

تحلیل لنگش و پایداری روتورهای با قطر متغیر ساخته شده از مواد هدفمند تحت اثر نیروی محوری و گشتاور پیچشی

کیوان ترابی^{۱*}، حسن افشاری^۲

^۱ دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران
^۲ گروه مکانیک، واحد خمینی شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، خمینی شهر، اصفهان، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۹ بهمن ۱۳۹۴
بازنگری: ۶ مرداد ۱۳۹۵
پذیرش: ۷ آذر ۱۳۹۵
ارائه آنلاین: ۹ آذر ۱۳۹۵

کلمات کلیدی:

روتور با مقطع متغیر
لنگ‌زنی
مواد هدفمند
روش تفاضلات مربعی

چکیده: در این پژوهش تحلیل‌های لنگش و پایداری برای روتورهای ساخته شده از مواد مدرج تابعی^۱ تحت نیروی محوری و گشتاور پیچشی بررسی شده‌اند. روتور بر اساس تئوری تیر تیموشنکو و با در نظر گرفتن اثرات ژيروسکوپیک مدل‌سازی شده است. قطر روتور و خواص مکانیکی آن در راستای طولی به صورت پیوسته تغییر می‌کنند و در هر تکیه‌گاه آن دو فنر انتقالی و دو فنر پیچشی در نظر گرفته شده‌اند که قادر به مدلسازی تمامی شرایط مرزی می‌باشند. با استفاده از قوانین نیوتن معادلات حاکم و شرایط مرزی استخراج شده و با استفاده از روش عددی تفاضلات مربعی^۲ حل شده‌اند. پس از اثبات همگرایی و صحت تحلیل عددی ارائه شده، تاثیر پارامترهای مختلف مانند توان پروفیل، سرعت دورانی، مقدار و جهت نیروی محوری و گشتاور پیچشی بر روی فرکانس‌های پیشرو^۳ و پسرو^۴ روتور و پایداری آن بررسی شده‌اند. نتایج عددی نشان می‌دهند که افزایش توان در معادله تغییرات خواص، وجود نیروی محوری فشاری و گشتاور پیچشی منجر به کاهش تمامی فرکانس‌های پیشرو و پسرو و سرعت‌های بحرانی روتور می‌گردند و اعمال نیروی محوری کششی نیز باعث افزایش تمامی فرکانس‌های پیشرو و پسرو و سرعت‌های بحرانی روتور می‌شود.

۱- مقدمه

با توجه به عدم توزیع یکنواخت تنش ناشی از خمش در یک روتور، استفاده از مقطع یکنواخت به هیچ وجه بهینه نبوده و منجر به افزایش وزن روتور می‌گردد؛ به عبارت دیگر می‌توان در نقاطی که تنش موجود بر روی محور کمتر است، قطر آن را کاهش داد؛ بنابراین در مقایسه با روتور با مقطع یکنواخت، استفاده از روتور با مقطع متغیر از کاربرد بیشتری برخوردار خواهد بود. از طرفی نیاز به تحمل هم‌زمان تنش‌های مکانیکی و بارهای حرارتی، استفاده از مواد مدرج تابعی را توجیه‌پذیر می‌کند. همچنین وجود اجزای انتقال توان بر روی محور (مانند چرخ‌خنده، چرخ زنجیر و چرخ تسمه) منجر به ایجاد نیروی محوری و گشتاور پیچشی بر روی محور می‌گردد. البته حرارت نیز می‌تواند عاملی برای ایجاد نیروی محوری بر روی محور باشد؛ بنابراین تحلیل ارتعاشات یک روتور با قطر و خواص متغیر تحت اثر نیروی محوری و گشتاور پیچشی بسیار لازم و ضروری به نظر می‌رسد.

بسامدهای طبیعی و سرعت‌های بحرانی روتورها از جنبه‌های مهم در طراحی و تحلیل ارتعاشات اجباری آنها می‌باشند. از کاربردهای عملی و

صنعتی دینامیک روتورها می‌توان به توربین‌ها، پمپ‌ها و تجهیزات دوار مورد استفاده در صنایع هوا فضا اشاره نمود.

به دلیل صرف‌نظر کردن از اینرسی دورانی تیر در نظریه تیر اویلر-برنولی، این مدل از تیر قادر به مدل‌سازی اثر ژيروسکوپیک در تیرهای دوار نبوده و سرعت دورانی روتور در معادلات آن ظاهر نمی‌گردد؛ ولی در مدل‌های تیر رایلی و یا تیر تیموشنکو به دلیل در نظر گرفتن اینرسی دورانی، اثر ژيروسکوپیک قابل مدل‌سازی خواهد بود [۱]؛ بنابراین بیشتر تحقیقات صورت گرفته در زمینه دینامیک روتورها از مدل تیر رایلی و یا تیموشنکو استفاده نموده‌اند. لازم به ذکر است که در بین این دو نظریه، نظریه تیموشنکو به دلیل در نظر گرفتن تغییر شکل‌های برشی، دقت بالاتری دارد.

گریبوس [۲] با استفاده از نظریه تیر تیموشنکو اثر تغییر شکل برشی را بر روی سرعت‌های بحرانی روتورها بررسی نمود. معادلات حاکم بر ارتعاشات عرضی در دو صفحه و ارتعاشات پیچشی یک محور با ممان اینرسی نامشابه در دو صفحه تحت نیروی محوری فشاری توسط چوی و همکاران استخراج شدند [۳]. براساس نظریه تیر رایلی، جی و لی [۴] سرعت‌های بحرانی لنگ‌زنی و شکل مودهای محور نامتقارن یکنواخت با دیسک‌های صلب و تکیه‌گاه‌های ایزوتروپیک را استخراج نمودند و استورلا و آرچنتو [۵] ارتعاشات آزاد و اجباری محور ویسکوالاستیک را بررسی نمودند. براساس نظریه‌های تیر و پوسته و در نظر گرفتن میرایی داخلی، ملانسون و زو [۶] ارتعاشات میرایی آزاد و پایداری محورها با شرایط مرزی عمومی را مورد بررسی قرار

- 1 Whirling
- 2 Functionally Graded Materials
- 3 Differential Quadrature Method (DQM)
- 4 Forward
- 5 Backward

نویسنده عهده‌دار مکاتبات: kvntrb@kashanu.ac.ir

شرایط مرزی را به مراتب ساده‌تر می‌سازد.

روش تفاضلات مربعی یک روش عددی قدرتمند می‌باشد که توسط بلمن و همکاران ارائه شد [۲۴] و پس از آن محققان زیادی از این روش برای حل مسائل گوناگون مهندسی استفاده کردند که از آن جمله می‌توان به برت و همکاران اشاره کرد [۳۰-۲۵].

تعداد مقالات مرتبط با تحلیل ارتعاشات روتوری که به صورت هم‌زمان دارای هندسه و خواص مکانیکی متغیر در راستای طولی خود می‌باشد، بسیار ناچیز بوده و از طرفی در مورد تأثیر نیروی محوری و گشتاور پیچشی بر روی لنگ‌زنی روتورها نیز کارهای کمی انجام گرفته است؛ بنابراین در این پژوهش برای اولین بار تحلیلی عددی برای لنگ‌زنی و پایداری یک روتور با قطر متغیر ساخته شده از مواد هدفمند مدرج شده در راستای طولی، در حالی که تحت یک نیروی محوری و یک گشتاور پیچشی قرار گرفته است، ارائه شده است. نحوه تغییرات قطر دلخواه و شکل تغییرات خواص نیز به دو صورت تابع توانی و یا تابع نمایی در نظر گرفته شده‌اند. به منظور بیان کلی‌تر شرایط مرزی در هر تکیه‌گاه دو فنر انتقالی و دو فنر پیچشی در نظر گرفته شده‌اند. معادلات حاکم و شرایط مرزی استخراج شده با استفاده از روش عددی تفاضلات مربعی حل شده‌اند. میزان دقت تحلیل ارائه شده از طریق مقایسه نتایج با نتایج دقیق ارائه شده برای حالت خاص مسأله تأیید شده و پس از آن تأثیر پارامترهای مختلف بر روی بسامدهای پیشرو و پس‌روی روتور و پایداری آن بررسی شده‌اند که از آن جمله می‌توان به توان منحنی، سرعت دورانی، نیروی محوری و گشتاور پیچشی اشاره نمود.

۲- هندسه مسأله

مطابق با شکل ۱، یک روتور به طول L ، قطر متغیر d ، تحت نیروی محوری P و گشتاور پیچشی T و در حال چرخش با سرعت دورانی ثابت Ω در نظر گرفته شده است. فرض بر آن است که خواص ماده از یک سطح کاملاً فلزی در $z=0$ تا یک سطح کاملاً سرامیکی در $z=L$ به صورت پیوسته تغییر کنند. در این پژوهش دو شکل تغییرات توانی و تغییر نمایی برای خواص ماده در راستای طولی روتور در نظر گرفته می‌شوند.

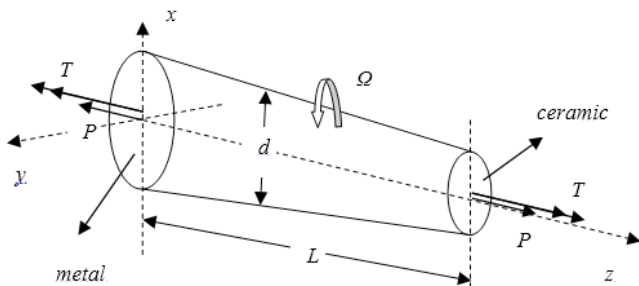


Fig. 1. FG-rotor with variable diameter.

شکل ۱: روتور غیریکنواخت تحت نیروی محوری و گشتاور پیچشی

در تغییرات توانی مدول الاستیک (E) و چگالی ماده (ρ) به صورت زیر تغییر می‌کنند:

دادند. جون و کیم [۷] ارتعاشات خمشی محور تحت کوپل پیچشی ثابت را تحلیل کردند؛ آنها محور را براساس نظریه تیر تیموشنکو مدل کردند و اثر ژيروسکوپیکی را در نظر گرفتند. تحلیل دینامیکی اجزا محدود سامانه محور تکیه‌گاه توسط محی‌الدین و خولیف [۸] انجام گرفت. آنها مدل الاستودینامیک حرکت جفت‌شده خمشی و پیچشی را با در نظر گرفتن اثر ژيروسکوپیکی برای محور دوار استخراج نمودند. کیم و همکاران [۹] اقدام به تحلیل ارتعاشات محور کامپوزیتی گوه‌ای شکل نمودند. کاروندیران و زو [۱۰] بر روی تحلیل ارتعاشات محور با تکیه‌گاه‌های ارتجاعی متمرکز شدند. تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری سامانه محور-دیسک واقع شده بر روی تکیه‌گاه‌های الاستیک توسط شبانه و زو [۱۱] انجام گرفت. المهدی و قادرلب [۱۲] ارتعاشات محور کامپوزیتی با لایه‌های ناهمراستا را مورد بررسی قرار دادند. معادلات حاکم بر ارتعاشات محور تیموشنکو با اینرسی‌های دورانی نابرابر در دو راستا توسط رافا و واتا [۱۳] استخراج شدند. گو و چنگ [۱۴] با استفاده از مدل تیر تیموشنکو پاسخ دینامیکی یک محور گردان با سرعت خیلی بالا، حامل جرم‌های متمرکز را مورد بررسی قرار دادند. تأثیر چرخش محور و نیروی محوری ناشی از آن بر بسامدهای محور را به‌زاد و بسطامی مورد تحلیل و بررسی قرار دادند [۱۵]. آنها بسامدهای طبیعی را با در نظر گرفتن اثر ژيروسکوپیکی، نیروی محوری و اثر پواسون محاسبه نمودند. شو و یانگ [۱۶] تحلیل ارتعاشات آزاد محور ریلی را برای شش شرایط مرزی معمول ارائه کردند و بسامدهای طبیعی و شکل مودهای متناظر را به‌دست آوردند. بنرجی و سو [۱۷] با هدف تحلیل ارتعاشات جفت‌شده خمشی و پیچشی، ماتریس سفتی دینامیکی تیر کامپوزیتی دوار را استخراج نمودند. حسینی و خادم [۱۸] ارتعاشات آزاد محور با تکیه‌گاه‌های ساده را با در نظر گرفتن عوامل غیرخطی موجود در انحنا و اینرسی و با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه مورد مطالعه قرار دادند. با در نظر گرفتن نیروی محوری ناشی از دوران و اثر پواسون، غلامی و همکاران [۱۹] بسامدهای طبیعی یک روتور یکنواخت همگن را در سرعت‌های دورانی بسیار بالا به‌دست آوردند. با بهره‌گیری از روش جزئی تفاضلات مربعی، افشاری و همکاران [۲۰] اقدام به تحلیل عددی لنگ‌زنی روتور تیموشنکو با چندین تغییر ناگهانی در مقطع و چندین تکیه‌گاه نمودند. تحلیل آنها از نظر تعداد مقاطع پله‌دار در طول روتور و تعداد تکیه‌گاه‌های بیانی دارای محدودیت نبود. با استفاده از روش تفاضلات مربعی، ایرانی و همکاران [۲۱] یک حل عددی برای ارتعاشات طولی-پیچشی-خمشی یک روتور کامپوزیتی مدل شده براساس نظریه تیر تیموشنکو پرداختند. ترابی و همکاران [۲۲] براساس مدل تیر تیموشنکو و با استفاده از روش ماتریس انتقال موفق شدند یک حل دقیق و تحلیلی را برای ارتعاشات روتوری ارائه دهند که دارای چندین تغییر ناگهانی در مقطع خود بوده و حامل چندین جرم و اینرسی متمرکز است. ترابی و افشاری [۲۳] موفق شدند توابع پایه را در تحلیل ارتعاشات روتور تیموشنکو استخراج کرده و با استفاده از آن یک حل دقیق را برای ارتعاشات روتوری که تحت نیروی محوری قرار گرفته است، ارائه دهند. توابع پایه ارائه شده توسط آنها اعمال

گشتاور خمشی و نیروی برشی در راستاهای x و y می‌باشند که بر طبق نظریه تیر تیموشنکو به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱]:

$$\begin{aligned} M_x &= EI_x \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} & F_x &= kGA \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \varphi_y \right) \\ M_y &= EI_y \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} & F_y &= kGA \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \varphi_x \right) \end{aligned} \quad (۷)$$

که در این روابط u_x ، u_y ، φ_x و φ_y به ترتیب نشان‌دهنده مؤلفه‌های جابه‌جایی و چرخش در راستاهای x و y بوده و G مدول برشی ماده می‌باشد. همچنین I_x ، A و I_y به ترتیب نشان‌دهنده سطح مقطع، ممان اینرسی حول محورهای x و y بوده و k بیانگر ضریب تصحیح برشی می‌باشد که به شکل سطح مقطع و ضریب پواسون ماده بستگی دارد [۳۱].

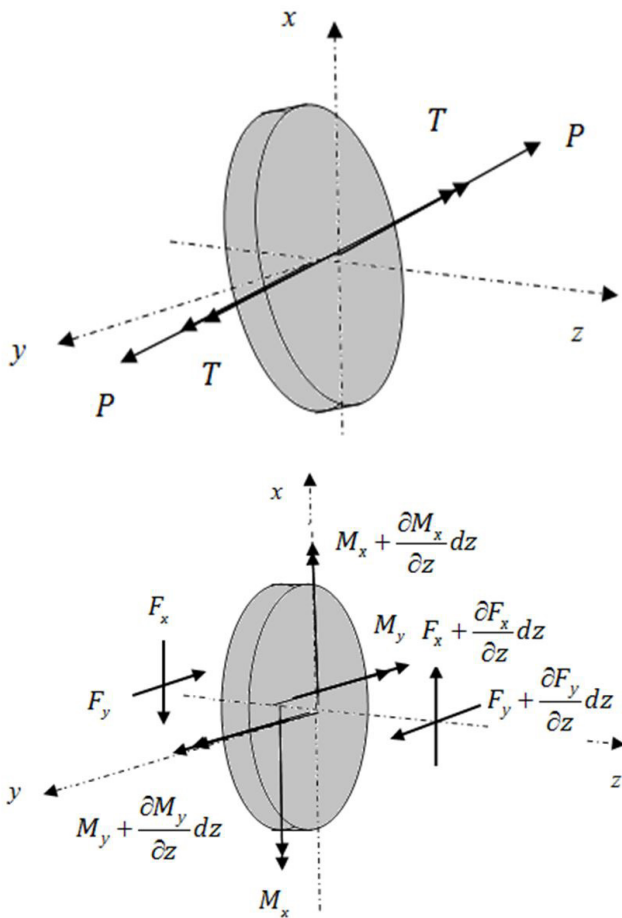


Fig. 2. Element of rotor.

شکل ۲: جزء کوچک نمونه از روتور

با استفاده از قانون دوم نیوتن، ساده‌سازی روابط و صرف نظر کردن از جملات شامل dz^2 معادلات حرکت برای جابه‌جایی در راستای دو محور x و y و همچنین چرخش حول این دو محور به شکل زیر قابل بیان می‌باشند [۳۲]:

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} + P \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \rho A \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (۸-الف)$$

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{z}{L} \right)^p \quad (۱)$$

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{L} \right)^p$$

و در تغییرات نمایی، این خواص به صورت زیر تغییر می‌کنند:

$$\begin{aligned} E(z) &= E_m \exp \left[\ln \left(\frac{E_c}{E_m} \right) \left(\frac{z}{L} \right)^p \right] \\ \rho(z) &= \rho_m \exp \left[\ln \left(\frac{\rho_c}{\rho_m} \right) \left(\frac{z}{L} \right)^p \right] \end{aligned} \quad (۲)$$

که در این روابط p ضریب بدون بعد توانی بوده و اندیس‌های m و c بیانگر خاصیت مورد نظر در فلز و سرامیک هستند.

با تعریف متغیرهای بدون بعد به شکل زیر

$$\zeta = \frac{z}{L} \quad \mu_E = \frac{E_c}{E_m} \quad \mu_\rho = \frac{\rho_c}{\rho_m} \quad (۳)$$

روابط (۱) و (۲) به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$E = E_m E^*(\zeta) \quad \rho = \rho_m \rho^*(\zeta) \quad (۴)$$

که در این رابطه برای تغییرات توانی روابط زیر

$$E^*(\zeta) = 1 + (\mu_E - 1)\zeta^p \quad \rho^*(\zeta) = 1 + (\mu_\rho - 1)\zeta^p \quad (۵)$$

و برای تغییرات نمایی روابط زیر برقرار هستند:

$$\begin{aligned} E^*(\zeta) &= \frac{E}{E_m} = \exp \left[\ln(\mu_E) \zeta^p \right] \\ \rho^*(\zeta) &= \frac{\rho}{\rho_m} = \exp \left[\ln(\mu_\rho) \zeta^p \right] \end{aligned} \quad (۶)$$

در این پژوهش نتایج عددی برای روتور ساخته شده از آلومینیوم و آلومینا که خواص آنها در جدول ۱ ارائه شده است، بیان شده‌اند.

جدول ۱: خواص فلز و سرامیک استفاده شده در ماده FGM

Table 1. Properties of metal and ceramic.

خواص		مواد	
ρ (kg/m ³)	E (GPa)		
۲۷۰۲	۷۰	Al	فلز (آلومینیوم)
۳۸۰۰	۳۸۰	Al ₂ O ₃	سرامیک (آلومینا)

۳- استخراج معادلات حاکم

یک جزء کوچک نمونه از روتور با طول dz در شکل ۲ نشان داده شده است که در این شکل M_x ، M_y ، F_x و F_y به ترتیب نشان‌دهنده مؤلفه‌های

$$\begin{aligned}
 z = L \\
 kGA \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \varphi_y \right) + P \frac{\partial u_x}{\partial z} + \bar{K}_{lx}^{(R)} u_x = 0 \\
 kGA \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \varphi_x \right) + P \frac{\partial u_y}{\partial z} + \bar{K}_{ly}^{(R)} u_y = 0 \\
 EI_x \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} + T \varphi_y + \bar{K}_{rx}^{(R)} \varphi_x = 0 \\
 EI_y \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} - T \varphi_x + \bar{K}_{ry}^{(R)} \varphi_y = 0
 \end{aligned}$$

که در این روابط \bar{K} نشان دهنده سفتی فنر بوده و بالانویس‌های L و R به ترتیب سمت چپ و راست روتور را نشان می‌دهند. همچنین اندیس اول بیانگر نوع انتقالی (I) و یا دورانی (r) بودن فنر بوده و اندیس دوم جهت عمل کردن فنر را نشان می‌دهد.

فرض کنید که مقادیر پارامترهای هندسی روتور (A و I) در نقطه $z=0$ با اندیس صفر نمایش داده شوند (I_0 و A_0). با به کار بستن روش جداسازی متغیرها به شکل زیر (ω بسامد طبیعی ارتعاشات می‌باشد)

$$\begin{Bmatrix} u_x(z,t) \\ u_y(z,t) \\ \varphi_x(z,t) \\ \varphi_y(z,t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} LU(z) \\ LV(z) \\ \Theta(z) \\ \Psi(z) \end{Bmatrix} e^{i\omega t} \quad (12)$$

و استفاده از متغیرهای بدون بعد به صورت زیر

$$\begin{aligned}
 A^* &= \frac{A}{A_0} & I^* &= \frac{I}{I_0} \\
 P^* &= \frac{PL^2}{E_m I_0} & T^* &= \frac{TL}{E_m I_0} \\
 r^2 &= \frac{I_0}{A_0 L^2} & s^2 &= \frac{E_m I_0}{k G_m A_0 L^2} \\
 \gamma^2 &= \frac{\rho_m A_0 L^4 \Omega^2}{E_m I_0} & \lambda^2 &= \frac{\rho_m A_0 L^4 \omega^2}{E_m I_0}
 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{Bmatrix} K_{lx}^{(L)} \\ K_{lx}^{(R)} \end{Bmatrix} = \frac{L}{k A_0 G_m} \begin{Bmatrix} \bar{K}_{lx}^{(L)} \\ \bar{K}_{lx}^{(R)} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} K_{ly}^{(L)} \\ K_{ly}^{(R)} \end{Bmatrix} = \frac{L}{k A_0 G_m} \begin{Bmatrix} \bar{K}_{ly}^{(L)} \\ \bar{K}_{ly}^{(R)} \end{Bmatrix} \\
 \begin{Bmatrix} K_{rx}^{(L)} \\ K_{rx}^{(R)} \end{Bmatrix} = \frac{L}{E_m I_0} \begin{Bmatrix} \bar{K}_{rx}^{(L)} \\ \bar{K}_{rx}^{(R)} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} K_{ry}^{(L)} \\ K_{ry}^{(R)} \end{Bmatrix} = \frac{L}{E_m I_0} \begin{Bmatrix} \bar{K}_{ry}^{(L)} \\ \bar{K}_{ry}^{(R)} \end{Bmatrix}$$

و در نظر گرفتن روابط (۴) تا (۶)، معادلات حاکم به شکل بدون بعد زیر بیان شده است.

$$\begin{aligned}
 E^* A^* (U'' - \Psi') + (E^* A^*)' (U' - \Psi) \\
 + s^2 P^* U'' - \lambda^2 s^2 \rho^* A^* U = 0
 \end{aligned} \quad (14-الف)$$

$$\begin{aligned}
 E^* A^* (V'' + \Theta') + (E^* A^*)' (V' + \Theta) \\
 + s^2 P^* V'' - \lambda^2 s^2 \rho^* A^* V = 0
 \end{aligned} \quad (14-ب)$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} + P \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} = \rho A \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \quad (8-ب)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial z} + T \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} - F_y = \rho I_x \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} + \rho I_p \Omega \frac{\partial \varphi_y}{\partial t} \quad (8-ج)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial z} - T \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} + F_x = \rho I_y \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} - \rho I_p \Omega \frac{\partial \varphi_x}{\partial t} \quad (8-د)$$

که در این روابط I_p نشان دهنده ممان اینرسی قطبی می‌باشد. لازم به ذکر است که در روابط (۸-ج) و (۸-د) آخرین جمله موجود در معادلات نشان دهنده اثر ژيروسکوپیک می‌باشد. با جایگذاری رابطه (۷) در روابط (۸-الف) تا (۸-د) و در نظر گرفتن تساوی زیر برای مقطع دایروی

$$I_p = 2I_x = 2I_y = 2I \quad (9)$$

معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[kGA \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \varphi_y \right) \right] + P \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} - \rho A \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0 \quad (10-الف)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[kGA \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \varphi_x \right) \right] + P \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} - \rho A \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0 \quad (10-ب)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial z} \left(EI \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} \right) + T \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} - kGA \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \varphi_x \right) \\
 - 2\rho I \Omega \frac{\partial \varphi_y}{\partial t} - \rho I \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} = 0
 \end{aligned} \quad (10-ج)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial z} \left(EI \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} \right) - T \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} + kGA \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \varphi_y \right) \\
 + 2\rho I \Omega \frac{\partial \varphi_x}{\partial t} - \rho I \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} = 0
 \end{aligned} \quad (10-د)$$

در این پژوهش به منظور بیان کلی تر شرایط مرزی در هر تکیه‌گاه دو فنر انتقالی و دو فنر پیچشی در نظر گرفته می‌شوند. با نوشتن معادلات تعادل در هر طرف از روتور، شرایط مرزی به شکل زیر قابل بیان هستند [۳۲]:

$$\begin{aligned}
 z = 0 \\
 kGA \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \varphi_y \right) + P \frac{\partial u_x}{\partial z} - \bar{K}_{lx}^{(L)} u_x = 0 \\
 kGA \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \varphi_x \right) + P \frac{\partial u_y}{\partial z} - \bar{K}_{ly}^{(L)} u_y = 0 \\
 EI_x \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} + T \varphi_y - \bar{K}_{rx}^{(L)} \varphi_x = 0 \\
 EI_y \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} - T \varphi_x - \bar{K}_{ry}^{(L)} \varphi_y = 0
 \end{aligned} \quad (11)$$

$$A_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{\prod_{m=1, m \neq i, j}^N (\zeta_i - \zeta_m)}{\prod_{m=1, m \neq j}^N (\zeta_j - \zeta_m)} & i, j = 1, 2, 3, \dots, N; i \neq j \\ \sum_{m=1, m \neq i}^N (\zeta_i - \zeta_m)^{-1} & i = j = 1, 2, 3, \dots, N \end{cases} \quad (18)$$

$$A^{(r)} = A^{(1)} A^{(r-1)} \quad 2 \leq r \leq N-1$$

علاوه بر تعداد نقاط، یکی از مهم‌ترین نکات در همگرایی مسأله چگونگی توزیع نقاط در دامنه حل آن می‌باشد. بهترین نوع توزیع نقاطی که تاکنون ارائه شده است، توزیع چیشف-گوس-لوباتو می‌باشد که از معادله زیر محاسبه خواهد شد [۲۸]:

$$\zeta_i = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left[\frac{(i-1)\pi}{(N-1)} \right] \right\} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (19)$$

۵- حل معادلات به روش تفاضلات مربعی

با اعمال رابطه (۱۶) بر روی معادلات حاکم (۱۴-الف) تا (۱۴-د)، معادله ماتریسی زیر به دست می‌آید:

$$[k] \{v\} + \lambda [c] \{v\} + \lambda^2 [m] \{v\} = 0 \quad (20)$$

که در این رابطه ماتریس‌های سفتی (k)، اثر ژيروسکوپیک (c) و جرم (m) ماتریس‌هایی مربعی از مرتبه $4N \times 4N$ بوده و بردار جابه‌جایی (v) برداری ستونی از مرتبه $4N$ می‌باشد که تعریف دقیق آنها در پیوست الف ارائه شده است.

از طرفی با روندی مشابه معادلات مربوط به شرایط مرزی نیز به شکل زیر قابل بیان هستند:

$$[S] \{v\} = \{0\} \quad (21)$$

که در این رابطه ماتریس S یک ماتریس از مرتبه $8 \times 4N$ می‌باشد که درایه‌های آن در پیوست الف ارائه شده‌اند.

با توجه به این که ارضای هم‌زمان معادلات حاکم و شرایط مرزی منجر به ازدیاد تعداد معادلات نسبت به مجهولات و ایجاد ماتریس‌هایی غیرمربعی می‌گردد، لازم است که از ارضای معادلات حاکم در نقاط مرزی صرف‌نظر گردد [۳۳، ۳۴]. نقاط مرزی به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned} & s^2 \left[E^* I^* \Theta'' + (E^* I^*)' \Theta' + T^* \Psi' \right] \\ & - E^* A^* (V' + \Theta) - 2\gamma \lambda s^2 r^2 \rho^* I^* \Psi \\ & - \lambda^2 s^2 r^2 \rho^* I^* \Theta = 0 \end{aligned} \quad (14-ج)$$

$$\begin{aligned} & s^2 \left[E^* I^* \Psi'' + (E^* I^*)' \Psi' - T^* \Theta' \right] \\ & + E^* A^* (U' - \Psi) + 2\gamma \lambda s^2 r^2 \rho^* I^* \Theta \\ & - \lambda^2 s^2 r^2 \rho^* I^* \Psi = 0 \end{aligned} \quad (14-د)$$

و شکل بدون بعد شرایط مرزی نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \zeta &= 0 \\ (1+s^2 P^*) U' - \Psi - K_{lx}^{(L)} U &= 0 \\ (1+s^2 P^*) V' + \Theta - K_{ly}^{(L)} V &= 0 \\ \Theta' + T^* \Psi - K_{rx}^{(L)} \Theta &= 0 \\ \Psi' - T^* \Theta - K_{ry}^{(L)} \Psi &= 0 \\ \zeta &= 1 \end{aligned} \quad (15)$$

$$(\mu_E \mu_d^2 + s^2 P^*) U' - \mu_E \mu_d^2 \Psi + K_{lx}^{(R)} U = 0$$

$$(\mu_E \mu_d^2 + s^2 P^*) V' + \mu_E \mu_d^2 \Theta + K_{ly}^{(R)} V = 0$$

$$\mu_E \mu_d^4 \Theta' + T^* \Psi + K_{rx}^{(R)} \Theta = 0$$

$$\mu_E \mu_d^4 \Psi' - T^* \Theta + K_{ry}^{(R)} \Psi = 0$$

که در این روابط پریم بیانگر مشتق نسبت به متغیر مکانی بدون بعد ζ بوده و μ_d نشان‌دهنده نسبت قطر محور در انتهای روتور به مقدار آن در ابتدای روتور می‌باشد.

۴- روش تفاضلات مربعی

براساس روش تفاضلات مربعی، مشتقات یک تابع از هر مرتبه‌ای را در نقطه‌ای دلخواه مانند $\zeta_i = \zeta$ می‌توان برحسب مقادیر تابع در تمامی بازه به شکل نشان داده شده در معادله زیر بازنویسی نمود:

$$\left. \frac{d^r f}{d \zeta^r} \right|_{\zeta=\zeta_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(r)} f_j \quad (16)$$

که در این رابطه f_j براساس معادله زیر در نظر گرفته شده است:

$$f_j = f(\zeta_j) \quad (17)$$

و $A(r)$ ماتریس وزنی برای مشتق r ام می‌باشد که براساس معادله زیر

تعریف می‌گردد [۲۸]:

$$[F_1] = \begin{bmatrix} [0] & I \\ [K] & [C] \end{bmatrix} \quad [F_2] = \begin{bmatrix} I & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix} \quad (29)$$

که در این رابطه I و $[0]$ به ترتیب ماتریس‌های صفر و همانی از مرتبه $4N-8$ می‌باشند. با حل مسأله مقدار ویژه (۲۸) بسامدهای طبیعی و شکل مودهای متناظر در نقاط دامن‌های به‌دست می‌آیند. به منظور ترسیم شکل مودها لازم است مقادیر متناظر بردارهای ویژه در نقاط مرزی نیز محاسبه شوند که این امر با استفاده از رابطه (۲۴-الف) امکان‌پذیر است.

ذکر دو نکته ضروری به نظر می‌رسد؛ اول آن که طبق رابطه (۲۹) ماتریس F_1 یک ماتریس نامتقارن می‌باشد که منجر به مختلط شدن مقادیر ویژه می‌گردد؛ ولی لازم است به این نکته نیز اشاره گردد که به دلیل پادمتقارن بودن ماتریس C (روابط الف-۱ و الف-۲ را در پیوست الف مشاهده کنید)، مقادیر ویژه به شکل موهومی همان بسامدهای طبیعی می‌باشند. با توجه به رابطه (۱۲) این مقادیر موهومی همان بسامدهای طبیعی می‌باشند. دومین نکته‌ای که باید به آن اشاره نمود آن است که در هنگام نوسان روتور، دو حرکت چرخش محور با سرعت زاویه‌ای γ و حرکت لنگ‌زنی محور با بسامد λ رخ می‌دهند؛ در صورتی که این دو حرکت هم‌جهت باشند ($\lambda\gamma > 0$) حرکت را پیشرو و بسامد متناظر را بسامد پیشرو گویند و در صورتی که این دو حرکت مختلف‌الجهت باشند ($\lambda\gamma < 0$) حرکت را پس‌رو و بسامد متناظر را بسامد پس‌رو گویند. همچنین در صورتی که اندازه سرعت زاویه‌ای و بسامد طبیعی روتور با یکدیگر برابر گردد، روتور دچار تشدید شده و سرعت متناظر را سرعت بحرانی روتور می‌نامند.

۶- نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی برای تحلیل انجام شده ارائه خواهند شد؛ لازم به ذکر است که به جز در مواردی که به شکل صریح ذکر گردد، مشخصه‌های بدون بعد روتور به صورت $r=0.03$ و $s=0.05$ در نظر گرفته شده و تکیه‌گاه‌های روتور با فرم‌هایی با ضرایب بدون بعد به شکل زیر مدل‌سازی شده‌اند:

$$K_{lx}^{(L)} = K_{ly}^{(L)} = 1000 \quad K_{lx}^{(R)} = K_{ly}^{(R)} = 2000 \\ K_{rx}^{(L)} = K_{ry}^{(L)} = 50 \quad K_{rx}^{(R)} = K_{ry}^{(R)} = 100$$

نخست با توجه به این که تحلیل ارائه شده براساس یک روش عددی انجام گرفته است، همگرایی روش باید مورد بررسی قرار گیرد. به این منظور یک روتور را با قطر متغیر $d=d_0(1-0.2z)$ تغییرات خاصی به شکل توانی ($p=1$)، سرعت دورانی $\omega=100$ ، تحت نیروی محوری $P^*=4$ و گشتاور پیچشی $T^*=5$ در نظر بگیرد. نمودار تغییرات چهار بسامد اول پیشرو و پس‌رو در شکل‌های ۳ (الف) و ۳ (ب) رسم شده‌اند. همان‌گونه که در این شکل‌ها نشان داده شده است تحلیل انجام شده همگرا بوده و به ازای $N=10$ تغییر چندانی در نتایج حاصل نخواهد شد. در تمامی مثال‌های پیشرو نیز از همین تعداد نقاط استفاده خواهد شد.

$$\{v\}_b = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_N \\ V_1 \\ V_N \\ \Theta_1 \\ \Theta_N \\ \Psi_1 \\ \Psi_N \end{Bmatrix} \quad (22)$$

و سایر نقاط نیز نقاط میانی بوده که با نماد $\{v\}_d$ نشان داده می‌شوند. حذف معادلات حاکم در نقاط مرزی، رابطه (۲۰) به شکل زیر بیان می‌گردد:

$$[\bar{k}] \{v\}_d + \lambda [\bar{c}] \{v\}_d + \lambda^2 [\bar{m}] \{v\}_d = 0 \quad (23)$$

که در این رابطه علامت بار بیانگر ماتریس متناظر غیرمربعی از مرتبه $(4N-8) \times 4N$ می‌باشد.

روابط (۲۱) و (۲۳) را می‌توان به شکل زیر تفکیک و بیان نمود:

$$[S]_d \{v\}_d + [S]_b \{v\}_b = \{0\} \quad (24\text{-الف})$$

$$[\bar{k}]_d \{v\}_d + [\bar{k}]_b \{v\}_b + \lambda [\bar{c}]_d \{v\}_d + \lambda [\bar{c}]_b \{v\}_b + \lambda^2 [\bar{m}]_d \{v\}_d + \lambda^2 [\bar{m}]_b \{v\}_b = 0 \quad (24\text{-ب})$$

حال با اعمال رابطه (۲۴-الف) بر روی رابطه (۲۴-ب) رابطه زیر را می‌توان بیان نمود:

$$[K] \{v\}_d + \lambda [C] \{v\}_d + \lambda^2 [M] \{v\}_d = 0 \quad (25)$$

که در این رابطه $[K]$ ، $[C]$ و $[M]$ ماتریس‌هایی مربعی از مرتبه $(4N-8)$ می‌باشند که به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$[K] = [\bar{k}]_d - [\bar{k}]_b [S]_b^{-1} [S]_d \\ [C] = [\bar{c}]_d - [\bar{c}]_b [S]_b^{-1} [S]_d \\ [M] = [\bar{m}]_d - [\bar{m}]_b [S]_b^{-1} [S]_d \quad (26)$$

این ماتریس‌ها به‌صورت هم‌زمان شامل معادلات حاکم و شرایط مرزی می‌باشند.

رابطه (۲۵) یک مسأله مقدار ویژه غیراستاندارد می‌باشد که با تعریف بردار جابه‌جایی جدید به شکل زیر

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} \{v\}_d \\ \lambda \{v\}_d \end{Bmatrix} \quad (27)$$

به مسأله مقدار ویژه استاندارد زیر تبدیل می‌گردد:

$$[F_1] \{w\} = \lambda [F_2] \{w\} \quad (28)$$

هر دو راستا در نظر گرفته شوند $(K_{I_x}^{(L)}=K_{I_y}^{(L)}=K_{I_x}^{(R)}=K_{I_y}^{(R)}=K)$. به ازای سرعت دورانی بدون بعد $\gamma=25$ ، در جدول ۲ مقادیر چهار بسامد اول پیشرو و پس رو به ازای مقادیر مختلف K ارائه شده‌اند.

جدول ۲: تأثیر سفتی تکیه‌گاه‌ها بر روی بسامدهای روتور در مدل‌سازی تکیه‌گاه ساده

Table 2. Effect of stiffness of supports on the natural frequencies of rotor in modeling simply supported rotor.

لنگ‌زنی پیشرو				
λ_4	λ_3	λ_2	λ_1	K
۱۱۸/۹۹۹۹	۷۱/۷۰۶۲۲	۳۳/۵۲۹۷۵	۸/۵۴۶۱۵۸	۱۰
۱۲۹/۴۱۳۱	۷۸/۳۰۱۲۸	۳۷/۱۴۱۰۰	۹/۷۲۸۷۴۰	۱۰۰
۱۳۱/۴۴۶۰	۷۹/۵۶۶۴۴	۳۷/۷۶۵۶۰	۹/۹۰۰۸۸۵	۱۰ ^۳
۱۳۱/۶۷۰۱	۷۹/۷۰۴۴۹	۳۷/۸۳۲۵۰	۹/۹۱۸۸۸۴	۱۰ ^۴
۱۳۱/۶۹۲۷	۷۹/۷۱۸۴۲	۳۷/۸۳۹۲۳	۹/۹۲۰۶۹۲	۱۰ ^۵
۱۳۱/۶۹۴۹	۷۹/۷۱۹۷۸	۳۷/۸۳۹۸۹	۹/۹۲۰۸۶۸	۱۰ ^۶
۱۳۰/۷۴۳۹	۷۹/۵۶۰۹۶	۳۷/۸۴۲۷۰	۹/۹۲۰۹۰۹	حل دقیق [۱]

لنگ‌زنی پس‌رو				
λ_4	λ_3	λ_2	λ_1	K
۱۱۶/۲۴۰۸	۶۹/۷۲۱۰۴	۳۲/۴۴۵۳۲	۸/۲۳۴۹۶۱	۱۰
۱۲۶/۰۰۷۵	۷۵/۸۰۴۷۹	۳۵/۷۵۷۱۷	۹/۳۲۴۹۶۵	۱۰۰
۱۲۷/۹۱۹۷	۷۶/۹۸۲۶۹	۳۶/۳۳۳۸۶	۹/۴۸۲۹۳۶	۱۰ ^۳
۱۲۸/۱۳۱۴	۷۷/۱۱۱۶۹	۳۶/۳۹۵۷۴	۹/۴۹۹۴۴۴	۱۰ ^۴
۱۲۸/۱۵۲۹	۷۷/۱۲۴۷۱	۳۶/۴۰۱۹۷	۹/۵۰۱۱۰۳	۱۰ ^۵
۱۲۸/۱۵۴۹	۷۷/۱۲۵۹۸	۳۶/۴۰۲۵۸	۹/۵۰۱۲۶۴	۱۰ ^۶
۱۲۷/۱۶۳۹	۷۶/۹۶۵۶۷	۳۶/۴۰۵۴۰	۹/۵۰۱۳۰۳	حل دقیق [۱]

همان‌گونه که در این جدول نشان داده شده است، با افزایش سفتی فنرهای تکیه‌گاه‌ها تمامی بسامدهای پیشرو و پس‌رو به‌واسطهٔ افزایش سفتی مجموعه افزایش یافته و به مقداری ثابت همگرا می‌گردند که همان مقادیر متناظر برای روتور با تکیه‌گاه‌های ساده می‌باشند. مقادیر سفتی فنرها در این حالت نیز مقدار لازم برای مدل‌سازی تکیه‌گاه ساده می‌باشند (در این مورد $K=10^6$). مقایسهٔ نتایج در این حالت با حل دقیق ارائه شده در رابطه (۳۰) برای روتور با تکیه‌گاه‌های ساده بیانگر دقت قابل قبول تحلیل ارائه شده می‌باشد.

به منظور بررسی بیشتر صحت تحلیل ارائه شده، این بار یک روتور یکنواخت همگن و فاقد نیروی محوری و گشتاور پیچشی را با مشخصات زیر در نظر بگیرید:

$$E = 207 \text{ GPa} \quad \rho = 7748 \text{ kg/m}^3 \quad \nu = 0.3$$

$$k = 0.9 \quad L = 1 \text{ m} \quad d = 0.25 \text{ m} \quad \Omega = 60 \text{ Krpm}$$

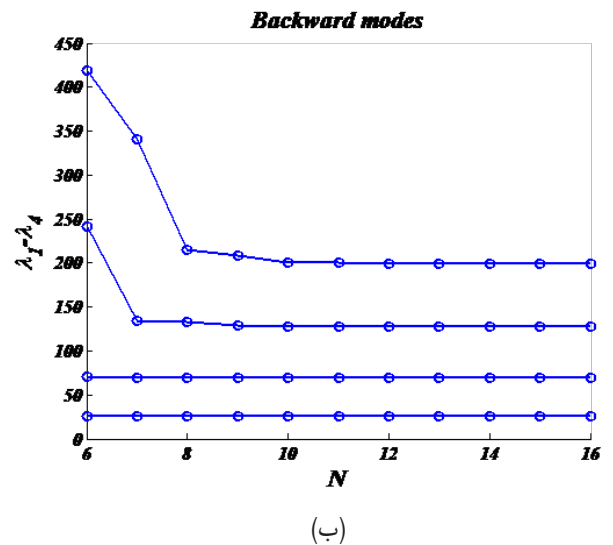
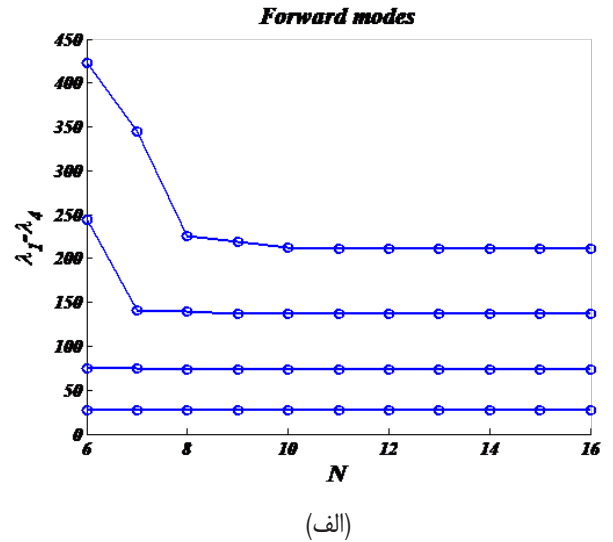


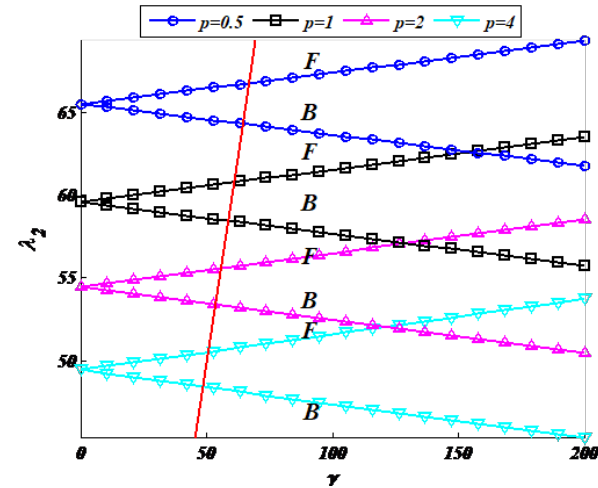
Fig. 3. Convergence of the presented solution.

شکل ۳: همگرایی تحلیل ارائه شده

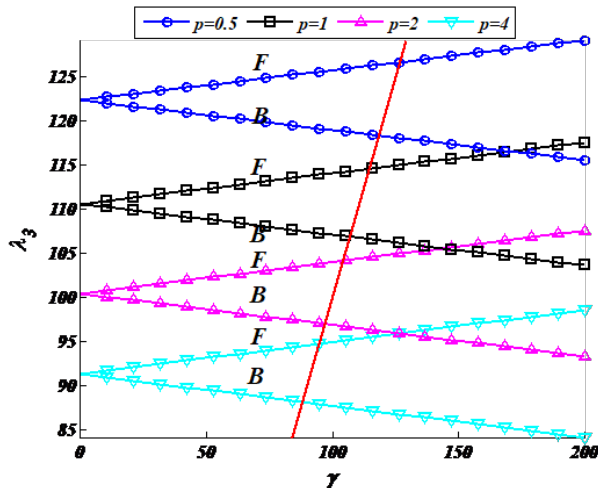
پس از بررسی همگرایی تحلیل ارائه شده نوبت به اعتبارسنجی آن می‌رسد. متأسفانه به دلیل شمار کم کارهای انجام گرفته در این زمینه تنها می‌توان حالت خاصی از مسأله را مورد بررسی قرار داد. به این منظور ابتدا یک روتور همگن با مقطع یکنواخت، بدون نیروی محوری، گشتاور و با تکیه‌گاه‌های ساده را در نظر بگیرید. برای چنین مثالی با در نظر گرفتن مودهای سینوسی، حل دقیق ریشه‌های معادلهٔ زیر می‌باشند [۱]:

$$\lambda^4 - 2i\gamma\lambda^3 + \frac{1+(r^2+s^2)n^2\pi^2}{r^2s^2}\lambda^2 - 2i\gamma\frac{n^2\pi^2}{s^2}\lambda + \frac{n^4\pi^4}{r^2s^2} = 0 \quad (30)$$

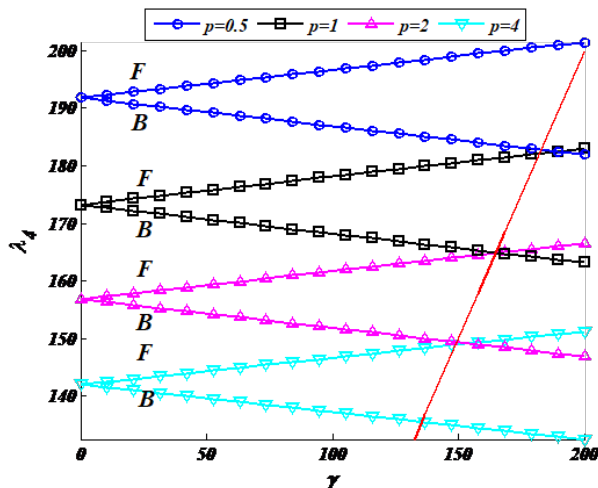
که در این رابطه n شماره مود بوده و i متغیر مختلط می‌باشد. به منظور مدل‌سازی بهتر تکیه‌گاه ساده با فنر، مقادیر فنرهای پیچشی باید برابر با صفر و مقادیر فنرهای انتقالی باید مقادیر برابر در هر دو انتها و در



(ب)



(ج)



(د)

Fig. 4. Effect of power law index on the Campbell diagram of the first four modes.

شکل ۴: تأثیر توان در معادله تغییرات خواص بر روی نمودار کمپبل چهار مود اول

در جدول ۳ مقادیر سه بسامد اول پیشرو برای شرایط مرزی مختلف محاسبه و با نتایج دقیق ارائه شده توسط غلامی و موسوی [۱۹] مقایسه شده‌اند. مقایسه نتایج بیانگر دقت بالایی تحلیل ارائه شده می‌باشد. لازم به ذکر است که به منظور مدل‌سازی تکیه‌گاه‌ها از مقادیر زیر استفاده شده است:

$$\text{Clamped (C): } K^{(L)} = K^{(R)} = 10^6$$

$$\text{Simple (S): } K^{(L)} = 10^6, K^{(R)} = 0$$

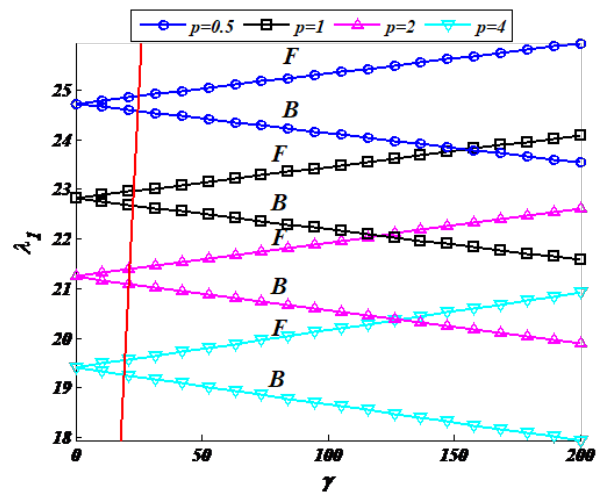
جدول ۳: تأثیر سفتی تکیه‌گاه‌ها بر روی بسامدهای روتور در مدل‌سازی تکیه‌گاه ساده

Table 3. Validation of the presented solution for forward frequencies of rotors with various boundary conditions.

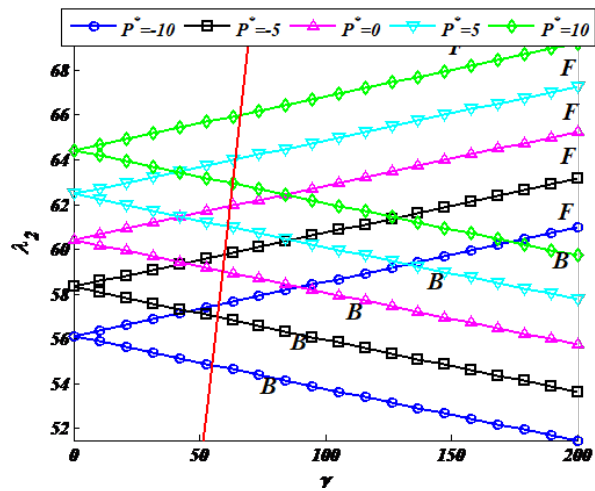
ω_3 (rad/s)	ω_2 (rad/s)	ω_1 (rad/s)	شرایط مرزی
۹۲۲۸/۷۸	۴۸۳۷/۹۰	۱۷۹۱/۳۲	حل ارائه شده
۹۴۳۱/۸۳	۴۹۲۹/۷۷	۱۸۱۳/۲۳	حل دقیق [۱۹]
۸۱۱۷/۳۶	۳۹۷۹/۰۴	۱۲۴۸/۸۷	حل ارائه شده
۸۱۶۶/۴۱	۴۰۱۱/۸۱	۱۲۵۵/۱۱	حل دقیق [۱۹]
۷۰۳۸/۹۰	۳۱۸۷/۶۹	۸۰۸/۴۲	حل ارائه شده
۷۰۰۰/۰۱	۳۱۸۳/۲۰	۸۰۸/۱۴	حل دقیق [۱۹]

با هدف بررسی تأثیر توان در معادله تغییرات خواص (مقدار p در روابط (۱) و (۲))، یک روتور را با قطر متغیر $d = d_0 \exp(-0.5\zeta)$ تغییرات خواصی به شکل نمایی، تحت نیروی محوری $P^* = 3$ و گشتاور پیچشی $T^* = 2$ در نظر بگیرید.

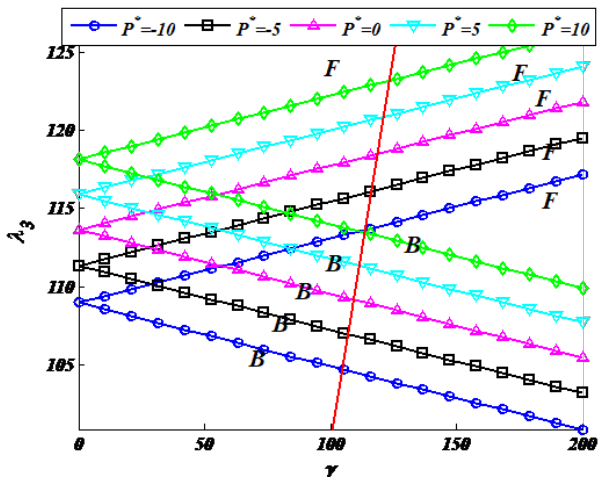
در شکل‌های ۴ (الف) تا ۴ (د) نمودار تغییرات چهار بسامد اول پیشرو (F) و پس‌رو (B) برحسب سرعت دورانی (نمودار کمپبل) به ازای مقادیر مختلف p رسم شده است. همچنین در این شکل‌ها نیمساز ناحیه نیز رسم شده است ($|\lambda| = \gamma$)؛ محل تقاطع این نیمساز با منحنی مرتبط با هر مود، بیانگر سرعت بحرانی و پدیده تشدید در آن مود بوده و طراحی باید به گونه‌ای صورت پذیرد



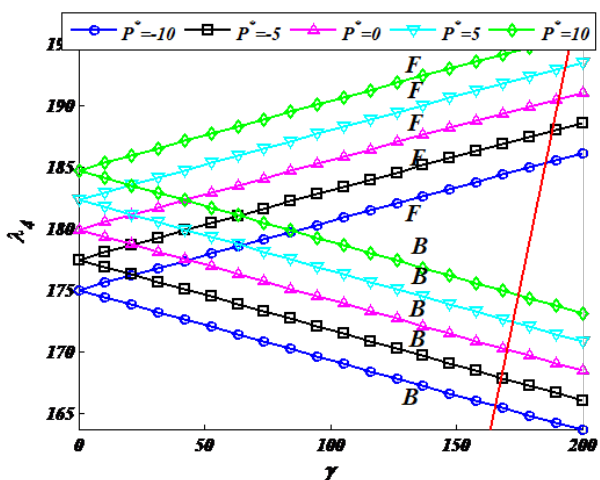
(الف)



(ب)



(ج)

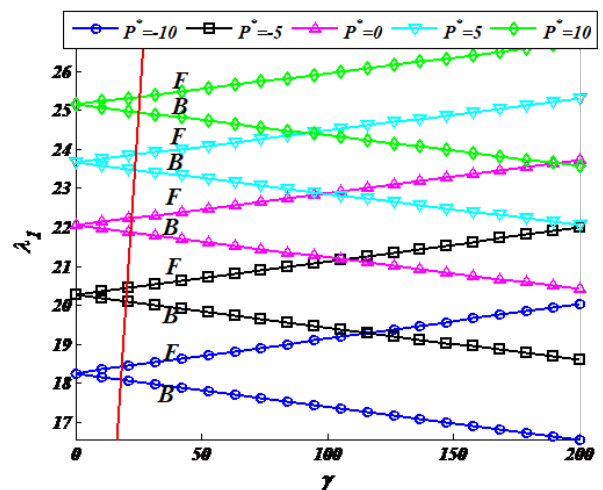


(د)

که سرعت دورانی روتور با این مقادیر بحرانی فاصله داشته باشد. این شکل‌ها نشان می‌دهند که با شروع دوران روتور و افزایش سرعت دورانی آن، بسامد پیشرو در هر مود افزایش یافته و بسامد پس‌روی همان مود کاهش می‌یابد که دلیل این مسأله همان اثر ژيروسکوپیک می‌باشد. لازم به ذکر است که دلیل تساوی بسامدهای پیشرو و پس‌رو در سرعت دورانی صفر (روتور ساکن) تساوی مقادیر سفتی فنرها در تکیه‌گاه‌ها در دو راستای x و y می‌باشد. این نمودارها همچنین نشان می‌دهند که با افزایش مقدار p (رابطه (۲) را ملاحظه نمایید)، تمامی بسامدهای پیشرو و پس‌رو کاهش یافته و مقادیر سرعت‌های بحرانی در هر مود نیز کاهش می‌یابند. به عبارت دیگر برای افزایش مقادیر سرعت‌های بحرانی لازم است مقدار p کوچک در نظر گرفته شود.

به منظور بررسی تأثیر نیروی محوری، یک روتور با قطر متغیر $d = d_0(1 - 0.25\zeta)$ تغییرات خواصی به شکل توانی ($p=2$)، تحت گشتاور بدون بعد $T^* = 5$ در نظر گرفته شده است. به ازای مقادیر مختلف نیروی محوری، در شکل‌های ۵ (الف) تا ۵ (د) نمودار تغییرات چهار بسامد اول پیشرو و پس‌رو برحسب سرعت دورانی رسم شده است. همان‌گونه که در این شکل‌ها نشان داده شده است، نیروی محوری کششی موجب افزایش بسامدهای پیشرو و پس‌رو و همچنین سرعت‌های بحرانی می‌گردد که دلیل این مسأله افزایش سفتی سامانه می‌باشد. از طرفی نیروی محوری فشاری از طریق کاهش سفتی سامانه منجر به کاهش تمامی بسامدها و در نتیجه کاهش سرعت‌های بحرانی می‌گردد. لازم به ذکر است که جدا از پدیده تشدید، نیروی محوری فشاری در صورت افزایش می‌تواند منجر به صفر شدن بسامدها گردد که در این حالت کمانش روتور اتفاق می‌افتد؛ بار محوری مورد نیاز در این حالت نیز بار بحرانی کمانش برای روتور می‌باشد.

با هدف بررسی کردن تأثیر گشتاور پیشروی، یک روتور را با قطر متغیر $d = d_0 \exp(-0.1\zeta)$ تغییرات خواصی به شکل نمایی ($p=5$)، تحت نیروی محوری $P^* = 3$ در نظر بگیرید. نمودار تغییرات چهار بسامد اول پیشرو و پس‌رو برحسب سرعت دورانی به ازای مقادیر مختلف گشتاور پیشروی در شکل‌های ۶ (الف) تا ۶ (د) رسم شده است. همان‌گونه که در این شکل‌ها



(ه)

Fig. 5. Effect of axial load on the Campbell diagram of the first four modes.

شکل ۵: تأثیر نیروی محوری بر روی نمودار کمپبل چهار مود اول

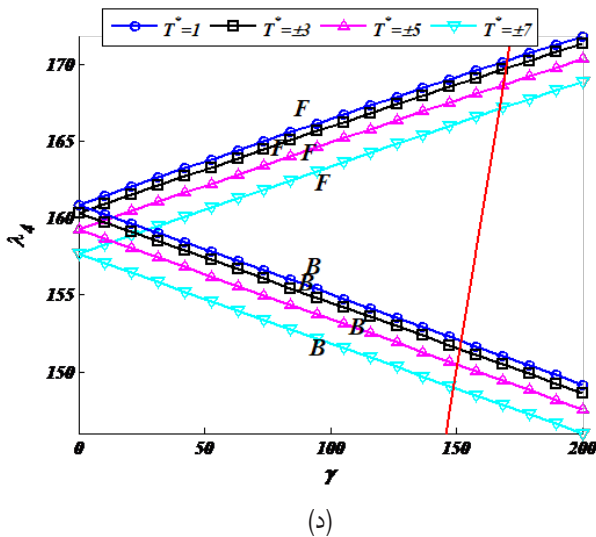
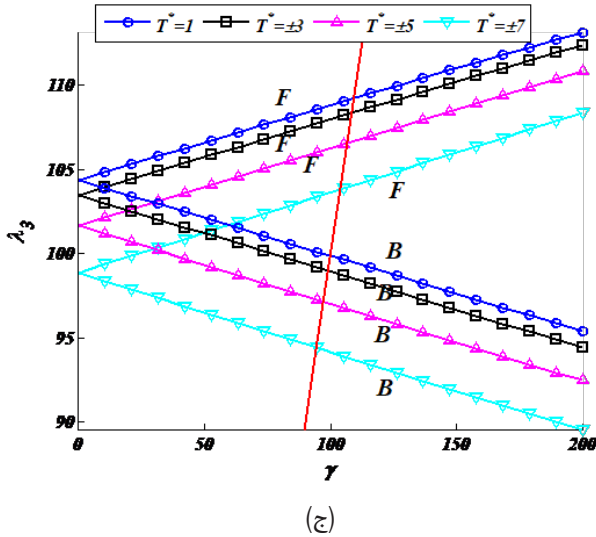
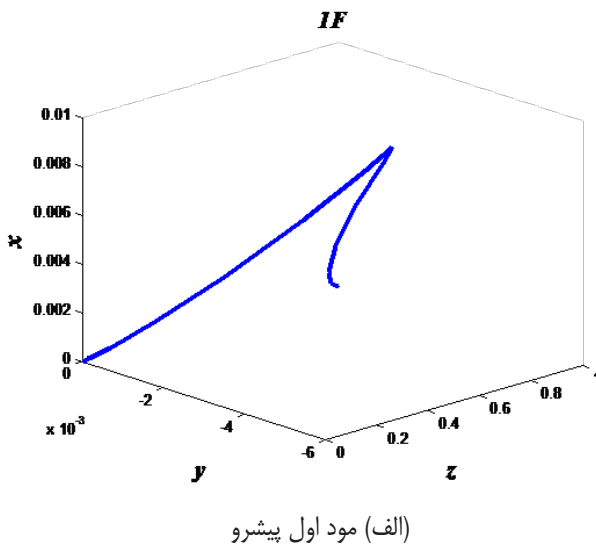


Fig. 6. Effect of torsional torque on the Campbell diagram of the first four modes.

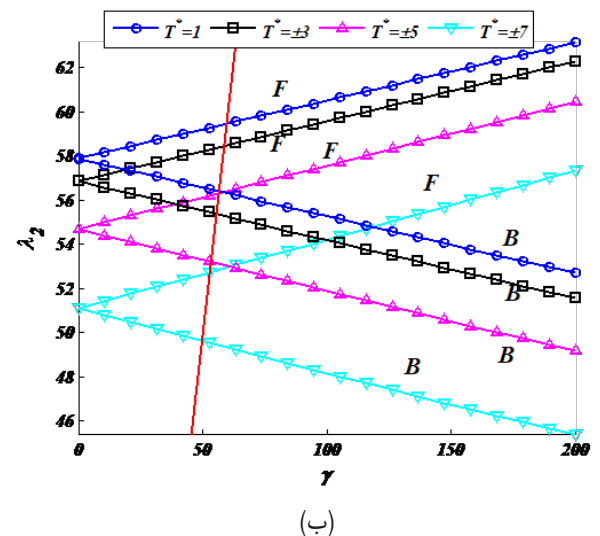
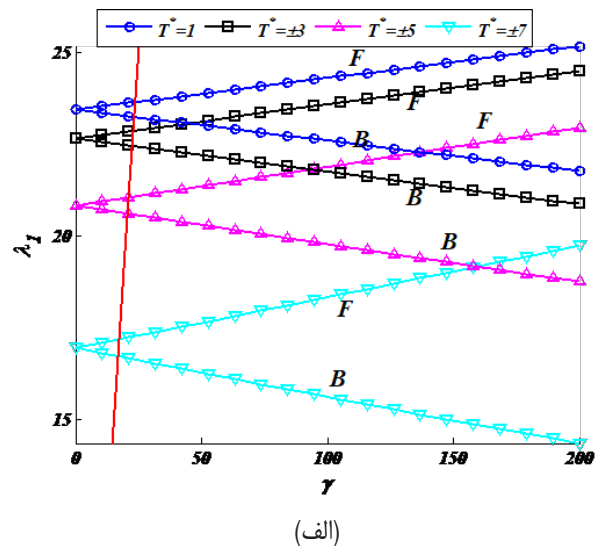
شکل ۶: تأثیر گشتاور پیچشی بر روی نمودار کمپبل چهار مود اول



نشان داده شده است، وجود گشتاور پیچشی منجر به کاهش تمامی بسامدها و همچنین کاهش سرعت‌های بحرانی می‌گردد. لازم به ذکر است که چنانچه این نمودارها نشان می‌دهند، جهت اعمال گشتاور پیچشی تأثیری بر روی بسامدها نداشته و همانند نیروی محوری فشاری، افزایش مقدار گشتاور پیچشی نیز می‌تواند منجر به ناپایداری روتور گردد.

همچنین به ازای $\gamma=100$ و $T^*=1$ دو شکل مود اول پیشرو و پس‌رو در شکل‌های γ (الف) تا γ (د) رسم شده‌اند. دقت روش به حدی است که حتی پیش‌پیش ایجاد شده در شکل مودها در اثر گشتاور پیچشی نیز به خوبی قابل مشاهده است.

برای بررسی دقیق‌تر تأثیر نیروی محوری و گشتاور پیچشی، یک روتور با قطر متغیر $d=d_0(1-0.3\zeta)$ ، تغییرات خواصی به شکل توانی ($p=1$)، در حال دوران با سرعت $\gamma=80$ در نظر گرفته شده است. در شکل ۸ نمودار تغییرات بسامد اول پیشرو و پس‌رو برحسب نیروی محوری به ازای مقادیر مختلف گشتاور پیچشی خارجی رسم شده است. همان‌گونه که در این نمودارها نشان داده شده است افزایش نیروی محوری فشاری و همچنین گشتاور پیچشی منجر به صفر شدن بسامد اول و کماتش روتور می‌گردد.



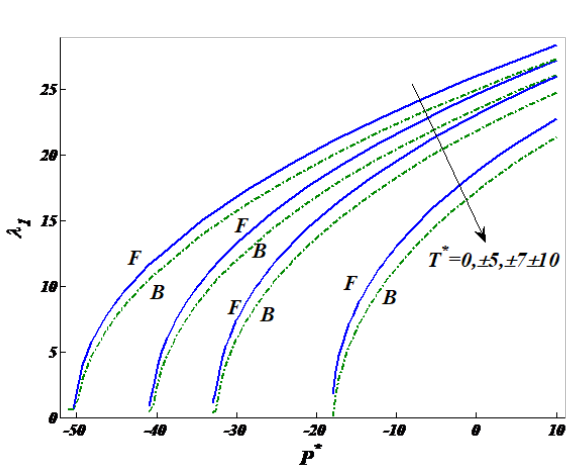


Fig. 8. Effect of axial load and torsional torque on the stability of rotor.

شکل ۸: تأثیر نیروی محوری و گشتاور پیچشی بر روی پایداری روتور

۷- جمع بندی نتایج

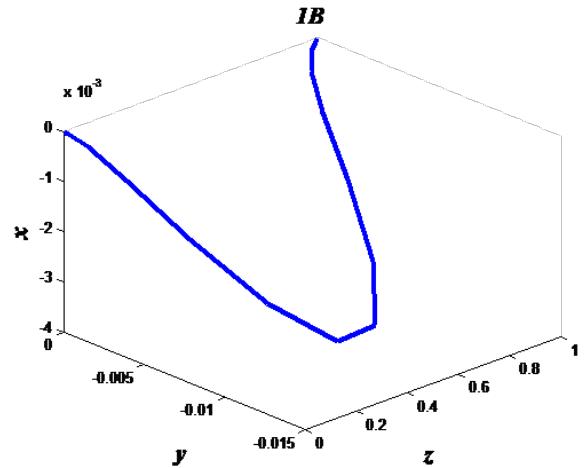
با استفاده از روش تفاضلات مربعی یک حل عددی برای تحلیل لنگ زنی و پایداری یک روتور با مقطع غیریکنواخت ساخته شده از مواد هدفمند تحت نیروی محوری و گشتاور پیچشی ارائه شد. بررسی های صورت گرفته نتایج زیر را به همراه داشتند:

- تحلیل ارائه شده ضمن همگرا بودن از دقت بالایی نیز برخوردار است
- با افزایش سرعت دورانی روتور بسامدهای پیشرو افزایش یافته و بسامدهای پس رو کاهش می یابند.
- در هر دو حالت تغییرات توانی و یا نمایی خواص در راستای طولی روتور، افزایش توان در معادله تغییرات خواص منجر به کاهش تمامی بسامدهای پیشرو و پس رو و سرعت های بحرانی روتور می گردد.
- نیروی محوری کششی باعث افزایش تمامی بسامدهای پیشرو و پس رو و سرعت های بحرانی روتور می شود.
- نیروی محوری فشاری و گشتاور پیچشی باعث کاهش تمامی بسامدهای پیشرو و پس رو و سرعت های بحرانی روتور شده و می توانند منجر به کماتش روتور نیز شوند.

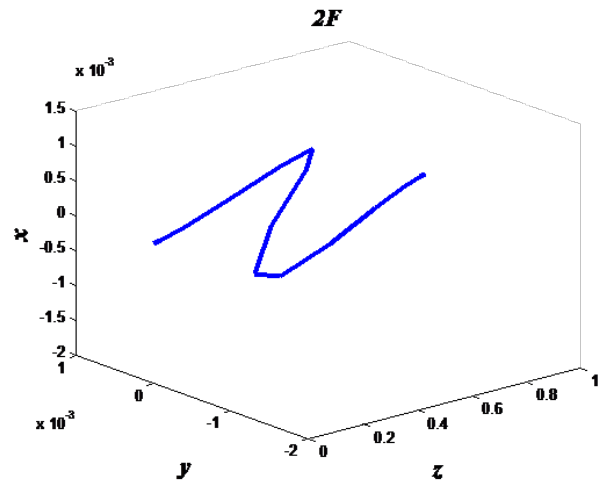
پیوست الف:

ماتریس های سفتی، اثر ژبروسکوپیک و جرم که در رابطه (۲۰) ایجاد شده اند به شکل زیر تعریف شده اند:

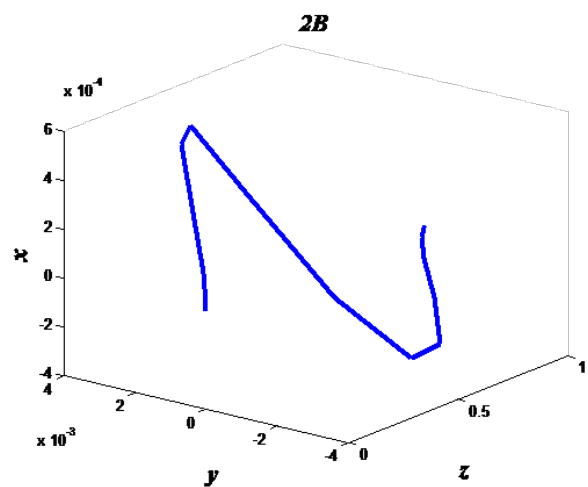
$$\{v\} = \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{V\} \\ \{\Theta\} \\ \{\Psi\} \end{Bmatrix} \quad (\text{الف} - ۱)$$



(ب) مود اول پس رو



(ج) مود دوم پیشرو



(د) مود دوم پس رو

Fig. 7. Mode shapes of rotor under torsional torque.

شکل ۷: شکل مودهای روتور تحت پیچش

$$S_{ij} = \begin{cases} (1+s^2P^*)A_{ij}^{(1)} - K_{ix}^{(L)}\delta_{ij} & i=1, 1 \leq j \leq N \\ -1 & i=1, j=3N+1 \\ (\mu_E \mu_d^2 + s^2P^*)A_{ij}^{(1)} + K_{ix}^{(R)}\delta_{ij} & i=2, 1 \leq j \leq N \\ -\mu_E \mu_d^2 & i=2, j=4N \\ (1+s^2P^*)A_{i(j-N)}^{(1)} & i=3, N+1 \leq j \leq 2N \\ -K_{iy}^{(L)}\delta_{i(j-N)} & i=3, j=2N+1 \\ 1 & i=3, j=2N+1 \\ (\mu_E \mu_d^2 + s^2P^*)A_{i(j-N)}^{(1)} + K_{iy}^{(R)}\delta_{i(j-N)} & i=4, N+1 \leq j \leq 2N \\ \mu_E \mu_d^2 & i=4, j=3N \\ A_{i(j-2N)}^{(1)} - K_{ix}^{(L)}\delta_{i(j-2N)} & i=5, 2N+1 \leq j \leq 3N \\ T^* & i=5, j=3N+1 \\ \mu_E \mu_d^4 A_{i(j-2N)}^{(1)} + K_{ix}^{(R)}\delta_{i(j-2N)} & i=6, 2N+1 \leq j \leq 3N \\ T^* & i=6, j=4N \\ A_{i(j-3N)}^{(1)} - K_{iy}^{(L)}\delta_{i(j-3N)} & i=7, 3N+1 \leq j \leq 4N \\ -T^* & i=7, j=2N+1 \\ \mu_E \mu_d^4 A_{i(j-3N)}^{(1)} + K_{iy}^{(R)}\delta_{i(j-3N)} & i=8, 3N+1 \leq j \leq 4N \\ -T^* & i=8, j=3N \end{cases} \quad \text{(الف-۴)}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} [k_{1w}] & [0] & [0] & [k_{1s}] \\ [0] & [k_{2v}] & [k_{2r}] & [0] \\ [0] & [k_{3v}] & [k_{3r}] & [k_{3s}] \\ [k_{4w}] & [0] & [k_{4r}] & [k_{4s}] \end{bmatrix}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [c_{3s}] \\ [0] & [0] & [c_{4r}] & [0] \end{bmatrix} \quad \text{(الف-۱)}$$

$$[m] = \begin{bmatrix} [m_{1w}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [m_{2v}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [m_{3r}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [m_{4s}] \end{bmatrix}$$

که در این رابطه نیز ماتریس‌هایی از مرتبه N به شکل زیر تعریف شده‌اند:

$$[k_{1w}] = [k_{2v}] = [a][A^{(2)}] + [b][A^{(1)}] + s^2P^*[A^{(2)}]$$

$$[k_{2r}] = -[k_{1s}] = [a][A^{(1)}] + [b]$$

$$[k_{3r}] = [k_{4s}] = s^2([c][A^{(2)}] + [d][A^{(1)}]) - [a]$$

$$[k_{3s}] = -[k_{4r}] = s^2T^*[A^{(1)}] \quad \text{(الف-۲)}$$

$$[k_{4w}] = -[k_{3v}] = [a][A^{(1)}]$$

$$[c_{4r}] = -[c_{3s}] = 2\gamma s^2 r^2 [f]$$

$$[m_{1w}] = [m_{2v}] = -s^2[e]$$

$$[m_{3r}] = [m_{4s}] = -s^2 r^2 [f]$$

که در این تعاریف نیز ماتریس‌هایی قطری از مرتبه N به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$a_{ii} = (E^*A^*)(\zeta_i) \quad b_{ii} = (E^*A^*)'(\zeta_i)$$

$$c_{ii} = (E^*T^*)(\zeta_i) \quad d_{ii} = (E^*T^*)'(\zeta_i) \quad \text{(الف-۳)}$$

$$e_{ii} = (\rho^*A^*)(\zeta_i) \quad f_{ii} = (\rho^*T^*)(\zeta_i)$$

لازم به ذکر است که با توجه به قطری بودن ماتریس f ماتریس c در رابطه (الف-۱) یک ماتریس پادمتقارن می‌باشد. همچنین درایه‌های غیر صفر ماتریس شرایط مرزی (s) که در رابطه (۲۱) ظاهر شده است، نیز به صورت زیر می‌باشند:

که در این رابطه δ بیانگر دلتای کرونیکر با تعریف زیر می‌باشد:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \text{(الف-۵)}$$

فهرست علائم

طول روتور، m	L
قطر روتور، m	d
نیروی محوری، N	P
گشتاور پیچشی، $N.m$	T
مدول الاستیک فلز، Pa	E_m
مدول برشی فلز، Pa	G_m
مدول الاستیک سرامیک، Pa	E_c
مدول برشی سرامیک، Pa	G_c
جابه‌جایی در راستای x	u_x
جابه‌جایی در راستای y	u_y
دوران حول محور x	φ_x
دوران حول محور y	φ_y
مساحت، m^2	A
ممان اینرسی حول محور x	I_x
ممان اینرسی حول محور y	I_y
ممان اینرسی قطبی m^4	I_p
ضریب تصحیح تنش برشی، بدون بعد	k

Journal of vibration and acoustics, 121(2) (1999) 256-258.

[11] N. Shabaneh, J.W. Zu, Dynamic analysis of rotor–shaft systems with viscoelastically supported bearings, *Mechanism and machine theory*, 35(9) (2000) 1313-1330.

[12] T. El-Mahdy, R. Gadelrab, *Free vibration of unidirectional fiber reinforcement composite rotor*, in, Academic Press, 2000.

[13] F.A. Raffa, F. Vatta, Equations of motion of an asymmetric Timoshenko shaft, *Meccanica*, 36(2) (2001) 201-211.

[14] U. Gu, C. Cheng, Vibration analysis of a high-speed spindle under the action of a moving mass, *Journal of sound and vibration*, 278(4-5) (2004) 1131-1146.

[15] M. Behzad, A. Bastami, Effect of centrifugal force on natural frequency of lateral vibration of rotating shafts, *Journal of sound and vibration*, 274(3-5) (2004) 985-995.

[16] G. Sheu, S.-M. Yang, Dynamic analysis of a spinning Rayleigh beam, *International Journal of Mechanical Sciences*, 47(2) (2005) 157-169.

[17] J. Banerjee, H. Su, Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of a spinning composite beam, *Computers & structures*, 84(19-20) (2006) 1208-1214.

[18] S. Hosseini, S. Khadem, Free vibrations analysis of a rotating shaft with nonlinearities in curvature and inertia, *Mechanism and Machine theory*, 44(1) (2009) 272-288.

[19] B.G. Bazezhour, S.M. Mousavi, A. Farshidianfar, Free vibration of high-speed rotating Timoshenko shaft with various boundary conditions: effect of centrifugally induced axial force, *Archive of Applied Mechanics*, 84(12) (2014) 1691-1700.

[20] H. Afshari, M. Irani, K. Torabi, Free whirling analysis of multi-step Timoshenko rotor with multiple bearing using DQEM, *Modares Mechanical Engineering*, 14(10) (2014) 109-120.

[21] M. Irani, A. Mohebbi, H. Afshari, *Longitudinal-Torsional and Two Plane Transverse Vibrations of a Composite Timoshenko Rotor*, (2016).

[22] K. Torabi, H. Afshari and H. Najafi, Whirling analysis of axial-loaded multi-step Timoshenko rotor carrying concentrated masses, *Journal of solid mechanics*, 9(1) (2017) 138-156.

[23] K. Torabi, H. Afshari, Exact solution for whirling analysis of axial-loaded Timoshenko rotor using basic functions, *Engineering Solid Mechanics*, 4(2) (2016) 97-108.

[24] R. Bellman, B. Kashef, J. Casti, Differential quadrature:

فنر انتقالی در راستای x در $z=0$	$\bar{K}_{lx}^{(L)}$
فنر انتقالی در راستای y در $z=0$	$\bar{K}_{ly}^{(L)}$
فنر دورانی حول محور x در $z=0$	$\bar{K}_{rx}^{(L)}$
فنر دورانی حول محور y در $z=0$	$\bar{K}_{ry}^{(L)}$
فنر انتقالی در راستای x در $z=L$	$\bar{K}_{lx}^{(R)}$
فنر انتقالی در راستای y در $z=L$	$\bar{K}_{ly}^{(R)}$
فنر دورانی حول محور x در $z=L$	$\bar{K}_{rx}^{(R)}$
فنر دورانی حول محور y در $z=L$	$\bar{K}_{ry}^{(R)}$

علائم یونانی

سرعت دورانی، rad/s	Ω
چگالی فلز، kg/m^3	ρ_m
چگالی سرامیک، kg/m^3	ρ_c

منابع

[1] G. Genta, *Dynamics of rotating systems*, Springer Science & Business Media, 2007.

[2] R. Grybos, The effect of shear and rotary inertia of a rotor at its critical speeds, *Archive of applied mechanics*, 61(2) (1991) 104-109.

[3] S. Choi, C. Pierre, A. Ulsoy, Consistent modeling of rotating Timoshenko shafts subject to axial loads, *Journal of vibration and acoustics*, 114(2) (1992) 249-259.

[4] Y.-G. Jei, C.-W. Lee, Modal analysis of continuous asymmetrical rotor-bearing systems, *Journal of Sound and Vibration*, 152(2) (1992) 245-262.

[5] F. Sturla, A. Argento, Free and forced vibrations of a spinning viscoelastic beam, *Journal of vibration and acoustics*, 118(3) (1996) 463-468.

[6] J. Melanson, J. Zu, Free vibration and stability analysis of internally damped rotating shafts with general boundary conditions, *Journal of vibration and acoustics*, 120(3) (1998) 776-783.

[7] O. Jun, J. Kim, Free bending vibration of a multi-step rotor, *Journal of sound and vibration*, 224(4) (1999) 625-642.

[8] M. Mohiuddin, Y. Khulief, Coupled bending torsional vibration of rotors using finite element, *Journal of Sound and Vibration*, 223(2) (1999) 297-316.

[9] W. Kim, A. Argento, R. Scott, Free vibration of a rotating tapered composite Timoshenko shaft, *Journal of Sound and Vibration*, 226(1) (1999) 125-147.

[10] S. Karunendiran, J. Zu, Free vibration analysis of shafts on resilient bearings using Timoshenko beam theory,

- Structures*, 30(13) (1993) 1737-1744.
- [30] C. Bert, X. Wang, A. Striz, *Convergence of the DQ method in the analysis of anisotropic plates*, in, Academic Press, 1994.
- [31] T. Kaneko, On Timoshenko's correction for shear in vibrating beams, *Journal of Physics D: Applied Physics*, 8(16) (1975) 1927.
- [32] H. Afshari, A. Pouretmad, K. Torabi, Whirling analysis of non-uniform Timoshenko rotors subjected to axial load and torsional torque, in: *6th conference on rotating equipment in oil & power industries*, Shahid Beheshti conference center, Tehran, Iran, 2014.
- [33] H. Du, M. Lim, R. Lin, Application of generalized differential quadrature method to structural problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(11) (1994) 1881-1896.
- [34] H. Du, M. Lim, R. Lin, Application of generalized differential quadrature to vibration analysis, *Journal of Sound and Vibration*, 181(2) (1995) 279-293.
- a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations, *Journal of computational physics*, 10(1) (1972) 40-52.
- [25] C.W. Bert, S.K. Jang, A.G. Striz, Two new approximate methods for analyzing free vibration of structural components, *AIAA journal*, 26(5) (1988) 612-618.
- [26] C. Bert, M. Malik, Free vibration analysis of tapered rectangular plates by differential quadrature method: a semi-analytical approach, *Journal of Sound and Vibration*, 190(1) (1996) 41-63.
- [27] C.W. Bert, M. Malik, The differential quadrature method for irregular domains and application to plate vibration, *International Journal of Mechanical Sciences*, 38(6) (1996) 589-606.
- [28] C.W. Bert, M. Malik, Differential quadrature method in computational mechanics: a review, *Applied mechanics reviews*, 49(1) (1996) 1-28.
- [29] C.W. Bert, W. Xinwei, A.G. Striz, Differential quadrature for static and free vibration analyses of anisotropic plates, *International Journal of Solids and*

Please cite this article using:

K. Torabi and H. Afshari, Whirling and Stability Analysis of FG-rotors with Variable Diameter Subjected to Axial Load and Torsional Torque, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 49(4) (2018) 759-772.
DOI: 10.22060/mej.2016.858

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

