

## تحلیل ارتعاشات آزاد میکرو تیر تیموشنکوی جفت شده کربنی و نیتريد بور تحت میدان‌های فیزیکی مختلف برای شرایط مرزی مدار بسته با استفاده از نظریه تنش کوپل اصلاح شده

مهدی محمدی مهر<sup>\*</sup>، سید امیرسجاد خدای، مجتبی محرابی

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران.

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۳۰ دی ۱۳۹۴  
بازنگری: ۲۳ اسفند ۱۳۹۴  
پذیرش: ۲۷ تیر ۱۳۹۵  
ارائه آنلاین: ۲۷ مرداد ۱۳۹۵

### کلمات کلیدی:

تحلیل ارتعاشات میکرو تیر تیموشنکو  
میدان‌های فیزیکی مختلف  
نظریه تنش کوپل اصلاح شده  
شرایط مرزی مدار بسته  
فوندانسیون الاستیک

**چکیده:** در این مقاله ارتعاشات آزاد میکرو تیر تیموشنکوی جفت شده بر اساس نظریه تنش کوپل اصلاح شده بر بستر الاستیک تحت میدان‌های فیزیکی مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد. میکروتیرها از جنس پلیمر تقویت شده با نانولوله‌های نیتريد بور یا کربنی هستند. خواص مکانیکی استفاده شده و نحوه توزیع نانولوله‌ها بر اساس نتایج تجربی و رابطه تحلیلی ارائه شده‌اند. معادلات حاکم بر حرکت با استفاده از اصل همپلتون بدست می‌آیند. تاثیر عوامل مختلف شامل اثرات الکتریکی، مغناطیسی، ضریب مقیاس کوچک طول ماده و ضرایب فوندانسیون الاستیک روی بسامد طبیعی میکروسازه بررسی می‌شود. نتایج حاصل از این مقاله نشان می‌دهد که اعمال میدان‌های فیزیکی مختلف، تاثیر بسیاری بر افزایش بسامد طبیعی بدون بعد دارد، به گونه‌ای که اگر هر دو میکروتیر به صورت نانولوله‌های کربنی در نظر گرفته شوند، افزایش بسامد طبیعی نسبت به حالتی که هر دو میکروتیر به صورت نانولوله‌های نیتريد بور باشند، بیشتر است. در حالی که اگر میکروتیرها به طور همزمان توسط نانولوله‌های کربنی و نیتريد بور تقویت شوند، علی‌رغم افزایش بسامد طبیعی، تاثیر این نوع سازه نسبت به دو حالت دیگر کمتر است. همچنین نشان داده می‌شود که اثر بستر الاستیک از تاثیر سایر عوامل مورد بررسی از قبیل جنس و میدان‌های فیزیکی بیشتر است.

### ۱- مقدمه

امروزه با پیشرفت‌های گسترده در علوم مهندسی، نیاز هر چه بیشتر به بهینه‌سازی‌های حاصل از فناوری نانو بیش از پیش احساس می‌شود. یکی از هدف‌های مهم و اصلی در این زمینه، افزایش امکانات فضاپیماها و کاهش وزن سامانه‌های فضایی است. ساخت فضاپیماهای سبک، قوی و مقاوم در برابر تشعشعات فضایی با چنین موادی امکان‌پذیر شده است. نانو حسگرها، موادی بسیار بهبود یافته با عملکرد بالا، یا سامانه‌های پیشران بسیار کارآمد، تنها نمونه‌ای از کاربردهای فناوری نانو می‌باشند. همچنین حفاظت در برابر تابش از دیگر کاربردهای اساسی فناوری نانو در علوم فضایی به حساب می‌آید. مطالعات انجام شده روی ساختارهای ریز مواد مهندسی، تقویت آن‌ها با استفاده از نانولوله‌ها و بررسی تاثیر شرایط فیزیکی گوناگون، نقش مهمی در ساخت وسایل مهندسی در صنایع بسیار پیشرفته زیردریایی، هوایی و فضایی دارد. نانولوله‌های کربنی سبب افزایش و بهبود خواص فیزیکی و مکانیکی پلیمرها شده و خصوصیات الکتریکی و حرارتی رزین‌ها را ارتقا می‌دهند و به سبب آن که مقاوم‌تر از فولاد و سبک‌تر از آلومینیوم هستند، اکثر صنایع را به دلیل پارامتر استحکام به وزن بالا به خود جذب نموده است.

نانو لوله‌های نیتريد بور<sup>۱</sup> علاوه بر خواص مشابه با نانولوله‌های کربنی<sup>۲</sup> مانند پایداری شیمیایی، خواص مکانیکی و هدایت حرارتی بالا، مقاومت بیشتری در برابر اکسیداسیون در دماهای بالاتر دارند [۶-۱]. شوشتری و رضوی [۷] ارتعاشات غیرخطی صفحات نازک مستطیلی مگنتوالکتروالاستیک را بررسی کرده و نشان دادند که بیشترین میزان غیرخطی بودن بسامد برای شرایط مرزی مدار باز اتفاق می‌افتد. استوناوویچ و کوزیچ [۸] ارتعاشات عرضی اجباری تیرهای جفت شده ریلی و تیموشنکو تحت اثر بار فشاری محوری را تحلیل کرده و به این نتیجه رسیدند که مقدار دامنه ارتعاش در حالت پایدار در هر دو تیر مذکور وابسته به تأثیر اینرسی چرخشی، برشی و فشار محوری است. وون و لای [۹] نشان دادند که پارامترهایی از جمله سختی وینکلر به طور قابل توجهی روی ارتعاشات آزاد نانولوله‌های کربنی تک جداره جاسازی شده تأثیر می‌گذارند. محمدی مهر و همکاران [۱۰] با بررسی ارتعاشات و کماتش نانو ورق‌های پیزوالکتریک کامپیوزیتی کوپل تقویت شده با نانولوله‌های نیتريد بور نشان دادند که بسامدهای طبیعی سامانه با افزایش نسبت طول به ضخامت ورق افزایش می‌یابد. آن‌ها همچنین نشان دادند که افزایش نسبت طول نانو ورق‌ها منجر به کاهش بسامدهای طبیعی بدون بعد می‌شود. از دیگر نتایج این تحقیق کاهش بار کماتش

1 Boron nitride nanotubes(BNNT)

2 Carbon nanotubes(CNT)

نویسنده عهده‌دار مکاتبات: mmohammadimehr@kashanu.ac.ir

الکتريکی، مغناطیسی، حضور همزمان این میدانها، ضرایب بستر الاستیک و پارامتر مقیاس کوچک طول ماده روی بسامدهای طبیعی سامانه به صورت مجزا بررسی شده و میزان اثرگذاری هریک از پارامترهای مذکور بر ارتعاشات آزاد میکروتیرهای جفت شده مشخص می‌شود. لازم به ذکر است که تاکنون میکروتیر تیموشنکوی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی و نیتريد بور پایه پلیمری به طور همزمان بررسی نشده است. همچنین نحوه توزیع نانولوله‌ها و خواص استفاده شده برای میکروتیرهای جفت شده تقویت شده به صورت روابط تجربی و تحلیلی به دست آمده از مراجع [۱، ۲] که دارای دقت بالاتری نسبت به چپش‌های مرسوم در سایر منابع تحقیق می‌باشد در نظر گرفته شده است.

## ۲- معادلات حاکم بر حرکت میکرو تیر تیموشنکو تقویت شده با نانولوله‌های کربنی پایه پلیمری

معادلات میدان جابه‌جایی یک میکروتیر تیموشنکو به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} u_1(x, t) = z \phi(x, t) \\ u_2(x, t) = 0 \\ u_3(x, t) = w(x, t) \end{cases} \quad (1)$$

شکل ۱، هندسه در نظر گرفته شده برای دو میکروتیر تیموشنکو جفت شده تقویت شده با نانولوله‌های کربنی و نیتريد بور تحت میدان‌های فیزیکی مختلف را نشان می‌دهد. براساس نظریه تنش کوپل اصلاح شده برای مواد الاستیک خطی و تغییر شکل‌های بسیار کوچک<sup>۴</sup>، انرژی کرنشی ذخیره شده در میکروسازه به صورت رابطه (۲) بیان می‌شود:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dV \quad (2)$$

در این رابطه،  $\sigma_{ij}$  تانسور تنش کوشی و  $m_{ij}$  تنش مرتبه<sup>۵</sup> بالاتر<sup>۵</sup> نامیده می‌شوند که مقادیر آنها به صورت زیر قابل ارائه می‌باشد:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = E \varepsilon_{ij} \\ m_{ij} = 2\mu l_2^2 \chi_{ij} \end{cases} \quad (3)$$

در رابطه فوق،  $\varepsilon_{ij}$  مؤلفه‌های ماتریس کرنش و  $\chi_{ij}$  بخش متقارن تانسور گرادیان چرخشی<sup>۶</sup> است که مؤلفه‌های آنها به صورت روابط ارائه شده (۴) تعریف و با استفاده از رابطه (۱)، مقادیر آنها به دست می‌آید.

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = z \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \phi \right) \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{33} = 0 \end{cases} \quad (4-f)$$

- 4 Small deflection
- 5 Higher-order stresses
- 6 Symmetric rotation gradient tensor

بحرانی به سبب افزایش پارامتر مقیاس کوچک طول ماده در نانو ورق‌ها بود. قربان‌پور آرائی و همکاران [۱۱] روش مربع سازی دیفرانسیلی<sup>۱</sup> غیرمحل را برای تجزیه و تحلیل کمانش غیرخطی صفحه گرافینی دولایه جفت شده با لایه‌های پیروزالکتريک اکسید روی بررسی و نتیجه‌گیری کردند که اثر میدان مغناطیسی سبب پایدارتر شدن سامانه می‌گردد. تجلی و همکاران [۱۲] با تحلیل رفتار مکانیکی مقیاس میکرو برای تیر تیموشنکوی ساخته شده از مواد مدرج تابعی<sup>۲</sup> با استفاده از نظریه گرادیان کرنشی نشان دادند که نظریه‌های غیر کلاسیک نسبت به نظریه کلاسیک باعث سفت‌تر شدن سازه می‌شوند. ترابی و دستجردی [۱۳] به تحلیل ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکو و نانوتیرهای ترک‌خورده با استفاده از مدل الاستیسیته غیرمحل پرداخته و نتیجه‌گیری کردند که شکل مودهای تیر مورد نظرشان تحت تأثیر پارامتر اثر مقیاس کوچک طول ماده قرار نمی‌گیرد. انصاری و همکاران [۱۴] با تحلیل ارتعاشات آزاد میکروتیر مدرج تابعی وابسته به اندازه براساس نظریه گرادیان کرنشی تیر تیموشنکو نتیجه‌گیری کردند که با افزایش نسبت طول به ضخامت میکروتیر، برای همه مقادیر پارامتر مقیاس کوچک طول ماده، مقادیر بسامدهای طبیعی بدون بعد کاهش خواهند داشت. الشربگی [۱۵] با بررسی مشخصه‌های ارتعاشات آزاد تیرهای مدرج تابعی براساس روش‌های اجزا محدود عنوان کرد که ضریب رعنائی، اثری روی بسامدهای اصلی و شکل مودها ندارد. این امر به دلیل محدودیت در نظریه تیر اوپلر برای در نظر نگرفتن اثر برش است.

محمدی مهر و همکاران [۱۶، ۱۷] ارتعاشات آزاد نانو ورق‌های کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی بر محیط ویسکو الاستیک را با استفاده از نظریه گرادیان کرنشی بررسی نمودند. آنها ضمن مقایسه ارتعاشات آزاد ورق‌ها با نظریه‌های کلاسیک، برشی مرتبه اول و نظریه سینوسی نشان دادند که حضور بستر الاستیک و میدان مغناطیسی موجب افزایش بسامدهای طبیعی می‌شود. محمدی مهر و همکاران [۱۸] به بررسی ارتعاشات آزاد، کمانش و خمش میکروورق‌های کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی ساخته شده از مواد مدرج تابعی با استفاده از نظریه‌های مرتبه سوم تغییر شکل برشی و گرادیان کرنشی در حالتی که خواص ماده مورد نظر تحت شرایط محیطی حرارتی و رطوبتی قرار دارد، پرداختند. آنها نشان دادند که اثر پارامتر مقیاس کوچک طول ماده منجر به افزایش سفتی سازه و به موجب آن افزایش بسامدهای طبیعی سامانه می‌شود. آنها همچنین نشان دادند که تأثیرات رطوبت و حرارت به صورت مشابه موجب کاهش بسامدهای طبیعی و بار کمانش بحرانی سازه می‌شود.

در مقاله حاضر، به تحلیل ارتعاشات آزاد میکروتیر تیموشنکوی جفت شده تقویت شده با نانولوله‌های کربنی و نیتريد بور پایه پلیمری، براساس نظریه تنش کوپل اصلاح شده<sup>۳</sup> بر فوندانسیون الاستیک پرداخته و اثرات پارامترهای مختلف، شامل انواع میدان‌های فیزیکی اعم از میدان‌های

- 1 Differential quadrature method(DQM)
- 2 Functionally graded material(FGM)
- 3 Modified couple stress theory(MCST)

### ۳- اثرات میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در میکروتیر تیموشنکو تقویت شده با نانولوله‌های کربنی و نیتريد بور

در این قسمت اثر میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در میکروتیر تیموشنکو مورد بررسی قرار می‌گیرد. بردارهای جابه‌جایی الکتریکی  $D = \{D_x, \theta, D_z\}^T$  و شار مغناطیسی  $B = \{B_x, \theta, B_z\}^T$  مطابق رابطه (۷) تعریف می‌شوند. لازم به ذکر است در نظریه میکروتیر کوبله شده، مؤلفه‌های در راستای محور  $y$  برابر صفر در نظر گرفته شده‌اند.

$$\begin{cases} B_x = q\phi \\ B_z = q(z \frac{\partial \phi}{\partial x} - d \frac{\partial \beta}{\partial z} - \mu \frac{\partial \psi}{\partial z}) \\ D_x = e\phi \\ D_z = e(z \frac{\partial \phi}{\partial x} - \eta \frac{\partial \beta}{\partial z} - d \frac{\partial \psi}{\partial z}) \end{cases} \quad (7)$$

در این رابطه،  $e, d, \eta, q$  و  $\mu$  به ترتیب ضرایب دی‌الکتریک، پیزوالکتریک، مگنتوالکتریک، پیزومگنتیک و ضریب نفوذپذیری مغناطیسی هستند. همچنین  $\beta$  و  $\psi$  به ترتیب پتانسیل‌های الکتریکی و مغناطیسی را نشان می‌دهند. مطابق با مرجع [۱۲] می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

با جایگذاری رابطه (۷) در دسته معادلات رابطه (۸) و تشکیل معادلات جدید و حل آن‌ها براساس شرایط مرزی مدار بسته، پتانسیل‌های الکتریکی و مغناطیسی به شکل زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{cases} \psi = \left( \frac{ed - q\eta}{d^2 - \mu\eta} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \\ \beta = \left( \frac{qd - e\eta}{d^2 - \mu\eta} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \end{cases} \quad (9)$$

با تعیین تغییرات انرژی‌های کرنشی و جنبشی، معادلات حاکم بر حرکت میکروتیر تیموشنکو تقویت شده با نانولوله‌های کربنی و نیتريد بور پایه پلیمری با استفاده از روش انرژی و به‌کارگیری اصل همیلتون به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Pi = T - (U + W) \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \delta \Pi dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U + W) dt = 0 \quad (10)$$

در رابطه (۱۰)،  $\Pi$  انرژی پتانسیل کل،  $T$  انرژی جنبشی و  $U$  انرژی کرنشی می‌باشند.

با جایگذاری معادلات به دست آمده از روابط (۵)، (۶) و (۹) در معادله (۱۰) و فاکتورگیری از ضرایب  $\delta w$  و  $\delta \phi$ ، معادلات حاکم بر حرکت میکروتیر

$$\begin{cases} \chi_{ij} = \frac{1}{2}(\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \\ \theta_i = \frac{1}{2}(\text{curl}(u))_i \\ \chi_{12} = \chi_{21} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \chi_{11} = \chi_{13} = \chi_{22} = \chi_{23} = \chi_{31} = 0 \\ \chi_{32} = \chi_{33} = 0 \end{cases} \quad (4-b)$$

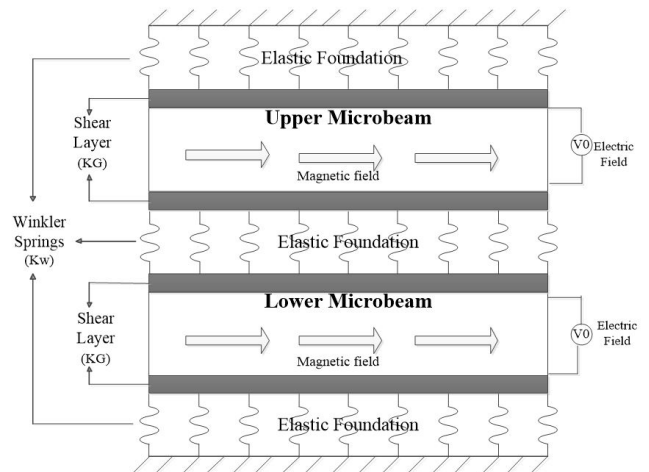


Fig. 1. Schematic of double-bonded Timoshenko micro beams reinforced by CNTs and BNNTs rested in an elastic foundation

شکل ۱: شمای شماتیکی از میکروتیرهای تیموشنکو کوبله شده تقویت شده با نانولوله‌های کربنی و نیتريد بور بر فوندانسیون الاستیک

با جایگذاری معادلات (۳) و (۴) در رابطه (۲)، معادله تغییرات انرژی کرنشی میکروتیر تیموشنکو به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\delta U = \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b \left( \sigma_{11} \delta \epsilon_{11} + \sigma_{13} \delta \epsilon_{13} + \sigma_{31} \delta \epsilon_{31} + m_{12} \delta \chi_{12} + m_{21} \delta \chi_{21} \right) dz dx \quad (5)$$

در رابطه فوق،  $b$  به پهنای میکروتیر تیموشنکو اشاره دارد که در کار حاضر مقدار آن به صورت ثابت در نظر گرفته شده است. پس از تعیین معادله انرژی کرنشی میکروتیر تیموشنکو تقویت شده با نانولوله‌های کربنی (CNT) و نیتريد بور (BNNT)، تغییرات انرژی جنبشی میکروسازه مورد نظر مطابق رابطه (۶) بیان می‌شود [۵ و ۶]:

$$\delta T = \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho b \left( z \frac{\partial \phi}{\partial t} \delta \left( z \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right) dz dx \quad (6)$$

ترم‌های مربوط به خاصیت‌های الکتریکی و مغناطیسی در معادلات اضافه شده‌اند، می‌توانند مقادیر صفر یا یک را اختیار نمایند. در این صورت، طبق جدول ۱ به ازای مقدار صفر، خاصیت مورد نظر از معادلات حذف شده و به ازای مقدار یک، خاصیت مورد نظر در معادلات باقی می‌ماند که از مقایسه مقادیر اختیار شده برای ضرایب مذکور، می‌توان اثرات هم‌زمان میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی<sup>۲</sup> را بر هریک از میکروتیرهای در نظر گرفته شده اعمال نمود که تاکنون در سایر منابع تحقیق بدان اشاره‌ای نشده است. لازم به ذکر است از آنجایی که تیرها به صورت کوپل در نظر گرفته شده‌اند، ضرایب  $\delta w_1$  و  $\delta \phi_1$  مربوط به میکروتیر اول و  $\delta w_2$  و  $\delta \phi_2$  مربوط به میکروتیر دوم هستند. همچنین مقادیر ثابت در نظر گرفته شده در معادلات حاکم بر حرکت نانوتیر تیموشنکوی جفت شده در حضور میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(EI)_{eq} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E b z^2 dz$$

$$k_s (\mu A)_{eq} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E b dz$$

$$(a_2' A)_{eq} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu I_2^2 b dz \quad (الف-۱۲)$$

$$I^{(0)} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho b dz$$

$$I^{(2)} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho b z^2 dz$$

$$(EQI)_{eq} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e \hat{B} z^2 b dz$$

$$(EPI)_{eq} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} q \hat{A} z^2 b dz \quad (ب-۱۲)$$

در رابطه (۱۲)،  $k_s$  ضریب تصحیح نیروی برشی است که مقدار آن برابر 5/6 در نظر گرفته شده است.

#### ۴- حل تحلیلی معادلات حاکم بر حرکت میکروتیر تیموشنکوی دولایه تقویت شده با نانولوله‌های کربنی و نیتريد بور در حضور میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی

در مقاله حاضر، برای حل معادلات حاکم بر مسأله از روش حل تحلیلی ناویر برای تکیه‌گاه‌های ساده استفاده شده است. براساس این روش، متغیرهای میدان جابه‌جایی برای ارضای شرایط مرزی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

تیموشنکوی جفت شده تحت میدان‌های فیزیکی مختلف شامل میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بر بستر الاستیک با شرایط مرزی مدار بسته<sup>۱</sup> به صورت معادلات ارائه شده در رابطه (۱۱) نوشته می‌شوند:

$$\delta \phi_1 :$$

$$-((EI)_{eq} + 2S_1(EQI)_{eq} + 2S_2(EPI)_{eq})$$

$$+ \frac{1}{4}(a_2' A)_{eq} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \left( \frac{1}{2} k (\mu A)_{eq} \right) \left( \phi_1 + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \quad (الف-۱۱)$$

$$+ \left( \frac{1}{4}(a_2' A)_{eq} \right) \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + (\rho I)_{eq} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} = 0$$

$$\delta w_1 :$$

$$\left( -\frac{1}{4}(a_2' A)_{eq} \right) \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x^3} - \left( \frac{1}{2} k (\mu A)_{eq} \right) \frac{\partial \phi_1}{\partial x}$$

$$+ \left( \frac{1}{4}(a_2' A)_{eq} \right) \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} - \left( \frac{1}{2} k (\mu A)_{eq} \right) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}$$

$$+ k_w (2w_1 - w_2) + k_G \left( \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right)$$

$$+ (\rho A)_{eq} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = 0 \quad (ب-۱۱)$$

$$\delta \phi_2 :$$

$$-((EI)_{eq} + 2S_3(EQI)_{eq} + 2S_4(EPI)_{eq})$$

$$+ \frac{1}{4}(a_2' A)_{eq} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2}$$

$$+ \left( \frac{1}{2} k (\mu A)_{eq} \right) \left( \phi_2 + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \quad (ج-۱۱)$$

$$+ \left( \frac{1}{4}(a_2' A)_{eq} \right) \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} + (\rho I)_{eq} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} = 0$$

$$\delta w_2 :$$

$$\left( -\frac{1}{4}(a_2' A)_{eq} \right) \frac{\partial^3 \phi_2}{\partial x^3} - \left( \frac{1}{2} k (\mu A)_{eq} \right) \frac{\partial \phi_2}{\partial x}$$

$$+ \left( \frac{1}{4}(a_2' A)_{eq} \right) \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} - \left( \frac{1}{2} k (\mu A)_{eq} \right) \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}$$

$$+ k_w (2w_2 - w_1) + k_G \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right)$$

$$+ (\rho A)_{eq} \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = 0 \quad (د-۱۱)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، ضرایب  $S_1$  تا  $S_4$  که به ترتیب، قبل از

$$\Omega = \omega \sqrt{\frac{I_{10}}{A_{110}}} \quad (15)$$

در این رابطه،  $\omega$  بسامد طبیعی میکروتیر تیموشنکو و مقادیر  $I_{10}$  و  $A_{110}$  مطابق رابطه (۱۶) تعریف می‌شوند. در این رابطه،  $\lambda$  مدول بالک و  $\mu$  مدول برشی هستند که مقادیر آن‌ها در رابطه (۱۷) مشخص شده‌است.

$$I_{10} = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho dz = \rho b h \quad (16)$$

$$A_{110} = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} dz = b h (\lambda + 2\mu)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (17)$$

$$E_m = 70 \text{Gpa}, \rho_m = 2702 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \nu_m = 0.3$$

همچنین خواص ماده در نظر گرفته برای میکروسازه مورد بررسی در کار حاضر، با استفاده از روابط ارائه شده در مراجع [۱، ۲] که از مطالعات آزمایشگاهی و تحلیلی به دست آمده و تاکنون در سایر مقالات و منابع تحقیق به صورت کاربردی از آن‌ها استفاده نشده است، به دست آمده‌اند. در رابطه (۱۸) فرم معادله به دست آمده جهت تعیین ضریب کشسانی میکروسازه و سایر مقادیر در نظر گرفته شده ارائه شده‌اند:

$$E = 307.26 \times T^{0.84} \nu^{1.54} \zeta^3 + 2.577 \times T^{0.64} \nu^{1.36} \zeta^2 + 7.786 \times T^{0.61} \nu^{1.22} \zeta + 1.325 \times T^{-0.28} \nu^{1.18}$$

$$k_s = 5/6, l = 15 \mu\text{m} \quad (18)$$

$$b = 2h, h = 2l, L = 10h, K_G = K_w = 0$$

در رابطه (۱۸)  $T$ ، دما،  $\nu$ ، کسر حجمی نانولوله‌ها و پارامتر تراکم است و ثابت استفاده شده در این رابطه، به صورت میانگین از دو کسر حجمی و دو دمای مختلف به دست آمده‌اند.

برای مقایسه نتایج حاصل از کار حاضر با نتایج به دست آمده از مرجع [۱۴]، لازم است اثرات بستر الاستیک و میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی برابر صفر در نظر گرفته شوند. جدول ۲ نتایج بسامد طبیعی بدون بعد کار حاضر برای مود ارتعاشی پنجم را با نتایج به دست آمده توسط انصاری و همکاران [۱۴] مقایسه می‌کند. مشاهده می‌شود که درصد خطا برای نظریه تنش کوپل اصلاح شده بسیار پایین و قابل چشم‌پوشی است؛ لذا از نتایج تحقیق حاضر برای بررسی اثرات سایر پارامترها شامل پارامتر مقیاس کوچک طول ماده، ضرایب فونداسیون الاستیک، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در حالت مدار بسته روی بسامد طبیعی بدون بعد استفاده خواهد شد.

جدول ۱: حالت‌های مختلف قرارگیری میکروتیرهای تیموشنکو جفت شده تقویت شده با نانولوله‌های کربنی یا نیتريد بور در حضور میدان‌های فیزیکی مختلف

Table 1. Different nanotubes distribution of double-bonded Timoshenko micro beams reinforced by CNTs and BNNTs in-presence of various multi-physics fields

$S_4$	$S_3$	$S_2$	$S_1$	انواع حالت‌ها
۰	۱	۰	۱	میکروتیرهای اول و دوم هر دو تقویت شده با نانولوله‌های نیتريد بور در حضور میدان الکتریکی
۱	۰	۰	۱	میکروتیر اول تقویت شده با نانولوله‌های نیتريد بور در حضور میدان الکتریکی و میکروتیر دوم تقویت شده با نانولوله‌های کربنی در حضور میدان مغناطیسی
۰	۱	۱	۰	میکروتیر اول تقویت شده با نانولوله‌های کربنی در حضور میدان مغناطیسی و میکروتیر دوم تقویت شده با نانولوله‌های نیتريد بور در حضور میدان الکتریکی
۱	۰	۱	۰	میکروتیرهای اول و دوم هر دو تقویت شده با نانولوله‌های کربنی در حضور میدان مغناطیسی

$$\begin{cases} \phi_1 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) e^{i\omega t} \\ w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) e^{i\omega t} \\ \phi_2 = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) e^{i\omega t} \\ w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} D_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) e^{i\omega t} \end{cases} \quad (13)$$

با جایگذاری متغیرهای میدان جابه‌جایی در مجموعه معادلات حاکم بر حرکت ارائه شده در رابطه (۱۱)، ماتریس‌های سختی و جرم تعیین می‌شوند. درایه‌های ماتریس‌های جرم و سختی در پیوست (الف) ارائه شده‌اند. با تشکیل ماتریس‌های جرم و سختی، بسامدهای طبیعی حاصل از ارتعاشات آزاد میکروتیر تیموشنکوی جفت شده مطابق با رابطه (۱۴) قابل محاسبه خواهند بود.

$$|K - M \omega^2| = 0 \quad (14)$$

## ۵- اعتبارسنجی نتایج

برای صحت‌سنجی نتایج حاصل از کار حاضر، لازم است پارامتر بسامد طبیعی بدون بعد تعریف شود. بسامد طبیعی بدون بعد  $\Omega$  در رابطه (۱۵) تعریف شده است:



جدول ۲: صحت‌سنجی بسامد طبیعی بی بعد برای مود پنجم ارتعاشی

Table 2. The validation of fifth dimensionless natural frequencies

CT	MCST	جنس ماده	
۴/۷۹۸۰	۷/۰۵۹۳		کار حاضر
۵/۱۵۴۹	۷/۰۸۳۱	فلز	انصاری و همکاران [۱۴]
۶/۹۲۳۵	۰/۳۳۶۰		درصد خطا

## ۶- نتایج و نمودارها

در جدول ۳ بسامد طبیعی سازه، طبق دو نظریه تنش کوپل اصلاح شده و کلاسیک در حالتی که هر دو میکروتیر جفت شده با نانولوله‌های کربنی تقویت شده و در حضور میدان مغناطیسی بر بستر الاستیک و پاسترناک قرار دارند، برای حالت شرایط مرزی مدار بسته با یکدیگر مقایسه شده‌اند. مشاهده می‌شود که هر چه پارامتر بدون بعد  $h/l$  افزایش یابد، بسامد طبیعی بدون بعد برای نظریه تنش کوپل اصلاح شده کاهش می‌یابد. افزایش پارامتر  $h/l$  در نظریه کلاسیک، تأثیری بر بسامد طبیعی بدون بعد ندارد؛ در نتیجه، در این حالت نظریه کلاسیک به خوبی نمی‌تواند تغییرات بسامد طبیعی بدون بعد را بر حسب پارامتر  $h/l$  نشان دهد. اختلاف بین نظریه تنش کوپل اصلاح شده و نظریه کلاسیک به ازای پارامتر بدون بعد  $h/l=2$  برابر  $10^{-5}$  و به ازای  $h/l=10$  برابر  $10^{-5}$  است که نشان می‌دهد با افزایش پارامتر  $h/l$ ، این دو نظریه به یکدیگر همگرا خواهند شد. همچنین در شرایط مذکور، نتایج این دو نظریه به یکدیگر بسیار نزدیک هستند.

جدول ۳: تغییرات بسامد طبیعی بی‌بعد بر حسب  $h/l$  برای میکروتیر تیموشنکوی جفت شده بر بستر الاستیک در حالت مدار بسته و حضور میدان مغناطیسی

Table 3. The dimensionless natural frequencies changes for close circuit double-bonded Timoshenko micro beam rested in an elastic foundation in-presence of magnetic field versus  $h/l$

$h/l$	نظریه تنش کوپل اصلاح شده	نظریه کلاسیک	اختلاف نظریه‌ها
۲	۶۶۶۴۳/۲۴۷۵۳۶	۶۶۶۴۳/۲۴۷۵۱۵	۰/۰۰۰۰۲۱
۵	۶۶۶۴۳/۲۴۷۵۱۹	۶۶۶۴۳/۲۴۷۵۱۵	۰/۰۰۰۰۰۴
۱۰	۶۶۶۴۳/۲۴۷۵۱۶	۶۶۶۴۳/۲۴۷۵۱۵	۰/۰۰۰۰۰۱

جدول ۴ نشان‌دهنده نتایج حاصل از بسامد طبیعی بدون بعد بر حسب  $h/l$  براساس دو نظریه MCST و CT می‌باشد که در این جدول هر دو میکروتیر جفت شده بر بستر الاستیک با نانولوله‌های نیتريد بور در حضور میدان الکتریکی برای شرایط مرزی مدار بسته قرار دارند. مشاهده می‌شود که هر چه پارامتر  $h/l$  افزایش یابد، بسامد طبیعی بدون بعد برای نظریه تنش کوپل اصلاح شده کاهش می‌یابد. افزایش  $h/l$  در نظریه کلاسیک، تأثیر کمی بر بسامد طبیعی بدون بعد دارد؛ به طوری که این مقدار ابتدا ثابت و سپس به مقدار بسیار جزئی کاهش می‌یابد. در نتیجه، نظریه کلاسیک به خوبی

نمی‌تواند تغییرات بسامد طبیعی بدون بعد را بر حسب  $h/l$  برای شرایط مذکور نشان دهد. اختلاف بین نظریه تنش کوپل اصلاح شده و نظریه کلاسیک به ازای  $h/l=2$  برابر  $5/43 \times 10^{-2}$  و به ازای  $h/l=10$  برابر  $2/2 \times 10^{-3}$  است که نشان می‌دهد با افزایش پارامتر  $h/l$ ، این دو نظریه به یکدیگر همگرا خواهند شد. از مقایسه جداول ۳ و ۴ مشاهده می‌شود که بسامد طبیعی بدون بعد حاصل از میکروتیر تیموشنکوی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تحت تأثیر میدان مغناطیسی بزرگتر از بسامد طبیعی بدون بعد حاصل از میکروتیر تیموشنکوی تقویت شده با نانولوله‌های نیتريد بور تحت تأثیر میدان الکتریکی است. از آنجایی که این اختلاف بسیار بزرگ و قابل ملاحظه است، می‌توان مزیت تأثیر میدان‌های مغناطیسی در مقایسه با میدان‌های الکتریکی را به سبب افزایش بسامدهای طبیعی و در نتیجه تأخیر بروز پدیده رزونانس به وضوح مشاهده نمود. همچنین در حالتی که میکروتیرها با نانولوله‌های کربنی تقویت شده و تحت تأثیر میدان مغناطیسی هستند، نظریه‌های تنش کوپل اصلاح شده و کلاسیک اختلاف کمتری نسبت به حالت تقویت با نانولوله‌های نیتريد بور در حضور میدان الکتریکی دارند.

جدول ۴: تغییرات بسامد طبیعی بدون بعد بر حسب  $h/l$  برای میکروتیر تیموشنکوی جفت شده با نانو لوله‌های نیتريد بور بر بستر الاستیک در حالت مدار بسته و حضور میدان الکتریکی

Table 4. The dimensionless natural frequencies changes for close circuit double-bonded Timoshenko micro beam reinforced by BNNs rested in an elastic foundation in-presence of electric field versus  $h/l$

$h/l$	نظریه تنش کوپل اصلاح شده	نظریه کلاسیک	اختلاف نظریه‌ها
۲	۱۹/۵۱۶۰۲۲	۱۹/۴۶۱۷۶۴	۰/۵۴۳۰۰
۵	۱۹/۴۷۰۴۵۶	۱۹/۴۶۱۷۶۴	۰/۰۰۸۷۰۰
۱۰	۱۹/۴۶۳۹۳۷	۱۹/۴۶۱۷۶۲	۰/۰۰۲۲۰۰

در شکل ۲، نظریه‌های کلاسیک و تنش کوپل اصلاح شده، برای حالتی که یکی از تیرها با نانولوله‌های کربنی و دیگری با نانولوله‌های نیتريد بور تقویت شده‌اند، مقایسه می‌شود. در این حالت، میکروتیرها به طور هم‌زمان تحت میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بر بستر الاستیک قرار گرفته و بسامد طبیعی بدون بعد برای مود ارتعاشی پنجم محاسبه می‌شود. از مقایسه دو نظریه می‌توان مشاهده نمود که به ازای تمام مقادیر پارامتر نسبت طول به ضخامت، بسامد طبیعی بدون بعد حاصل از نظریه کلاسیک از نظریه تنش کوپل اصلاح شده کمتر است. همچنین در هر دو نظریه، با بزرگتر شدن پارامتر بدون بعد  $L/h$ ، بسامد طبیعی بدون بعد افزایش می‌یابد. همچنین هر چه نسبت طول به ضخامت بزرگتر می‌شود، نظریه‌ها به یکدیگر همگرا می‌شوند؛ به عبارت دیگر، اهمیت اثر پارامتر مقیاس کوچک طول ماده بیشتر از تأثیر سایر عوامل است.

شکل ۳، براساس نظریه تنش کوپل اصلاح شده، تأثیر حضور نانولوله‌ها بدون حضور فونداسیون الاستیک را بر بسامد طبیعی بدون بعد در مود

دوم، تقویت نمودن میکروتیرها توسط نانو لوله‌های نیتريد بور منجر به ایجاد میدان الکتریکی و در نتیجه افزایش سفتی سازه می‌شود که این افزایش سفتی در مقایسه با حضور میدان مغناطیسی مقدار پایین‌تری داشته و در نتیجه افزایش بسامدهای طبیعی نسبت به حالت اول کمتر خواهند بود. علاوه بر این تأثیر حضور هم‌زمان میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی (که به ترتیب به علت تقویت یکی از میکروتیرها توسط نانو لوله‌های نیتريد بور و تقویت میکروتیر دوم توسط نانو لوله‌های کربنی ایجاد می‌شوند) بر افزایش بسامدهای طبیعی میکروسازه، بررسی شده و نتایج نشان می‌دهد که تأثیر استفاده از این نوع ترکیب هم‌زمان میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی تأثیری کمتری بر ارتعاشات سامانه نسبت به دو حالت قبلی دارد. از مقایسه شکل‌های ۳ و ۴ می‌توان مشاهده نمود که در حضور بستر الاستیک، با افزایش نسبت طول به ضخامت، بسامد طبیعی بدون بعد به طور پیوسته افزایش می‌یابد؛ زیرا اثر بستر پاسترناک و وینکلر به طور مستقیم در ماتریس سختی ظاهر شده و تأثیر چشمگیری بر بسامد طبیعی سامانه دارد؛ به عبارت دیگر، به وضوح قابل مشاهده است که تأثیر فونداسیون الاستیک بر بسامد طبیعی بدون بعد، بیشتر از تأثیر میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی و نیز جنس نانو لوله‌های تقویت‌کننده است.

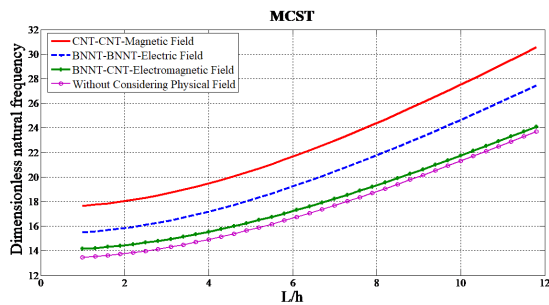


Fig. 4. Effects of nanotubes and physical field properties on the natural frequencies changes of double-bonded Timoshenko micro beam in-presence of elastic foundation

شکل ۴: تأثیر جنس نانو لوله‌ها و میدان‌های فیزیکی ناشی از آن‌ها بر تغییرات بسامد طبیعی بدون بعد برای میکروتیر تیموشنکوی جفت شده در حضور بستر الاستیک

در شکل ۵ تمام شرایط تعریف شده در شکل ۳ برای نظریه کلاسیک بررسی می‌شود. مشاهده نشان می‌دهد که در صورت عدم حضور بستر الاستیک، برای تمامی جنس نانو لوله‌ها و میدان‌های مذکور بسامد طبیعی بدون بعد با افزایش نسبت طول به ضخامت به صورت پیوسته کاهش می‌یابد. به ازای  $L/h$  یکسان، میکروتیر تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی در معرض میدان مغناطیسی، بیشترین مقادیر را برای بسامد طبیعی بدون بعد نشان می‌دهد. همچنین با بزرگتر شدن پارامتر  $L/h$  نمودارهای حاصل از جنس‌های مختلف تحت میدان‌های متفاوت به یکدیگر همگرا می‌شوند. از مقایسه شکل ۳ با شکل ۵ می‌توان نتیجه گرفت که اولاً بسامد طبیعی بدون بعد برای نظریه کلاسیک همواره در حال کم شدن است؛ در حالی که در نظریه تنش کوپل اصلاح شده، ابتدا افزایش و سپس کاهش مشاهده شد.

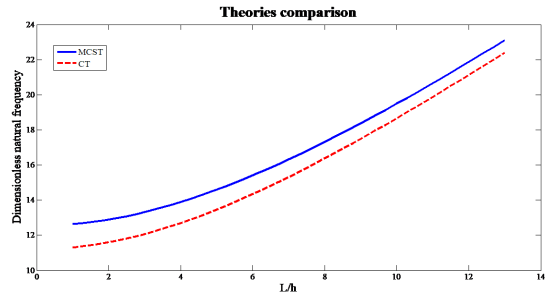


Fig. 2. The natural frequencies changes for double-bonded Timoshenko micro beam reinforced by CNTs and BNNTs in-presence of electric and magnetic fields versus  $L/h$

شکل ۲: تغییرات بسامد طبیعی بدون بعد بر حسب  $L/h$  برای میکروتیر تیموشنکوی جفت شده تقویت شده با نانو لوله‌های نیتريد بور و کربنی در حضور هم‌زمان میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی

ارتعاشی پنجم بررسی می‌کند. در این شکل حالات مختلف شامل هر دو میکروتیر از جنس نانو لوله کربنی (با در نظر گرفتن میدان مغناطیسی)، هر دو میکروتیر از جنس نانو لوله نیتريد بور (در حضور میدان الکتریکی) و در نهایت یکی از میکروتیرها با نانو لوله نیتريد بور و دیگری با نانو لوله کربنی تقویت شوند (تحت میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی به طور هم‌زمان) بررسی شده و مشاهده می‌شود که برای هر سه حالت مذکور، نمودار تا  $L/h=2/3$  صعودی و بعد از آن نزولی است. همچنین به ازای تمام مقادیر  $L/h$  بررسی شده، نانو لوله‌های کربنی - کربنی با میدان مغناطیسی بیشترین نانو لوله‌های نیتريد بور - کربنی در حضور میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی کمترین بسامد طبیعی بدون بعد را دارند. در واقع بسامد طبیعی بدون بعد در حالتی که از هر دو نوع نانو لوله و هر دو نوع میدان استفاده شود، کمترین مقدار را خواهد داشت.

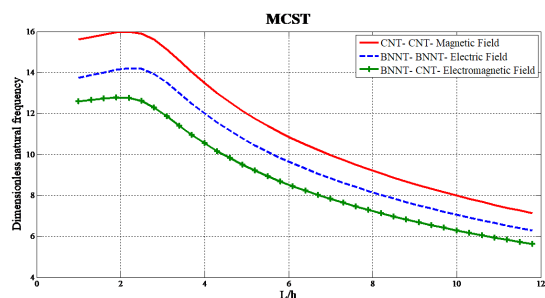


Fig. 3. Effects of nanotubes and physical field properties on the natural frequencies changes of double-bonded Timoshenko micro beam based on MCST

شکل ۳: تأثیر جنس نانو لوله‌ها و میدان‌های فیزیکی ناشی از آن‌ها بر تغییرات بسامد طبیعی بدون بعد برای میکروتیر تیموشنکوی جفت شده بر اساس نظریه MCST

شکل ۴ شرایط موجود در شکل ۳ را بر بستر پاسترناک و وینکلر بررسی می‌کند. مشاهده می‌شود که مشابه شکل ۳، هنگامی که هر دو میکروتیر بالایی و پایینی توسط نانو لوله‌های کربنی تقویت شوند؛ به علت حضور میدان مغناطیسی ایجاد شده، سفتی میکروسازه افزایش یافته که همین مورد موجب افزایش قابل ملاحظه بسامدهای طبیعی سامانه می‌شود. در حالت

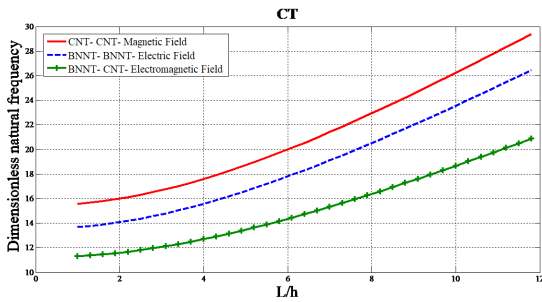


Fig. 6. Effects of nanotubes and physical field properties on the natural frequencies changes of double-bonded Timoshenko micro beam

شکل ۶: تأثیر جنس نانولوله‌ها و میدان‌های فیزیکی ناشی از آنها بر تغییرات بسامد طبیعی بدون بعد برای میکروتیر تیموشنکوی جفت شده

حضور بستر الاستیک و براساس نظریه تنش کوپل اصلاح شده برای مود ارتعاشی سوم بررسی می‌شود. مشاهده می‌شود که حداکثر اختلاف بین حضور و عدم حضور میدان الکتریکی و مغناطیسی در  $L/h=1$  است. این اختلاف با بزرگ شدن پارامتر نسبت طول به ضخامت کاهش می‌یابد تا جایی که در بسامد طبیعی بدون بعد  $L/h=1/8$  کاملاً بر یکدیگر منطبق می‌شوند. این انطباق تا  $L/h=3/8$  ادامه دارد و از بعد آن دو نمودار با شیب بسیار کمی از یکدیگر دور می‌شوند؛ در نتیجه میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در شرایط مذکور، برای  $2 \leq L/h \leq 3/8$  تأثیری بر بسامد طبیعی بدون بعد ندارد. نکته‌ای که باید بدان توجه شود آن است که در تمام مقادیر مورد بررسی، بسامد طبیعی بدون بعد در حضور میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی، بزرگتر یا مساوی حالت مشابه در شرایط عدم حضور این میدان‌هاست.

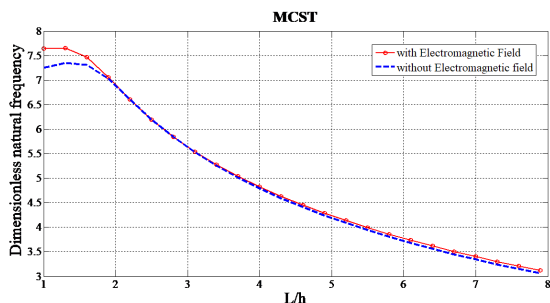


Fig. 7. Effects of physical fields on the third natural frequencies changes of double-bonded Timoshenko micro beam reinforced by CNTs and BNNTs without elastic foundation

شکل ۷: تأثیر میدان‌های فیزیکی بر بسامد طبیعی میکروتیر تیموشنکوی جفت شده و تقویت شده با نانو لوله‌های نیتريد بور و کربنی در عدم حضور بستر الاستیک برای مود سوم ارتعاشی

شکل ۸ شرایط تعریف شده برای شکل ۷ را طبق نظریه کلاسیک بررسی می‌کند. مطابق این شکل، برخلاف نظریه تنش کوپل اصلاح شده، نه تنها بیشترین اختلاف بین حضور و عدم حضور میدان الکتریکی و مغناطیسی در  $L/h=1$  نیست، بلکه در این قسمت کمترین اختلاف مشاهده می‌شود؛ همچنین نمودارها به صورت پیوسته با بزرگتر شدن نسبت طول به ضخامت از هم فاصله می‌گیرند. به وضوح مشاهده می‌شود که در نظریه کلاسیک، حضور میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی، اختلاف قابل ملاحظه‌ای در بسامد

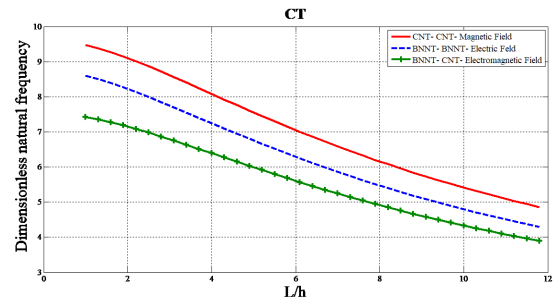


Fig. 5. Effects of nanotubes and physical field properties on the natural frequencies changes of double-bonded Timoshenko micro beam without elastic foundation

شکل ۵: تأثیر جنس نانولوله‌ها و میدان‌های فیزیکی ناشی از آنها بر تغییرات بسامد طبیعی بدون بعد برای میکروتیر تیموشنکوی کوپله شده بدون حضور بستر الاستیک

ثانیاً از نظر کمی، مقادیر بسامد طبیعی بدون بعد حاصل از نظریه کلاسیک به ازای تمام مقادیر نسبت طول به ضخامت و نیز برای تمام جنس‌ها و میدان‌ها کوچکتر از مقدار مشابه در نظریه تنش کوپل اصلاح شده است. همچنین برای تمامی نمودارها با افزایش پارامتر نسبت طول به ضخامت، شیب کاهش بسامد طبیعی بدون بعد در نظریه تنش کوپل اصلاح شده بیشتر از نظریه کلاسیک و در حدود دو برابر آن در شرایط مشابه می‌باشد.

شکل ۶ شرایط مشابه شرایط شکل ۴ را برای نظریه کلاسیک بررسی می‌کند. این شکل نشان می‌دهد که در حضور بستر الاستیک، بسامد طبیعی بدون بعد به صورت پیوسته در حال افزایش است. این نتیجه، بر خلاف نتیجه حاصل از زمانی است که بستر پاسترناک و وینکلر در سامانه حضور نداشته باشند. علت این اتفاق نیز آن است که به دلیل تأثیر خاصیت فنریت فونداسیون الاستیک بر ماتریس سختی، با افزایش نسبت طول به ضخامت، اثر فنریت هم بیشتر شده و به صورت یک عامل افزایش‌دهنده ارتعاشات آزاد سبب افزایش بسامد طبیعی بدون بعد می‌شود. همچنین از مقایسه شکل‌های ۵ و ۶ می‌توان دریافت که در نظریه کلاسیک، اثر بستر الاستیک بر بسامد طبیعی بدون بعد بیشتر از اثر جنس نانو لوله‌های تقویت کننده و میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی است. همچنین مقایسه شکل‌های ۴ و ۶ نشان می‌دهد که نمودارها از نظر ظاهری با یکدیگر مشابه‌اند؛ اما از نظر کمی، نظریه تنش کوپل اصلاح شده بسامد طبیعی بدون بعد بزرگتری را نسبت به شرایط مشابه در نظریه کلاسیک به دست می‌دهد. بررسی دقیق‌تر بین دو حالت حضور و عدم حضور فونداسیون الاستیک نشان می‌دهد که در حضور بستر پاسترناک و وینکلر، اختلاف بین نظریه کلاسیک و نظریه تنش کوپل اصلاح شده کمتر می‌شود. این نتیجه، اهمیت بستر الاستیک را در میکروتیرهای جفت شده بیشتر نشان می‌دهد.

با توجه به این که یکی از اهداف اصلی کار حاضر، مقایسه انواع میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی از جمله تأثیر هم‌زمان این میدان‌ها بر ارتعاشات آزاد میکروسازه جفت شده است. در شکل ۷ میکروتیر بالای نشان داده شده در هندسه مسأله با نانو لوله نیتريد بور و میکروتیر پایینی با نانو لوله کربنی تقویت می‌شوند و تأثیر میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در حالت عدم



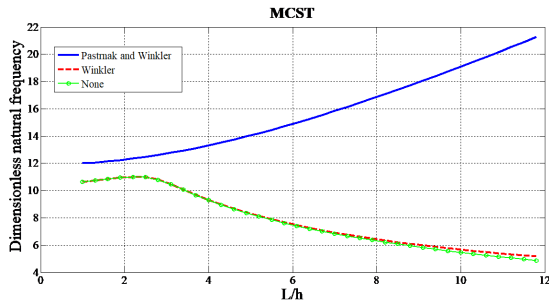


Fig. 9. Effects of elastic foundation on the fifth dimensionless natural frequencies changes of reinforcement micro structure without physical fields based on MCST

شکل ۹: تأثیر فونداسیون الاستیک بر تغییرات بسامد طبیعی بدون بعد برای میکروسازه تقویت شده در حالت عدم حضور میدان‌های فیزیکی براساس نظریه MCST برای مود پنجم ارتعاشی

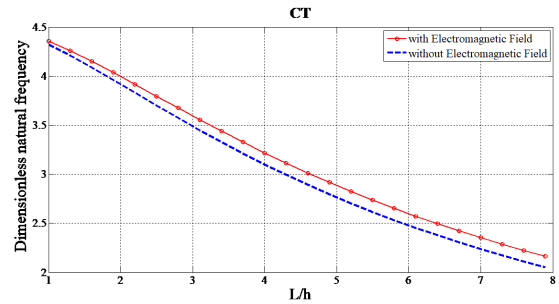


Fig. 8. Effects of physical fields on the third dimensionless natural frequencies changes of double-bonded Timoshenko micro beam reinforced by CNTs and BNNs without elastic foundation

شکل ۸: تأثیر میدان‌های فیزیکی بر بسامد طبیعی بدون بعد برای میکروتیر تیموشنکوئی جفت شده و تقویت شده با نانو لوله‌های نیتريد بور و کربنی در عدم حضور بستر الاستیک برای مود سوم ارتعاشی

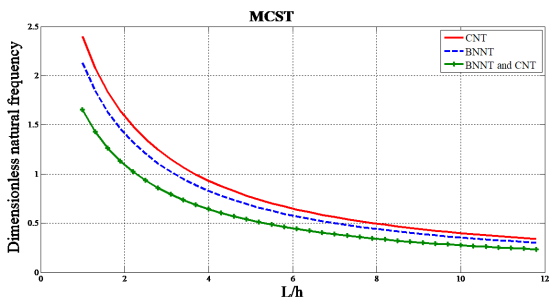


Fig. 10. Effects of nanotubes properties on the first dimensionless natural frequencies changes of double-bonded micro structure without Pasternak foundation and physical fields based on MCST

شکل ۱۰: تأثیر جنس نانو لوله‌ها بر تغییرات بسامد طبیعی بدون بعد برای میکروسازه جفت شده و در حالت عدم حضور میدان‌های فیزیکی و بستر پاسترناک بر اساس نظریه MCST برای مود اول ارتعاشی

به ضخامت، میکروتیر کربنی - کربنی بیشترین و میکروتیر نیتريد بور - کربنی کمترین بسامد طبیعی بدون بعد را دارند. از نظر رفتاری، هر سه حالت مذکور، افزایش نسبت طول به ضخامت سبب کاهش بسامد طبیعی می‌شود. با بزرگ شدن مقدار پارامتر بدون بعد نسبت طول به ضخامت، نمودارها به یکدیگر همگرا می‌شوند؛ در نتیجه اثر پارامتر مقیاس طول کوچک ماده بیشتر از تأثیر جنس نانو لوله‌ها است.

## ۷- نتیجه گیری

در مقاله حاضر، ارتعاشات آزاد میکروتیرهای تیموشنکوئی جفت شده بر بستر الاستیک، براساس نظریه تنش کوپل اصلاح شده مورد بررسی قرار گرفت. میکروتیرها توسط نانولوله‌های نیتريد بور و کربنی که خواص و نحوه توزیع تراکم در آنها براساس روابط آزمایشگاهی و تجربی به دست آمده از مراجع [۲، ۸] تعیین شده، تقویت شدند. معادلات حاکم بر میکروتیرها به کمک اصل همیلتون استخراج و بسامد طبیعی آنها با استفاده از روش ناویر برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده به دست آمد. اثرات پارامترهای مختلف شامل میدان‌های فیزیکی مختلف، پارامترهای مقیاس کوچک طول ماده و ضرایب فونداسیون بر بسامد طبیعی برای شرایط مرزی مدار بسته بررسی

طبیعی بدون بعد ایجاد می‌کنند؛ همچنین بسامد طبیعی بدون بعد حاصل از نظریه تنش کوپل اصلاح شده، بیشتر از حالات مورد تحلیل مشابه در نظریه کلاسیک است. شباهت نظریه تنش کوپل اصلاح شده و نظریه کلاسیک در آن است که براساس هر دو نظریه و در حضور یا عدم حضور میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی، با افزایش نسبت طول به ضخامت، بسامد طبیعی بدون بعد کاهش می‌یابد.

شکل ۹ تأثیر فونداسیون الاستیک بر ارتعاشات آزاد سامانه را نشان می‌دهد. در این شکل حضور و عدم حضور بستر پاسترناک و وینکلر در حالات مختلف برای شرایطی که هیچ میدان الکتریکی و مغناطیسی بر سازه وجود نداشته و میکروتیر بالایی با نانو لوله‌های نیتريد بور و میکروتیر پایینی با نانو لوله‌های کربنی تقویت شده باشد، براساس نظریه تنش کوپل اصلاح شده، بررسی می‌شود. مشاهده می‌شود که بیشترین بسامد طبیعی بدون بعد در حضور بستر پاسترناک و وینکلر است. در صورتی که بستر پاسترناک حذف شود، بسامد طبیعی بدون بعد به صورت قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد؛ اما نتایج نشان می‌دهند که اگر بستر وینکلر حذف شود، تأثیر چندانی بر بسامد طبیعی بدون بعد ندارد. لازم به ذکر است که طبق نتایج به دست آمده، با بزرگ شدن نسبت طول به ضخامت، تأثیر بستر وینکلر بیشتر می‌شود؛ به طوری که از  $L/h=9$  به بعد، اختلاف بین نمودار عدم حضور بستر الاستیک و حضور بستر وینکلر به وضوح مشهود است. نکته دیگر آن که حضور بستر پاسترناک سبب می‌شود که نمودار صعودی باشد؛ در حالی که در حالت عدم حضور بستر پاسترناک، با افزایش نسبت طول به ضخامت، پارامتر بسامد طبیعی بدون بعد ابتدا یک افزایش جزئی و سپس به صورت پیوسته کاهش می‌یابد؛ در نتیجه تأثیر بستر پاسترناک بسیار بیشتر از بستر وینکلر می‌باشد.

در شکل ۱۰ تأثیر جنس نانو لوله‌های تقویت کننده میکروتیر جفت شده بر بسامد طبیعی بدون بعد بررسی می‌شود. بدین منظور، اثر بستر الاستیک و میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی لحاظ نمی‌شوند. ابتدا هر دو میکروتیر با نانولوله‌های کربنی، سپس هر دو با نانو لوله‌های نیتريد بور و در نهایت میکروتیر بالایی با نانولوله‌های نیتريد بور و میکروتیر پایینی با نانولوله‌های کربنی تقویت می‌شوند. ملاحظه می‌شود که به ازای تمام مقادیر نسبت طول

به حالت صعودی تغییر نمود که این امر به معنای تأثیر چشمگیر بستر الاستیک در مقابل تأثیر پارامتر کوچک مقیاس طول ماده است. علت عمده این تأثیرات قابل توجه، حضور ترم‌های الاستیک با مقادیر عددی بزرگ در ماتریس سختی میکروتیر است.

### تشکر و قدردانی

نویسندگان از نظرات داوران محترم، تشکر و قدردانی می‌نمایند. همچنین آن‌ها از ستاد ویژه توسعه فناوری نانو و از معاونت پژوهشی دانشگاه کاشان طی قراردادی به شماره ۴۶۳۸۵۵/۱۷ به خاطر حمایت مالی تشکر و قدردانی می‌کنند.

### پیوست الف

مطابق با روش ناویر با جایگذاری متغیرهای میدان جابجایی در مجموعه معادلات حاکم بر حرکت ارائه شده در رابطه (۱۱) برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده ماتریس‌های سختی و جرم به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\left\{ \begin{aligned} M_{11} &= M_{33} = (\rho I)_{eq} \\ M_{22} &= M_{44} = (\rho A)_{eq} \\ M_{12} &= M_{21} = M_{13} = M_{31} = 0 \\ M_{14} &= M_{41} = M_{42} = M_{24} = 0 \\ M_{23} &= M_{32} = M_{34} = M_{43} = 0 \end{aligned} \right. \quad (\text{الف-۱})$$

$$\left\{ \begin{aligned} K_{11} &= \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( (EI)_{eq} + 2S_1(EQI)_{eq} + 2S_2(EPI)_{eq} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4}(a_2^2 A)_{eq} \right) + \left( \frac{1}{2} k (\mu A)_{eq} \right) \\ K_{12} &= K_{21} = - \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 \left( \frac{1}{4} (a_2^2 A)_{eq} \right) \\ &\quad + \left( \frac{m\pi}{L} \right) \left( \frac{1}{2} k (\mu A)_{eq} \right) \\ K_{33} &= \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( (EI)_{eq} + 2S_3(EQI)_{eq} \right. \\ &\quad \left. + 2S_4(EPI)_{eq} + \frac{1}{4}(a_2^2 A)_{eq} \right) + \left( \frac{1}{2} k (\mu A)_{eq} \right) \\ K_{34} &= K_{43} = - \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 \left( \frac{1}{4} (a_2^2 A)_{eq} \right) \\ &\quad + \left( \frac{m\pi}{L} \right) \left( \frac{1}{2} k (\mu A)_{eq} \right) \\ K_{44} &= \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 \left( \frac{1}{4} (a_2^2 A)_{eq} \right) \\ &\quad + \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \frac{1}{2} k (\mu A)_{eq} + 2k_G \right) + (2k_w) \\ K_{13} &= K_{31} = K_{14} = K_{41} = K_{23} = K_{32} = 0 \end{aligned} \right. \quad (\text{الف-۲})$$

شد. نتایج به دست آمده از تحقیق نشان داد که:

۱. اعمال میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بر میکروتیرها، تأثیر بسیار زیادی بر افزایش سفتی میکروسازه و در نتیجه افزایش بسامد طبیعی بدون بعد دارد. این تأثیرات، برای نظریه MCST بیشتر از نظریه CT به دست آمد؛ لذا براساس نتایج مذکور، به نظر می‌رسد که اهمیت بررسی این میدان‌ها بر میکروتیرها زیاد است.
۲. بررسی اثرات جنس نانو لوله‌های تقویت‌کننده و میدان‌های ایجاد شده توسط آنها برای نظریه MCST و CT نشان داد که بسامد طبیعی بدون بعد نانو لوله‌های کربنی - کربنی با میدان مغناطیسی، بیشترین مقدار و نانو لوله‌های نیتريد بور - کربنی همراه با حضور هم‌زمان میدان الکتریکی و مغناطیسی کمترین مقدار را دارند. در واقع می‌توان گفت که میدان‌های مغناطیسی ناشی از حضور نانو لوله‌های کربنی در میکروسازه منجر به افزایش قابل ملاحظه سفتی و در نتیجه افزایش بسامدهای طبیعی سامانه می‌شود؛ همین امر در مورد استفاده از نانو لوله‌های نیتريد بور که موجب ایجاد میدان الکتریکی در سامانه می‌شود صادق است، با این تفاوت که تأثیر میدان ایجاد شده بر سفتی سازه نسبت به حضور میدان مغناطیسی کمتر بوده و همین امر موجب کاهش بسامدهای طبیعی سامانه نسبت به حالت قبل می‌شود.
۳. نتایج به دست آمده نشان‌دادند که در مود سوم ارتعاشی، می‌توان مقادیری را برای پارامتر  $L/h$  میکروتیر مذکور در نظریه MCST تعیین کرد که در آن حضور یا عدم حضور هم‌زمان میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی تأثیری بر بسامد طبیعی بدون بعد نداشته باشد. این درحالی است که این مسأله در نظریه CT مشاهده نمی‌شود. البته این نتایج حاکی از آن است که اختلاف بسامد طبیعی بدون بعد در دو حالت حضور و عدم حضور میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی، در نظریه CT بیشتر است؛ بنابراین اهمیت میدان‌های مذکور در این نظریه بیشتر خود را نشان می‌دهد.
۴. در مقایسه حالات مختلف اثر الاستیک بر بسامد طبیعی بدون بعد میکروتیرهای جفت‌شده، براساس نظریه MCST، ضریب برشی پاسترناک تأثیر به مراتب بیشتری نسبت به اثر فنری وینکلر دارد. نتایج به دست آمده از این قسمت نشان داد که بستر وینکلر، برای مود پنجم ارتعاشی میکروتیر مذکور، از مقدار  $L/h=9$  به بعد تأثیر خود را به خوبی نشان می‌دهد.
۵. مشاهده‌های حاصل از بررسی تأثیر عوامل مختلف بر بسامد طبیعی بدون بعد میکروتیرها نشان داد که اثر بستر الاستیک، از تأثیر جنس و میدان‌های فیزیکی پراهمیت‌تر است؛ به گونه‌ای که در اثر حضور این بستر، تأثیر سایر اثرات کمتر شد. به خصوص که در نظریه CT، با حضور بستر الاستیک، نمودارهای بسامد طبیعی بدون بعد براساس تغییرات نسبت طول به ضخامت، از حالت نزولی

- reinforced by boron nitride nanotube based on modified couple stress theory, *Journal of vibration and control*, 22(7) (2016) 1790-1807.
- [11] A. Ghorbanpour Arani, A. Fereidoon, R. Kolahchi, Nonlocal DQM for a nonlinear buckling analysis of DLGSs integrated with ZnO piezoelectric layers, *Journal of Computational Applied Mechanics*, 45(1) (2014) 9-22.
- [12] S. Tajalli, M. Rahaeifard, M. Kahrobaiyan, M. Movahhedy, J. Akbari, M. Ahmadian, Mechanical behavior analysis of size-dependent micro-scaled functionally graded Timoshenko beams by strain gradient elasticity theory, *Composite Structures*, 102 (2013) 72-80.
- [13] K. Torabi, J.N. Dastgerdi, An analytical method for free vibration analysis of Timoshenko beam theory applied to cracked nanobeams using a nonlocal elasticity model, *Thin Solid Films*, 520(21) (2012) 6595-6602.
- [14] R. Ansari, R. Gholami, S. Sahmani, Free vibration analysis of size-dependent functionally graded microbeams based on the strain gradient Timoshenko beam theory, *Composite Structures*, 94(1) (2011) 221-228.
- [15] A.E. Alshorbagy, M. Eltahir, F. Mahmoud, Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method, *Applied Mathematical Modelling*, 35(1) (2011) 412-425.
- [16] M. Mohammadimehr, M. Moradi, A. Loghman, Influence of the elastic foundation on the free vibration and buckling of thin-walled piezoelectric-based FGM cylindrical shells under combined loadings, *Journal of Solid Mechanics*, 6 (2014) 347-365.
- [17] M. Mohammadimehr, B.R. Navi, A.G. Arani, Modified strain gradient Reddy rectangular plate model for biaxial buckling and bending analysis of double-coupled piezoelectric polymeric nanocomposite reinforced by FG-SWNT, *Composites Part B: Engineering*, 87 (2016) 132-148.
- [18] M. Mohammadimehr, M. Salemi, B.R. Navi, Bending, buckling, and free vibration analysis of MSGT microcomposite Reddy plate reinforced by FG-SWCNTs with temperature-dependent material properties under hydro-thermo-mechanical loadings using DQM, *Composite Structures*, 138 (2016) 361-380.
- [1] Y. Chen, J. Zou, S.J. Campbell, G. Le Caer, Boron nitride nanotubes: pronounced resistance to oxidation, *Applied physics letters*, 84(13) (2004) 2430-2432.
- [2] A. Ghorbanpour Arani, S. Shams, S. Amir, Z. Khoddami Maraghi, Effects of Electro-Thermal Fields on Buckling of a Piezoelectric Polymeric Shell Reinforced with DWBNNTs, *Journal of Nanostructures*, 2(3) (2012) 345-355.
- [3] A. Haque, A. Ramasetty, Theoretical study of stress transfer in carbon nanotube reinforced polymer matrix composites, *Composite Structures*, 71(1) (2005) 68-77.
- [4] A. Kovalčíková, C. Balázs, J. Dusza, O. Tapasztó, Mechanical properties and electrical conductivity in a carbon nanotube reinforced silicon nitride composite, *Ceramics International*, 38(1) (2012) 527-533
- [5] M. Mohammadimehr, M. Bazrkar, Determination of transverse elastic coefficient of reinforced composites with shape memory polymer-based carbon nanotubes on nanotube volume fraction, temperature and mass density parameter, *12th Conference of Iranian Aerospace Society*, Amirkabir University of Technology, (2013).
- [6] Q.-s. Yang, X.-q. He, X. Liu, F.-f. Leng, Y.-W. Mai, The effective properties and local aggregation effect of CNT/SMP composites, *Composites Part B: Engineering*, 43(1) (2012) 33-38.
- [7] A. Shooshtari, S. Razavi, Nonlinear vibration analysis of rectangular magneto-electro-elastic thin plates, *IJE transactions A: Basics*, 28(1) (2015) 139-147.
- [8] V. Stojanović, P. Kozic, Forced transverse vibration of Rayleigh and Timoshenko double-beam system with effect of compressive axial load, *International Journal of Mechanical Sciences*, 60(1) (2012) 59-71.
- [9] C.-P. Wu, W.-W. Lai, Free vibration of an embedded single-walled carbon nanotube with various boundary conditions using the RMVT-based nonlocal Timoshenko beam theory and DQ method, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 68 (2015) 8-21.
- [10] M. Mohammadimehr, M. Mohandes, M. Moradi, Size dependent effect on the buckling and vibration analysis of double-bonded nanocomposite piezoelectric plate

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

M. Mohammadimehr, A.S. Khoddami, M. Mehrabi, Free Vibration of Carbon Nanotube and Boron Nitride Nanotube Double-bonded Modified Couple Stress Theory Timoshenko Micro Beams Under Various Physical Fields, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 49(4) (2018) 709-720.

DOI: 10.22060/mej.2016.849



