\tau_h$  ضریب استراحت حرارتی،  $\Delta t$  گام زمانی،  $c_i$  سرعت‌های گسسته شده، بالانویس  $cq$  مربوط به حالت تعادل و بالانویس  $\sigma$  مربوط به هر جزء می‌باشد. در مقاله حاضر، از روش دوبعدی نه‌سرعت (D2Q9) برای معادلات هیدرودینامیکی و حرارتی استفاده شده است. به این ترتیب، سرعت‌های گسسته شده براساس رابطه زیر تعریف می‌گردند:

$$\mathbf{e}_i = \begin{cases} (0, 0) & i = 0, \\ c_s (\cos[(i-1)\pi/2], \sin[(i-1)\pi/2]) & i = 1-4, \\ c_s (\cos[(2i-9)\pi/4], \sin[(2i-9)\pi/4]) & i = 5-8 \end{cases} \quad (9)$$

که در رابطه فوق،  $c_s$  سرعت شبکه می‌باشد که از تقسیم گام مکانی به گام زمانی به دست می‌آید. ضرایب استراحت نیز براساس ویسکوزیته سینماتیک،  $\nu$  و ضریب نفوذ حرارتی،  $\alpha$  قابل تعریف می‌باشند:

$$\nu = \frac{(\tau_f - 1)}{2} c_s^2 \Delta t \quad (10)$$

$$\alpha = \frac{(\tau_h - 1)}{2} c_s^2 \Delta t \quad (11)$$

تابع توزیع تعادلی هیدرودینامیکی تابعی از چگالی و سرعت می‌باشد. یکی از فرم‌های متداول برای تابع توزیع تعادلی که در این مقاله استفاده شده است، به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$f_i^{\sigma,eq}(\rho, \mathbf{u}) = \rho \omega_i \left\{ 1 + \frac{3\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{9(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})^2}{2c_s^4} - \frac{3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^2}{2c_s^2} \right\} \quad (12)$$

که در رابطه بالا،  $\mathbf{u}$  بردار سرعت،  $\rho$  چگالی و  $\omega_i$  ضرایب وزنی می‌باشد. متغیرهای برداری بصورت پرننگ نشان داده شده‌اند. ضرایب وزنی استفاده شده در این مقاله به شرح زیر می‌باشند:

$$\omega_i = \begin{cases} 4/9 & i = 0, \\ 1/9 & i = 1-4, \\ 1/36 & i = 5-8 \end{cases} \quad (13)$$

ارتباط نیروهای خارجی با تابع توزیع هیدرودینامیکی هر جزء و نیز ارتباط بین تابع توزیع هیدرودینامیکی و خواص ماکروسکوپی از طریق رابطه زیر انجام می‌گیرد:

$$\rho^\sigma = \sum_{i=0}^8 f_i^\sigma, \rho^\sigma \mathbf{u}^\sigma = \sum_{i=0}^8 \mathbf{e}_i f_i^\sigma + \frac{\mathbf{F}^\sigma \Delta t}{2} \quad (14)$$

که در رابطه فوق،  $\mathbf{F}^\sigma$  بیانگر مجموع نیروهای خارجی وارد بر هر جزء می‌باشد. اعمال نیروهای خارجی طی دو مرحله انجام می‌شود. این مراحل به خوبی توسط دیگران شرح داده شده است [۳۰]. با استفاده از این روش می‌توان اطمینان داشت که نتایج دارای دقت مرتبه دوم خواهند بود [۳۱]. تابع توزیع تعادلی برای معادله حرارت نیز به شکل زیر تعریف می‌گردد:

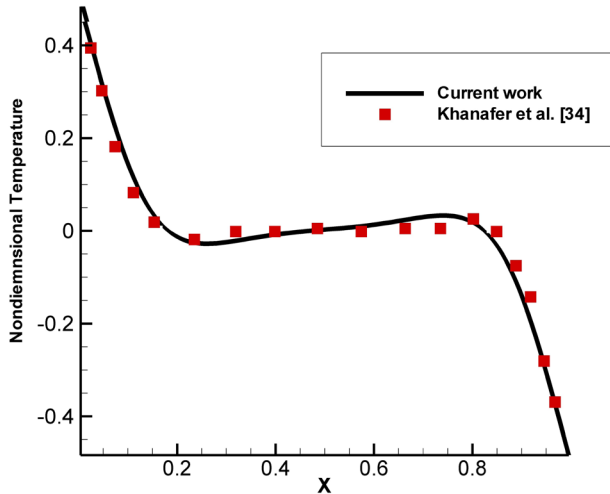


Fig. 3. Temperature variations on the mid line ( $Y=0.5$ ) of a square cavity in the natural convection at  $Ra = 10^5$

شکل ۳: توزیع دما بر روی خط میانی ( $Y=0.5$ ) یک محفظه مربعی در جریان جابجایی طبیعی در  $10^5$

مطابقت بالایی دارد.

علاوه بر این برای کنترل عدم تاثیرپذیری مدل از اندازه شبکه، ناسلت متوسط سیال خالص (آب) در یک محفظه مربعی ساده در عدد رایلی برابر با  $10^6$  برای چند شبکه مختلف محاسبه گردید که نتایج آن در جدول ۲ ارائه شده است. براساس این نتایج، برای شبکه با تعداد گره‌های بیش از ۴۵۰۰۰ تغییرات عدد ناسلت کمتر از ۰/۱ درصد می باشد و به همین دلیل از همین اندازه شبکه در محاسبات اخیر استفاده شده است.

جدول ۲: تغییرات عدد ناسلت متوسط در عدد رایلی  $10^6$  بر حسب تغییرات تعداد سلول‌های محاسباتی

Table 2. Variations of average Nusselt number at  $Ra = 10^6$  with respect to the number of computational nodes

تعداد سلول‌ها	$1 \times 10^5$	$2 \times 10^5$	$4/5 \times 10^5$	$6/4 \times 10^5$
$Nu_{ave}$	۸/۵۱۱	۸/۷۰۹	۸/۸۱۵	۸/۸۲۱

۵-۲- تاثیر کسر حجمی نانوذرات

شکل ۴ تغییرات خطوط جریان را برای دو کسر حجمی صفر و ۵ درصد نشان می‌دهد. نکته قابل توجه در این شکل، نوع تاثیر کسر حجمی نانوذرات بر روی خطوط جریان می‌باشد. با افزایش کسر حجمی نانوذرات از صفر تا پنج درصد در یک عدد رایلی ثابت و برای قطر نانوذره ثابت، خطوط جریان در حالت نانو سیال مشابه خطوط جریان برای سیال پایه در یک عدد رایلی بالاتر می‌باشد.

به بیان ساده‌تر، می‌توان اینچنین نتیجه گرفت که با افزایش کسر حجمی نانوذرات، جریان به سمت اعداد رایلی بالاتر حرکت می‌نماید و این امر در اعداد رایلی بالاتر مشهودتر می‌باشد.

برای بررسی دقیق‌تر موضوع خطوط دما ثابت بی‌بعد نیز برای کسر

$$F_\rho = \frac{1}{6} \pi d^3 g \Delta \rho \quad (19)$$

که در رابطه فوق،  $d$  قطر نانوذره و  $\Delta \rho$  اختلاف چگالی سیال و نانوذرات و  $g$  شتاب گرانش می‌باشد.

نیروی پسا نیز به شکل زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$F_D = -3\pi\mu d \Delta u \quad (20)$$

که در رابطه فوق،  $\mu$  لزجت دینامیک سیال و  $\Delta u$  اختلاف سرعت یک نانوذره در مقایسه با سیال احاطه‌کننده آن می‌باشد. در رابطه فوق از فرض استوکس استفاده شده است.

مجموع نیروی وارد بر هر جزء در نهایت از روابط زیر حاصل می‌گردد:

$$F^f = F_T^f - n F_D / V \quad (21)$$

$$F^{np} = F_T^{np} + n (F_D + F_\rho) / V \quad (22)$$

که در رابطه فوق  $n$  تعداد نانوذرات درون یک شبکه و  $V$  حجم آن شبکه می‌باشد. بالانویس  $f$  و  $np$  نیز به ترتیب بیانگر جزء سیال پایه و نانوذرات می‌باشد.

## ۵- بحث در نتایج

سیال عامل مورد استفاده در این پژوهش آب به همراه نانوذرات اکسید آلومینیوم می‌باشد. اندازه نانوذرات نیز در این پژوهش تغییر کرده و برابر با ۲۰، ۵۰ و ۱۰۰ نانومتر انتخاب شده است. همچنین جریان جابجایی طبیعی بین اعداد رایلی  $10^3$  تا  $10^6$  (مقدار) انتخاب شده است. کسر حجمی نانوذرات نیز بین ۱ تا ۵ درصد تغییر می‌نماید. برای آب و اکسید آلومینیوم مقادیر خواص مورد نیاز مطابق جدول ۱ انتخاب شده است.

جدول ۱: مقادیر خواص آب و نانوذرات اکسید آلومینیوم

Table 1. Thermal properties of liquid water and  $Al_2O_3$  nanoparticles

ماده	چگالی ( $kg/m^3$ )	ظرفیت گرمایی ویژه ( $kJ/kg.K$ )	ضریب انتقال حرارت هدایتی ( $W/m.K$ )	ضریب انبساط حجمی ( $1/K$ )
آب	۹۹۴/۰۵	۴/۱۸۲	۰/۶۰۱	$2/7 \times 10^{-4}$
$Al_2O_3$	۳۹۷۰	۰/۷۶۵	۴۰	$8/5 \times 10^{-6}$

۵-۱- صحت‌سنجی مدل

برای صحت‌سنجی مدل، مقایسه نتایج به دست آمده توسط خوانافر و همکاران [۳۴] در عدد رایلی  $10^5$  برای یک محفظه مربعی ساده با نتایج روش حاضر انجام شده است. شکل ۳ توزیع دمای بی‌بعد برای پژوهش حاضر و نیز مقایسه آن با نتایج خوانافر و همکاران [۳۴] را نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل دیده می‌شود، نتایج مدلسازی اخیر با نتایج پژوهش‌های گذشته

$$Nu^* |_{d=cons.} = f_1(\phi, Ra) \quad (۲۳)$$

که در رابطه فوق  $f_1$  یک تابع مجهول (عدد رایلی موثر) می‌باشد. برای تابع مجهول فوق می‌توان عبارت کلی زیر را پیشنهاد کرد:

$$f_1 \propto \phi^{q_1} Ra^{q_2} \quad (۲۴)$$

که در رابطه فوق،  $q_1$  و  $q_2$  ثابت می‌باشند.

وابستگی زیاد عدد ناسلت به عدد رایلی سبب می‌شود که تاثیر سایر پارامترهای موثر نظیر کسر حجمی نانوذرات و اندازه آنها به خوبی دیده نشود.

حجمی‌های صفر و پنج درصد در شکل ۵ ترسیم شده است. تاثیر حضور نانوذرات در این شکل در افزایش عدد رایلی جریان از شکل ۴ نیز مشهودتر می‌باشد. بنابراین می‌توان تابعی فرضی نظیر عدد رایلی موثر جریان را معرفی نمود که در حالتی که اندازه نانوذرات ثابت فرض گردد این عدد رایلی موثر تابعی از کسر حجمی نانوذرات و عدد رایلی جریان می‌باشد. این تابع فرضی کنترل‌کننده عدد ناسلت موثر جریان خواهد بود. در مجموع از بررسی نتایج به دست آمده، می‌توان رابطه کلی زیر را برای وابستگی عدد ناسلت به کسر حجمی ارائه نمود:

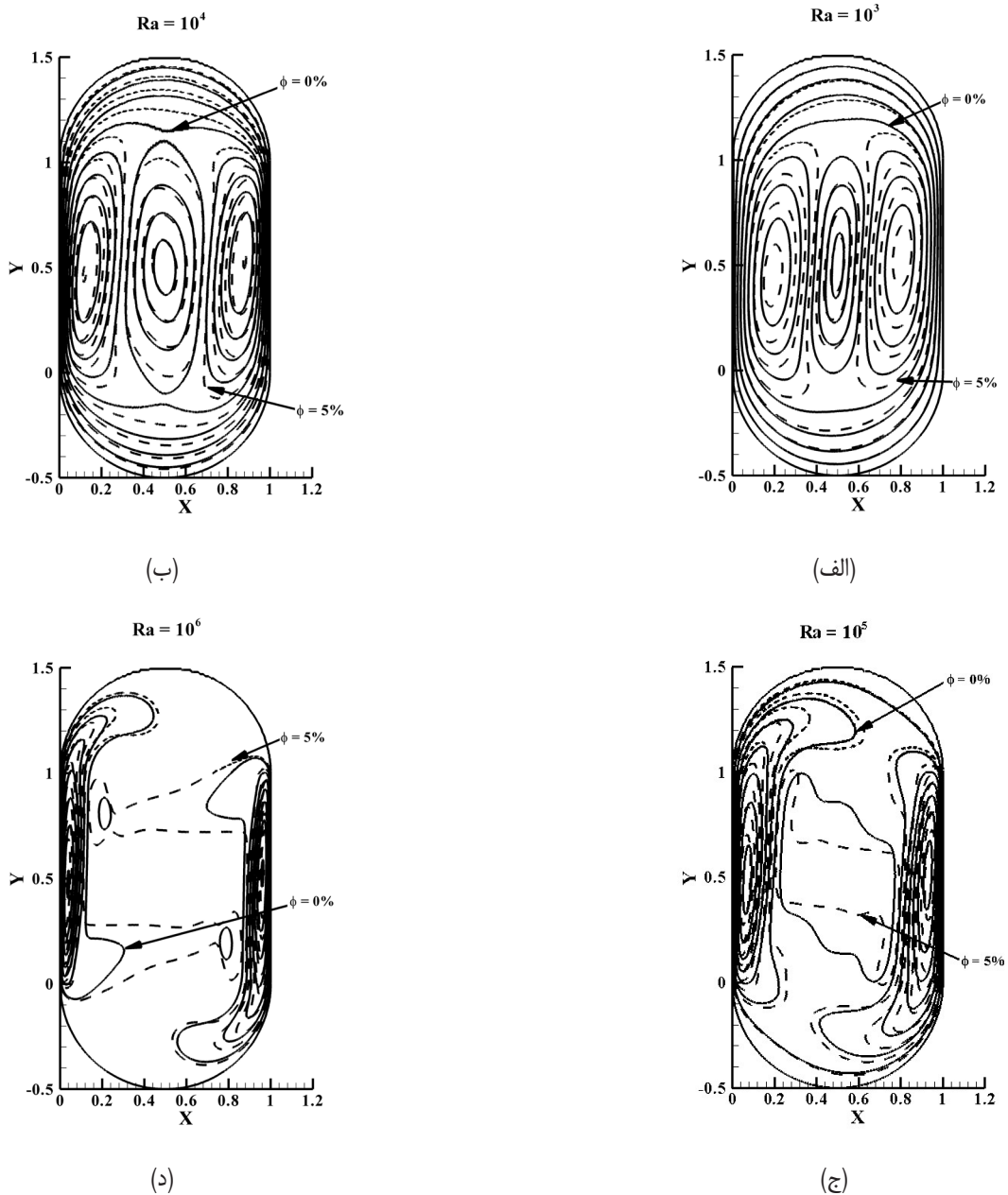


Fig. 4. Comparison of stream lines for pure liquid and water- $Al_2O_3$  nanofluid at 5% volume fraction for Rayleigh numbers equal to (a)  $10^3$ , (b)  $10^4$ , (c)  $10^5$  and (d)  $10^6$  (solid lines are for the pure water and dash lines are nanofluid)

شکل ۴: مقایسه خطوط جریان برای سیال خالص و نانوسیال آب-اکسید آلومینیوم در کسر حجمی پنج درصد برای رایلی برابر با (الف)  $10^3$ ، (ب)  $10^4$ ، (ج)  $10^5$  و (د)  $10^6$  (خط تیره مربوط به سیال خالص و نقطه خطچین مربوط به نانوسیال می‌باشد)

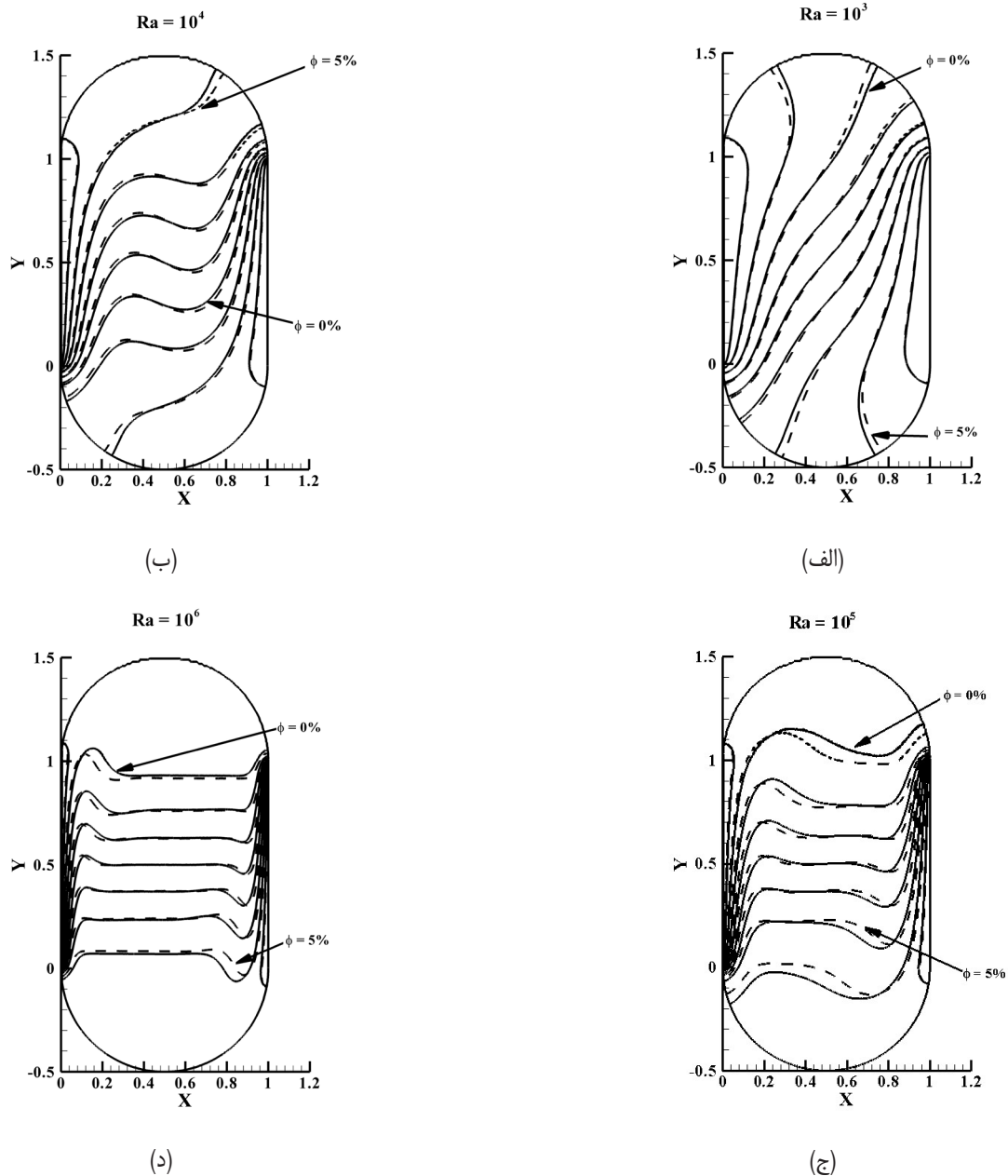


Fig. 5. Comparison of temperature iso-lines for pure liquid and water- $\text{Al}_2\text{O}_3$  nanofluid at 5% volume fraction for Rayleigh numbers equal to (a)  $10^3$ , (b)  $10^4$ , (c)  $10^5$  and (d)  $10^6$  (solid lines are for the pure water and dash lines are nanofluid)

شکل ۵: مقایسه خطوط دما ثابت برای سیال خالص و نانوسیال آب-اکسید آلومینیوم در کسر حجمی پنج درصد برای رایلی برابر با (الف)  $10^3$ ، (ب)  $10^4$ ، (ج)  $10^5$  و (د)  $10^6$  (خط تیره مربوط به سیال خالص و نقطه خط چین مربوط به نانوسیال می‌باشد)

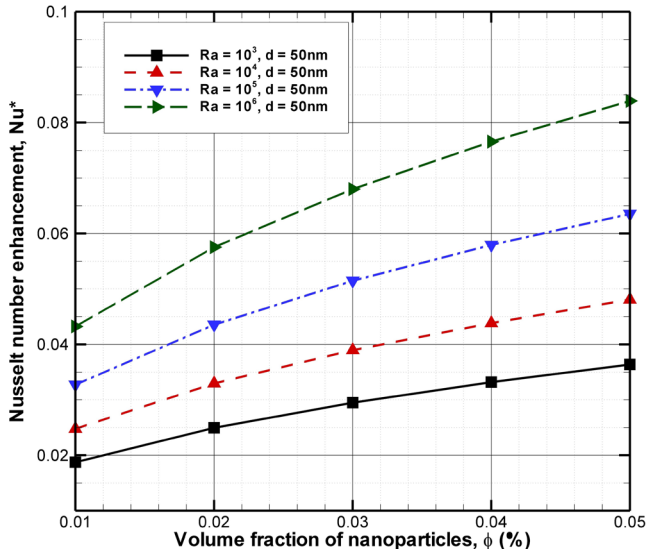
می‌دهد. همانطور که از این شکل‌ها مشخص است، با افزایش کسر حجمی نانوذرات عدد ناسلت متوسط جریان افزایش می‌یابد. این موضوع ناشی از افزایش ضریب هدایت حرارتی نانوسیال در نتیجه افزایش متوسط تعداد نانوذرات در هر شبکه می‌باشد. در اعداد رایلی  $10^3$  و  $10^6$  میزان بهبود عدد ناسلت در کسر حجمی ۵ درصد در مقایسه با سیال خالص به ترتیب برابر با  $4/3$  و  $9/9$  درصد برای اندازه نانوذره معادل ۲۰ نانومتر و به ترتیب برابر با  $3/1$  و  $7/5$  درصد برای اندازه نانوذره معادل ۱۰۰ نانومتر محاسبه شده است. علاوه بر این مشاهده می‌گردد که با افزایش عدد رایلی تاثیر نانوذرات

به این منظور و برای بررسی کمی نتایج و تعیین مقادیر مجهول، می‌توان پارامتری را برای مشاهده وابستگی عدد ناسلت به حضور نانوذرات به شکل زیر تعریف نمود:

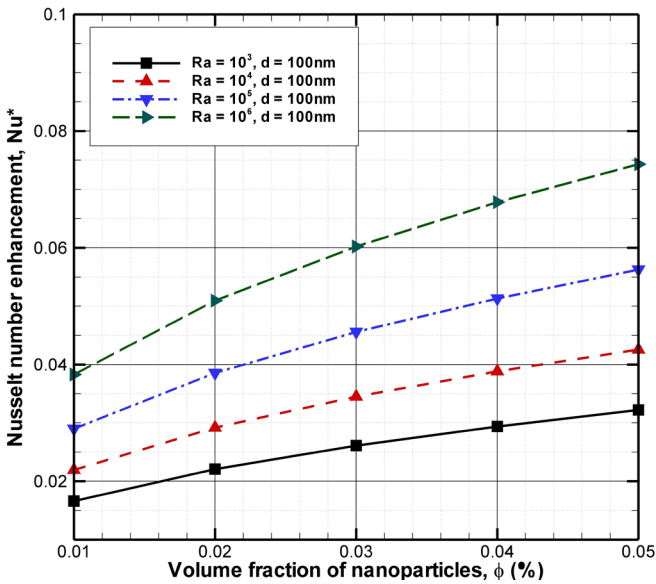
$$Nu^* = \frac{Nu_{ave} - Nu_{ave,\phi=0}}{Nu_{ave,\phi=0}} \quad (25)$$

در واقع می‌توان پارامتر را پارامتری برای تعیین میزان بهبود عدد ناسلت در حضور نانوذرات دانست. شکل ۶ تغییرات این پارامتر را بر حسب تغییرات کسر حجمی نانوذرات در اعداد رایلی متفاوت و اندازه مختلف نانوذرات نشان





(ب)



(ج)

Fig. 6. Variations of  $Nu^*$  with variations of nanoparticles volume fraction for nanoparticle sizes equal to (a) 20, (b) 50 and (c) 100 nm.

شکل ۶: پارامتر  $Nu^*$  برحسب تغییرات کسر حجمی نانوذرات در اعداد رایلی مختلف برای اندازه نانوذرات برابر با (الف) ۲۰، (ب) ۵۰ و (ج) ۱۰۰ نانومتر

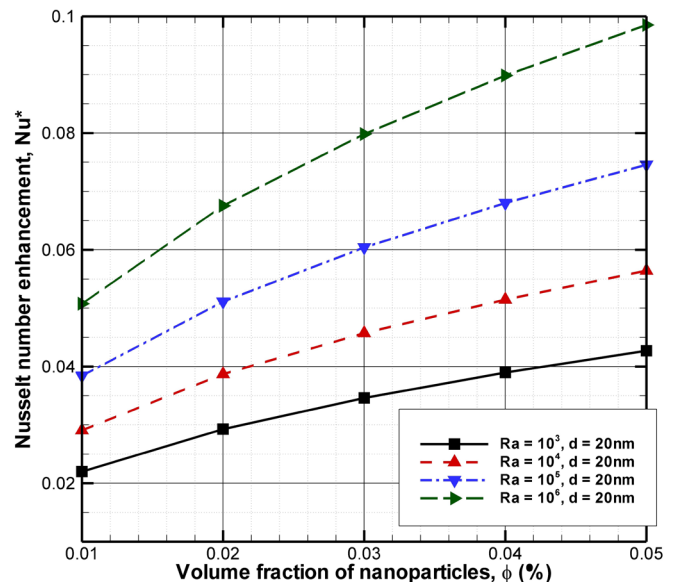
### ۵-۳- تاثیر اندازه نانوذرات

نتایج به دست آمده از این پژوهش حاکی از آن است که در یک عدد کسر حجمی و عدد رایلی ثابت، میزان بهبود عدد ناسلت وابسته به اندازه نانوذرات است. از آنجا که هدف، بررسی وابستگی عدد ناسلت به اندازه نانوذرات در محدوده فرض شده (بین ۲۰ تا ۱۰۰ نانومتر) می‌باشد، رابطه زیر برای بی‌بعدسازی قطر نانوذرات پیشنهاد می‌گردد:

$$\varepsilon = \frac{d}{d_{\max}} \quad (26)$$

در یک کسر حجمی ثابت افزایش می‌یابد. این موضوع را می‌توان با استفاده از تعریف عدد رایلی توضیح داد. با افزایش عدد رایلی، تاثیر جریان ناشی از تغییرات چگالی افزایش و تاثیر نیروهای ویسکوز در جریان کاهش می‌یابد. در نتیجه این امر، سرعت جریان و به تبع آن سرعت نانوذرات افزایش می‌یابد و در نتیجه نرخ انتقال حرارت توسط نانوذرات از دیواره گرم به دیواره سرد نیز افزایش می‌یابد. این موضوع سبب افزایش عدد ناسلت می‌گردد. در واقع، افزایش عدد رایلی گردش نانوذرات در جریان را تسهیل می‌بخشد که این موضوع خود منجر به بهبود عدد ناسلت متوسط می‌گردد.

با افزایش کسر حجمی نانوذرات از صفر تا ۵ درصد، مطابق با رابطه (۱۷)، لزجت نانوسیال از ۱ تا ۱/۸ برابر سیال خالص تغییر می‌نماید. در نتیجه این افزایش لزجت، عدد موثر رایلی کاهش می‌یابد و در نتیجه نرخ بهبود عدد ناسلت متوسط کاهش می‌یابد. در واقع اثر نانوذرات را می‌توان به دو بخش تقسیم نمود. نخست با افزایش نانوذرات با ضریب هدایت حرارتی بالاتر، نرخ انتقال حرارت و در نتیجه عدد ناسلت افزایش می‌یابد. تاثیر دوم در افزایش لزجت سیال و در نتیجه کاهش نرخ بهبود عدد ناسلت می‌باشد. لازم به ذکر است که در محدوده مورد مطالعه برای کسر حجمی، نرخ بهبود عدد ناسلت کاهشی نگردید اما با توجه به روند مشاهده شده می‌توان انتظار داشت که در کسر حجمی‌های بالاتر، اثر افزایش لزجت تاثیر مثبت نانوذرات بر عدد ناسلت را از بین برده و پارامتر بهبود عدد ناسلت روند رو به کاهش داشته باشد. نکته دیگری که از شکل ۶ مشخص است، کاهش تاثیر لزجت در اعداد رایلی بالاتر می‌باشد به گونه‌ای که برای اعداد رایلی بالاتر، روند کاهش نرخ بهبود عدد ناسلت متوسط با شیب ملایم‌تری رخ می‌دهد. این موضوع به دلیل آن است که با افزایش عدد رایلی، وابستگی جریان به ترم‌های ویسکوز کاهش می‌یابد.



(الف)

ضریب تعیین<sup>۱</sup> تابع فوق با داده‌های به دست آمده از نتایج عددی ۰/۹۷ می‌باشد. درحالتیکه کسر حجمی برابر با صفر است و سیال خالص می‌باشد نیز رابطه زیر برای عدد ناسلت متوسط قابل ارائه می‌باشد:

$$Nu_{ave} = 0.219Ra^{0.262} \quad (30)$$

از ترکیب روابط (۲۵)، (۲۹) و (۳۰) می‌توان رابطه زیر را برای عدد ناسلت متوسط نانوسیال حاضر در محدوده کسر حجمی بین صفر تا ۵ درصد، اندازه نانوذرات بین ۲۰ تا ۱۰۰ نانومتر و عدد رایلی بین  $10^2$  تا  $10^6$  ارائه نمود:

$$Nu_{ave} = 0.219Ra^{0.262} \times (1 + 0.057Ra^{0.121}\varepsilon^{-0.175}\phi^{0.412}) \quad (31)$$

رابطه فوق در محدوده اشاره شده دقت بالایی در پیش‌بینی عدد ناسلت متوسط دارد. حداکثر خطای رابطه (۳۱) در پیش‌بینی عدد ناسلت متوسط ۸/۲ درصد می‌باشد. همخوانی خوبی بین رابطه (۳۱) و نتایج ارائه شده توسط شیخ‌الاسلامی و همکاران [۳۵] که در هندسه‌ای تقریباً مشابه انجام شده است، وجود دارد. بطورمثال در عدد رایلی  $10^5$  و کسر حجمی ۵ درصد شیخ‌الاسلامی و همکاران [۳۵] عدد ناسلت را برابر با ۵/۱ پیش‌بینی می‌نماید درحالیکه رابطه (۳۱) را ۴/۹ (۳۱) را پیش‌بینی می‌نماید.

رابطه (۳۱) به خوبی نشان می‌دهد که عمده وابستگی عدد ناسلت به عدد رایلی می‌باشد. در مورد  $Nu^*$  (که برابر با تفاضل عبارت درون پرانتز در رابطه (۳۱) و عدد یک می‌باشد)، وابستگی  $Nu^*$  به کسر حجمی نانوذرات بیشتر از تمامی پارامترها می‌باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که مهمترین پارامتر در مقایسه عدد ناسلت بین یک سیال خالص و نانوسیال در عدد رایلی ثابت، کسر حجمی نانوذرات می‌باشد. لازم به ذکر است که این معادله دارای محدودیت‌هایی می‌باشد که برخی ناشی از نوع روش استفاده شده و برخی ناشی از محدوده پارامترهای مطالعه شده می‌باشد. محدودیت‌های زیر در هنگام استفاده از معادله (۳۱) باید در نظر گرفته شوند:

۱. عدد رایلی بین  $10^3$  تا  $10^6$
۲. کسر حجمی بین ۰ تا پنج درصد
۳. اندازه نانوذرات بین ۲۰ تا ۱۰۰ نانومتر
۴. از آنجاکه نوع نانوذره نیز مطابق رابطه (۱) در عدد ناسلت موثر می‌باشد، خواص نانوذره نظیر هدایت حرارتی و ظرفیت گرمایی ویژه (و یا به عبارت بهتر نسبت هر یک از این پارامترها به مقادیر آنها برای سیال پایه) باید تقریباً در محدوده مطالعه شده در مقاله حاضر باشد.
۵. در روش استفاده شده در این مقاله اثر به هم چسبیدن ذرات که در کسر حجمی‌های بالا دارای اهمیت می‌باشد، در نظر گرفته نشده است. لذا استفاده از معادله (۳۱) در کسر حجمی‌های بالا باید با احتیاط انجام گردد.

که در رابطه فوق،  $d_{max}$  ماکزیمم قطر نانوذره می‌باشد که در مدلسازی اخیر برابر با ۱۰۰ نانومتر فرض شده است.

نتایج حاکی از آن است که در شرایطی که کسر حجمی ثابت در نظر گرفته شود، می‌توان توصیف کلی زیر را از پارامتر بهبود عدد ناسلت داشت:

$$Nu^* |_{\phi=const.} = f_2(Ra, \varepsilon) \quad (27)$$

که در رابطه فوق  $f_2$  یک تابع مجهول می‌باشد با توجه به نتایج به دست آمده، رابطه بین  $Nu^*$  و عدد بی بعد  $\varepsilon$  در مقدار ثابت کسر حجمی نانوذرات را می‌توان به شکل زیر پیشنهاد نمود:

$$f_2 \propto Ra^{0.41}\varepsilon^{-0.175} \quad (28)$$

شکل ۷ توزیع تغییرات  $Nu^*$  را برحسب پارامتر  $Ra^{0.41}\varepsilon^{-0.175}$  نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل دیده می‌شود، با حرکت به سمت اعداد  $\varepsilon$  بالاتر،  $Nu^*$  کاهش می‌یابد. این کاهش از طریق روابط (۱۹) و (۲۰) قابل توضیح می‌باشد.

همانگونه که از این روابط مشخص می‌باشد، با افزایش اندازه نانوذرات که به معنی افزایش عدد  $\varepsilon$  می‌باشد، نیروی بویانسی وارد بر نانوذرات ناشی از اختلاف چگالی با مرتبه سه و نیروی پسا با مرتبه یک افزایش می‌یابد. افزایش نیروهای مقاوم در مقایسه با نیروی حرارتی پیشران سبب کاهش تاثیر نانوذرات در انتقال حرارت بین دیواره گرم و سرد می‌شود.

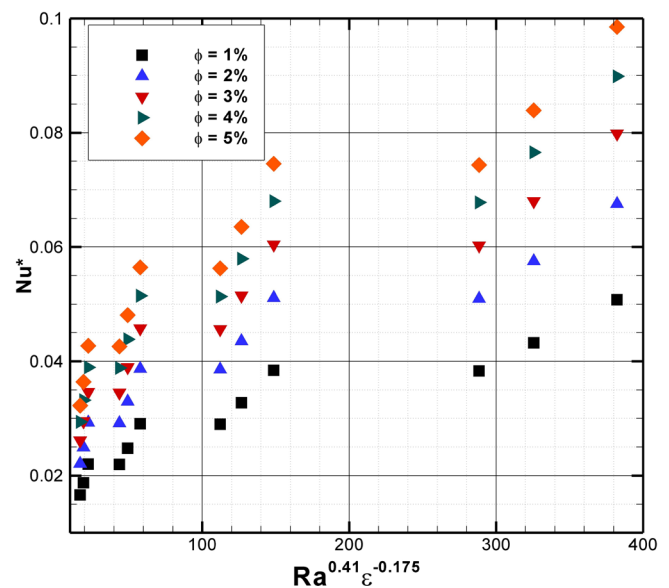


Fig. 7. Variations of Nusselt number enhancement,  $Nu^*$ , with respect to nanoparticle size and  $Ra$  number at different volume fraction of nanoparticles.

شکل ۷: تغییرات پارامتر بهبود عدد ناسلت،  $Nu^*$ ، برحسب تغییرات اندازه نانوذرات و عدد رایلی در کسر حجمی‌های مختلف

از ترکیب روابط (۲۴) و (۲۸) و با برازش یک منحنی توانی بر روی داده‌های به دست آمده، می‌توان رابطه زیر را برای پیش‌بینی  $Nu^*$  ارائه نمود:

$$Nu^* = 0.057Ra^{0.121}\varepsilon^{-0.175}\phi^{0.412} \quad (29)$$

## ۶- نتیجه گیری

در پژوهش حاضر، مدلی دوبعدی و دوجزبی برای مدلسازی جریان و انتقال حرارت نانوسیال اکسیدآلومینیوم-آب در جابجایی طبیعی درون یک محفظه مربعی با مرزهای منحنی بر مبنای روش شبکه‌ای بولتزمن ارائه گردید. تمایز روش دو جزبی در مقایسه روش تک‌جزبی، پرهیز از تقریب‌های با خطای زیاد در محاسبه خواص نانوسیال و نیز امکان در نظر گرفتن اثر اندازه نانوذرات از طریق اعمال جداگانه نیروهای خارجی به هر جزء می‌باشد. از نوآوری‌های مقاله حاضر در نظر گرفتن کمی تاثیر اندازه نانوذرات به روش شبکه‌ای بولتزمن و مطالعه تاثیر حضور نانوذرات بر روی خطوط دما و جریان می‌باشد. مهمترین نتایج به دست آمده در این پژوهش را می‌توان به شرح زیر خلاصه نمود:

- با افزایش کسر حجمی و به دنبال آن افزایش تعداد نانوذرات، عدد ناسلت افزایش می‌یابد. به طوریکه میزان افزایش عدد ناسلت متوسط برای عدد رایلی  $10^3$  و  $10^6$  در بیشترین حالت به ترتیب برابر با  $4/3$  و  $9/9$  درصد می‌باشد.
- با افزایش کسر حجمی نانوذرات، لزجت سیال افزایش می‌یابد. این امر سبب کاهش نرخ بهبود عدد ناسلت متوسط در کسر حجمی‌های بالا می‌گردد.
- اندازه نانوذرات تاثیر معکوسی بر روی میزان بهبود عدد ناسلت متوسط دارد. با افزایش اندازه نانوذرات از ۲۰ به ۱۰۰ نانومتر، در اعداد رایلی  $10^3$  و  $10^6$  پارامتر  $Nu^*$  به ترتیب ۲۸ و ۲۴ درصد کاهش را نشان داد.
- رابطه‌ای برای پیش‌بینی وابستگی عدد ناسلت متوسط به کسر حجمی نانوذرات اکسیدآلومینیوم و اندازه نانوذرات در محدوده مدلسازی ارائه گردید. این رابطه با دقت بالایی قادر به پیش‌بینی عدد ناسلت متوسط جریان می‌باشد. حداکثر خطای این رابطه در پیش‌بینی عدد ناسلت متوسط  $8/2$  درصد می‌باشد.

## فهرست علائم

نویسندگان این مقاله از بنیاد ملی علم ایران (INSF) به خاطر حمایت مالی در طول انجام این پژوهش با شماره گرانت ۹۴۰۰۱۷ تشکر و قدردانی می‌نمایند.

## فهرست علائم

$c_p$	ظرفیت گرمایی فشار ثابت، J/kg.K
$c_s$	سرعت شبکه، m/s
$D$	قطر انحنای محفظه، m
$d$	قطر نانو ذره، m
$e_i$	بردار سرعت گسسته شده، m/s

$F_D$	نیروی پسا، N
$F_T$	نیروی بویانسی حرارتی، N
$F_p$	نیروی بویانسی اختلاف چگالی، N
$f, \tilde{f}$	تابع توزیع هیدرولیکی
$g$	بردار شتاب جاذبه، $m/s^2$
$h, \tilde{h}$	تابع توزیع حرارتی
$k$	ضریب هدایت حرارتی، W/m.K
$L$	ارتفاع بخش صاف محفظه، m
$n$	تعداد نانوذرات
$Nu$	عدد بی بعد ناسلت
$Pr$	عدد بی بعد پراتل
$Ra$	عدد بی بعد رایلی
$T$	دما، K
$t$	زمان، s
$\Delta t$	گام زمانی، s
$u$	بردار سرعت، m/s
$V$	حجم یک شبکه
$x$	مکان، m
$x_f, x_{ff}$	اولین و دومین نقطه نزدیک دیواره
$\Delta x$	گام مکانی، m
علائم یونانی	
$\Omega$	ضریب فاصله نقطه مرزی تا دیواره
$\alpha$	ضریب نفوذ حرارتی، $m^2/s$
$\beta$	ضریب انبساط حجمی فشار ثابت، $1/K$
$\chi$	پارامتر آزاد
$\varepsilon$	نسبت قطر نانوذره به حداکثر قطر
$\phi$	کسر حجمی نانوذرات
$\mu$	ویسکوزیته دینامیکی، kg/m.s
$\nu$	ویسکوزیته سینماتیکی، $m^2/s$
$\theta$	انرژی داخلی، J
$\rho$	چگالی، $kg/m^3$
$\tau_f$	ضریب استراحت هیدرولیکی
$\tau_h$	ضریب استراحت حرارتی
$\omega$	ضریب وزنی

زیرنویس‌ها

- [9] H. Nemati, M. Farhadi, K. Sedighi, E. Fattahi, A.A.R. Darzi, Lattice Boltzmann simulation of nanofluid in lid-driven cavity, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 37(10) (2010) 1528-1534.
- [10] F.-H. Lai, Y.-T. Yang, Lattice Boltzmann simulation of natural convection heat transfer of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/water nanofluids in a square enclosure, *International Journal of Thermal Sciences*, 50(10) (2011) 1930-1941.
- [11] Y. Guo, D. Qin, S. Shen, R. Bennacer, Nanofluid multi-phase convective heat transfer in closed domain: Simulation with lattice Boltzmann method, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 39(3) (2012) 350-354.
- [12] Y.-T. Yang, F.-H. Lai, Lattice Boltzmann simulation of heat transfer and fluid flow in a microchannel with nanofluids, *Heat Mass Transfer*, 47(10) (2011) 1229-1240.
- [13] W.N. Zhou, Y.Y. Yan, J.L. Xu, A lattice Boltzmann simulation of enhanced heat transfer of nanofluids, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 55(0) (2014) 113-120.
- [14] H. Bararnia, K. Hooman, D.D. Ganji, Natural Convection in a Nanofluids-Filled Portioned Cavity: The Lattice-Boltzmann Method, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 59(6) (2011) 487-502.
- [15] H. Sajjadi, M. Gorji, G.H.R. Kefayati, D.D. Ganji, Lattice Boltzmann Simulation of Turbulent Natural Convection in Tall Enclosures Using Cu/Water Nanofluid, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 62(6) (2012) 512-530.
- [16] S.K. Das, S.U.S. Choi, H.E. Patel, Heat Transfer in Nanofluids—A Review, *Heat Transfer Engineering*, 27(10) (2006) 3-19.
- [17] Z. Haddad, C. Abid, A.A. Mohamad, O. Rahli, S. Bawazer, Natural convection of silica–water nanofluids based on experimental measured thermophysical properties: critical analysis, *Heat Mass Transfer*, (2015) 1-15.
- [18] J.C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, Unabridged 3rd ed., Dover Publications, New York, N.Y., 1954.
- [19] R.L. Hamilton, O.K. Crosser, Thermal Conductivity of Heterogeneous Two-Component Systems, *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*, 1(3) (1962) 187-191.
- [20] J. Sarkar, A critical review on convective heat transfer correlations of nanofluids, *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 15(6) (2011) 3271-3277.
- [21] Y. Xuan, Z. Yao, Lattice Boltzmann model for

متوسط	<i>ave</i>
مقادیر مجازی	<i>bf</i>
نقطه درون مرز جامد	<i>s</i>
دیواره	<i>ω</i>
نقطه غربی نقطه مرزی	<i>west</i>
بالانویس‌ها	
تعادلی	<i>eq</i>
سیال خالص (بالانویس)	<i>f</i>
غیر تعادلی	<i>neq</i>
نانوذرات	<i>np</i>
جزء (نانوذره یا سیال خالص)	<i>σ</i>

### منابع

- [1] F.I. Doshmanziari, A.E. Zohir, H.R. Kharvani, D. Jalali-Vahid, M.R. Kadivar, Characteristics of heat transfer and flow of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/water nanofluid in a spiral-coil tube for turbulent pulsating flow, *Heat Mass Transfer*, (2015) 1-16.
- [2] C. Pang, J.W. Lee, Y.T. Kang, Enhanced thermal conductivity of nanofluids by nanoconvection and percolation network, *Heat Mass Transfer*, (2015) 1-10.
- [3] D.A. Wolf-Gladrow, *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models*, in, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.
- [4] E. Aslan, I. Taymaz, A.C. Benim, Investigation of LBM curved boundary treatments for unsteady flows, *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 51 (2015) 68-74.
- [5] E. Abu-Nada, H.F. Oztop, I. Pop, Effects of surface waviness on heat and fluid flow in a nanofluid filled closed space with partial heating, *Heat Mass Transfer*, (2015) 1-13.
- [6] L. Zhou, Y. Xuan, Q. Li, Multiscale simulation of flow and heat transfer of nanofluid with lattice Boltzmann method, *International Journal of Multiphase Flow*, 36(5) (2010) 364-374.
- [7] G.R. Kefayati, S.F. Hosseinizadeh, M. Gorji, H. Sajjadi, Lattice Boltzmann simulation of natural convection in tall enclosures using water/SiO<sub>2</sub> nanofluid, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 38(6) (2011) 798-805.
- [8] G.R. Kefayati, Lattice Boltzmann simulation of MHD natural convection in a nanofluid-filled cavity with sinusoidal temperature distribution, *Powder Technology*, 243 (2013) 171-183.

- [29] J. Wang, D. Wang, P. Lallemand, L.-S. Luo, Lattice Boltzmann simulations of thermal convective flows in two dimensions, *Computers & Mathematics with Applications*, 65(2) (2013) 262-286.
- [30] D. Contrino, P. Lallemand, P. Asinari, L.-S. Luo, Lattice-Boltzmann simulations of the thermally driven 2D square cavity at high Rayleigh numbers, *Journal of Computational Physics*, 275(0) (2014) 257-272.
- [31] G. Strang, On the Construction and Comparison of Difference Schemes, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 5(3) (1968) 506-517.
- [32] H. Chen, Y. Ding, Y. He, C. Tan, Rheological behaviour of ethylene glycol based titania nanofluids, *Chemical Physics Letters*, 444(4-6) (2007) 333-337.
- [33] C. He, G. Ahmadi, Particle deposition in a nearly developed turbulent duct flow with electrophoresis, *Journal of Aerosol Science*, 30(6) (1999) 739-758.
- [34] K. Khanafer, K. Vafai, M. Lightstone, Buoyancy-driven heat transfer enhancement in a two-dimensional enclosure utilizing nanofluids, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46(19) (2003) 3639-3653.
- [35] M. Sheikholeslami, M. Gorji-Bandpy, S.M. Seyyedi, D.D. Ganji, H.B. Rokni, S. Soleimani, Application of LBM in simulation of natural convection in a nanofluid filled square cavity with curve boundaries, *Powder Technology*, 247 (2013) 87-94.
- nanofluids, *Heat Mass Transfer*, 41(3) (2005) 199-205.
- [22] C. Qi, Y. He, S. Yan, F. Tian, Y. Hu, Numerical simulation of natural convection in a square enclosure filled with nanofluid using the two-phase Lattice Boltzmann method, *Nanoscale Res Lett*, 8(1) (2013) 1-16.
- [23] A.C. Benim, E. Aslan, I. Taymaz, Lattice Boltzmann Method for Laminar Forced Convection in a Channel with a Triangular Prism, 42(4) (2011) 359-377.
- [24] Z. Guo, C. Zheng, B. Shi, An extrapolation method for boundary conditions in lattice Boltzmann method, *Physics of Fluids* (1994-present), 14(6) (2002) 2007-2010.
- [25] O. Filippova, D. Hänel, Grid Refinement for Lattice-BGK Models, *Journal of Computational Physics*, 147(1) (1998) 219-228.
- [26] ] R. Mei, L.-S. Luo, W. Shyy, An Accurate Curved Boundary Treatment in the Lattice Boltzmann Method, *Journal of Computational Physics*, 155(2) (1999) 307-330.
- [27] Y.Y. Yan, Y.Q. Zu, Numerical simulation of heat transfer and fluid flow past a rotating isothermal cylinder – A LBM approach, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 51(9-10) (2008) 2519-2536.
- [28] C. Pan, L.-S. Luo, C.T. Miller, An evaluation of lattice Boltzmann schemes for porous medium flow simulation, *Computers & Fluids*, 35(8-9) (2006) 898-909.

Please cite this article using:

M. Hosseini Abadshapoori and M. H. Saidi, "Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-water Nanofluid in a Square Cavity with Curved Boundaries"

*Amirkabir J. Mech. Eng.*, 49(3) (2017) 567-580.

DOI: 10.22060/mej.2016.794

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:



