

تحلیل پایداری و پاسخ دینامیکی استوانه پیزوالکتریک جدار نازک، تحت جریان سیال و تحریک هارمونیک خارجی

علیرضا شوشتری*، وحید عطابخشیان

دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بوعلی سینا، همدان، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۲۴ خرداد ۱۳۹۵
بازنگری: ۵ آبان ۱۳۹۵
پذیرش: ۷ آذر ۱۳۹۵
ارائه آنلاین: ۲۵ آذر ۱۳۹۵

کلمات کلیدی:

مواد پیزوالکتریک
پایداری دینامیکی
ارتعاشات القایی
سیال
تحلیل غیرخطی

چکیده: پایداری دینامیکی و ارتعاشات غیرخطی استوانه هوشمند جدار نازک، تحت عبور جریان سیال داخلی، نیروی تحریک متمرکز خارجی و گرادیان حرارتی یکنواخت، در این نوشتار مورد بررسی قرار می‌گیرد. جنس پوسته از مواد پیزوسرامیک مقاوم در برابر سیال در نظر گرفته شده و با استفاده از مدل غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدل‌سازی می‌شود. جریان سیال عبوری غیر قابل تراکم، غیر چرخشی، غیر لزج و ایزنتروپیک فرض شده و مدل‌سازی دینامیکی آن نیز با استفاده از تابع اسکالر پتانسیل جریان صورت می‌پذیرد. دستگاه معادلات کوپله شده و غیرخطی حرکت حاکم بر سامانه با استفاده از روش انرژی و بسط مودهای جابه‌جایی و الکتریکی حاصل گردیده که با حل دسته معادلات مرتبط با شارژ الکتریکی واجفت می‌گردند. در ادامه ابتدا با حذف جملات غیرخطی در معادلات حرکت و حل مسأله مقدار ویژه مودهای ارتعاشی سامانه، سرعت بحرانی و نواحی پایدار سامانه استخراج گردیده و سپس با استفاده مدل فضای حالت و انتگرال‌گیری عددی مرتبه چهار رانج کوتاه پاسخ الکتروترمودینامیکی غیرخطی سامانه حاصل گردیده است. نتایج حاصله ارتباط مستقیم میزان پتانسیل القایی در پوسته با دامنه ارتعاشات عرضی آن را نشان داده که به‌منظور استفاده در هشداردهنده‌های ناپایداری کاربرد دارد.

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر علاقه‌مندی به مواد پیزوالکتریک به دلیل کاربرد وسیعشان در سازه‌های هوشمند همچون حسگرها و عملگرها گسترش فراوان یافته است. این علاقه‌مندی به دلیل کوپلینگ الکترومکانیکی بین میدان‌های الکتریکی و مکانیکی موجود در این مواد است؛ به‌نحوی که با اعمال میدان الکتریکی به این مواد، میدان جابه‌جایی و با اعمال میدان جابه‌جایی به این مواد میدان الکتریکی القایی خواهیم داشت. یکی از اولین کاربردهای مواد پیزوالکتریک به جنگ جهانی اول و به طراحی فرستنده‌های اولتراسونیک برای شناسایی زیردریایی‌ها مربوط می‌شود. پس از آن و تا به امروز کاربردهای بسیار زیادی برای مواد پیزوالکتریک گزارش شده است که از آن جمله می‌توان به ترانس دیوسرها که انرژی الکتریکی را به انرژی مکانیکی و بالعکس تبدیل می‌کنند رزوناتورها، فیلترهای کنترل بسامد و از همه مهمتر دامنه وسیعی از حسگرها و کنترلرها اشاره نمود؛ بنابراین بدیهی است که بررسی رفتار مکانیکی و دینامیکی سازه‌های پیزوالکتریک مورد علاقه‌مندی بسیاری از محققین قرار بگیرد که از آن جمله می‌توان به بررسی ارتعاشات اجباری صفحات پیزوالکتریک توسط تیرستان و همکاران [۱] اشاره نمود. تاچرت و همکاران [۲] به بررسی رفتار پیزوترموالاستیک ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای پرداختند. رفتار دینامیکی و ارتعاشات غیرخطی

صفحه FGM تقویت شده واقع در محیط حرارتی توسط داک و همکاران [۳] بررسی گردید.

از طرفی دیگر امروزه سازه‌های مرتبط با سیال در بسیاری از زمینه‌های مهندسی، پزشکی، شیمیایی، فیزیکی، هوافضا و نظامی کاربرد فراوان یافته‌اند؛ به‌نحوی که مدل‌سازی دینامیکی این سامانه‌ها همواره یکی از اهداف محققین بوده است. در این راستا و به‌تازگی تحقیقات بسیار شاخصی در زمینه تحلیل و کنترل ارتعاشات لوله‌های حاوی جریان سیال (همچون لوله‌های انتقال سوخت، آب و یا گازها) و یا در معرض جریان خارجی (همچون مبدل‌های حرارتی) و همچنین صفحات و تیرهای عریض در معرض جریان سیال انجام شده است. آمابیلی و همکاران [۴، ۵] به بررسی رفتار دینامیکی و پایداری پوسته‌های حاوی جریان سیال پرداختند. ردی و وانگ [۶] به بررسی دینامیک تیرهای حاوی جریان سیال به کمک روش اجزا محدود پرداختند. قربان پور و همکاران [۷] به بررسی رفتار دینامیکی کامپوزیت‌های هوشمند حاوی جریان سیال پرداختند. ارتعاشات آزاد و ناپایداری دیورژانس لوله‌های حامل جریان سیال توسط علیزاده و میردامادی [۸] بررسی گردید. آنها در این مطالعه لوله‌های حاوی جریان با پارامترهای سازه‌ای نامعین را به کمک روش‌های آماری مدل‌سازی کردند. رضایی و ملکی [۹] تأثیر ترک بر رفتار ارتعاشی و سرعت بحرانی سیال را در لوله‌های جدار ضخیم ترک‌دار مورد بررسی قرار دادند.

با توجه به پیشینه تحقیق ارائه شده در بالا و براساس اطلاعات

۳- مدل پوسته استوانه‌ای

۳-۱- روابط سینماتیک

شکل ۱، شماتیک پوسته استوانه‌ای هوشمند حاوی جریان سیال داخلی را در دستگاه مختصات استوانه‌ای نشان می‌دهد. در این راستا مؤلفه‌های جابه‌جایی عمومی پوسته در راستای طولی، محیطی و عرضی که به ترتیب با \tilde{U} ، \tilde{V} و \tilde{W} مشخص می‌گردند برحسب مؤلفه‌های مختصات و جابه‌جایی سطح میانی به صورت زیر بیان می‌گردند [۱۲]:

$$\tilde{U}(x, \theta, z, t) = u(x, \theta, t) - z \frac{\partial w(x, \theta, t)}{\partial x} \quad (5)$$

$$\tilde{V}(x, \theta, z, t) = v(x, \theta, t) - z \frac{1}{R} \frac{\partial w(x, \theta, t)}{\partial \theta} \quad (6)$$

$$\tilde{W}(x, \theta, z, t) = w(x, \theta, t). \quad (7)$$

که در آن u ، v و w مؤلفه‌های جابه‌جایی متناظر در سطح میانی پوسته، z نشان‌دهنده فاصله نرمال از این سطح است. براساس نظریه پوسته غیرخطی دائل مؤلفه‌های کرنشی غیر صفر پوسته به صورت زیر بیان می‌شوند [۱۲]:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (8)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{z}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \quad (9)$$

$$\gamma_{x\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{2z}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta}. \quad (10)$$

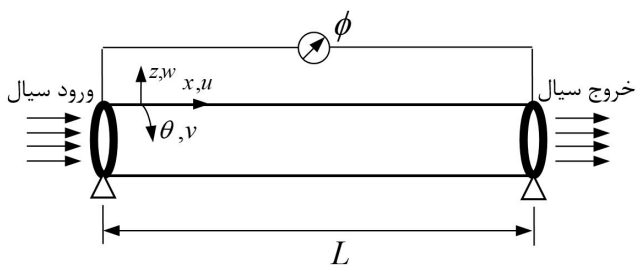


Fig. 1. Piezoelectric cylindrical shell conveying fluid flow and imposed electric potential field

شکل ۱: پوسته پیزوالکتریکی تحت جریان سیال داخلی و پتانسیل الکتریکی خارجی

۳-۲- محاسبه انرژی‌های پوسته

مجموع انرژی پتانسیل پوسته با حجم کنترل A شامل انرژی کرنشی و انرژی ناشی از پتانسیل الکتریکی، عبارت است از [۱۳]:

نویسندگان می‌توان دریافت که بررسی اثر جریان سیال داخلی و همچنین خاصیت پیزوالاستیسیته به صورت همزمان روی پاسخ ارتعاشی پوسته استوانه‌ای انجام نشده است. لذا در این مطالعه تحلیل پایداری دینامیکی و ارتعاشات عرضی پوسته پیزوالکتریک تحت عبور جریان سیال داخلی و نیروی هارمونیک خارجی بر مبنای روش انرژی و با استفاده از روش ریلی ریتز صورت گرفته است. نتایج این تحقیق به‌ویژه برای اندازه‌گیری و کنترل پایداری لوله‌های حاوی جریان سیال که جایگاه ویژه‌ای در مهندسی به خود اختصاص داده‌اند، کاربرد فراوان دارد.

۲- روابط ساختاری پیزوالاستیسیته

ارتباط بین تنش‌ها (σ) و کرنش‌ها (ε) از یک سو و چگالی شار (D) و شدت میدان الکتریکی (E) از سوی دیگر برای مواد پیزوالکتریک، توسط مؤسسه الکتریکی و مهندسی الکترونیک [۱۰] به صورت زیر استانداردسازی شده است:

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C^E & -e \\ e^T & \varepsilon^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ E \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

درحالی‌که در رابطه فوق بالانویس‌های ε ، E و T به ترتیب بیانگر شرایط مکانیکی کرنش ثابت، شرایط الکترواستاتیک شدت میدان ثابت و شرایط گرادیان دمایی ثابت می‌باشند.

رابطه (۱) در حضور میدان حرارتی به صورت زیر گسترش داده می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 & 0 & -e_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} \Delta\Theta \quad (2)$$

که در آن ارتباط بین شدت میدان الکتریکی E و پتانسیل الکتریکی ϕ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$E = -\nabla\phi. \quad (3)$$

در رابطه فوق منظور از ∇ ، عملگر گرادیان است. با در نظر گرفتن دستگاه مختصات استوانه‌ای در شرایط تنش صفحه‌ای و میدان الکتریکی تک جهته برای پوسته رابطه (۲) به صورت زیر تقلیل می‌یابد [۱۱]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{x\theta} \\ D_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xxxx} & C_{xx\theta\theta} & 0 & -e_{xxx} \\ C_{xx\theta\theta} & C_{\theta\theta\theta\theta} & 0 & -e_{x\theta\theta} \\ 0 & 0 & C_{x\theta x\theta} & 0 \\ e_{xxx} & e_{x\theta\theta} & 0 & \varepsilon_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{x\theta} \\ E_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda_{xx} \\ \lambda_{\theta\theta} \\ \lambda_{x\theta} \\ p_x \end{Bmatrix} \Delta\Theta. \quad (4)$$

$$v = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \sin\left(\frac{(2m-1)\pi x}{L}\right) \left[V_{mn}^c(t) \cos(n\theta) + V_{mn}^s(t) \sin(n\theta) \right] \quad (18)$$

$$w = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \sin\left(\frac{(2m-1)\pi x}{L}\right) \left[W_{mn}^c(t) \cos(n\theta) + W_{mn}^s(t) \sin(n\theta) \right] \quad (19)$$

که در آن m و n به ترتیب نیم موج طولی و تمام موج محیطی، M و N بیشینه مقدار اعداد موج هستند. $(U_{mn}^c(t), U_{mn}^s(t), V_{mn}^c(t), V_{mn}^s(t), W_{mn}^c(t), W_{mn}^s(t))$ توابعی نامعین برحسب زمان بوده و $\{q_d\} = \{U_{mn}^c(t), U_{mn}^s(t), V_{mn}^c(t), V_{mn}^s(t), W_{mn}^c(t), W_{mn}^s(t)\}$ بردار درجات آزادی سامانه تعریف می‌شود. برای تابع پتانسیل الکتریکی نیز می‌توان با توجه به فرض تک قطبی بودن میدان الکتریکی در راستای طول بسط مود زیر را در نظر گرفت [۱۵]:

$$\phi = \phi_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) + \sum_{m=1}^M \phi_m^s \sin\left(\frac{(2m-1)\pi x}{L}\right) \quad (20)$$

در این معادله ϕ_0 ولتاژ خارجی اعمال شده به سامانه و ϕ_M^s دامنه پتانسیل الکتریکی می‌باشند که مستقل از زمان است. همچنین بردار $\{q_d\} = \{\phi_M^s\}^T$ به‌عنوان بردار دامنه پتانسیل الکتریکی تعریف می‌شود. با توجه به بحث فوق تعداد درجات آزادی سامانه که صرفاً وابسته به بردار درجات آزادی سامانه می‌باشد از رابطه $N^{DOF} = 3(2MN + M)$ مشخص می‌گردد. همچنین لازم به ذکر است که دقت نتایج علاوه بر توابع انتخاب شده در روابط (۱۷) الی (۲۰) بستگی زیادی نیز به مقادیر M و N خواهد داشت که در بخش نتایج عددی مورد ارزیابی قرار گرفته است.

۵- مدل‌سازی دینامیکی جریان سیال

در این تحقیق برهمکنش سیال و سازه با استفاده از نظریه پتانسیل خطی جریان مدل‌سازی می‌شود. براساس غیر چرخشی بودن جریان سیال، تابع اسکالر پتانسیل برای جریان سیال وجود دارد که بردار سرعت سیال برحسب این تابع به‌صورت زیر بیان می‌شود [۱۶]:

$$\vec{V}_f = \nabla \Psi. \quad (21)$$

تابع پتانسیل جریان سیال با این فرض تعریف شده است که دارای دو قسمت باشد. یک قسمت در اثر سرعت متوسط سیال در راستای طول (U_f) و دیگری پتانسیل اغتشاش غیرپایدار در اثر تغییر شکل‌های به وجود آمده در پوسته و حرکت آن. این دو بخش به‌صورت زیر در تابع جریان اعمال می‌شود.

$$\Psi = U_f x + \varphi \quad (22)$$

براساس مفاهیم مکانیک سیالات، تابع پتانسیل اغتشاش سرعت (φ) باید معادله لاپلاس را ارضا نماید. بدین منظور معادله لاپلاس در مختصات

$$U_s = \frac{1}{2} \int_{\forall} (\epsilon^T \sigma - E^T D) d\forall \\ = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{-h/2} \int_0^{h/2} (\sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \sigma_{\theta\theta} \epsilon_{\theta\theta} + \tau_{x\theta} \gamma_{x\theta} - E_x D_x) dz dx R d\theta. \quad (11)$$

که در آن تنش‌های موجود در رابطه فوق با استفاده از رابطه (۴) جایگذاری می‌شود. از طرف دیگر برای انرژی جنبشی پوسته داریم:

$$T_s = \frac{1}{2} \rho_s \iiint_{\Lambda} \vec{V}^T \vec{V} d\Lambda \quad (12)$$

با جایگذاری بردار سرعت با استفاده از روابط مربوط به جابه‌جایی عمومی پوسته (معادلات (۵)، (۶) و (۷))، انرژی جنبشی پوسته به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$T_s = \frac{1}{2} \rho_s \int_0^L \int_0^{-h/2} \int_0^{h/2} \left[\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} \right)^2 \right] dz dx R d\theta \quad (13)$$

۳-۳ کار خارجی ناشی از تحریک هارمونیک

کار خارجی ناشی از بار شعاعی f_r وارد بر سطح پوسته استوانه‌ای از رابطه (۱۴) محاسبه می‌گردد که در آن شدت و موقعیت نیروی خارجی هارمونیک از رابطه (۱۵) جایگذاری می‌گردد [۱۴].

$$W_H = \int_0^{2\pi} \int_0^L (f_r w) dx r d\theta, \quad (14)$$

$$f_r = \tilde{f} \delta(R\theta - R\bar{\theta}) \delta(x - \bar{x}) \cos(\omega t), \quad (15)$$

به‌طوری‌که در رابطه فوق \bar{x} و $\bar{\theta}$ بیانگر موقعیت نیروی خارجی و δ بیانگر تابع دلتای دیراک است. با انتگرال‌گیری از رابطه فوق برای حالتی که نیروی خارجی در موقعیت $x=L/2$ اعمال می‌شود، لذا کار نیروی هارمونیک خارجی برابر است با:

$$W_H = \tilde{f} \cos(\omega t) w \Big|_{x=L/2, \theta=0} \quad (16)$$

۴- بسط مودهای جابه‌جایی و پتانسیل الکتریکی

براساس شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده (دو سر لولا) در دو انتهای پوسته، می‌توان پاسخ‌های هارمونیک زیر را برای مؤلفه‌های جابه‌جایی ارائه نمود [۱۴]:

$$u = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \sin\left(\frac{(2m-1)\pi x}{L}\right) \left[U_{mn}^c(t) \cos(n\theta) + U_{mn}^s(t) \sin(n\theta) \right] \quad (17)$$

استوانه‌ای به عبارت زیر معرفی می‌شود [۱۶].

$$T_F = \frac{1}{2} \rho_f \int_0^{2\pi} \int_0^L \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \frac{L}{m\pi} \frac{I_n(m\pi R/L)}{I'_n(m\pi R/L)} \dot{w}_{m,n}^2 dx R d\theta \quad (29)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (23)$$

$$E_G = \frac{1}{2} \rho_f \int_0^{2\pi} \int_0^L \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^M \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^N \frac{L}{m\pi} \frac{I_n(m\pi R/L)}{I'_n(m\pi R/L)} \times U_f \left(\dot{w}_{m,n} \frac{\partial w_{l,k}}{\partial x} + w_{l,k} \frac{\partial w_{m,n}}{\partial x} \right) dx R d\theta + \frac{1}{2} \rho_f \int_0^{2\pi} \int_0^L \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N U_f x \dot{w}_{m,n} dx R d\theta + \frac{1}{2} \rho_f \int_0^{2\pi} \int_0^R \left\{ U_f L \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^M \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^N \frac{L}{m\pi} \frac{I_n(m\pi r/L)}{I'_n(m\pi R/L)} \times \left(\dot{w}_{l,k} \frac{\partial w_{m,n}}{\partial x} \right) \right\}_{x=L} r dr d\theta \quad (30)$$

با فرض اینکه هیچ‌گونه کاپیتاسیون در محل تماس سیال و پوسته ندهد، شرایط مرزی ϕ عبارت است از:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{\partial w}{\partial t} + U_f \frac{\partial w}{\partial x} \quad (24)$$

برای حل معادله (۲۳) از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌شود که با اعمال شرایط مرزی برای تابع ϕ می‌توان نوشت:

$$\phi(x, r, \theta, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \frac{L}{m\pi} \frac{I_n(m\pi r/L)}{I'_n(m\pi R/L)} \left(\frac{\partial w_{m,n}}{\partial t} + U_f \frac{\partial w_{m,n}}{\partial x} \right) \quad (25)$$

$$V_f = -\frac{1}{2} \rho_f \int_0^{2\pi} \int_0^L \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \frac{L}{m\pi} \frac{I_n(m\pi R/L)}{I'_n(m\pi R/L)} \times U_f^2 \left(\frac{\partial w_{m,n}}{\partial x} \right)^2 dx R d\theta - \frac{1}{2} \rho_f \int_0^{2\pi} \int_0^L \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N U_f^2 x \frac{\partial w_{m,n}}{\partial x} dx R d\theta - \frac{1}{2} \rho_f \int_0^{2\pi} \int_0^R \left\{ U_f^2 L \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^M \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^N \frac{L}{m\pi} \frac{I_n(m\pi r/L)}{I'_n(m\pi R/L)} \times \left(\frac{\partial w_{l,k}}{\partial x} \frac{\partial w_{m,n}}{\partial x} \right) \right\}_{x=L} r dr d\theta - \frac{1}{2} \rho_f U_f^2 \pi R^2 L \quad (31)$$

که در آن I'_n و I_n به ترتیب تابع بسل نوع اول از مرتبه n و مشتق مرتبه اول تابع بسل است. کل انرژی ناشی از جریان سیال بر روی حجم کنترل سطح کنترل عبارت است از: [۵]

$$E_f^T = \frac{1}{2} \rho_f \iiint_{\Gamma} \nabla \Psi \cdot \nabla \Psi d\Gamma = \frac{1}{2} \rho_f \iint_{\Sigma} \left(\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} \right) d\Sigma \quad (26)$$

در معادله فوق Σ معرف سطح کنترل مرزی روی حجم کنترل Γ و ν مختصه عمود بر سطح مرزی که به سمت بیرون مثبت است، می‌باشد. چنانچه انتگرال‌گیری از معادله (۲۶) روی سطوح صورت گیرد، انرژی سیال به‌صورت زیر به دست می‌آید [۵].

$$E_f^T = \frac{1}{2} \rho_f \int_0^{2\pi} \int_0^L \left(\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)_{r=R} dx R d\theta + \frac{1}{2} \rho_f \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_{x=L} r dr d\theta - \frac{1}{2} \rho_f \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_{x=0} r dr d\theta \quad (27)$$

معادله بالا را می‌توان برحسب تابع پتانسیل اغتشاش به سه بخش زیر تقسیم کرد:

$$E_f^T = T_f + E_G - V_f \quad (28)$$

که در اینجا T_f و E_G به ترتیب معرف انرژی جنبشی و انرژی ژبروسکوپی سیال است و V_f انرژی پتانسیل سیال است که علامت منفی برای سهولت در محاسبات آمده است.

انرژی‌های فوق از معادله (۲۸) به شکل زیر محاسبه می‌شود:

۶- معادله حرکت لاگرانژ

ابتدا بردار $\{q\}$ ، متشکل از بردار درجات آزادی $\{q_d\}$ و بردار دامنه پتانسیل الکتریکی $\{q_\phi\}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌گرد:

$$\{q_d\} = \{U_{mn}^C, U_{mn}^S, V_{mn}^C, V_{mn}^S, W_{mn}^C, W_{mn}^S\}, \quad (32)$$

$$\{q_\phi\} = \{\phi_m^S\}, \quad (33)$$

$$\{q\} = \{\{q_d\}, \{q_\phi\}\}^T \quad (34)$$

که در آن $m=1, \dots, M$ و $n=1, \dots, N$ می‌باشد. همچنین در ادامه مؤلفه‌های وابسته به زمان بردار $\{q\}$ را با q_k نشان خواهیم داد که تعداد آن عبارت است از:

$$\bar{N} = N^{DOF} + M. \quad (35)$$

لذا شکل کلی معادله حرکت لاگرانژ عبارت است از:

$$[M_{dd}]\{\dot{q}_d\} + [D_{dd}]\{\dot{q}_d\} + [K_m]\{q_d\} = \{F_d\} \quad (41)$$

در این معادله $[K_m]$ ماتریس سختی اصلاح شده بوده و به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$K_m = K_{dd} - K_{d\phi}K_{\phi\phi}^{-1}K_{\phi d} \quad (42)$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی (۴۱) شامل N^{DOF} معادله دیفرانسیل مرتبه دوم غیرخطی است که با استفاده از مدل فضای حالت زیر به $2N^{DOF}$ معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت زیر تبدیل می‌شود؛

$$\begin{cases} \dot{q}_k = y_k \\ \dot{y}_k = M_{k,j}^{-1}F_j - M_{k,m}^{-1}K_{m,j}q_j - M_{k,m}^{-1}D_{m,j}y_j \end{cases} \quad (43)$$

حال می‌توان با استفاده از انتگرال‌گیری مستقیم روی زمان از دستگاه معادلات دیفرانسیلی حرکت ضمنی فوق و با استفاده از شرایط اولیه، معادلات (۴۰) و (۴۱) پاسخ الکتروترمودینامیکی پوسته حاوی جریان را به دست آورد. در این راستا، در این مطالعه از روش انتگرال‌گیری مرتبه ۴ رانج کوتاه استفاده شده است. همچنین شرایط اولیه جابه‌جایی عرضی با توزیع مرتبه ۲ (سه‌موی) با بیشینه مقدار بی‌بعد یک (برحسب جابه‌جایی بیشینه در تیرهای دو سر لولا) در نظر گرفته شده است. همچنین در ادامه به منظور بررسی پاسخ بسامدی سامانه از روش طیف‌سنجی انرژی نیز به کمک تبدیل فوریه استفاده می‌گردد.

۷- بحث و نتایج عددی

خصوصیات مکانیکی و الکتریکی PZT4 و همچنین ابعاد در نظر گرفته شده برای پوسته در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱: خصوصیات مکانیکی و پیزوالکتریکی PZT4

Table 1. Mechanical, electrical and thermal properties of PZT4

مرجع [۱۸]	مشخصات PZT4
۱۳۹	C_{11} , GPa
۱۱۵	C_{22} , GPa
۷۷/۸	C_{12} , GPa
۱۵/۱	e_{11} , C/m ²
-۵/۲	e_{12} , C/m ²
$۶/۴۶ \times 10^{-۹}$	ϵ_{11} , C/m ² .N
$-۲/۵ \times 10^{-۵}$	p_{11} , C/K.m ²
$۷/۴۱ \times 10^{-۶}$	α_1 , 1/K
$۲/۱۱ \times 10^{-۶}$	α_2 , 1/K
۷۵۰۰	ρ , kg/m ³
۲۰	L/R

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (T_S + T_F + E_G)}{\partial \dot{q}_k} \right] - \frac{\partial (T_S + T_F + E_G)}{\partial q_k} + \frac{\partial (U_S + V_F)}{\partial q_k} = \frac{\partial W}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, \bar{N} \quad (36)$$

به طوری که W مجموع کار نیروهای خارجی است. با جایگذاری جملات انرژی شامل پتانسیل و جنبشی برای سیال و پوسته در معادله (۳۶)، دستگاه معادلات غیرخطی حرکت حاکم بر پوسته حاوی جریان سیال به فرم ماتریسی زیر بیان می‌شود.

$$[M]\{\ddot{q}\} + [D]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\}. \quad (37)$$

در این معادله $[M]$ و $[D]$ به ترتیب ماتریس‌های جرم و میرایی سامانه است و ماتریس $[K]$ ماتریس سختی شامل جملات خطی و غیرخطی است. جملات غیرخطی الکترواستاتیکی موجود در معادله فوق حداکثر از مرتبه سوم بوده و به صورت زیر گسترش می‌یابد.

$$K_{j,i}q_i = \sum_{i=1}^{\bar{N}} z_{j,i}q_i + \sum_{i=1}^{\bar{N}} \sum_{k=1}^{\bar{N}} z_{j,i,k}q_iq_k + \sum_{i=1}^{\bar{N}} \sum_{k=1}^{\bar{N}} \sum_{l=1}^{\bar{N}} z_{j,i,k,l}q_iq_kq_l \quad (38)$$

که در آن $Z_{j,i}$ ضرایب سختی متناظر با جملات خطی، $Z_{j,i,k}$ ضرایب سختی متناظر با جملات غیرخطی مرتبه دوم و $Z_{j,i,k,l}$ نیز ضرایب سختی متناظر با جملات غیرخطی مرتبه سوم می‌باشند. به منظور واجت‌سازی میدان‌های الکتریکی و مکانیکی موجود در دستگاه معادلات (۳۷)، با استفاده از بردار درجات آزادی (۳۴)، معادله (۳۷) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود؛

$$\begin{bmatrix} M_{dd} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_d \\ \ddot{q}_\phi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{dd} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_d \\ \dot{q}_\phi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{dd} & K_{d\phi} \\ K_{\phi d} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_d \\ q_\phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_d \\ F_\phi \end{Bmatrix}. \quad (39)$$

از سامانه فوق مشاهده می‌شود که کلیه جملات مرتبط با پتانسیل الکتریکی در ماتریس‌های جرم و میرایی برابر صفر است که دلیل این مسأله را می‌توان به ارتباط استاتیکی بین مؤلفه‌های جابه‌جایی و پتانسیل الکتریکی مرتبط دانست. این ارتباط در پژوهش‌های تحلیل تنش و کرنش مواد پیزوالکتریک [۱۸] به‌عنوان معادله شارژ الکتریکی شناخته می‌شود.

از دسته معادلات دوم معادله (۳۹) می‌توان بردار $\{q_\phi\}$ را برحسب بردار $\{q_d\}$ به دست آورد.

$$\{q_\phi\} = -[K_{\phi\phi}^{-1}K_{\phi d}]\{q_d\} \quad (40)$$

با منظور کردن معادله (۴۰) می‌توان جملات $\{q_\phi\}$ را در معادله (۳۹) حذف نمود که شکل اصلاح شده آن عبارت است از:

گرفته شده است. استفاده از ثوابت فوق در تحقیق حاضر و مقایسه آن در شکل ۲ اختلاف حداکثر ۱۰ درصدی در نتایج را نشان می‌دهد که می‌تواند در نتیجه اختلاف مدل پوسته پرچدار به کار گرفته شده در این تحقیق و همچنین در روش حل به کار گرفته شده یعنی استفاده از معادلات ناویر استوکس با روش میانگین‌گیری در رینولدز باشد.

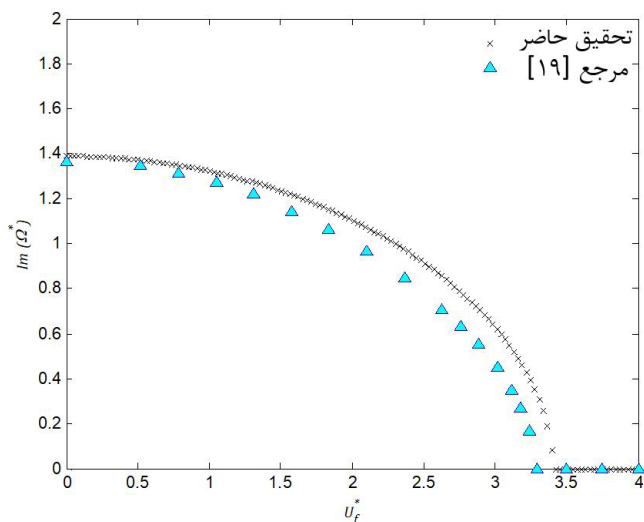


Fig. 2. Comparison of the dimensionless natural frequency versus dimensionless flow velocity for simplified analysis of the present work and ref [26].
شکل ۲: مقایسه نتایج تحقیق حاضر در غیاب اثرات پیزوالکتریک با مرجع [۱۹]

از سوی دیگر در این پژوهش اعتبارسنجی با استفاده از روش اجزا محدود و به کمک قابلیت‌های جدید نرم‌افزارهای تجاری موجود برای نتایج خطی ماده پیزوالکتریک صورت می‌پذیرد. در این راستا استوانه‌ای با شرایط مرزی دو سر مفصل حاوی جریان سیال داخلی و مشخصات ارائه شده در جدول ۱ در نرم‌افزار انسیس نسخه ۱۶ مدل‌سازی می‌گردد. بدین منظور از جزء ۸ نقطه‌ای shell99 برای مدل‌سازی لوله استفاده گردیده است. اثر سیال نیز در تحلیل اجزا محدود به صورت شرایط مرزی مطابق با رابطه (۳۴) اعمال می‌گردد. بسامدهای طبیعی سامانه حاصل از تحلیل اجزا محدود با بسامدهای حاصل از تحقیق حاضر مقایسه و در جدول ۳ ارائه شده است.

۷-۲- بررسی اثر مودهای ارتعاشی سامانه

با حل مسأله مقدار ویژه برای معادله (۴۱) و در غیاب ترم‌های غیرخطی بیان‌شده در معادله (۳۸)، بسامدهای طبیعی و میرایی سامانه محاسبه می‌شود. شکل‌های ۲ و ۳ به ترتیب تغییرات بسامد طبیعی ($Im(\Omega^*)$) و بسامد میرایی ($Re(\Omega^*)$) بی‌بعد شده سامانه را برای چهار مود اول ارتعاشی برحسب سرعت بی‌بعد سیال نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل ۲ مشاهده می‌شود، با افزایش سرعت سیال، بسامد طبیعی سامانه برای تمامی مودهای ارتعاشی تا رسیدن به مقدار صفر کاهش یافته و پس از آن همان‌طور که از شکل ۳

همچنین پارامترهای بدون بعد به کار گرفته‌شده در این قسمت عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} \Omega^* &= \Omega L \sqrt{\rho / C_{11}} \\ \omega^* &= \omega L \sqrt{\rho / C_{11}} \\ U_f^* &= U_f \sqrt{\rho_f / C_{11}} \end{aligned} \quad (44)$$

از طرفی دیگر دقت نتایج حاصله برحسب تعداد جملات بسط مودها (مقادیر N و M) بیان می‌شود که فاکتور مهمی در محاسبات است. بدیهی است انتخاب صحیح و نزدیک‌تر بسط مودهای ارتعاشی به رفتار ارتعاشی سازه نقش به سزایی در همگرایی پاسخ خواهد داشت. بدین منظور در جدول ۲ به بررسی همگرایی قسمت موهومی بسامد خطی براساس سرعت سیال بی‌بعد $U_f^* = 0.01$ پرداخته می‌شود.

جدول ۲: همگرایی بسامد به ازای مقادیر مختلف درجات آزادی سامانه

Table 2. Accuracy of the results for various number of mode expansion and DOF.

M	N		
	۳	۲	۱
۱	$N^{DOF}=21$	$N^{DOF}=15$	$N^{DOF}=9$
	$Im(\Omega^*)=0.0127$	$Im(\Omega^*)=0.0135$	$Im(\Omega^*)=0.0139$
۲	$N^{DOF}=42$	$N^{DOF}=30$	$N^{DOF}=18$
	$Im(\Omega^*)=0.0144$	$Im(\Omega^*)=0.0145$	$Im(\Omega^*)=0.0145$
۳	$N^{DOF}=63$	$N^{DOF}=45$	$N^{DOF}=27$
	$Im(\Omega^*)=0.01454$	$Im(\Omega^*)=0.0145$	$Im(\Omega^*)=0.0145$

براساس نتایج حاصله در این مطالعه مقادیر $(M, N) = (3, 1)$ و یا درجه آزادی برابر ۲۷، دقت موردنظر را تأمین می‌کند.

۷-۱- اعتبارسنجی نتایج

همانگونه که در قسمت مقدمه نیز بیان گردید، طبق اطلاعات نویسندگان تاکنون مرجع معتبری در رابطه با ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای با در نظر گرفتن اثرات پیزوالکتریک به صورت توأم گزارش نشده است. این در حالی است که مراجع بسیاری در مورد پوسته استوانه‌ای حاوی جریان سیال گزارش داده‌اند؛ لذا در این مطالعه به منظور اعتبارسنجی روش به کار گرفته شده در این تحقیق، ثوابت ساختاری مربوط به ماده پیزوالکتریک را صفر قرار داده و نتایج خطی به دست آمده از تحلیل بسامدی (شکل‌های ۳ و ۴) را با سایر مراجع ارزیابی می‌کنیم. در این راستا مرجع [۱۹] به بررسی ارتعاشات پوسته استوانه‌ای ساخته شده از آلومینیوم حاوی جریان سیال و شرایط تکیه‌گاهی دو سر لولا پرداخته است. مشخصات پوسته به کار گرفته شده در این تحقیق برابر $h=0.127\text{mm}$ ، $L=0.1206\text{m}$ ، $R=0.04275\text{m}$ ، $\rho_f=1000\text{kg/m}^3$ و $\rho=2700\text{kg/m}^3$ ، $E=70 \times 10^9\text{Pa}$ و $\nu=0.33$ در نظر

ناحیه پایدار پاسخ در تمامی مودها و $0.0044 \leq U_f^* \leq 0.0089$ به‌عنوان ناحیه ناپایدار پاسخ در مود اول به‌دست‌آمده است. این رفتار به تناوب در سایر مودهای ارتعاشی نیز دیده می‌شود.

از دیگر دریافت‌های مهم شکل ۲ این است که برای محدوده سرعت سیال $0.0089 \leq U_f^* \leq 0.0185$ مقادیر مودهای اول و دوم ارتعاشی باهم برابر شده و در شکل دقیقاً برهم منطبق می‌شوند. این پدیده در ارتعاشات به‌عنوان پدیده لرزش شناخته‌شده که بسیار مخرب است و باید از آن دوری شود. مطالب ذکرشده در بالا برای مودهای بعدی ارتعاشی نیز به‌طور تقریباً مشابه دیده می‌شود.

۷-۳- بررسی پاسخ الکتروپدینامیکی پوسته

نمودار ۴ جابه‌جایی عرضی در طول پوسته را برای چهار زمان متفاوت نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در این نمودار شرایط تکیه‌گاهی (دو سر لولا) به‌خوبی ارضا شده است و دامنه نوسانات با گذشت زمان کاهش‌یافته و به صفر میل می‌کند که ناشی از اثرات میرایی سامانه در اثر وجود سیال است.

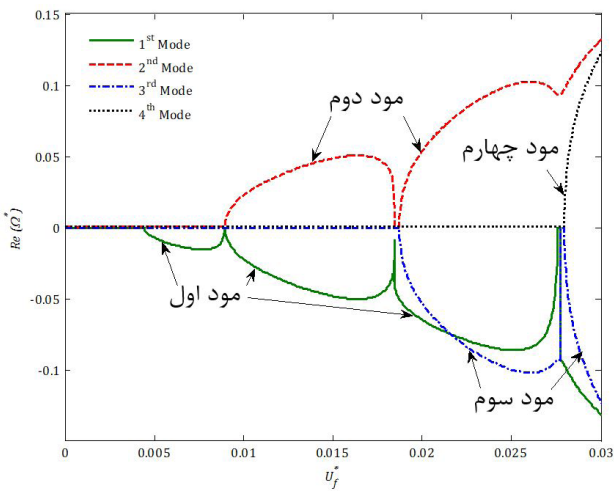


Fig. 4. The real part of frequency versus dimensionless flow velocity for 1st to 4th Mode

شکل ۴: تغییرات قسمت حقیقی بسامد با سرعت سیال برای چهار مود اول ارتعاشی

به‌طور مشابه، شکل ۵ تغییرات دامنه بدون بعد نوسانات را برای سه موقعیت مکانی پوسته یعنی $x=L/20$ ، $x=L/4$ و $x=L/2$ و با گذشت زمان نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، شرایط اولیه (جابه‌جایی سهموی اولیه) نیز در این نمودار به‌خوبی نشان داده‌شده است.

در نمودارهای ۶ و ۷ اثر تغییر سرعت جریان سیال بر پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته بررسی شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش سرعت جریان دامنه ارتعاشات عرضی پوسته افزایش می‌یابد و همچنین با توجه به کاهش دوره تناوب پاسخ می‌توان گفت بسامد نوسانات نیز افزایش می‌یابد.

جدول ۳: مقایسه نتایج خطی تحقیق حاضر با نرم‌افزار انسیس

Table 3. Comparison of the obtained linear results and ANSYS software

خطا	ANSYS	تحقیق حاضر	Mode No.	Natural Frequency
۴/۸٪	۰/۰۱۵۲	۰/۰۱۴۵	1 st	$U_f^* = 0.001$
۶٪	۰/۰۶۳۴	۰/۰۵۹۸	2 nd	
۹/۱٪	۰/۲۱۷۳	۰/۱۹۹۳	3 rd	
۵/۷٪	۰/۰۱۴۰	۰/۰۱۳۲	1 st	$U_f^* = 0.002$
۷٪	۰/۰۶۳۰	۰/۰۵۸۹	2 nd	
۹/۱٪	۰/۲۱۶۹	۰/۱۹۸۸	3 rd	
۸/۴٪	۰/۰۱۱۶	۰/۰۱۰۷	1 st	$U_f^* = 0.003$
۸/۸٪	۰/۰۶۲۶	۰/۰۵۷۴	2 nd	
۹/۴٪	۰/۲۱۶۴	۰/۱۹۷۸	3 rd	

نیز مشاهده می‌شود بسامد میرایی شروع به افزایش می‌کند. این سرعت در مود اول در موقعیت $U_f^* = 0.0044$ واقع شده و سرعت بحرانی سیال نامیده می‌شود که پس از آن سامانه وارد محدوده ناپایداری می‌گردد. این نوع ناپایداری در لوله‌های حاوی جریان سیال به شرایط دو سر مفصل و یا دو سر گیردار رخ داده و به ناپایداری استاتیکی معروف است. شایان ذکر است نتایج مربوط به بسامد میرایی به صورت متقارن بوده که به دلیل جلوگیری از ازدحام نیمی از نتایج در این شکل برای هر مود ترسیم گردیده است.

با توجه به نتایج به‌دست آمده بدیهی است به‌منظور افزایش پایداری پوسته لازم است سرعت بحرانی سیال در مود اول ارتعاشی که برابر با $U_f^* = 0.0044$ می‌باشد، افزایش یابد. در این حالت $U_f^* \leq 0.0044$ به‌عنوان

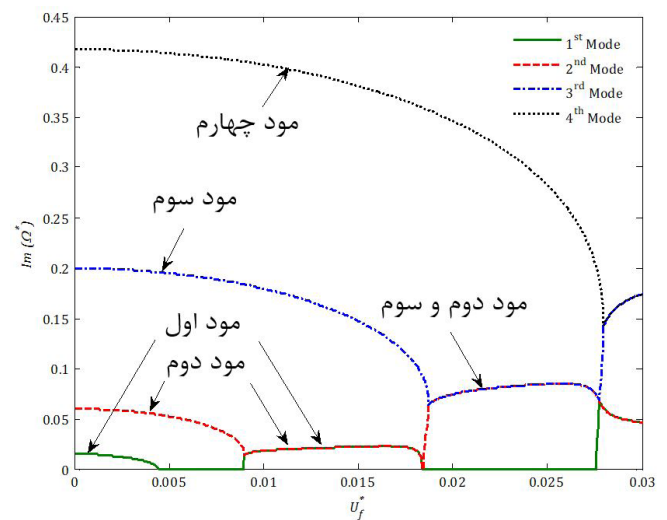


Fig. 3. The imaginary part of frequency versus dimensionless flow velocity for 1st to 4th Mode

شکل ۳: تغییرات قسمت موهومی بسامد با سرعت سیال برای چهار مود اول ارتعاشی

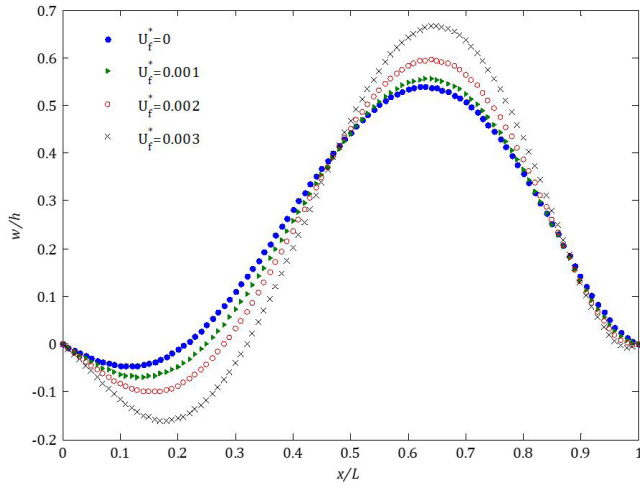


Fig. 7. Dimensionless transverse displacement versus time for various axial points of the shell.

شکل ۷: نمودار بدون بعد جابه‌جایی عرضی به مکان برای سرعت‌های جریان متفاوت

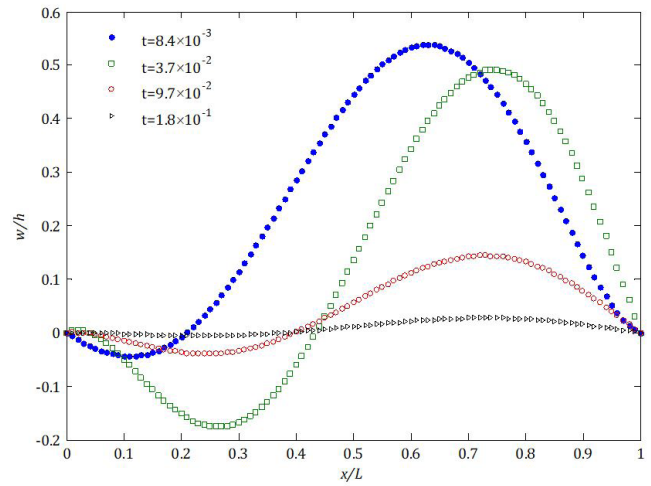


Fig. 5. Dimensionless transverse displacement versus dimensionless axial coordinate for various times.

شکل ۵: نمودار بدون بعد جابه‌جایی عرضی به طول پوسته در زمان‌های متفاوت

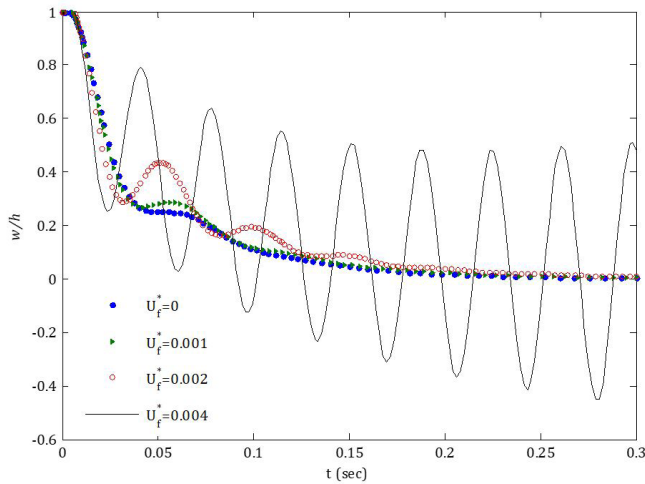


Fig. 8. Dimensionless transverse displacement versus time for various fluid flow velocities.

شکل ۸: نمودار بدون بعد بیشینه جابه‌جایی عرضی به زمان برای سرعت‌های جریان متفاوت

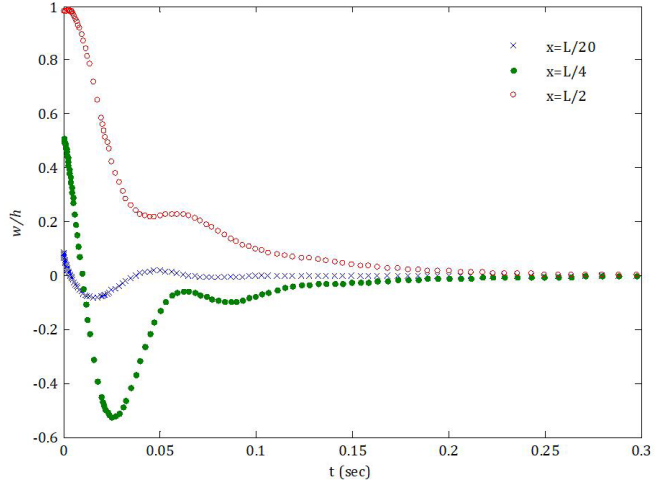


Fig. 6. Dimensionless transverse displacement versus dimensionless axial coordinate for various fluid flow velocities.

شکل ۶: نمودار بدون بعد جابه‌جایی عرضی به مکان برای موقعیت‌های مکانی متفاوت پوسته

۷-۴- بررسی پاسخ پیزوالکتریکی پوسته

در شکل ۹ توزیع پتانسیل الکتریکی القایی در طول پوسته تحت تأثیر کرنش‌های داخلی در نتیجه ارتعاشات عرضی پوسته بررسی می‌شود. در این تحقیق شرایط مرزی پتانسیل الکتریکی صفر برای دو انتهای پوسته به‌عنوان کاربرد حسگر ارتعاشات و ناپایداری احتمالی در پوسته فرض شده است که به‌خوبی در این نمودارها ارضا شده است. همان‌طور که از این شکل می‌توان استنباط کرد با افزایش سرعت جریان میزان پتانسیل القایی افزایش می‌یابد که این افزایش در سرعت‌های بالاتر شدت بیشتری می‌گیرد. دلیل این امر را می‌توان در افزایش مقدار کرنشی موضعی موجود در پوسته تحت تأثیر افزایش دامنه نوسانات دانست. این مسأله می‌تواند در کاربرد این سامانه در هشداردهنده‌ها پارامتر بسیار مؤثری باشد، به نحوی که هرگاه پتانسیل

نکته قابل توجه دیگری که از شکل ۷ می‌توان برداشت نمود افزایش شدید دامنه نوسانات پاسخ به ازای $U_f^* = 0.004$ ، در نزدیکی سرعت بحرانی جریان در مود اول است.

در شکل ۸ پاسخ سه‌بعدی مکان-زمان و جابه‌جایی عرضی پوسته به ازای مقدار ثابت سرعت سیال ($U_f^* = 0.002$) بررسی می‌شود. نکته قابل توجه اینکه شرایط اولیه مکانی با الگوی سهموی با بیشینه دامنه نوسانات بدون بعد یک برای موقعیت $x = L/2$ که به‌منظور تطابق بیشتر با شرایط اصلی ارتعاشی در نظر گرفته شده است، به‌خوبی ارضا شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در اثر وجود سیال داخلی به‌عنوان میرا کننده نوسانات، آهنگ کاهش دامنه نوسانات بسیار زیاد است.

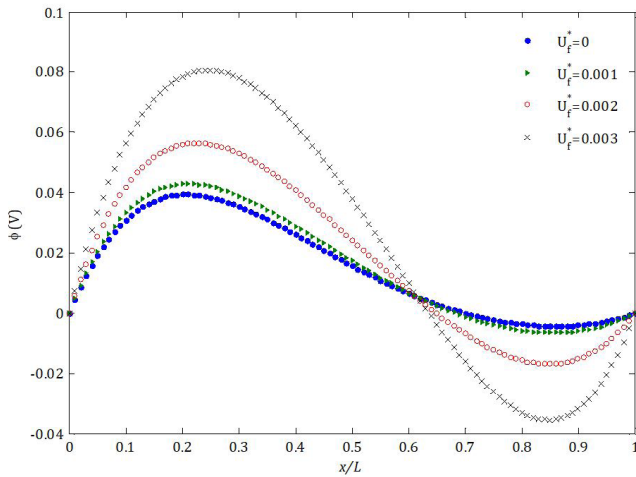


Fig. 10. Axial electric potential field for various fluid flow velocities.
 شکل ۱۰: توزیع طولی پتانسیل الکتریکی القایی به ازای مقادیر مختلف سرعت سیال

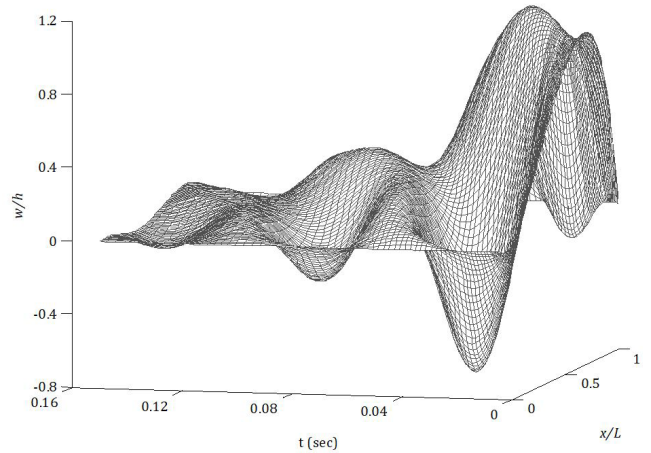


Fig. 9. Dimensionless transverse displacement versus time and axial coordinate.

شکل ۹: جابه‌جایی عرضی پوسته بر حسب مکان و زمان

الکتریکی بیشینه در پوسته از حدی بیشتر شود، معنی آن این است که سامانه به سرعت بحرانی و در نتیجه به ناپایداری نزدیک شده است.

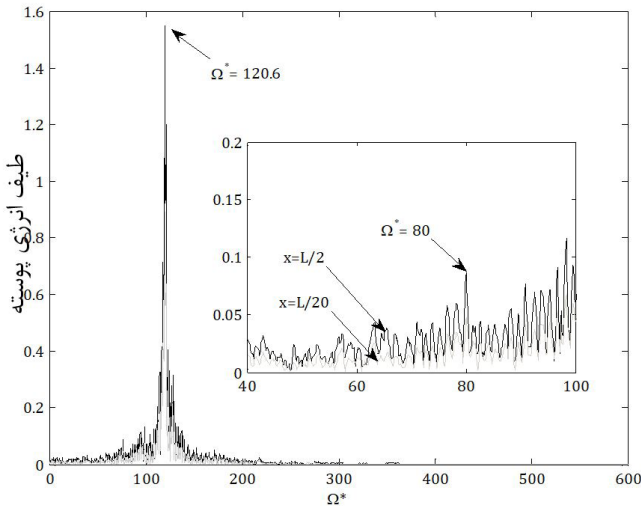


Fig. 11. Energy spectrum versus nonlinear frequency for $\Omega^* = 80$, $U_f^* = 0.002$, $x = L/2$ and $x = L/20$.

شکل ۱۱: نمودار بدون بعد طیف انرژی پوسته به بسامد غیرخطی برای بسامد تحریک $\Omega^* = 80$ و سرعت سیال $U_f^* = 0.002$ و برای دو موقعیت مکانی $x = L/2$ و $x = L/20$

دلخواه آن می‌تواند فرضی دور از واقعیت نباشد در نظر گرفته شده است. در این راستا پیزو سرامیک PZT4 با خواصی نسبتاً پایدار در محدوده دمایی محیط انتخاب گردید [۲۰]. اثر تغییر دما بر جابه‌جایی عرضی پوسته در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود افزایش دما باعث افزایش ناچیز در بیشینه دامنه نوسانات عرضی سامانه می‌گردد و به عکس. دلیل این امر را نیز می‌توان ناشی از اضافه شدن ناچیز کرنش‌های حرارتی (مثبت و یا منفی) به میدان کرنشی پوسته بیان نمود.

۷-۵- طیف انرژی پوسته

نمودارهای ۱۰ و ۱۱ طیف انرژی پاسخ الکتروترمودینامیکی پوسته را به ترتیب برای دو حالت با بسامدهای تحریک متفاوت $\Omega^* = 80$ و $\Omega^* = 150$ نشان می‌دهند. دامنه نیروی تحریک $f = 100$ و سرعت سیال $U_f^* = 0.002$ بوده و در ناحیه پایدار مود اول ارتعاشی و دور از سرعت بحرانی برای دو موقعیت طولی متفاوت $x = L/2$ و $x = L/20$ بررسی می‌شود. همان‌طور که از این نمودارها مشخص می‌شود در هر دو حالت بیشینه اصلی، در حدود بسامد بدون بعد $\Omega^* = 120.6/5$ مشاهده می‌شود که بسامد طبیعی غیرخطی در مود اول ارتعاشی است. همچنین همان‌طور که انتظار می‌رود دقیقاً جهشی در طیف انرژی سامانه به ازای بسامد تحریک بدون بعد $\Omega^* = 80$ مشاهده می‌گردد که همان موقعیت بسامد تحریک است. با توجه به اینکه روش طیف‌سنجی انرژی حوزه زمان را به حوزه بسامد تبدیل می‌کند لازم است بازه زمانی در نظر گرفته شده به اندازه کافی بزرگ باشد تا موقعیت سایر بسامدهای بالاتر سامانه نیز به خوبی مشخص شود. منحنی خاکستری رنگ نیز طیف انرژی موقعیت متفاوتی از پوسته را که به تکیه‌گاه‌ها نزدیک است، نشان می‌دهد. همان‌طور که انتظار می‌رفت این منحنی از طیف انرژی کمتر نسبت به موقعیت میانی پوسته برخوردار باشد، ولی در عین حال موقعیت بسامدی نباید تغییری داشته باشد که به وضوح این مسأله نیز رعایت شده است.

۷-۶- اثر تغییر دما

در این نوشتار به منظور بررسی دقیق‌تر رفتار دینامیکی و پایداری پوسته استوانه‌ای هوشمند حاوی جریان سیال اثرات تغییر دما در مقایسه با سایر پارامترها بررسی گردیده است. در این راستا میدان حرارتی پایدار و یکنواخت و با فرض ثابت بودن ثوابت ساختاری ماده پیزوالکتریک در محدوده دمایی مورد مطالعه که بسته به انتخاب نوع ماده پیزوالکتریک و محدوده دمایی

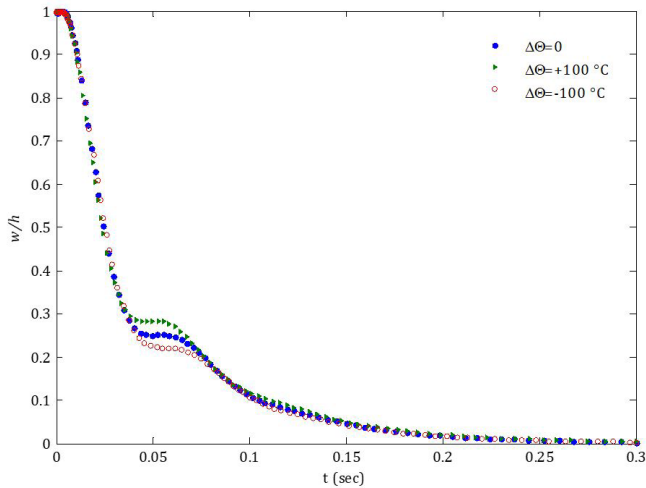


Fig. 14. Dimensionless transverse displacement versus time for various temperature fields.

شکل ۱۴: تغییرات بدون بعد بیشینه جابه‌جایی عرضی برحسب زمان به ازای مقادیر مختلف تغییر دما

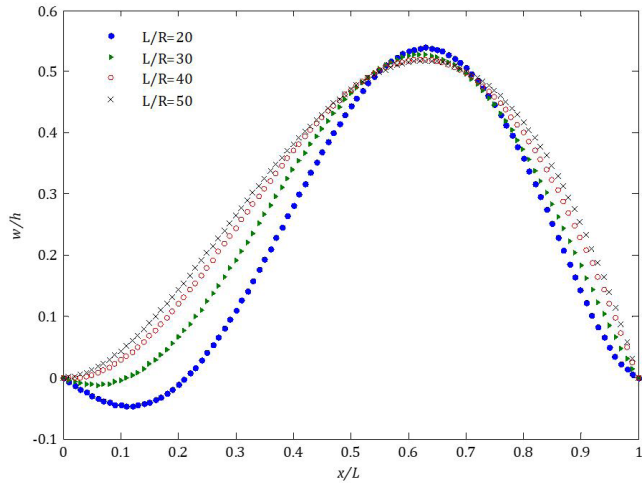


Fig. 15. Dimensionless transverse displacement versus axial displacement for various aspect ratios.

شکل ۱۵: تغییرات نمودار بدون بعد جابه‌جایی عرضی به طول به ازای نسبت طول‌های متفاوت

۸- نتیجه‌گیری

در این تحقیق رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای پیزوالکتریکی هوشمند، تحت جریان سیال و نیروی هارمونیک شعاعی بررسی شده است. از مهم‌ترین نتایج حاصله می‌توان به چند قسمت زیر اشاره نمود:

۱. با افزایش سرعت سیال، بسامد طبیعی سامانه برای تمامی مودهای ارتعاشی تا رسیدن به مقدار صفر کاهش یافته و پس از آن بسامد میرایی شروع به افزایش می‌کند
۲. برای محدوده سرعت سیال $0.1085 \leq U_f^* \leq 0.089$ مقادیر مودهای اول و دوم ارتعاشی باهم برابر شده و در شکل برهم منطبق و پدیده مخرب لرزش به وقوع می‌رسد.
۳. با افزایش سرعت جریان سیال میزان پتانسیل القایی به دلیل

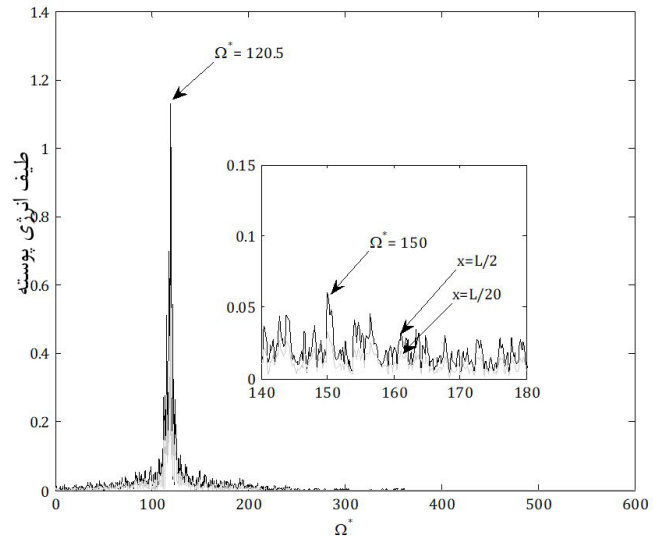


Fig. 12. Energy spectrum versus nonlinear frequency for $\Omega^*=150$, $U_f^*=0.002$, $x=L/2$ and $x=L/20$.

شکل ۱۲: نمودار بدون بعد طیف انرژی پوسته به بسامد غیرخطی برای بسامد تحریک $\Omega^*=150$ و سرعت سیال $U_f^*=0.002$ و برای دو موقعیت مکانی $x=L/20$ و $x=L/2$

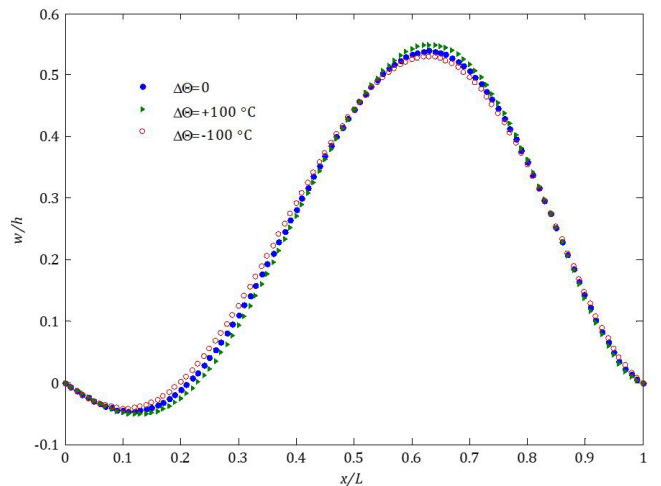


Fig. 13. Dimensionless transverse displacement versus axial displacement for various temperature fields.

شکل ۱۳: تغییرات بدون بعد بیشینه جابه‌جایی عرضی برحسب طول به ازای مقادیر مختلف تغییر دما

۷-۷- بررسی اثر نسبت طول به شعاع

تغییرات بیشترین دامنه عرضی پوسته برحسب طول بی‌بعد پوسته و زمان و برای مقادیر متفاوتی از نسبت طول به شعاع در شکل‌های ۱۴ و ۱۵ بررسی شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت طول به شعاع پوسته دوره نوسانات افزایش و در نتیجه آن بسامد پاسخ کاهش می‌یابد. از طرف دیگر با افزایش زمان میرایی پاسخ در پوسته‌های با نسبت طول به شعاع بالاتر (شکل ۱۵)، بدیهی است که ناپایداری پوسته نیز افزایش می‌یابد.

علائم یونانی

تانسور تنش	σ
تانسور کرنش	ε
تانسور تنش (مولفه های برشی)	τ
جابجای چرخشی	γ
ثوابت دی الکتریک N/m^2	ϵ_{ij}
مدول حرارتی $N/m^2.K$	λ
ضرایب پیروالکتریک	p
گرادیان دما $^{\circ}C$	Θ
پتانسیل الکتریکی	ϕ
تابع پتانسیل اغتشاش سرعت سیال	φ
چگالی kg/m^3	ρ
ضریب انبساط حرارتی $1/K$	α_i
بسامد نیروی تحریک	ω
تابع اسکالر پتانسیل جریان	ψ

زیرنویس ها

سیال	f
پوسته	s
شعاعی	r
هارمونیک	H
مرتبط با معادلات میدان جابه جایی	d
مرتبط با معادلات میدان الکتریکی	ϕ
ژیروسکوپی	G

بالانویس ها

کسینوسی	c
سینوسی	s
مشتق زمانی	\cdot
پارامتر بی بعد	$*$

منابع

- [5] H.F. Tiersten, R.D. Mindlin, Forced vibrations of piezoelectric crystal plates, *Quarterly of applied Mathematics*, 22(2) (1962) 107-119.
- [6] T.R. Tauchert, P.J. Beresford, E.L. Wilson, Piezothermoelastic behavior of laminated plate, *Journal of Thermal stresses*, 15(1) (1992) 25-37.
- [7] N.D. Duc, P.H. Cong, V.D. Quang, Nonlinear dynamic and vibration analysis of piezoelectric eccentricity

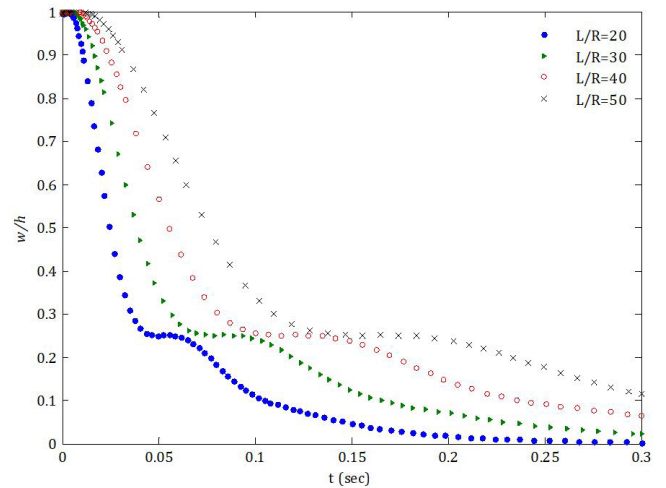


Fig. 16. Dimensionless transverse displacement versus time for various aspect ratios.

شکل ۱۶: تغییرات نمودار بدون بعد جابه جایی عرضی به زمان به ازای نسبت طول های متفاوت

افزایش یافتن میدان کرنشی پوسته، افزایش می یابد که این افزایش در سرعت های بالاتر شدت بیشتری می گیرد؛ لذا از این عامل می توان در هشداردهنده ها استفاده نمود؛ به نحوی که هرگاه پتانسیل الکتریکی بیشینه در پوسته از حدی بیشتر شود، معنی آن این است که سامانه به سرعت بحرانی و در نتیجه به ناپایداری نزدیک شده است.

۴. با افزایش دما کرنش های حرارتی به میدان کرنشی پوسته اضافه شده و باعث افزایش ناچیز در دامنه نوسانات عرضی سامانه می گردد.

فهرست علائم

C_{ij}	ثوابت سختی N/m^2
e_{ij}	ثوابت پیزو الکتریک C/m^2
p_{ij}	ثوابت پیرو الکتریک C/m^2K
D	تانسور چگالی شار
E	شدت میدان الکتریکی
L	طول استوانه
M	ماتریس جرم
t	زمان
U_f	سرعت متوسط سیال
V	میدان سرعت سیال
R	شعاع استوانه
f	دامنه نیروی تحریک،

- [16] J. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*, 2 ed., CRC Press, 2006.
- [17] P. Dash, B.N. Singh, Nonlinear free vibration of piezoelectric laminated composite plate, *Finite Elem. Anal. Des.*, 45(10) (2009) 686-694.
- [18] Y. Kurylov, M. Amabili, Polynomial versus trigonometric expansions for nonlinear vibrations of circular cylindrical shells with different boundary conditions, *Journal of Sound and Vibration*, 329(9) (2010) 1435-1449.
- [19] M.M. Alinia, S.A.M. Ghannadpour, Nonlinear analysis of pressure loaded FGM plates, *Composite Structures*, 88(3) (2009) 354-359.
- [20] P. P.J., M. J.W., Fox and McDonald's *Introduction to Fluid Mechanics*, 9 ed., Wiley, 2015.
- [21] M.J. Khoshgoftar, A.G. Arani, M. Arefi, Thermoelastic analysis of a thick walled cylinder made of functionally graded piezoelectric material, *Smart Materials and Structures*, 18(11) (2009) 115007.
- [22] Y. Jiashi, An Introduction to the theory of piezoelectricity, 1 ed., *Springer US*, 2005.
- [23] M. Amabili, R. Garziera, VIBRATIONS OF CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS WITH NONUNIFORM CONSTRAINTS, ELASTIC BED AND ADDED MASS. PART III: STEADY VISCOUS EFFECTS ON SHELLS CONVEYING FLUID, *Journal of Fluids and Structures*, 16(6) (2002) 795-809.
- [24] Hooker, W. Matthew, *Properties of PZT-Based Piezoelectric Ceramics Between -150 and 250 C*, NASA/CR-1998-208708, Lockheed Martin Engineering and Sciences Co, Hampton, VA United States, 1998.
- stiffened FGM plates in thermal environment, *International Journal of Mechanical Sciences*, 115(116) (2016) 711-722.
- [8] M. Amabili, F. Pellicano, M.P. PaïDoussis, NON-LINEAR DYNAMICS AND STABILITY OF CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS CONTAINING FLOWING FLUID. PART I: STABILITY, *Journal of Sound and Vibration*, 225(4) (1999) 655-699.
- [9] M. Amabili, *Vibration and Stability of Shells and Plates*, Cambridge University press, University of parma, Italy, 2007.
- [10] J. Reddy, C. Wang, *Dynamics of fluid-conveying beams*, 2004.
- [11] A. Ghorbanpour Arani, A.R. Shajari, V. Atabakhshian, S. Amir, A. Loghman, Nonlinear dynamical response of embedded fluid-conveyed micro-tube reinforced by BNNTs, *Composites Part B: Engineering*, 44(1) (2013) 424-432.
- [12] A.A. Alizadeh, H.R. Mirdamadi, Free vibration and divergence instability of pipes conveying fluid with uncertain structural parameters, *Modares Mechanical Engineering*, 15(4) (2015) 247-254. (In Persian)
- [13] M. Rezaee, V.A. Maleki, Vibration analysis of cracked pipe conveying fluid, *Modares Mechanical Engineering*, 12(1) (2012) 66-76. (In Persian)
- [14] I.G.o. Sonics, Ultrasonics, Transducers, C. Resonators, I.G.o. Instrumentation, Measurement, C. Frequency, C. Time, *IEEE standard on piezoelectricity*, Institute of Electrical and Electronics Engineers, New York, 1978.
- [15] Y. Jiashi, An Introduction to the theory of piezoelectricity, 1 ed., *Springer US*, 2005.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

A. Shoostari and V. Atabakhshian, Stability Analyses and Dynamic Response of Fluid Conveyed Thin-Walled Piezoelectric Cylinder Under Harmonic Excitation, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 50(1) (2018) 151-162.

DOI: 10.22060/mej.2016.876

