نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۴۹، شماره ۴، سال ۱۳۹۶، صفحات ۷۲۱ تا ۷۳۰
DOI: 10.22060/mej.2016.802

تحلیل ارتعاشات نانوپوسته مدرج تابعی احاطه شده توسط بستر الاستیک با استفاده از نظریهٔ تنش کوپل اصلاح شده

مجید قدیری*، حامد صفرپور

دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بین المللی امام خمینی، قزوین، ایران

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۵ آذر ۱۳۹۴
بازنگری: ۱۱ بهمن ۱۳۹۴
پذیرش: ۹ اسفند ۱۳۹۴
ارائه آنلاین: ۲۴ مرداد ۱۳۹۵

کلمات کلیدی:
نانو پوسته استوانه‌ای
نظریهٔ تنش کوپل اصلاح شده
ماده مدرج تابعی
بستر الاستیک

چکیده: هدف از این پژوهش بررسی رفتار ارتعاشی یک نانوپوسته استوانه‌ای مدرج تابعی براساس نظریهٔ تنش کوپل اصلاح شده می‌باشد. همچنین در اطراف این نانوپوسته بستر الاستیک پاسترناک در نظر گرفته شده است که در این مدل علاوه بر ثابت فنری نوع وینکلر، ثابت برشی نیز لحاظ شده است. علاوه بر این شرایط مرزی نانوپوسته در دو انتها به صورت تکیه‌گاه ساده فرض شده است. نانوپوسته استوانه‌ای درجه‌بندی‌شده تابعی از ترکیب آلومینیوم-سرامیک ساخته شده است که کسر حجمی هر جزء و در نتیجه خصوصیات مکانیکی نانوپوسته استوانه‌ای بر مبنای قانون ساده توانی در راستای ضخامت تغییر می‌کند. معادلات حاکم بر حرکت و شرایط مرزی براساس نظریهٔ برشی مرتبه اول و با استفاده از اصل هامیلتون، استخراج می‌شوند. روش حل نویر برای پیش‌بینی بسامدهای طبیعی نانوپوسته درجه‌بندی‌شده تابعی استفاده می‌شود. در نهایت تأثیر پارامترهایی مانند مقیاس طول ماده، شماره مودهای فرکانسی محیطی، نسبت طول به شعاع پوسته استوانه‌ای، ضریب تصحیح برشی، شاخص توانی نسبت حجمی (N) و ضرایب بستر الاستیک وینکلر و پاسترناک بر بسامد طبیعی نانوپوسته مدرج تابعی بحث خواهد شد. نوآوری این پژوهش درنظرگرفتن بستر الاستیک بر نانوپوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با اعمال نظریهٔ تنش کوپل اصلاح شده می‌باشد. تطابق بسیار خوب نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی توسط پژوهشگران قبلی با نتایج پژوهش حاضر، بیانگر اهمیت این پژوهش است.

۱- مقدمه

مواد مدرج تابعی در حقیقت، کامپوزیت‌های میکروسکوپی غیرهمگنی هستند که این مواد به علت فراهم ساختن بسیاری از مزیت‌ها و خواص ویژه شامل مقاومت حرارتی بالا و مقاومت مکانیکی عالی از اهمیت به‌سزایی برخوردار هستند و کسر حجمی هر جزء در راستای مشخص به صورت پیوسته تغییر می‌کند. فازهای ریزساختاری مواد مدرج تابعی دارای عملکرد متفاوتی نسبت به یکدیگر هستند و باعث ایجاد وضعیت چندساختاری در مواد مدرج تابعی می‌شوند. مواد مدرج تابعی در موارد مختلفی چون حسگرهای مدرج تابعی [۱]، فعال کننده‌ها [۲]، حسگرهای نوری [۳]، ایمپلنت‌های مدرج تابعی دندانپزشکی [۴] مورد استفاده قرار می‌گیرند. با گسترش کاربرد این مواد در سازه‌ها، نیاز به انجام تحقیقات بیشتر بر روی آنها برای محققان آشکارتر شد. پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی در کاربردهایی مانند ساختار بدنه هواپیمای مسافربری، هواپیماهای نظامی، سامانه رانشی و دیگر زمینه‌های مهندسی کاربرد دارد. در سال‌های اخیر، استفاده از مواد مدرج تابعی در ساختارهای نانو و میکرو، مانند ساختار میکروسکوپ نیروی اتمی [۵] و ساختار سامانه‌های الکترومکانیکی [۶، ۷] گسترش یافته است. علاوه بر این از طریق آزمایش‌ها بر روی فلزات و پلیمرها مشاهده شده است که ساختارهای میکرو و نانو به پارامتر اندازه وابسته هستند [۸]. گونه‌های مختلفی از نظریه‌هایی که به اندازه وابسته هستند وجود دارد که می‌توانند به راحتی اثر اندازه را در پاسخ مکانیکی ساختارها در هر دو اندازه میکرو و نانو مورد بررسی قرار دهند. یکی از نظریه‌های مرتبط با محیط پیوسته مرتبه بالا، نظریهٔ تنش کوپل اصلاح شده است که توسط یانگ و دیگران [۹] ارائه شد. نظریهٔ تنش کوپل اصلاح شده با اضافه کردن تنها یک پارامتر مقیاس طول مواد در معادلات کلاسیک، به دلیل متقارن بودن تانسور تنش کوپل، منجر به معادلات ساختاری دیگری برای جزءهای مواد می‌شود؛ به عنوان مثال غلامی و دیگران [۱۰] میکروپوسته استوانه‌ای با مواد درجه‌بندی‌شده تابعی با نظریهٔ تنش کوپل اصلاح شده را ارائه نموده که خواص مکانیکی نسبت به مواد دیگر بهتر است. نظریه‌های مختلفی برای تحلیل میکروپوسته استوانه‌ای در نظر گرفته شده است. یکی از این نظریه‌ها کلاسیک لاو [۱۱] است که در قرن ۱۹ برای پوسته و ورق آن را بنا نهاد. بعد از لاو افراد دیگری مانند دانل [۱۲] و ساندر[۱۳] هندسه مسأله را با نظریهٔ خطی کلاسیک ترکیب کردند که این نظریه‌ها فرض‌های ساده‌کننده‌ای برای مسأله دارند. یکی از مهم‌ترین آنها این است که پوستهٔ استوانه‌ای باید در راستای ضخامت به اندازه کافی کوچک باشد که تنش بر روی آن مقداری ثابت شده باشد؛ بنابراین به علت این فرض نظریهٔ کلاسیک پوسته نمی‌تواند برای پوسته ضخیم مورد استفاده قرار گیرد. اما نظریهٔ برشی مرتبه اول ارائه شده توسط ریسنر [۱۴] و میندلین [۱۵] برای پوسته‌های ضخیم بسیار عالی است. لازم به ذکر است که مسائل دینامیکی ارتعاش آزاد بیشترین سهم مطالعاتی را در سالیان اخیر داشته است. فرید و همکاران [۱۶] تحلیل ارتعاش آزاد پنل

نویسنده عهده‌دار مکاتبات: ghadiri@eng.ikiu.ac.ir

منحنی ضخیم پیش تنش مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک دو پارامتری تحت تأثیر محیط حرارتی، با استفاده از فرمول‌بندی سه بعدی را مورد بررسی قرار داده‌اند. در کار دیگری بنی و همکاران تحلیل ارتعاش آزاد یک نانوپوسته استوانه‌ای با درنظرگرفتن نظریهٔ تنش کوپل اصلاح شده را انجام دادند [۱۷]. همچنین محمدی‌مهر و همکاران تأثیر بستر الاستیک بر کمانش و ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای پیزوالکتریک با ریزساختار مدرج تابعی را مورد بررسی قرار دادند [۱۸]. نوآوری این پژوهش درنظرگرفتن بسترالاستیک بر روی نانوپوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با درنظرگرفتن نظریهٔ تنش کوپل اصلاح شده است. هدف از این پژوهش تحلیل ارتعاش آزاد یک نانو پوسته استوانه‌ای درجه‌بندی‌شده تابعی روی بستر الاستیک با نظریهٔ غیرکلاسیک تنش کوپل اصلاح شده است. برای این هدف، ما از نظریهٔ برشی مرتبه اول پوسته استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. با استفاده از اصل هامیلتون، معادلات حرکت حاکم مرتبه بالا و شرایط مرزی را استخراج می‌کنیم. روش حل نویر برای حل معادلات و به دست آوردن بسامدهای طبیعی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در نهایت مقایسه نتایج به‌دست‌آمده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی توسط پژوهشگران قبلی با پژوهش حاضر بیانگر اهمیت مدل ارائه شده است.

۲- فرمول‌بندی ریاضیاتی از معادلات حاکم نانوپوسته استوانه‌ای و شرایط مرزی مرتبط:

۲- ۱- جابه‌جایی در پوسته استوانه‌ای:

یک نانو پوسته درجه‌بندی‌شده تابعی به طول L، شعاع صفحهٔ میانی R و ضخامت یکنواخت h، در شکل ۱ نشان داده شده است. همان‌گونه که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، مختصات شکل منحنی سامانه با مختصات x و θ و z بیان می‌شود که به ترتیب مختصات در راستای محوری، زاویه‌ای و شعاعی را نشان می‌دهد. بر طبق تغییرشکل برشی مرتبه اول پوسته، جابه‌جایی‌های قراردادی در راستاهای x و θ و z به صورت ذیل بیان می‌شوند

$$
\begin{aligned}
u_x &= u(x,\theta,t) + z\,\psi_x(x,\theta,t) \\
u_\theta &= v(x,\theta,t) + z\,\psi_\theta(x,\theta,t), \\
u_z &= w(x,\theta,t)
\end{aligned}
\qquad (۱)
$$

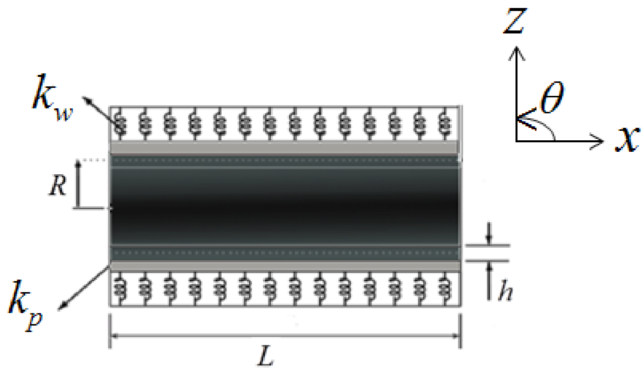

Fig. 1. Geometry of FG cylindrical nanoshell surrounded by elastic foundation.

شکل ۱: هندسه نانوپوسته استوانه‌ای مدرج تابعی روی بستر الاستیک.

۲- ۲- نظریهٔ تنش کوپل اصلاح شده

برای یک ماده الاستیک خطی با حجم V، انرژی کرنشی U با درنظرگرفتن نظریهٔ تنش کوپل اصلاح شده به صورت زیر نوشته می‌شود

$$
U = \frac{1}{2}\iiint_V (\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + m_{ij}^s \chi_{ij}^s)\,dV \qquad (۲)
$$

که عناصر انرژی کرنشی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),\ \chi_{ij}^s = \frac{1}{2}(\varphi_{i,j} + \varphi_{j,i}) \\
&,\varphi_i = \frac{1}{2}\left[curl(u)\right]_i
\end{aligned}
\qquad (۳)
$$

که ε_{ij} و χ^s_{ij} به ترتیب کرنش کلاسیک و تانسور چرخش متقارن هستند. u_i و φ_i به ترتیب مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی و بردار چرخش بی‌نهایت کوچک می‌باشد. همچنین معادله ساختاری متناظر برای مواد الاستیک ایزوتروپیک می‌تواند توسط پارامترهای سینماتیک تأثیرگذار بر چگالی انرژی کرنشی به صورت زیر بیان شود:

$$
\begin{aligned}
&m_{ij}^s = 2\mu l^2 \chi_{ij}^s, \\
&\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{x\theta} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\
C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ 2\varepsilon_{x\theta} \\ 2\varepsilon_{\theta z} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\qquad (۴)
$$

که در آن:

$$
\begin{aligned}
&C_{11} = \frac{E(z)}{1-\nu(z)^2},\ C_{12} = \nu(z,T)C_{11}, \\
&C_{22} = C_{11},\ C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))}
\end{aligned}
\qquad (۵)
$$

پارامتر m^s_{ij} قسمت انحرافی تانسور تنش کوپل نامیده می‌شود. l پارامتر مستقل و اضافی از مقیاس طول ماده است که وابسته به گرادیان چرخش متقارن می‌باشد و μ ثابت لامه می‌باشد.

۲- ۳- خواص مواد نانوپوسته استوانه‌ای درجه‌بندی‌شده تابعی:

فرض می‌کنیم که نانو پوسته استوانه‌ای درجه‌بندی‌شده تابعی از سرامیک و فلز ساخته شده است. تغییر خواص مواد مانند مدول یانگ E، نسبت پوواسون ν و چگالی جرمی ρ در راستای ضخامت پیوسته فرض می‌شود. در قسمت بالایی و پایینی نانوپوسته درجه‌بندی‌شده تابعی به ترتیب فلز و سرامیک قرار داده شده است. خواص مواد به صورت زیر بیان می‌شود.

$$
A(z) = (A_m - A_c)\left(\frac{z}{h}\right)^N + A_c \qquad (۶)
$$

در رابطه (۶)، A هر خاصیت مکانیکی از ماده مدرج می‌تواند باشد. توجه

شود که اندیس m نشانگر فولاد و اندیس c نشانگر سرامیک است. N بیانگر توان تابع است و دارای دو کرانه صفر و بی‌نهایت است که این کرانه‌ها به ترتیب به معنی ساخت پوسته استوانه‌ای از ماده خالص فلز و سرامیک به تنهایی می‌باشد.

۲- ۴- معادلات حرکت و شرایط مرزی:

با جایگذاری معادله (۱) در (۳)، مؤلفه‌های تانسور کرنش و تانسور گرادیان چرخشی متقارن براساس نظریهٔ برشی مرتبه اول به صورت زیر استخراج می‌شوند.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + z\frac{\partial \psi_x}{\partial x},\\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R},\\
\varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2}(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}),\\
\varepsilon_{x\theta} &= \frac{1}{2}(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{z}{2}(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial x}),\\
\varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2}(\psi_\theta + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{R})
\end{aligned} \tag{۷}$$

همچنین، چرخش جزء‌های مواد داخل نانوپوسته به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
\varphi_x &= -\frac{\psi_\theta}{2} + \frac{1}{2}(-\frac{v}{R} + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta}),\\
\varphi_\theta &= \frac{1}{2}(-\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x)\\
\varphi_z &= \frac{1}{2}(-\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{z}{R}\frac{\partial \psi_x}{\partial \theta}) + \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} + z\frac{\partial \psi_\theta}{\partial x})
\end{aligned} \tag{۸}$$

با توجه به رابطه (۸) و قرار دادن آن در رابطه (۳) به راحتی می‌توان عبارات $\chi^s_{\theta z}$، χ^s_{xz}، χ^s_{zz}، $\chi^s_{x\theta}$، $\chi^s_{\theta\theta}$ و χ^s_{xx} را به دست آورد.

$$\begin{aligned}
\chi^s_{xx} &= -\frac{1}{2}(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial \theta}),\\
\chi^s_{\theta\theta} &= -\frac{1}{2R}(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial x} - z\frac{\partial \psi_\theta}{\partial x})\\
&-\frac{1}{2}(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial \theta} - \frac{1}{R}\frac{\partial \psi_x}{\partial \theta})\\
\chi^s_{zz} &= -\frac{1}{2}(\frac{1}{R}\frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}),\\
\chi^s_{x\theta} &= -\frac{1}{4}(\frac{1}{R^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta})\\
\chi^s_{xz} &= -\frac{1}{4}(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial \theta} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{v}{R^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\psi_\theta}{R})\\
&-\frac{z}{4}(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial x\,\partial \theta} - \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial x^2})
\end{aligned} \tag{۹}$$

$$\begin{aligned}
\chi^s_{\theta z} &= -\frac{1}{4}(\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial \theta} - \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\psi_x}{R})\\
&-\frac{z}{4}(\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial x\,\partial \theta})
\end{aligned}$$

برای به دست آوردن معادلات حرکت و همچنین شرایط مرزی از اصل هامیلتون استفاده می‌کنیم [۱۹]:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W)\,dt = 0 \tag{۱۰}$$

در رابطه (۱۰) انرژی کرنشی مطابق با رابطه (۲) به دست می‌آید؛ همچنین توجه شود که انرژی جنبشی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T = \frac{1}{2}\int_X \iint_A \rho_T \left\{(\frac{\partial u_x}{\partial t})^2 + (\frac{\partial u_\theta}{\partial t})^2 + (\frac{\partial u_z}{\partial t})^2\right\} R\,d x\,d\theta \tag{۱۱}$$

که ρ_T در این معادله به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho_T = \int_{-h/2}^{h/2} \rho\,dz \tag{۱۲}$$

پوسته استوانه‌ای در این تحقیق محاط در یک بستر وینکلر-پاسترناک درنظر گرفته شده است. به این ترتیب، کار نیروی خارجی ناشی از بستر الاستیک به صورت زیر به دست می‌آید: [۲۰]

$$W = -\int_0^L \int_0^{2\pi} \left(k_w w^2 + k_g \left[(\frac{\partial w}{\partial x})^2 + (\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta})^2\right]\right) R\,d\theta\,dx \tag{۱۳}$$

در نهایت با داشتن انرژی کرنش، انرژی جنبشی و کار انجام شده و قرار دادن آن در رابطه (۱۰) می‌توان معادلات حرکت را مطابق روابط زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned}
\delta u :\ & \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{2R^2}(-\frac{\partial Y_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial Y_{zz}}{\partial \theta})\\
&+\frac{1}{2R}\frac{\partial^2 Y_{zx}}{\partial \theta\,\partial x} + \frac{1}{2R^2}\frac{\partial^2 Y_{\theta z}}{\partial \theta^2} = I_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}\\
\delta v :\ & \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \theta}N_{\theta\theta} + \frac{Q_{z\theta}}{R}\frac{1}{2R}\frac{\partial}{\partial x}(-Y_{xx} + Y_{\theta\theta})\\
&-\frac{1}{2R^2}\frac{\partial Y_{\theta x}}{\partial \theta} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y_{xz}}{\partial x^2} - \frac{Y_{xz}}{2R^2} - \frac{1}{2R}\frac{\partial^2 Y_{z\theta}}{\partial \theta\,\partial x}\\
&= I_0\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right] + I_1\left\{\frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2}\right\}\\
\delta w :\ & \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial Q_{z\theta}}{\partial \theta} - \frac{N_{\theta\theta}}{R} - \frac{1}{2R^2}\frac{\partial^2 Y_{\theta x}}{\partial \theta^2}\\
&-\frac{1}{2R^2}\frac{\partial Y_{zx}}{\partial \theta} + \frac{1}{2R}\frac{\partial Y_{\theta z}}{\partial x} + \frac{\partial^2 Y_{x\theta}}{2\partial x^2}\\
&-\frac{1}{2R}\frac{\partial^2}{\partial \theta\,\partial x}(Y_{xx} - Y_{\theta\theta}) - k_w w
\end{aligned} \tag{۱۴}$$

$$+k_p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)=I_0\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)$$

$$\begin{aligned}\delta\psi_x:&\frac{\partial M_{xx}}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial\theta}-Q_{xz}+\frac{1}{2}\frac{\partial Y_{\theta x}}{\partial x}\\&-\frac{1}{2R}\frac{\partial}{\partial\theta}(Y_{zz}-Y_{\theta\theta})+\frac{Y_{zz}}{R}+\frac{1}{2R}\frac{\partial^2 T_{zx}}{\partial\theta\partial x}\\&+\frac{1}{2R^2}\frac{\partial^2 T_{\theta z}}{\partial\theta^2}=I_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+I_2\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\psi_\theta:&\frac{1}{R}\frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x}-Q_{z\theta}\\&+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(Y_{zz}-Y_{xx}+\frac{T_{\theta\theta}}{R}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial Y_{\theta x}}{\partial\theta}+\frac{Y_{xz}}{2R}\\&-\frac{1}{2R}\frac{\partial^2 T_{\theta z}}{\partial\theta\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 T_{zx}}{\partial x^2}=I_1\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)+I_2\left(\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial t^2}\right)\end{aligned}$$

که در رابطه (۱۴)، پارامترهای تعریف شده در پیوست ضمیمه شده است.

۳- روش حل:

برای معادلات حاکم بر مسأله با توجه به نوع شرط مرزی تکیه‌گاه ساده در دو طرف نانوپوسته از روش حل نویر استفاده شده و بدین منظور جواب‌ها به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix}u(x,\theta,t)\\v(x,\theta,t)\\w(x,\theta,t)\\\psi_x(x,\theta,t)\\\psi_\theta(x,\theta,t)\end{Bmatrix}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\begin{Bmatrix}U_{mn}\cos(\frac{m\pi}{l}x)\cos(n\theta)e^{i\omega t}\\V_{mn}\sin(\frac{m\pi}{l}x)\sin(n\theta)e^{i\omega t}\\W_{mn}\sin(\frac{m\pi}{l}x)\cos(n\theta)e^{i\omega t}\\\Psi_{x\,mn}\cos(\frac{m\pi}{l}x)\cos(n\theta)e^{i\omega t}\\\Psi_{\theta mn}\sin(m\frac{n\pi}{l}x)\sin(n\theta)e^{i\omega t}\end{Bmatrix}\qquad(۱۵)$$

حال با جایگذاری رابطه (۱۵) در معادلات حاکم به راحتی می‌توانیم ماتریس زیر را تشکیل دهیم:

$$\left(K-\omega^2[M]\right)\begin{Bmatrix}U_{mn}\\V_{mn}\\W_{mn}\\\Psi_{x\,mn}\\\Psi_{\theta mn}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{Bmatrix}\qquad(۱۶)$$

که در این رابطه ω فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای، [M] ماتریس جرم پوسته استوانه‌ای، [K] ماتریس سفتی پوسته استوانه‌ای می‌باشند. همچنین $\{U_{mn}\ V_{mn}\ W_{mn}\ \Psi_{x\,mn}\ \Psi_{\theta\,mn}\}^T$ بردار ثوابت است که T به مفهوم ماتریس ترانهاده است. بدین ترتیب با حل معادله مقدار ویژه (۱۶)، مقدار بسامد طبیعی و بردارهای ثوابت تعیین می‌شود.

٤- بررسی و تحلیل نتایج:

در این بخش ابتدا اعتبارسنجی از فرمول‌بندی فوق و سپس ارتعاشات آزاد نانوپوسته مدرج تابعی روی بستر الاستیک بر طبق نظریهٔ تنش کوپل اصلاح شده مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین، تأثیر پارامترهایی مانند پارامتر مقیاس طول، نسبت حجمی (N)، طول پوسته استوانه‌ای، ضرایب بستر الاستیک وینکلر، پاسترناک و شماره مودهای m و n که به ترتیب مربوط به شماره مود محوری و جانبی می‌باشد، بر بسامد طبیعی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. خواص مکانیکی در نظر گرفته شده برای پژوهش فوق به صورت جدول ۱ درنظر گرفته می‌شود:

جدول ۱: خواص مواد ماده مدرج تابعی

Table 1. Materials properties of FG material

خواص مکانیکی	واحد	آلومینیوم (Al)	سرامیک (SiC)	نانو لوله کربن
E	GPa	۷۰	۴۲۷	۱۱۰۰
ν	ندارد	۰/۳	۰/۱۷	۰/۳
ρ	Kg/m³	۲۷۰۲	۳۱۰۰	۲۳۰۰

۴- ۱- اعتبار سنجی از نتایج با شبیه‌سازی دینامیک مولکولی:

بر پایه مطالعات انجام شده پژوهشگران بر روی شبیه‌سازی دینامیک مولکولی، هیچ اعتبارسنجی تاکنون برای نانوپوسته استوانه‌ای مدرج تابعی بر پایه نظریهٔ تنش کوپل اصلاح شده انجام نشده است؛ بنابراین صحت نتایج برای یک نانوپوسته همگن ایزوتروپیک با قرار دادن N=۰ براساس مقایسه با نتایج دینامیک مولکولی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. لازم به ذکر است که خواص مکانیکی مواد به کار رفته در این بخش به صورت جدول ۱ می‌باشد.

جدول ۲: مقایسه بسامد طبیعی (تراهرتز) نانوپوسته غیرکلاسیک با نتایج شبیه‌سازی دینامیک مولکولی در $L/2R$ های متفاوت

Table 2. comparison of natural frequencies (THz) of non-classical nanoshell with results of MD simulation in different $L/2R$ ratios.

$L/2R$	شبیه‌سازی دینامیک مولکولی[۲۱]	نظریه تنش کوپل اصلاح شده($l=R/3$)	خطا (درصد)
۸/۳	۰/۵۲۹۹	۰/۵۳۰۸	۰/۱۷
۱۰/۱	۰/۳۶۱۸	۰/۳۶۳۴	۰/۴۴
۱۳/۷	۰/۱۹۳۶	۰/۱۹۰۱	۱/۵۵
۱۷/۳	۰/۱۱۰۳	۰/۱۱۰۵	۰/۱۸
۲۰/۹	۰/۰۷۲۴	۰/۰۷۲۹	۰/۶۹
۲۴/۵	۰/۰۵۱۹	۰/۰۵۱۱	۱/۵۴
۲۸/۱	۰/۰۴۲۵	۰/۰۴۲۲	۰/۷۰

همان‌گونه که در جدول ۲ مشاهده می‌شود حداکثر خطای پوسته استوانه‌ای با نظریهٔ تنش کوپل اصلاح شده ۱/۵۵ درصد است؛ بنابراین مدل پیشنهادی به مدل شبیه‌سازی دینامیک مولکولی که توسط پژوهشگران قبلی انجام شده است فوق‌العاده نزدیک می‌باشد. براین اساس می‌توان به جای شبیه‌سازی دینامیک مولکولی از مدل‌سازی مفروض و نتایج آن بهره برد. توجه شود بسیاری از پدیده‌های طبیعی که بر روی نانوپوسته رخ می‌دهد، نمی‌توان شبیه‌سازی آن را در دینامیک مولکولی انجام داد؛ پس مدل‌سازی ریاضیاتی فوق می‌تواند این نقص را به خوبی پوشش دهد. در جدول ۳ بسامدهای طبیعی بدون بعد برای پوسته استوانه‌ای با شرایط مرزی دو طرف ساده به شعاع ۲ نانومتر، مدول یانگ ۱/۰۶ تراپاسکال شاخص پوواسون ۰/۳، چگالی $2300\ Kg/m^3$ و نسبت طول به شعاع ۱ مقایسه شده است. قابل توجه است که بسامد بی‌بعد به صورت $\Omega = \omega R\sqrt{\rho/E}$ در نظر گرفته شده است. همچنین به عنوان مقایسه‌ای دیگر، بسامدهای به‌دست‌آمده در این پژوهش با بسامدهای به دست‌آمده توسط لوی و همکاران (با درنظرگرفتن نظریه کلاسیک پوسته استوانه‌ای) و با فرض ضریب پوواسون ۰/۳، نسبت طول به شعاع ۲۰، نسبت ضخامت به شعاع ۰/۰۱ و شماره مود طولی ۱ بررسی شده است. همچنین پارامتر بسامد بی‌بعد در جدول ۴ نیز $\Omega = \omega R\sqrt{(1-\nu^2)\rho/E}$ می‌باشد. همان‌طورکه مشاهده می‌شود دقت و صحت روش حل حاضر و نتایج به دست آمده تأیید شده است.

جدول ۳: مقایسه بسامدهای طبیعی بی‌بعد پوسته استوانه‌ای به ازای پارامترهای متفاوت

Table 3. Comparison of dimensionless natural frequency of cylindrical shell for different parameters.

h/R	۰/۱			۰/۲		
N	۱	۲	۳	۱	۲	۳
مرجع [۲۲]	۰/۹۲۳	۰/۷۷۴	۰/۷۱۰	۱/۰۴۳	۰/۹۶۶	۱/۰۵
نتایج حاضر	۰/۹۳۳	۰/۷۷۶	۰/۷۱۳	۱/۰۴۸	۰/۹۷۱	۱/۰۵

جدول ٤: مقایسه بسامدهای طبیعی بی‌بعد پوسته استوانه‌ای به ازای مقادیر مختلفی از شماره مد فرکانسی عرضی

Table 4. Comparison of dimensionless natural frequency of cylindrical shell for different values of circumferential wave number.

n	لوی و همکاران [۲۳]	نتایج حاضر	اختلاف (٪)
۱	۰/۰۱۶۱۰۱	۰/۰۱۵۸۰۹۹	۰/۱۸
۲	۰/۰۰۹۳۸۲	۰/۰۰۹۰۹۵۹	۳/۰۴
۳	۰/۰۲۲۱۰۵	۰/۰۲۱۷۱۴۳	۰/۱۷
۴	۰/۰۴۲۰۹۵	۰/۰۴۱۳۶۲۵	۰/۱۷

در شکل ۲ بسامدهای طبیعی (تراهرتز) برای نانوپوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با شرایط مرزی پین۴ شده از هر طرف به ازای مقادیر مختلف طول نانواستوانه و توان‌های مختلف ماده مدرج تابعی با نتایج گزارش شده توسط بنی و همکاران مقایسه شده است. بر طبق شکل ۲ مشاهده می‌شود که نتایج پژوهش حاضر با نتایج به دست آمده توسط بنی و همکاران تطابق بسیار خوبی دارد.

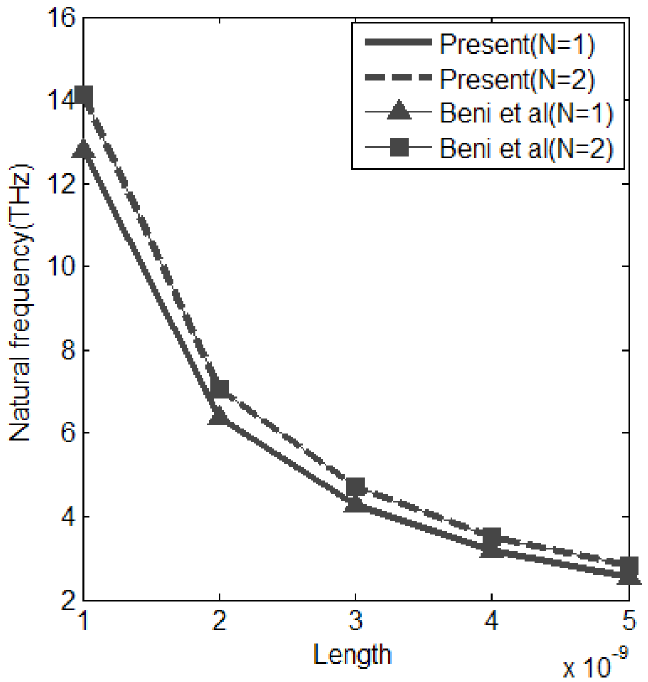

Fig. 2. Comparison of the natural frequency of FG cylindrical nanoshell with the results obtained by Beni et al

شکل ۲: مقایسه بسامد نانوپوسته استوانه مدرج تابعی با نتایج به دست آمده توسط بنی و همکاران[۱۷]

۵- تجزیه و تحلیل نتایج

در این بخش مقادیر بسامد طبیعی ناشی از ارتعاش آزاد نانوپوسته استوانه‌ای تابعی مدرج به ازای تغییرات پارامترهای گوناگون مانند نسبت طول به شعاع *L/R*، نسبت طول به ضخامت *L/h*، پارامتر مقیاس طول ماده، شاخص توانی نسبت حجمی (*N*)، ضرایب بستر الاستیک وینکلر و پاسترناک بررسی شده است. در این پژوهش از Sic به عنوان سرامیک و از Al به عنوان فلز استفاده شده و شرایط مرزی برای کلیه نتایج ارائه شده، تکیه‌گاه ساده در دو انتها فرض شده است. همچنین پارامتر مقیاس طول با توجه به مقایسه با نتایج دینامیک مولکولی در بخش قبل *R*/۴، *R*/۳ و *R*/۲ فرض شده است.

در شکل‌های ۳ و ۴ نمودار تغییرات بسامد طبیعی برحسب نسبت طول به شعاع نانوپوسته استوانه‌ای نمایش داده شده است که در آن به ترتیب هردو ضریب بستر الاستیک پاسترناک و وینکلر صفر و غیر صفر و شماره مود محیطی و طولی برابر با یک فرض شده است. همان‌گونه که مشاهده

می‌شود، با افزایش نسبت طول به شعاع، روند کاهشی بسامد طبیعی در ابتدا با شیب نسبتاً زیادی صورت می‌گیرد؛ اما رفته رفته با افزایش نسبت طول به شعاع از شیب تغییرات کاسته می‌شود؛ همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش پارامتر مقیاس طول ماده، بسامد طبیعی افزایش می‌یابد. لازم به ذکر است که مطابق با شکل ۳، در L/Rهای کوچک تأثیر مقیاس طول ماده بر بسامد نانوپوسته استوانه‌ای بیشتر بوده و با افزایش نسبت L/R این تأثیر کاهش می‌یابد؛ اما همان‌طورکه در شکل ۴ مشاهده می‌شود اگر ضریب بستر الاستیک پاسترناک و وینکلر غیر صفر (k_w=۵×۱۰^{۱۴} , k_p=۱۰^{۱۴}) فرض شود، تأثیر مقیاس طول ماده بر بسامد طبیعی برای همه L/Rها یکسان است.

در جدول ۵ تغییرات بسامد طبیعی بی‌بعد برحسب شماره مود محیطی و پارامتر مقیاس طول ماده نمایش داده شده است که در این جدول هر دو ضریب بستر الاستیک پاسترناک و وینکلر صفر، شماره مود طولی برابر با یک، طول ۱۰ نانومتر، شعاع ۱ نانومتر و ضخامت ۰/۰۴ نانومتر فرض شده است. با توجه به نتایج مشاهده می‌شود، کمترین مود فرکانسی بدون درنظرگرفتن اثرات اندازه، در مود دوم فرکانسی اتفاق می‌افتد درحالی‌که با درنظرگرفتن تنش کوپل اصلاح شده، کمترین مود فرکانسی در مود اول فرکانسی صورت می‌گیرد.

تغییرات بسامد طبیعی بی‌بعد برحسب شماره مود محیطی و پارامتر مقیاس طول ماده جدول ۶ نمایش داده شده است که در آن هر دو ضریب بستر الاستیک پاسترناک و وینکلر غیر صفر (k_w=۵×۱۰^{۱۴} , k_p=۱۰^{۱۴}) فرض می‌شود. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، کمترین مود فرکانسی نانوپوسته استوانه‌ای بدون درنظرگرفتن اثرات اندازه و همچنین با درنظرگرفتن تنش کوپل اصلاح شده، در مود اول فرکانسی اتفاق می‌افتد. مطابق با جدول ۷

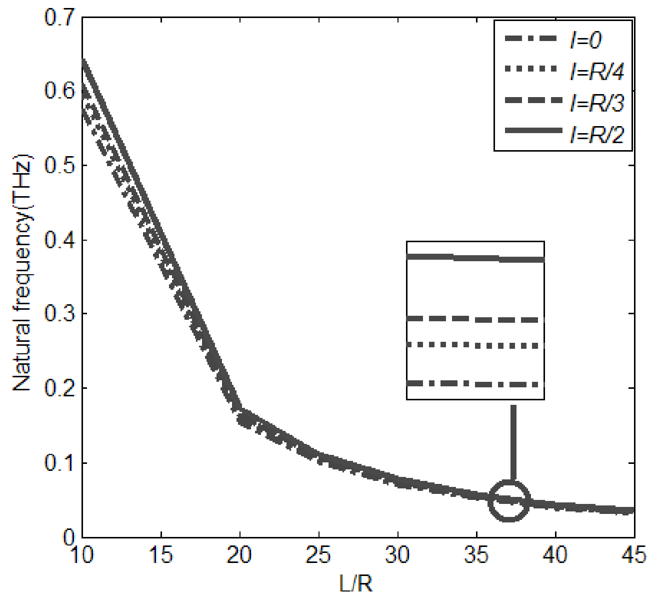

Fig. 3. Effect of variations of length to radius ratio on fundamental natural frequency of cylindrical nanoshell without elastic foundation

شکل ۳: تأثیر تغییرات نسبت طول به شعاع بر بسامد طبیعی پایه نانو پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی بدون بستر الاستیک

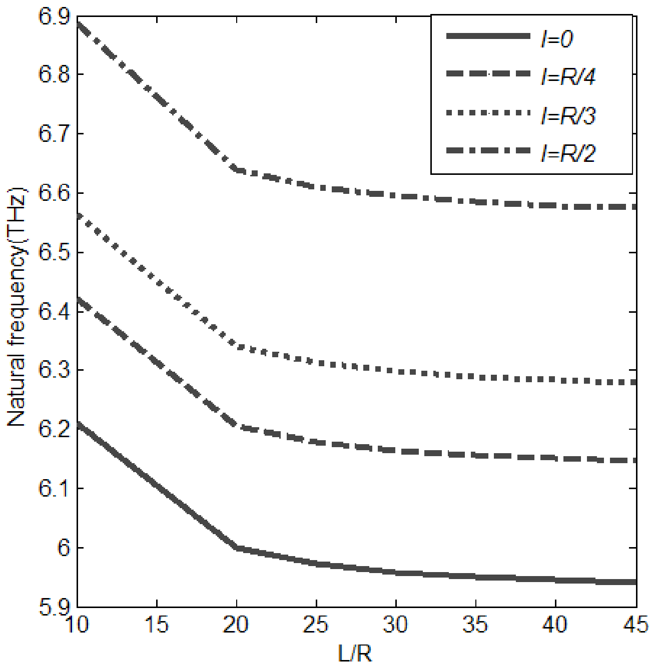

Fig. 4. Effect of variations of length to radius ratio on fundamental natural frequency of cylindrical nanoshell surrounded by elastic foundation

شکل ٤: تاثیر تغییرات نسبت طول به شعاع بر بسامد طبیعی پایه نانوپوسته استوانه‌ای مدرج تابعی احاطه شده توسط بستر الاستیک

تغییرات بسامد طبیعی بی‌بعد برحسب شاخص توانی نسبت حجمی (N) و پارامتر مقیاس طول ماده بررسی شده است. نتایج با فرض دو ضریب بستر الاستیک پاسترناک و وینکلر غیر صفر (k_w=۵×۱۰^{۱۴} , k_p=۱۰^{۱۴})، شماره مود محیطی و طولی برابر با یک، طول ۱۰ نانومتر، شعاع ۱ نانومتر و ضخامت ۰/۰۴ نانومتر تحلیل شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود با افزایش شاخص توانی نسبت حجمی، بسامد طبیعی افزایش می‌یابد. دلیل این امر این است که با افزایش ضریب نسبت حجمی، سفتی نانو پوسته استوانه‌ای افزایش یافته و منجر به افزایش بسامد طبیعی نانوپوسته می‌شود.

در پژوهش حاضر، به دلیل این‌که کرنش‌های جانبی ثابت در نظر گرفته شده‌اند و ثابت ماندن این کرنش‌ها منجر به ثابت ماندن تنش‌های جانبی

جدول ۵: تغییرات بسامد طبیعی بی‌بعد نانوپوسته استوانه‌ای مدرج تابعی بدون بستر الاستیک با تغییر در شماره مود فرکانسی عرضی و پارامتر مقیاس طول ماده

Table 5. Variations of dimensionless natural frequency of FG nanoshell without elastic foundation with change in circumferential wave number and material length scale parameter.

l=R/2	l=R/3	l=R/4	کلاسیک (l=0)	
۰/۰۵۴۷۱۸	۰/۰۵۱۹۶۶	۰/۰۵۰۷۸۶	۰/۰۴۹۰۳۲	n = ۱
۰/۵۵۴۹۷۲	۰/۴۱۴۷۶۴	۰/۳۲۶۶۰۹	۰/۰۲۹۶۲۵	n = ۲
۱/۳۴۵۴۹۱	۱/۰۶۹۹۶۵	۰/۸۶۸۲۶۸	۰/۰۶۶۶۵۳	n = ۳
۲/۲۲۸۰۳۲	۱/۸۷۰۰۲۸	۱/۵۶۵۳۱۰	۰/۱۲۵۷۴۸	n = ۴
۳/۱۳۲۰۲۸	۲/۷۴۷۱۲۹	۲/۳۶۸۸۳۲	۰/۲۰۲۲۱۴	n = ۵

جدول ٦: تغییرات بسامد طبیعی بی‌بعد نانوپوسته استوانه‌ای مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک با تغییر در مود فرکانسی و پارامتر مقیاس طول ماده

Table 6. Variations of dimensionless natural frequency of FG nanoshell surrounded by elastic foundation with change in circumferential wave number and material length scale parameter.

	کلاسیک $(l=0)$	$l=R/4$	$l=R/3$	$l=R/2$
n = ۱	۰/۵۲۹۰۴۸	۰/۵۴۷۱۲۵	۰/۵۵۹۱۷۲	۰/۵۸۶۷۰۵
n = ۲	۱/۰۲۲۱۰۲	۱/۰۸۳۲۴۶	۱/۱۲۸۰۲۶	۱/۲۴۶۱۱۹
n = ۳	۱/۵۲۲۸۵۹	۰/۶۷۰۳۵۰	۱/۷۷۶۵۰۰	۲/۰۴۹۵۱۴
n = ۴	۲/۰۲۵۵۱۷	۲/۳۲۱۱۷۳	۲/۵۲۷۲۹۸	۳/۰۴۰۰۷۳
n = ۵	۲/۵۲۸۸۳۴	۳/۰۴۹۷۵۹	۳/۴۰۰۱۱۳	۴/۱۲۵۲۷۲

جدول ۷: تغییرات بسامد طبیعی بی‌بعد نانوپوسته استوانه‌ای مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک با تغییر در مقیاس طول ماده و شاخص توانی نسبت حجمی.

Table 7. Variations of dimensionless natural frequency of FG nanoshell surrounded by elastic foundation with change in FG power index and material length scale parameter.

	کلاسیک $(l=0)$	$l=R/4$	$l=R/3$	$l=R/2$
فلز	۰/۲۸۱۱۷۲	۰/۲۹۰۸۱۹	۰/۲۹۷۲۴۸	۰/۳۱۱۹۵
$N=$۰/۲	۰/۳۸۲۵۰۳	۰/۳۹۵۵۷۳	۰/۴۰۴۲۸۴	۰/۴۲۴۲۲۰
$N=$۲	۰/۵۸۷۱۹۲	۰/۶۰۷۲۹۱	۰/۶۲۰۶۸۴	۰/۶۵۱۲۸
سرامیک	۰/۶۸۶۱۲۳	۰/۷۰۹۷۵۸	۰/۷۲۵۵۰۰	۰/۷۶۱۴۴

می‌شود و با توجه به این‌که این تنش در راستای طولی در حال تغییر می‌باشد؛ بنابراین ثابت فرض کردن تنش‌های جانبی منجر به ایجاد خطا در نتایج خواهد شد و جهت رفع این مشکل و کاهش خطا معمولاً ضریب تصحیح درنظر گرفته می‌شود. براین اساس مطابق جدول ۸ تغییرات بسامد طبیعی بی‌بعد برحسب ضریب تصحیح برشی و پارامتر مقیاس طول ماده بررسی شده است که در آن هر دو ضریب بستر الاستیک پاسترناک و وینکلر غیر صفر $(k_w=5\times10^{14}\ ,\ k_p=10^{14})$، شماره مود محیطی و طولی برابر با یک، طول ۱۰ نانومتر، شعاع ۱ نانومتر و ضخامت ۰/۰۴ نانومتر فرض شده است. همان‌گونه که از نتایج مشاهده می‌شود، با افزایش ضریب تصحیح برشی (k_s) بسامد طبیعی نانوپوسته استوانه‌ای مدرج تابعی افزایش می‌یابد. بر طبق این جدول، با درنظرگرفتن نظریهٔ کلاسیک، ضریب تصحیح برشی تأثیر چندانی بر روی بسامد طبیعی ندارد درحالی‌که با درنظرگرفتن نظریهٔ تنش کوپل اصلاح شده، این فاکتور تأثیر بیشتری بر بسامد طبیعی نانوپوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دارد؛ بنابراین مطابق با نتایج به‌دست آمده، ضریب تصحیح برشی به عنوان یک فاکتور مهم بر روی رفتار ارتعاشی نانو پوسته استوانه‌ای باید در نظر گرفته شود.

در جدول ۹ نمودار تغییرات بسامد طبیعی نانو پوسته استوانه ای مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک به ازای مقادیر مختلف مقیاس طول ماده و ضرایب بستر الاستیک نمایش داده شده است. نتایج با توجه به شماره مود محیطی و طولی برابر با یک، طول ۱۰ نانومتر و شعاع ۱ نانومتر گزارش شده است. همان گونه که مشاهده می شود، با در نظر گرفتن تئوری کلاسیک و $k_p=0$ کمترین مقدار بسامد در مود دوم فرکانسی اتفاق می افتد اما ، با در نظر گرفتن تئوری کلاسیک و $k_w=0$، کمترین مقدار بسامد در مود اول فرکانسی صورت میگیرد. همچنین تاثیر پارامتر مقیاس طول ماده بر نانوپوسته روی بستر الاستیک در شماره مودهای محیطی بالاتر بیشتر است. نکته قابل توجه این که با در نظر گرفتن نظریهٔ تنش کوپل اصلاح شده، به ازای کلیه مقادیر سختی های بستر الاستیک، کمترین بسامد در مود اول فرکانسی صورت میگیرد. علاوه بر این اثر بستر پاسترناک بر روی مقادیر بسامد طبیعی نانو پوسته استوانه ای در اعداد موج پایین تر، بیشتر از بستر وینکلر می باشد. این در حالتی است که بستر وینکلر باعث افزایش مقادیر بسامد طبیعی در اعداد موج بزرگتر می شود. به طور کلی می توان گفت که وجود بستر الاستیک باعث افزایش بسامد طبیعی در ارتعاش آزاد نانو پوسته استوانه ای می شود.

جدول ۸: تغییرات بسامد طبیعی بی‌بعد نانوپوسته استوانه‌ای مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک با تغییر در ضریب تصحیح برشی و پارامتر مقیاس طول ماده

Table 8. Variations of dimensionless natural frequency of FG nanoshell surrounded by elastic foundation with change in shear correction factor and material length scale parameter.

ضریب تصحیح (k_s)	کلاسیک $(l=0)$	$l=R/4$	$l=R/3$	$l=R/2$
۵/۱۰۰۰	۰/۵۲۲۷۸۸	۰/۵۲۸۰۴	۰/۵۲۸۵۶	۰/۵۲۹۹۳
۵/۱۰۰	۰/۵۲۸۴۲۹	۰/۵۳۰۷۳	۰/۵۳۱۳۹	۰/۵۳۲۸۷
۵/۱۰	۰/۵۲۸۹۹۰	۰/۵۴۰۴۷	۰/۵۴۵۰۷	۰/۵۵۲۱۴
۵/۶	۰/۵۲۹۰۴۵	۰/۵۴۷۱۲	۰/۵۵۹۱۶	۰/۵۸۶۷۰
۱	۰/۵۲۹۰۴۶	۰/۵۴۷۳۶	۰/۵۵۹۸۰	۰/۵۸۸۹۲

جدول ۹: تغییرات بسامد طبیعی بی‌بعد نانوپوسته استوانه‌ای مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک با تغییر در مقادیر سختی بستر الاستیک و پارامتر مقیاس طول ماده

Table 9. Variations of dimensionless natural frequency of FG nanoshell surrounded by elastic foundation with change in elastic foundation hardness values and material length scale parameter.

	$l=0$, $k_w=0$, $k_p=10^{13}$	$l=0$, $k_w=10^{13}$, $k_p=0$	$l=R/3$, $k_w=0$, $k_p=10^{13}$	$l=R/3$, $k_w=10^{13}$, $k_p=0$
n = ۱	۰/۵۲۹۰۴۹	۰/۰۴۹۰۶۳	۰/۵۵۹۸۰۸	۰/۰۵۲۰۳۷
n = ۲	۱/۰۲۲۱۳۴	۰/۰۲۹۷۱۷	۱/۱۲۹۰۴۵	۰/۴۲۸۱۸۱
n = ۳	۱/۵۲۲۹۸۸	۰/۰۶۶۷۲۰	۱/۷۷۷۲۷۰	۱/۱۵۵۷۷۱
n = ۴	۲/۰۲۵۸۴۹	۰/۱۲۶۰۴۹	۲/۵۲۷۹۵۱	۲/۱۱۹۷۹۴
n = ۵	۳/۰۳۳۵۷۷	۰/۲۰۲۹۵۹	۳/۴۰۰۷۵۴	۳/۲۱۹۵۲۰
n = ۶	۳/۵۳۷۸۶۴	۰/۲۹۹۹۶۹	۴/۴۰۹۸۷۸	۴/۳۰۸۱۸۰
n = ۷	۰/۰۴۲۲۸۶	۰/۴۰۷۹۹۱	۵/۵۶۵۱۰۷	۵/۳۰۱۷۳۱

٦- نتیجه‌گیری

در مطالعه حاضر تحلیل ارتعاش آزاد نانوپوسته استوانه‌ای تابعی مدرج بر روی بستر الاستیک براساس نظریهٔ تنش کوپل اصلاح شده مورد ارزیابی قرار گرفت. جهت تحلیل ارتعاش پوسته استوانه‌ای از نظریهٔ تغییر شکل برشی رتبه اول استفاده شده است. روش حل مورد استفاده روش تحلیلی نویر بوده و شرایط مرزی دو طرف ساده فرض شده است. با بررسی نتایج در می‌یابیم که استفاده از نظریهٔ کلاسیک برای تحلیل بسامد سازه‌ها در مقیاس کوچک نامناسب بوده و توصیه نمی‌شود. استفاده از نظریه‌های غیرکلاسیک از جمله تنش کوپل به علت درنظرگرفتن واکنش‌های درون اتمی و ریزساختاری پوسته استوانه‌ای منجر به حصول نتایجی مناسب می‌شود؛ همچنین طبق نتایج به‌دست‌آمده، رفتار ارتعاشی مدل پیشنهادی حاضر، به رفتار ارتعاشی مدل پیشنهادی نانولوله‌های کربن به‌دست‌آمده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی بسیار نزدیک بوده و به جای شبیه‌سازی دینامیک مولکولی می‌توان از مدل ارائه شده بهره برد. در خصوص تأثیرات پارامترهای هندسی پوسته استوانه‌ای بر روی بسامد سامانه می‌توان گفت:

۱. با افزایش نسبت طول به شعاع نانو پوسته استوانه‌ای مقدار بسامد طبیعی کاهش می‌یابد.
۲. با افزایش مقدار ضریب نسبت حجمی توانی، مقدار بسامد طبیعی افزایش می‌یابد.
۳. با افزایش ضریب تصحیح برشی مقدار بسامد طبیعی افزایش می‌یابد.
۴. با افزایش مقدار سختی بستر الاستیک پاسترناک و وینکلر، بسامد طبیعی افزایش می‌یابد.

ضمیمه

$$\{A_{11},B_{11},D_{11}\}=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{E(z)}{1-\nu^2(z)}\{1,z,z^2\}dz,$$
$$\{A_{12},B_{12},D_{12}\}=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{E(z)\nu(z)}{1-\nu^2(z)}\{1,z,z^2\}dz,$$
$$\{A_{55},B_{55},D_{55}\}=\int_{-h/2}^{h/2}\mu\{1,z,z^2\}dz$$

$$N_{xx}=A_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+B_{11}\frac{\partial \psi_x}{\partial x}+A_{12}\left(\frac{\partial v}{R\partial\theta}+\frac{w}{R}\right)+B_{12}\frac{\partial\psi_\theta}{R\partial\theta},$$
$$Q_{xz}=k_sA_{55}(\psi_x+\frac{\partial w}{\partial x}),$$
$$N_{\theta\theta}=A_{11}(\frac{w}{R}+\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\theta})+B_{11}\frac{1}{R}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}+A_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+B_{12}\frac{\partial\psi_x}{\partial x},$$
$$Q_{z\theta}=k_sA_{44}(\psi_\theta+\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\theta}-\frac{v}{R}),$$
$$N_{x\theta}=A_{66}(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial x})+B_{66}(\frac{1}{R}\frac{\partial\psi_x}{\partial\theta}+\frac{\partial\psi_\theta}{\partial x}),$$
$$M_{xx}=B_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+D_{11}\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+B_{12}\left(\frac{\partial v}{R\partial\theta}+\frac{w}{R}\right)+D_{12}\frac{\partial\psi_\theta}{R\partial\theta},$$
$$M_{\theta\theta}=B_{11}(\frac{w}{R}+\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\theta})+D_{11}\frac{1}{R}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}+B_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+D_{12}\frac{\partial\psi_x}{\partial x},$$

$$M_{x\theta}=B_{66}(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial x})+D_{66}(\frac{1}{R}\frac{\partial\psi_x}{\partial\theta}+\frac{\partial\psi_\theta}{\partial x}),$$
$$Y_{xx}=-A_{77}L^2(\frac{\partial\psi_\theta}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial\theta}),$$
$$Y_{\theta\theta}=-A_{77}L^2\left[\frac{1}{R}(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{\partial v}{\partial x})+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial\theta}-\frac{1}{R}\frac{\partial\psi_x}{\partial\theta}\right]$$
$$-B_{77}L_2(-\frac{\partial\psi_\theta}{\partial x}),$$
$$Y_{zz}=-A_{77}L^2\left[-\frac{1}{R^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{1}{R}\frac{\partial\psi_x}{\partial\theta}-\frac{\partial\psi_\theta}{\partial x}\right],$$
$$Y_{x\theta}=-\frac{A_{77}L^2}{2}(\frac{1}{R^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}-\frac{\partial\psi_x}{\partial x}),$$
$$Y_{xz}=-\frac{A_{77}L^2}{2}\left[-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{v}{R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\theta}+\frac{\psi_\theta}{R}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right]$$
$$-\frac{B_{77}L^2}{2}(\frac{1}{R}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial\theta}-\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial x^2}),$$
$$Y_{\theta z}=-\frac{A_{77}L^2}{2}\left[\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial\theta}+\frac{\psi_x}{R}-\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial x}\right]$$
$$-\frac{B_{77}L^2}{2}(\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial\theta^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial x\partial\theta}),$$
$$T_{xz}=-\frac{B_{77}L^2}{2}\left[-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{v}{R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\theta}+\frac{\psi_\theta}{R}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right]$$
$$-\frac{D_{77}L^2}{2}(\frac{1}{R}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial\theta}-\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial x^2}),$$
$$T_{\theta z}=-\frac{B_{77}L^2}{2}\left[\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial\theta}+\frac{\psi_x}{R}-\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial x}\right]$$
$$-\frac{D_{77}L^2}{2}(\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial\theta^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial x\partial\theta}).$$
$$T_{\theta\theta}=-B_{77}L^2\left[\frac{1}{R}(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{\partial v}{\partial x})+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial\theta}-\frac{1}{R}\frac{\partial\psi_x}{\partial\theta}\right]$$
$$-D_{77}L_2(-\frac{\partial\psi_\theta}{\partial x}),$$
$$\{I_0,I_1,I_2\}=\int_{-h/2}^{h/2}\rho\{1,z,z^2\}dz$$

منابع

[1] E. Müller, Č. Drašar, J. Schilz, W. Kaysser, Functionally graded materials for sensor and energy applications, *Materials Science and Engineering: A*, 362(1) (2003) 17-39.

[2] J. Qiu, J. Tani, T. Ueno, T. Morita, H. Takahashi, H. Du, Fabrication and high durability of functionally graded piezoelectric bending actuators, *Smart materials and Structures*, 12(1) (2003) 115.

[3] L.S. Liu, Q.J. Zhang, P.C. Zhai, The Optimization Design on Metal/Ceramic FGM Armor with Neural Net and Conjugate Gradient Method, in: Materials Science Forum, *Trans Tech Publ*, (2003) 791-796.

[4] M. Vable, *Intermediate mechanics of materials*, Oxford University Press New York, NY, 2008.

on the bending of elastic plates, (1945).

[15] R.D. Mindlin, *Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates*, (1951).

[16] M. Farid, P. Zahedinejad, P. Malekzadeh, Three-dimensional temperature dependent free vibration analysis of functionally graded material curved panels resting on two-parameter elastic foundation using a hybrid semi-analytic, differential quadrature method, *Materials & Design*, 31(1) (2010) 2-13.

[17] Y.T. Beni, F. Mehralian, H. Razavi, Free vibration analysis of size-dependent shear deformable functionally graded cylindrical shell on the basis of modified couple stress theory, *Composite Structures*, 120 (2015) 65-78.

[18] M. Mohammadimehr, M. Moradi, A. Loghman, Influence of the Elastic Foundation on the Free Vibration and Buckling of Thin-Walled Piezoelectric-Based FGM Cylindrical Shells Under Combined Loadings, *Journal of Solid Mechanics Vol*, 6(4) (2014) 347-365.

[19] T.R. Tauchert, *Energy principles in structural mechanics*, McGraw-Hill Companies, 1974.

[20] R. Ansari, R. Gholami, H. Rouhi, Vibration analysis of single-walled carbon nanotubes using different gradient elasticity theories, *Composites Part B: Engineering*, 43(8) (2012) 2985-2989.

[21] K. Soldatos, V. Hadjigeorgiou, Three-dimensional solution of the free vibration problem of homogeneous isotropic cylindrical shells and panels, *Journal of Sound and Vibration*, 137(3) (1990) 369-384.

[22] C. Loy, K. Lam, C. Shu, Analysis of cylindrical shells using generalized differential quadrature, *Shock and Vibration*, 4(3) (1997) 193-198.

[5] M. Rahaeifard, M. Kahrobaiyan, M. Ahmadian, Sensitivity analysis of atomic force microscope cantilever made of functionally graded materials, in: ASME 2009 international design engineering technical conferences and computers and information in engineering conference, *American Society of Mechanical Engineers*, (2009) 539-544.

[6] Y. Fu, H. Du, W. Huang, S. Zhang, M. Hu, TiNi-based thin films in MEMS applications: a review, *Sensors and Actuators A: Physical*, 112(2) (2004) 395-408.

[7] A. Witvrouw, A. Mehta, The use of functionally graded poly-SiGe layers for MEMS applications, in: Materials science forum, *Trans Tech Publ*, 2005, pp. 255-260.

[8] A. Chong, D.C. Lam, Strain gradient plasticity effect in indentation hardness of polymers, *Journal of Materials Research*, 14(10) (1999) 4103-4110.

[9] F. Yang, A. Chong, D. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, 39(10) (2002) 2731-2743.

[10] R. Gholami, R. Ansari, A. Darvizeh, S. Sahmani, Axial buckling and dynamic stability of functionally graded microshells based on the modified couple stress theory, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 15(04) (2015) 1450070.

[11] A.E.H. Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Cambridge University Press, 2013.

[12] L.H. Donnell, A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending, *Trans. Asme*, 56(11) (1934) 795-806.

[13] J.L. Sanders Jr, *An improved first-approximation theory for thin shells*, 1959.

[14] E. Reissner, *The effect of transverse shear deformation*

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

M. Ghadiri and H. Safarpour, Free Vibration Analysis of a Functionally Graded Cylindrical Nanoshell Surrounded by Elastic Foundation Based on the Modified Couple Stress Theory, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 49(4) (2018) 721-730.

DOI: 10.22060/mej.2016.802