



## ارتعاشات طولی آزاد غیرخطی میله تحت کرنش محدود

بتول سلیمانی رودی، علیرضا فتوحی\*، محمد مهدی جلیلی

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۲ شهریور ۱۳۹۵  
بازنگری: ۱۴ آبان ۱۳۹۵  
پذیرش: ۵ دی ۱۳۹۵  
ارائه آنلاین: ۱۲ دی ۱۳۹۵

### کلمات کلیدی:

ارتعاشات غیرخطی، کرنش محدود  
کرنش گرین-لاگرانژی  
روش مقیاس‌های چندگانه  
تحلیل حساسیت

**چکیده:** میله‌ها یکی از اعضای مهم در سازه‌های مهندسی هستند و تحلیل ارتعاشات میله به علت کاربرد وسیع آن در مهندسی دارای اهمیت زیادی است. بنابراین، درک چگونگی ارتعاشات غیرخطی محوری میله در شرایط تکیه‌گاهی متفاوت، با دامنه اولیه زیاد، بسیار مفید است. لذا در این مقاله، به تحلیل ارتعاشات میله با شرایط تکیه‌گاهی متفاوت، براساس کرنش محدود، بدون ساده‌سازی در روابط کرنش-جابجایی پرداخته شده و برای بدست آوردن معادله‌های حاکم از کرنش گرین-لاگرانژی، میرایی ساختاری و اصل هامیلتون استفاده شده است. سپس با استفاده از روش گالرکین معادله غیرخطی پاره‌ای به معادله غیرخطی معمولی تبدیل شده است. معادله‌های حاصل بر خلاف اکثر مقالات که برای معادله ارتعاشاتی غیرخطی فقط جمله غیرخطی درجه سه را در نظر می‌گیرند، دارای جمله‌های غیرخطی درجه دو و سه هستند. این معادله‌ها به روش مقیاس‌های چندگانه حل شده و پاسخ ارتعاشاتی میله در دو حالت بدون میرایی و با میرایی با شرایط مختلف تکیه-گاهی بدست آمده است. برای بررسی دقت روش و صحت سنجی آن، نتایج به دست آمده از روش حاضر با نتایج روش عددی رانگ-کوتای درجه چهارم مقایسه گردیده که نشان می‌دهد روش حاضر دارای دقت مناسبی است. در پایان تحلیل حساسیت برای بررسی تأثیر ضریب‌های غیرخطی بر پاسخ ارتعاشاتی میله انجام شده است.

### ۱- مقدمه

میله‌ها یکی از اعضای مهم در سازه‌های مهندسی هستند. به علت کاربرد زیاد آن‌ها در سازه‌هایی مانند بال هواپیماها، بازوی ربات‌ها و ساختمان‌های بلند، تحقیقات زیادی برای بررسی و درک چگونگی ارتعاشات انواع مختلف آن‌ها بیان شده است و برای رسیدن به هدف طراحی مناسب، ارتعاشات میله‌هایی با سطح مقطع یکنواخت و غیریکنواخت [۱] مورد بررسی قرار گرفته است.

برای تحلیل ارتعاشات میله، می‌توان آن را به صورت بخش‌های متصل به هم در نظر گرفت [۲] و با در نظر گرفتن میله به این فرم، یک راه‌حل تحلیلی برای ارتعاشات میله با سطح مقطع متغیر و شرایط مرزی مختلف کلاسیک و غیرکلاسیک از جمله شرایط مرزی جرم و فنر ارائه داد [۳]. در نظر گرفتن میرایی نیز در بررسی شکل مدهای میله دارای اهمیت می‌باشد [۴]. همچنین، در نظر گرفتن شرایط مرزی متفاوت، به فهم و توضیح رفتار سامانه‌های مرکب و ساختارهای واقعی تحت شرایط مرزی مشابه کمک می‌کند [۵]. در [۶] رفتار استاتیکی و ارتعاشی عرضی میله مخروطی با بارگذاری افقی به صورت تجربی بررسی و نتایج حاصل با حل عددی مقایسه شده و تأثیر شکل مخروطی بر رفتار دینامیکی میله نشان داده است؛ اما زمانی که دامنه ارتعاشات بزرگ است، اثر جمله‌های غیرخطی موجود در

معادله‌های حاکم بر ارتعاشات حرکت میله بیشتر اهمیت پیدا می‌کنند. منابع ایجادکننده جمله‌های غیرخطی در معادله، می‌توانند هندسی، اینرسی یا ماده‌ای باشند. غیرخطی هندسی می‌تواند در اثر جابه‌جایی بزرگ میله به وجود آید و رابطه غیرخطی بین تنش و کرنش ماده تشکیل‌دهنده میله عامل ایجادکننده غیرخطی ماده‌ای است. وجود جرم‌های متمرکز و توزیع شده نامتقارن نیز، عامل ایجاد غیرخطی اینرسی می‌باشد [۷]، به همین علت در بسیاری از مقالات، معادله غیرخطی برای یافتن پاسخ ارتعاشاتی میله با کمک روش‌های حل عددی و تحلیلی استفاده شده است. سویتیکانن و یوزلاک ارتعاشات محوری یک میله یک سر گیردار یک سر آزاد تحت نیروی الاستیک غیرخطی از نوع وینکلر<sup>۱</sup> را بررسی کرده‌اند، معادله‌های حاکم شامل جمله‌های درجه چهار و غیرخطی قوی هستند [۸]. معادله‌های مشابهی مجدداً توسط سویتیکانن در [۹] با استفاده از روش اغتشاش<sup>۲</sup> هموتویی<sup>۳</sup> حل شده است. بوجادزی و لاردنر معادله دیفرانسیل هایپربولیک درجه دو با جمله‌های غیرخطی ضعیف را در نظر گرفته و ارتعاشات طولی میله الاستیک را که در آن معادله‌های اساسی دارای جمله‌های کرنشی درجه چهار و درجه دو است، بررسی کرده‌اند، علاوه بر این، معادله‌های حاکم دارای جمله‌های میرایی ویسکوالاستیک و ویسکوز غیرخطی کوچک است و در نهایت مسأله

1 Winkler  
2 Perturbation  
3 Homotopy

تشدید بررسی شده و نمودار جناقی<sup>۱</sup> رسم شده است [۱۰]. ارتعاشات غیرخطی آزاد و واداشته در همسایگی تشدید اولیه در میله یک سر گیردار الاستیک به وسیله مونیتسین [۱۱] مورد مطالعه قرار گرفته است. پاراشار و واگنر در [۱۲] نیز ارتعاشات غیرخطی طولی میله‌های پی‌زود سرامیک که به وسیله میدان الکتریکی ضعیفی تحریک شده را مورد مطالعه قرار داده‌اند. در این مرجع، رفتار غیرخطی ماده پی‌زود سرامیک به وسیله جمله‌های غیرخطی درجه چهار و دو در معادله‌های اساسی بیان شده و نشان داده شده که جمله درجه چهار تأثیر بیشتری نسبت به جمله درجه دو در رفتار ارتعاشاتی میله دارد. لو در [۱۳] نظریه غیرخطی برای میله را با توجه به نظریه کلی سه بعدی جسم تغییر شکل یافته بیان کرده است. نارندار در [۱۴] انتشار موج محوری در میله الاستیک الکترومغناطیس را با استفاده از نظریه غیرمحمولی<sup>۲</sup> بررسی کرده و رفتار موج را مورد مطالعه قرار داده است. ینگ وی و دای [۱۵] ارتعاشات طولی معکوس یک مدل اجزا محدود میله یک سر گیردار و یک سر فنر را بررسی کرده و نشان داده‌اند که با توجه به طیف به دست آمده از ارتعاشات میله، سطح مقطع آن را می‌توان مشخص کرد. اما بسیاری از این مقالات برای مدل کردن غیرخطی هندسی که باعث ایجاد جمله‌های غیرخطی در رابطه کرنش-جابجایی می‌شود، جابجایی بزرگ و کرنش کوچک با توصیف اولیری را در نظر گرفته و براساس فرض ون-کارمن [۱۶] عمل کرده‌اند. روش استخراج معادله ون-کارمن به وسیله تیموشنکو و ونوسکی-کریگر [۱۷] بیان شده است. با توجه به ساده‌سازی‌های استفاده شده در معادله ون-کارمن، انتظار می‌رود که دقت نتایج تا حدودی کاهش یابد و به همین علت، تعدادی از محققین با بررسی دقیق تغییر شکل‌ها و کرنش‌ها در بیان لاگرانژی، با استفاده از ساده‌سازی کمتر، سعی در نوشتن رابطه دقیق تری برای معادله کرنش-جابجایی داشته‌اند [۱۸].

## ۲- معادله های اساسی

زمانی که یک جسم پیوسته تحت تغییر شکل قرار می‌گیرد، ذرات آن در فضا حرکت می‌کنند. این حرکت با معادله‌ای به این فرم بیان می‌شود.

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

که  $(X_1, X_2, X_3)$  موقعیت ذره را در لحظه  $t = 0$  نشان می‌دهد. این فرم تغییر شکل، بیان لاگرانژی نامیده می‌شود. با مشتق‌گیری نسبت به  $X_j$ ، تانسور گرادیان تغییر شکل در هیأت مرجع به دست می‌آید.

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (2)$$

که همچنین، کرنش گرین-لاگرانژی و جابجایی نیز به ترتیب به صورت روابط (۳) و (۴) بیان می‌شوند.

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} + \frac{\partial U_k}{\partial X_i} \frac{\partial U_k}{\partial X_j} \right) \quad (3)$$

$$U_i = x_i - X_i \quad (4)$$

در نتیجه با توجه به معادلات (۲) و (۳)، مؤلفه‌های غیر صفر تانسور

1 Back bone curve

2 Nonlocal

در بخش قبلی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \delta PE &= \iiint P_{xx} \delta E_{xx} dV \\ &= \int_0^L \iint P_{xx} \delta \left[ \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 \right] dAdX \quad (10) \\ &= \int_0^L \iint P_{xx} \left[ \frac{\partial \delta U}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial \delta U}{\partial X} \right] dAdX \end{aligned}$$

اکثر مواد تا اندازه‌ای خاصیت ویسکوالاستیک دارند [۷]، منبع میرایی غیرخطی در این مقاله، ناشی از تأثیر خاصیت ویسکوالاستیک در نظر گرفته شده است؛ بنابراین کار مجازی ناشی از میرایی، متناسب با نرخ تغییرات کرنش در زمان بیان شده است که به عنوان میرایی ساختاری در نظر گرفته می‌شود.

$$\delta W = \iiint \mu \dot{E}_{xx} \delta E_{xx} dV \quad (11)$$

که در آن:

$\mu$ : ضریب میرایی (کیلوگرم بر مترثانیه)

با در نظر گرفتن نیرو  $N_x$  و تابع  $H_x$  در میله در هیأت مرجع به صورت

$$N_x = \iint P_{xx} dA \quad (12)$$

$$H_x = \iint \dot{E}_{xx} dA \quad (13)$$

که در آن

$N$ : نیرو در میله در هیأت مرجع (نیوتن)

$H$ : نرخ تغییرات سطح در هیأت مرجع

و با توجه به معادله‌های (۱۰) تا (۱۳) می‌توان نوشت:

$$\delta PE = \iiint P_{xx} \delta E_{xx} dV = \int_0^L N_x \left[ \frac{\partial \delta U}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial \delta U}{\partial X} \right] dX \quad (14)$$

$$W = \mu \iiint \dot{E}_{xx} \delta E_{xx} dV = \mu \int_0^L H_x \left[ \frac{\partial \delta U}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial \delta U}{\partial X} \right] dX \quad (15)$$

با جایگذاری معادله‌های (۹)، (۱۴) و (۱۵) در اصل هامیلتون و انتگرال‌گیری و محاسبات ریاضی، معادله ارتعاشاتی میله با میرایی به فرم زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \left[ 1 + 3 \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{3}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 \right] \\ &+ \frac{\mu}{Y} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \left[ 1 + 3 \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{3}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 \right] = \frac{\rho}{Y} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (16)$$

معادله ارتعاشاتی میله بدون میرایی، بدون در نظر گرفتن کار مجازی

ناشی از میرایی (معادله (۱۱))، به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \left[ 1 + 3 \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{3}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 \right] = \frac{\rho}{Y} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (17)$$

گرادیان تغییرشکل و کرنش گرین- لاگرانژی برای حرکت یک بعدی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$F_{xx} = 1 + \frac{\partial U}{\partial X}, \quad F_{yy} = 1, \quad F_{zz} = 1 \quad (5)$$

$$E_{xx} = \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial X} \right) \frac{\partial U}{\partial X} \quad (6)$$

که در آن:

$U$ : جابه‌جایی محوری میله (متر)

$E$ : کرنش گرین- لاگرانژی

در هیأت مرجع، تانسور تنش پیولا- کیرشهف نوع دوم ( $P_{xx}$ ) با تانسور کرنش گرین- لاگرانژی توأم است، با در نظر گرفتن رابطه خطی به عنوان یک قانون اساسی برای ماده همگن با مدول الاستیسیته  $Y$  می‌توان رابطه تنش-کرنش را به فرم رابطه (۷) بیان کرد.

$$P_{xx} = Y E_{xx} = Y \left[ \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 \right] \quad (7)$$

که در آن:

$P$ : تنش دوم پیولا- کیرشهف (نیوتن بر مترمربع)

$Y$ : مدول الاستیسیته (نیوتن بر مترمربع)

### ۳- معادله‌های حاکم بر حرکت

برای نوشتن معادله‌های ارتعاشات میله از اصل هامیلتون [۲۷] استفاده می‌شود که در بازه زمانی  $t_0$  تا  $t_1$  به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta W + \delta KE - \delta PE) dt = 0 \quad (8)$$

که در آن:

$W$ : کار مجازی (نیوتن متر)

$KE$ : انرژی جنبشی (نیوتن متر)

$PE$ : انرژی پتانسیل (نیوتن متر)

برای میله با سطح مقطع ثابت، تغییرات انرژی جنبشی را می‌توان به شکل زیر بیان کرد.

$$\begin{aligned} \delta KE &= \iiint \rho \frac{\partial U}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right) dV \\ &= \int_0^L \iint \rho \frac{\partial U}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right) dAdX = A \int_0^L \rho \frac{\partial U}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right) dX \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن:

$V$ : حجم میله در هیأت مرجع (مترمکعب)

$A$ : مساحت سطح مقطع میله در هیأت مرجع (مترمربع)

$\rho$ : چگالی (کیلوگرم بر مترمکعب)

تغییرات انرژی پتانسیل در میله با توجه به رابطه تنش و کرنش بیان شده

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left[ 1 + 3 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] + \mu_1 \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left[ 1 + 3 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \quad (20)$$

که در حالت بدون میرایی به فرم زیر است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left[ 1 + 3 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \quad (21)$$

برای حل معادله‌های (۲۰) و (۲۱)، پاسخ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u(x, \tau) = W(x)\theta(\tau) \quad (22)$$

که در آن:

$W(x)$ : مد ارتعاشاتی میله

$\theta$ : پاسخ زمانی ارتعاشاتی میله بدون بعد

مطابق روش گالرکین، تابع  $W(x)$  باید شرایط تکیه‌گاهی میله را ارضا کند. برای میله با شرایط مرزی بیان شده در بخش قبلی مقدار  $W(x)$  در جدول ۱ بیان شده است.

جدول ۱: مقادیر  $W(x)$  برای شرایط تکیه‌گاهی متفاوت [۲۸]

Table 1. Value of  $W(x)$  for different boundary conditions [28]

$W(x)$	نوع تکیه‌گاه
$\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$	گیردار-آزاد
$\sin(\pi x)$	گیردار-گیردار
$\sin(\beta x)$	گیردار-وزنه
$\cos(\gamma x)$	آزاد-فنر

لازم به ذکر است که برای میله با شرط تکیه‌گاهی گیردار-وزنه مقدار  $\beta$  از پاسخ معادله  $\beta \tan \beta = \frac{\rho A L}{M}$  و برای میله با شرط تکیه‌گاهی آزاد-فنر مقدار  $\gamma$  از پاسخ معادله  $\gamma \cot \gamma = \frac{A Y}{L K}$  به دست می‌آید. با استفاده از روش گالرکین و مقادیر  $W(x)$  بیان شده در جدول ۱ و با جایگذاری معادله (۲۲) در معادله‌های (۲۰) و (۲۱)، فرم کلی معادله‌های (۲۰) و (۲۱) به شکل زیر به ترتیب با میرایی و بدون میرایی بازنویسی می‌شود:

$$\ddot{\theta} + \mu_1 (\alpha_3 \theta^2 + \alpha_2 \theta + \alpha_1) \dot{\theta} + \alpha_3 \theta^3 + \alpha_2 \theta^2 + \alpha_1 \theta = 0 \quad (23)$$

$$\ddot{\theta} + \alpha_3 \theta^3 + \alpha_2 \theta^2 + \alpha_1 \theta = 0 \quad (24)$$



Fig. 1. Rod with linear boundary condition (fixed-free)

شکل ۱: میله با شرایط مرزی خطی (گیردار-آزاد)

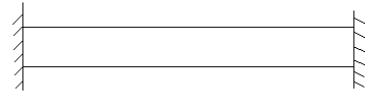


Fig. 2. Rod with linear boundary condition (fixed-fixed)

شکل ۲: میله با شرایط مرزی خطی (گیردار-گیردار)

برای شرایط مرزی، مقدار  $U$  یا  $\frac{\partial U}{\partial X}$  باید مشخص باشند. با توجه به شکل‌های ۱ و ۲، برای میله یک سر آزاد، در انتهای گیردار  $U = 0$  و در انتهای آزاد  $\frac{\partial U}{\partial X} = 0$  است. برای میله گیردار در هر دو انتها  $U = 0$  است. اما اگر شرایط مرزی میله مانند شکل‌های ۳ و ۴ باشد، شرایط مرزی به ترتیب مطابق روابط (۱۸) و (۱۹) به دست می‌آیند.

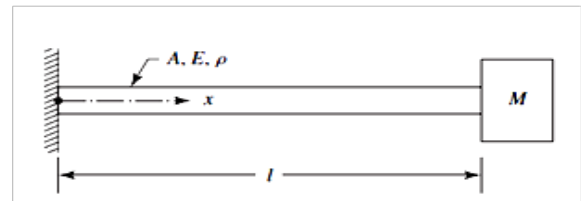


Fig. 3. Rod with nonlinear boundary condition (fixed-mass)

شکل ۳: میله با شرایط مرزی غیرخطی (گیردار-وزنه)

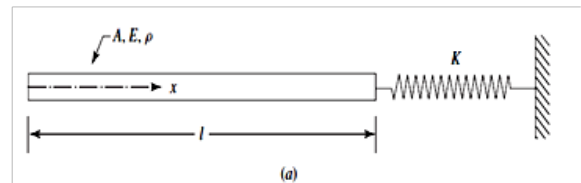


Fig. 4. Rod with nonlinear boundary condition (free-spring)

شکل ۴: میله با شرایط مرزی غیرخطی (آزاد-فنر)

$$A Y \left[ \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 \right] = -M \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \dot{U} \dot{N} \quad X = L \quad (18)$$

$$U = 0 \quad \text{در } X = 0$$

$$A Y \left[ \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 \right] = -K U \dot{U} \dot{N} \quad X = L \quad (19)$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0 \quad \text{در } X = 0$$

که  $M$  جرم وزنه (کیلوگرم) و  $K$  ضریب فنریت (نیوتن بر متر) است. با تعریف  $x = \frac{X}{L}$  و  $u = \frac{U}{L}$  و  $\tau = \frac{t}{L} \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$  و  $\mu_1 = \frac{\mu}{L \sqrt{\rho Y}}$  که  $L$  طول میله است، معادله (۱۶) به صورت بی‌بعد، به شکل زیر بازنویسی می‌گردد.

که در آن:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_1) + \dots \quad (27)$$

فرض می‌شود که حل معادله (۲۴) به صورت زیر می‌تواند بسط داده شود.

$$\theta(\tau; \varepsilon) = \varepsilon \theta_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 \theta_2(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 \theta_3(T_0, T_1, T_2) \quad (28)$$

که  $\varepsilon$  پارامتر اغتشاش است. با جایگذاری معادله‌های (۲۷) و (۲۸) در معادله (۲۴) و صفر قرار دادن ضریب‌های  $\varepsilon^3$ ،  $\varepsilon^2$  و  $\varepsilon$  روابط زیر به دست می‌آیند.

$$\varepsilon^1; \quad D_0^2 \theta_1 + \omega_0^2 \theta_1 = 0 \quad (29\text{-الف})$$

$$\varepsilon^2; \quad D_0^2 \theta_2 + \omega_0^2 \theta_2 = -2D_0 D_1 \theta_1 - \alpha_2 \theta_1^2 \quad (29\text{-ب})$$

$$\varepsilon^3; \quad D_0^2 \theta_3 + \omega_0^2 \theta_3 = -2D_0 D_1 \theta_2 - D_1^2 \theta_1 - 2D_0 D_2 \theta_1 - 2\alpha_2 \theta_1 \theta_2 - \alpha_3 \theta_1^3 \quad (29\text{-ج})$$

که  $\omega_0 = \sqrt{\alpha_1}$  بسامد طبیعی سامانه خطی است. با حل معادله (۲۹-الف) و قرار دادن پاسخ آن در معادله (۲۹-ب)، مقادیر  $\theta_1$  و  $\theta_2$  به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\theta_1 = B e^{i\omega_0 T_0} + \bar{B} e^{-i\omega_0 T_0} \quad (30)$$

$$\theta_2 = \left[ \frac{\alpha_2 B^2}{3\omega_0^2} e^{2i\omega_0 T_0} - \frac{\alpha_2}{\omega_0^2} B \bar{B} + CC \right] \quad (31)$$

که  $B$  یک مقدار مختلط نامشخص،  $\bar{B}$  مزدوج مختلط آن و  $CC$  مقدار مزدوج مختلط عبارت بیان شده هستند. برای حذف جمله نامحدود از معادله (۲۹-ب) باید  $D_1(B) = 0$  باشد؛ بنابراین  $B$  مستقل از  $T_1$  است. با جایگذاری مقادیر  $\theta_1$  و  $\theta_2$  در معادله (۲۹-ج) و با توجه به اینکه  $D_1(B) = 0$ ، معادله فوق به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$D_0^2 \theta_3 + \omega_0^2 \theta_3 = - \left[ 2i\omega_0 D_2 B - \frac{10\alpha_2^2 - 9\alpha_3 \omega_0^2}{3\omega_0^2} B^2 \bar{B} \right] e^{i\omega_0 T_0} + \left[ \frac{-3\alpha_3 \omega_0^2 - 2\alpha_2^2}{3\omega_0^2} \right] B^3 e^{3i\omega_0 T_0} + CC \quad (32)$$

برای حذف جمله نامحدود از رابطه فوق باید:

$$2i\omega_0 D_2 B - \frac{10\alpha_2^2 - 9\alpha_3 \omega_0^2}{3\omega_0^2} B^2 \bar{B} = 0 \quad (33)$$

برای حل معادله به شکل معادله (۳۳) مقدار  $B$  به صورت قطبی  $B = \frac{1}{\eta} e^{i\epsilon}$  نوشته می‌شود که در آن  $\eta$  و  $\epsilon$  مقادیر ثابت حقیقی تابع  $T_2$  هستند. با جایگذاری شکل قطبی  $B$  در معادله (۳۳) و جداسازی

$\mu_1$ : ضریب میرایی بدون بعد

مقادیر  $\alpha_i$  با توجه به نوع تکیه‌گاه میله متفاوت است و مقادیر آن برای هر کدام از شرایط تکیه‌گاهی در جدول ۲ مشخص شده است.

معادله‌های حاصل که بر پایه مکانیک محیط پیوسته نوشته شده است، معادله‌ای متفاوت برای تحلیل ارتعاشاتی میله نسبت به مراجع دیگر ارائه می‌کند. اکثر مراجع برای تحلیل ارتعاشاتی، معادله خطی [۳ و ۱۰ و ۳۰-۳۹] یا غیرخطی تنها با جمله غیرخطی درجه سه [۸ و ۳۱] استفاده کرده‌اند.

### جدول ۲: مقادیر $\alpha_i$ برای شرایط تکیه‌گاهی متفاوت

Table 2. Value of  $\alpha_i$  for different boundary conditions

نوع تکیه‌گاه	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
گیردار- آزاد	$\frac{\pi^2}{4}$	$\frac{\pi^2}{2}$	$\frac{3\pi^4}{128}$
گیردار- گیردار	$\pi^2$	.	$\frac{3\pi^4}{8}$
گیردار- وزنه	$\beta^2$	$\frac{\beta^2 \sin^3 \beta}{\left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{4\beta} \sin 2\beta \right]}$	$\frac{3\beta^4 \left[ \frac{1}{8} - \frac{1}{32\beta} \sin 4\beta \right]}{2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{4\beta} \sin 2\beta \right]}$
آزاد- فنر	$\gamma^2$	$\frac{\gamma^2 [\cos^3 \gamma - 1]}{\left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{4\gamma} \sin 2\gamma \right]}$	$\frac{3\gamma^4 \left[ \frac{1}{8} - \frac{1}{32\gamma} \sin 4\gamma \right]}{2 \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{4\gamma} \sin 2\gamma \right]}$

### ۴- تحلیل ارتعاشاتی بدون میرایی

برای حل معادله ارتعاشاتی غیرخطی (۲۴) از روش اغتشاش استفاده شده است. روش اغتشاش به فرم‌های مختلف بیان شده است که روش مقیاس‌های چندگانه که برای حل معادله غیرخطی حاضر استفاده شده، یکی از روش‌های قدرتمند در حل معادله‌های غیرخطی است. در این روش مقیاس‌های زمانی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند [۳۲]:

$$T_n = \varepsilon^n t \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

که در آن:

$T$ : پارامتر مقیاس زمانی

همچنین مشتق زمانی به فرم زیر به صورت مشتق پاره‌ای نسبت به  $T_n$  بسط داده می‌شود.

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{dT_0}{d\tau} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{d\tau} \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad (26)$$

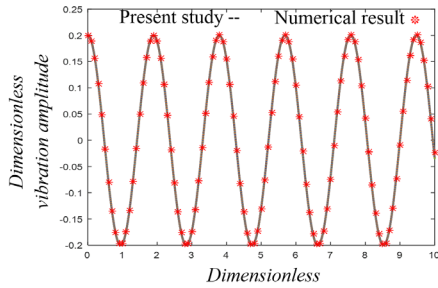


Fig. 6. Dimensionless vibration amplitude for fixed-fixed rod

شکل ۶: دامنه ارتعاشات بی‌بعد برای میله گیردار-گیردار

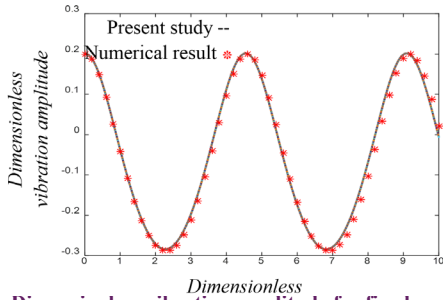


Fig. 7. Dimensionless vibration amplitude for fixed-mass rod

شکل ۷: دامنه ارتعاشات بی‌بعد برای میله گیردار-وزنه

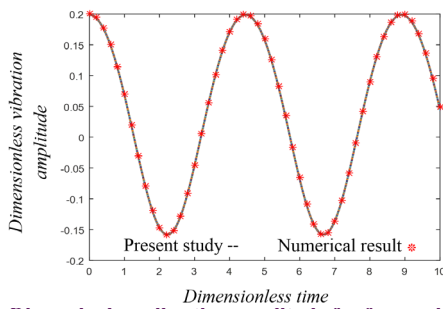


Fig. 8. Dimensionless vibration amplitude for free-spring rod

شکل ۸: دامنه ارتعاشات بی‌بعد برای میله آزاد-فشر

پاسخ زمانی ارتعاشات میله با شرایط مرزی متفاوت، با دامنه اولیه بی‌بعد  $0/2$  در شکل‌های ۵ تا ۸ رسم شده است. در هر کدام از شرایط مرزی جواب حل تحلیلی ارائه شده با حل رانگ-کوتای درجه چهارم مقایسه شده است که جواب‌ها انطباق خوبی دارند. نسبت بسامد خطی به غیرخطی با افزایش شرط اولیه برای میله با شرایط تکیه‌گاهی مختلف در شکل ۹ نشان داده شده است. با توجه به

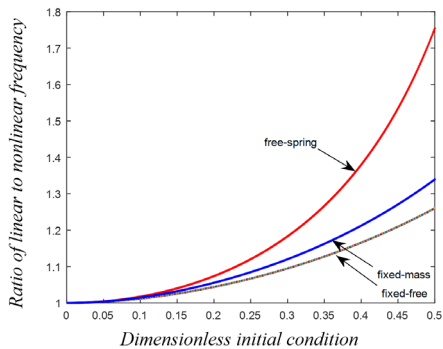


Fig. 9. Influence of initial amplitude on linear to nonlinear frequency ratio

شکل ۹: تأثیر دامنه اولیه بر نسبت بسامد خطی به غیرخطی

قسمت‌های حقیقی و موهومی روابط زیر حاصل می‌گردند.

$$\eta' = \omega_0 \quad (34)$$

$$\xi' = \frac{9\alpha_3\omega_0^2 - 10\alpha_2^2}{24\omega_0^3} \eta^2 \quad (35)$$

با توجه به اینکه  $\xi$  فقط تابع  $T_2 = \varepsilon^2 t$  است، پس با انتگرال‌گیری از معادله (۳۵) به دست می‌آید:

$$\xi = \left[ \frac{9\alpha_3\omega_0^2 - 10\alpha_2^2}{24\omega_0^3} \eta^2 \right] \varepsilon^2 t + \xi_0 \quad (36)$$

در نتیجه:

$$B = \frac{1}{2} \eta \exp \left[ \frac{9\alpha_3\omega_0^2 - 10\alpha_2^2}{24\omega_0^3} \varepsilon^2 \eta^2 t + i\xi_0 \right] \quad (37)$$

با قرار دادن  $\theta_1$  و  $\theta_2$  از معادله‌های (۳۰) و (۳۱) در معادله (۲۸) و همچنین محاسبه  $\theta_3$  بعد از حذف جمله نامحدود از معادله (۳۲) و قرار دادن آن در معادله (۲۸)، مقدار  $\theta$  به دست می‌آید.

$$\theta = \varepsilon \eta \cos(\omega t + \xi_0) - \frac{\varepsilon^2 \eta^2 \alpha_2}{2\alpha_1} \left[ 1 - \frac{1}{3} \cos(2\omega t + 2\xi_0) \right] + \quad (38)$$

$$\left[ \frac{3\alpha_3\alpha_1 + 2\alpha_2}{24\alpha_1^2} \right] \varepsilon^3 \eta^3 \cos(3\omega t + 3\xi_0) + O(\varepsilon^4)$$

که در آن:

$$\omega = \sqrt{\alpha_1} \left[ 1 + \varepsilon^2 \eta^2 \frac{9\alpha_3\alpha_1 - 10\alpha_2^2}{24\alpha_1^2} \right] + O(\varepsilon^3) \quad (39)$$

پارامترهای نامشخص در رابطه بالا  $\varepsilon \eta$  و  $\xi_0$  است که با توجه به شرایط اولیه مشخص می‌شوند. شرایط اولیه به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$\theta(0) = D, \dot{\theta}(0) = 0 \quad (40)$$

که در آن،  $D$  مقدار اولیه بدون بعد است.

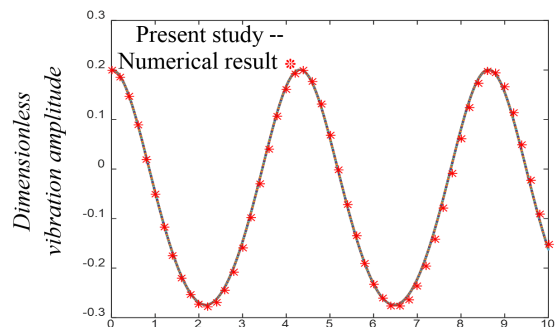


Fig. 5. Dimensionless vibration amplitude for free-fixed rod

شکل ۵: دامنه ارتعاشات بی‌بعد برای میله گیردار-آزاد



$$\begin{aligned}
 & -\alpha_2 \overline{B\overline{B}} + D_0^2 \theta_1 + \omega_0^2 \theta_1 = \\
 & [-\mu_1 \alpha_1 B i \omega_0 + 3\mu_1 \alpha_3 B^2 \overline{B} i \omega_0 - \\
 & 2D_1 (B i \omega_0) - \alpha_3 (3\overline{B\overline{B}})] e^{i\omega_0 T_0} \\
 & - [\mu_1 \alpha_2 B^2 i \omega_0 + \alpha_2 B^2] e^{2i\omega_0 T_0} \\
 & - [\mu_1 \alpha_3 B^3 i \omega_0 + \alpha_3 B^3] e^{3i\omega_0 T_0} + CC
 \end{aligned} \quad (46)$$

که  $B$  یک مقدار مختلط نامشخص،  $\overline{B}$  مزدوج مختلط آن و  $CC$  مقدار مزدوج مختلط عبارت بیان شده هستند. برای حذف جمله نامحدود از رابطه فوق باید:

$$\begin{aligned}
 & -\mu_1 \alpha_1 B i \omega_0 + 3\mu_1 \alpha_3 B^2 \overline{B} i \omega_0 - 2D_1 (B i \omega_0) \\
 & - \alpha_3 (3\overline{B\overline{B}}) = 0
 \end{aligned} \quad (47)$$

حل معادله (۴۶) پس از حذف جمله نامحدود به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 \theta_1 = & \left[ \mu_1 \alpha_2 i \omega_0 + \alpha_2 \right] \frac{B^2}{3\omega_0^2} e^{2i\omega_0 T_0} \\
 & + \left[ \mu_1 \alpha_3 i \omega_0 + \alpha_3 \right] \frac{B^3}{8\omega_0^2} e^{3i\omega_0 T_0} - \alpha_2 \frac{\overline{B\overline{B}}}{\omega_0^2} + CC
 \end{aligned} \quad (48)$$

برای حل معادله به شکل معادله (۴۷) مقدار  $B$  به صورت قطبی  $B = \frac{1}{2} \eta e^{i\epsilon}$  نوشته می‌شود که در آن  $\eta$  و  $\epsilon$  مقادیر ثابت حقیقی تابع  $T_1$  هستند. با جایگذاری شکل قطبی  $B$  در معادله (۴۷) و جداسازی قسمت‌های حقیقی و موهومی روابط زیر حاصل می‌گردند.

$$\eta' = \frac{1}{2} \eta \left( -\mu_1 \alpha_1 - \frac{1}{4} \mu_1 \alpha_3 \eta^2 \right) \quad (49)$$

$$\xi' = \left( \frac{3\alpha_3}{8\omega_0} \right) \eta^2 \quad (50)$$

و بعد از انتگرال‌گیری

$$\eta^2 = \frac{-\mu_1 \alpha_1 \eta_0^2}{\left[ \frac{1}{4} \mu_1 \alpha_3 \eta_0^2 \right] - \left[ \left( \frac{1}{4} \mu_1 \alpha_3 \eta_0^2 + \mu_1 \alpha_1 \right) e^{\delta \mu_1 \alpha_1 t} \right]} \quad (51)$$

$$\begin{aligned}
 \xi = & \frac{3\alpha_3}{2\mu_1 \alpha_3 \omega_0} \\
 & \times \ln \left[ \frac{\frac{1}{4} \mu_1 \alpha_3 \eta_0^2 - \left( \frac{1}{4} \mu_1 \alpha_3 \eta_0^2 + \mu_1 \alpha_1 \right) e^{\delta \mu_1 \alpha_1 t}}{\left( \frac{1}{4} \mu_1 \alpha_3 \eta_0^2 + \mu_1 \alpha_1 \right) e^{\delta \mu_1 \alpha_1 t}} \right] + \xi_0
 \end{aligned} \quad (52)$$

که  $\eta_0$  و  $\xi_0$  مقادیر ثابت هستند که با اعمال شرایط اولیه به دست می‌آیند. با محاسبه  $\eta$  و  $\xi$  و جایگذاری مقدار  $B$  در معادله‌های (۴۵) و (۴۸)، مقدار پاسخ ارتعاشاتی میله با میرایی، از معادله (۴۲) مشخص می‌شود.

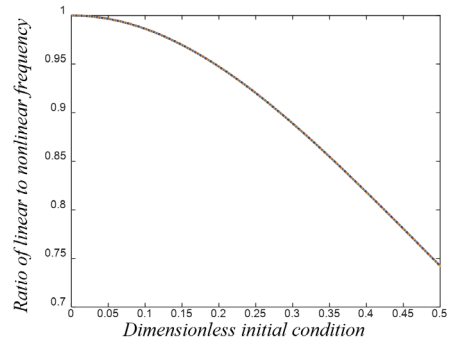


Fig. 10. Influence of initial amplitude on nonlinear to linear frequency ratio for fixed-fixed rod

شکل ۱۰: تأثیر دامنه اولیه بر نسبت بسامد خطی به غیرخطی برای میله گیردار-گیردار

شکل ۹ مشاهده می‌شود که با افزایش دامنه اولیه، تفاوت بین بسامد خطی و غیرخطی نیز افزایش می‌یابد و این اهمیت بررسی پدیده ارتعاشاتی میله به فرم غیرخطی را در دامنه تحریک بزرگ نشان می‌دهد. علاوه بر این که تفاوت بسامد خطی و غیرخطی برای میله آزاد-فکر در دامنه‌های بالاتر، بیشتر است.

همانطور که در شکل ۱۰ نشان داده شده است، اختلاف بسامد خطی و غیرخطی برای میله دو سر گیردار هم با افزایش دامنه اولیه افزایش می‌یابد؛ اما مقدار بسامد غیرخطی از بسامد خطی بیشتر است.

## ۵- تحلیل ارتعاشاتی با میرایی

برای حل معادله غیرخطی با میرایی، معادله (۲۳) به فرم معادله (۴۱) بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned}
 \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = & \\
 -\epsilon \left[ \mu_1 \left( \alpha_3 \theta^2 + \alpha_2 \theta + \alpha_1 \right) \dot{\theta} + \alpha_3 \theta^3 + \alpha_2 \theta^2 \right]
 \end{aligned} \quad (41)$$

که در آن  $\omega_0 = \sqrt{\alpha_1}$  بسامد طبیعی سامانه خطی است. مشابه بخش قبلی فرض می‌شود که حل معادله (۴۱) به صورت زیر می‌تواند بسط داده شود.

$$\theta(t; \epsilon) = \theta_0(T_0, T_1) + \epsilon \theta_1(T_0, T_1) + \dots \quad (42)$$

با جایگذاری معادله‌های (۲۷) و (۴۲) در معادله (۴۱) و صفر قرار دادن جملات ضریب  $\epsilon$  روابط زیر به دست می‌آیند.

$$\epsilon^0; \quad D_0^2 \theta_0 + \omega_0^2 \theta_0 = 0 \quad (43)$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon^1; \quad D_0^2 \theta_1 + \omega_0^2 \theta_1 = & -\mu_1 \alpha_1 D_0 \theta_0 - \mu_1 \alpha_2 \theta_0 D_0 \theta_0 \\
 & - \mu_1 \alpha_3 \theta_0^2 D_0 \theta_0 - 2D_0 D_1 \theta_0 - \alpha_2 \theta_0^2 - \alpha_3 \theta_0^2
 \end{aligned} \quad (44)$$

پاسخ معادله (۴۳) به صورت زیر است:

$$\theta_0 = B e^{i\omega_0 T_0} + \overline{B} e^{-i\omega_0 T_0} \quad (45)$$

با جایگذاری مقدار  $\theta_0$  در معادله (۴۴)، معادله فوق به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

شکل ۱۹ نسبت بسامد غیرخطی به خطی را برای ضریب‌های میرایی مختلف برای میله گیردار-آزاد نشان می‌دهد. با توجه به شکل، با افزایش ضریب میرایی اختلاف بسامد غیرخطی و خطی کاهش می‌یابد. پس برای مواد با خاصیت ویسکوالاستیک بیشتر، اختلاف بین

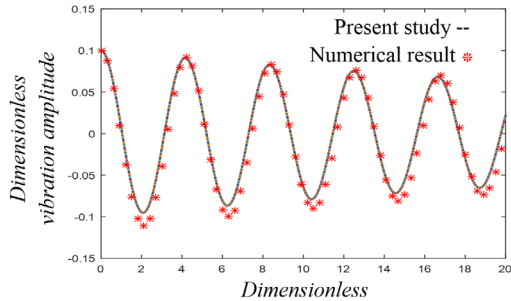


Fig. 13. Dimensionless vibration amplitude for fixed-mass rod

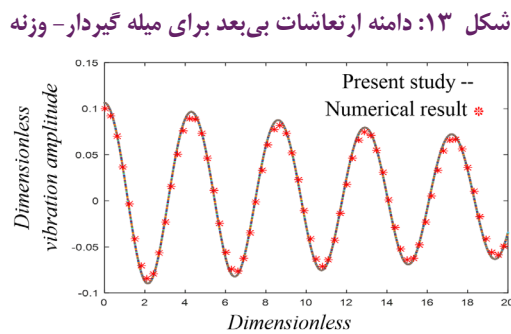


Fig. 14. Dimensionless vibration amplitude for free-spring rod

شکل ۱۴: دامنه ارتعاشات بی‌بعد برای میله آزاد-فنر

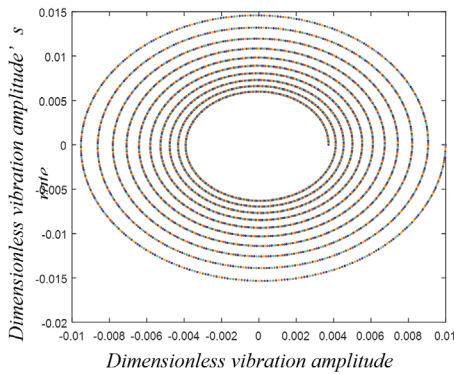


Fig. 15. Phase plane for free-fixed rod

شکل ۱۵: نمودار فاز برای میله با شرایط تکیه‌گاهی گیردار-آزاد

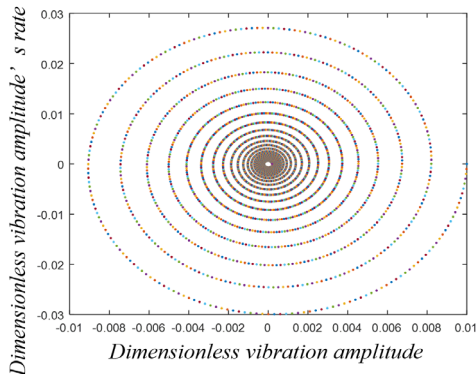


Fig. 16. Phase plane for fixed-fixed rod

شکل ۱۶: نمودار فاز برای میله با شرایط تکیه‌گاهی گیردار-گیردار

$$\theta = \eta \cos(\omega_0 t + \xi)$$

$$\begin{aligned}
 & + \varepsilon \left[ \frac{\alpha_2}{6\omega_0^2} \eta^2 \cos(2\omega_0 t + 2\xi) \right] \\
 & - \varepsilon \left[ \frac{\mu_1 \alpha_2}{6\omega_0} \eta^2 \sin(2\omega_0 t + 2\xi) \right] \\
 & + \varepsilon \left[ \frac{\alpha_3}{32\omega_0^2} \eta^3 \cos(3\omega_0 t + 3\xi) \right] \\
 & - \varepsilon \left[ \frac{\mu_1 \alpha_3}{32\omega_0} \eta^3 \sin(3\omega_0 t + 3\xi) \right] - \varepsilon \left[ \frac{\alpha_2}{2\omega_0^2} \eta^2 \right]
 \end{aligned} \quad (53)$$

با توجه به پاسخ به دست آمده، مشاهده می‌شود که ضریب  $\mu_1 \alpha_2$  در معادله‌های (۵۱) و (۵۲) ظاهر نشده است؛ بنابراین، ضریب میرایی  $\mu_1 \alpha_3$  و  $\mu_1 \alpha_1$  در پاسخ ارتعاشاتی میله تأثیر بیشتری دارند. پاسخ زمانی ارتعاشات میله با شرایط مرزی متفاوت و برای  $\mu_1 = 0.02$  و با دامنه اولیه بی‌بعد ۰/۱ در شکل‌های ۱۱ تا ۱۴ رسم شده است که جواب در تمامی موارد با حل عددی هم‌خوانی خوبی دارد.

مانند میله بدون میرایی در حالت با میرایی نیز، بسامد نوسانات میله گیردار-گیردار که در شکل ۱۲ نشان داده شده است، بیشتر از سایر شرایط مرزی است و نوسانات زودتر میرا می‌شوند.

نمودار فاز برای شرایط مختلف تکیه‌گاهی نیز در شکل‌های ۱۵ تا ۱۸ رسم شده است که نشان‌دهنده پدیده میرایی هستند. در شکل ۱۶ نوسانات میله گیردار-گیردار با بسامد بالاتر تأیید شده است.

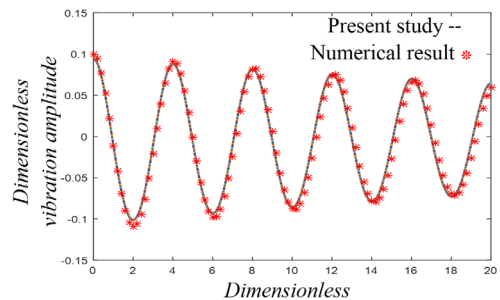


Fig. 11. Dimensionless vibration amplitude for free-fixed rod

شکل ۱۱: دامنه ارتعاشات بی‌بعد برای میله گیردار-آزاد

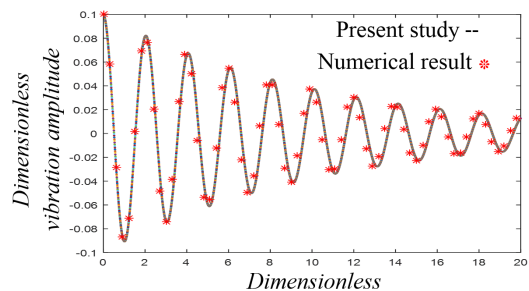


Fig. 12. Dimensionless vibration amplitude for fixed-fixed rod

شکل ۱۲: دامنه ارتعاشات بی‌بعد برای میله گیردار-گیردار



در شکل‌های ۲۲ و ۲۳ نیز تغییرات پاسخ زمانی ارتعاشات و نسبت بسامد غیرخطی به خطی در میله آزاد-فنر با تغییر نسبت  $AY/LK$  نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش این نسبت، مقدار بسامد نوسانات و نسبت بسامد غیرخطی به خطی کاهش می‌یابد. پس برای میله با فنر سخت‌تر، بررسی ارتعاشات غیرخطی در دامنه‌های بزرگتر دارای اهمیت بیشتری است.

### ۶- تحلیل حساسیت

تحلیل حساسیت برای تعیین مقدار وابستگی خروجی مدل مورد نظر به پارامترهای ورودی مورد استفاده قرار می‌گیرد و روش مهمی برای بررسی

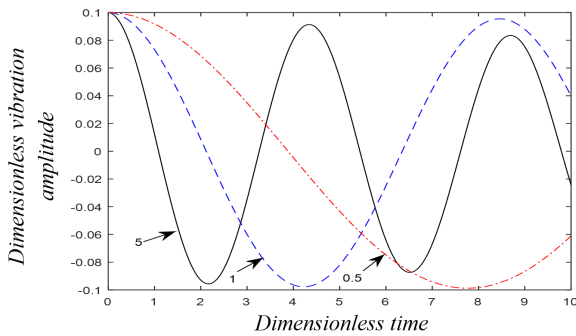


Fig. 20. Influence of  $\rho AL/M$  on time response of fixed-mass rod

شکل ۲۰: تأثیر نسبت  $\rho AL/M$  بر پاسخ زمانی ارتعاشات میله گیردار-وزنه

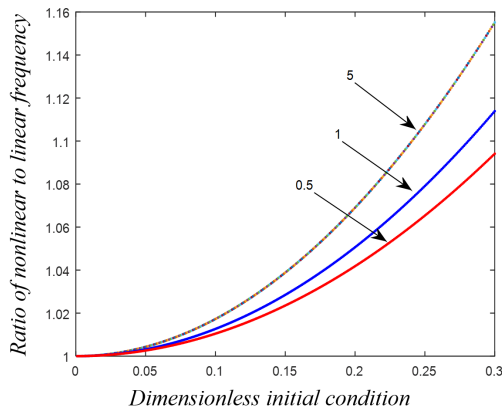


Fig. 21. Influence of  $\rho AL/M$  on nonlinear to linear frequency ratio with increasing of initial amplitude (fixed-mass rod)

شکل ۲۱: تأثیر نسبت  $\rho AL/M$  بر نسبت بسامد غیرخطی به خطی با افزایش شرط اولیه (میله گیردار-وزنه)

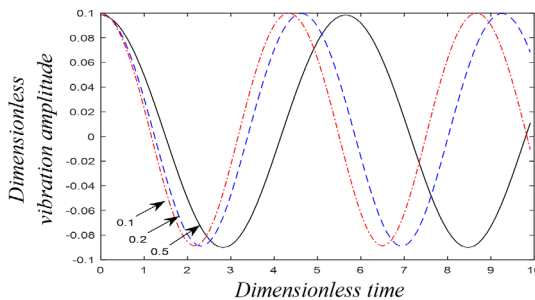


Fig. 22. Influence of  $AY/LK$  on time response of free-spring rod

شکل ۲۲: تأثیر نسبت  $AY/LK$  بر پاسخ زمانی ارتعاشات میله آزاد-فنر

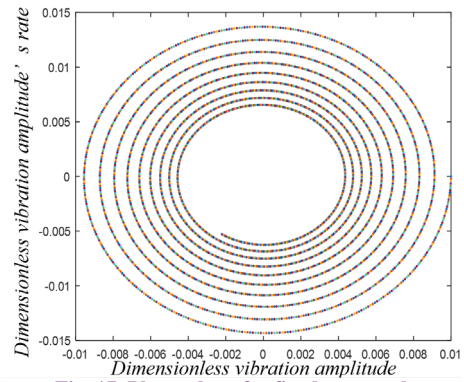


Fig. 17. Phase plane for fixed-mass rod

شکل ۱۷: نمودار فاز برای میله با شرایط تکیه‌گاهی گیردار-وزنه

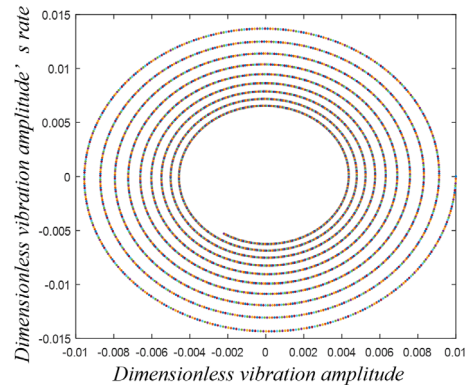


Fig. 18. Phase plane for free-spring rod

شکل ۱۸: نمودار فاز برای میله با شرایط تکیه‌گاهی آزاد-فنر

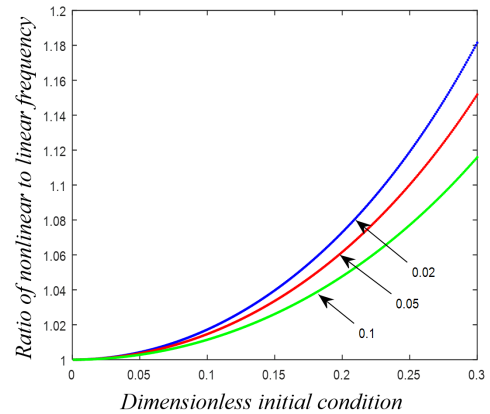


Fig. 19. Influence of damping on nonlinear to linear frequency ratio with increasing of initial amplitude (fixed-fixed rod)

شکل ۱۹: تأثیر ضریب میرایی بر نسبت بسامد غیرخطی به خطی با افزایش شرط اولیه (میله گیردار-آزاد)

تحلیل خطی و غیرخطی کمتر می‌شود. میله با سایر شرایط مرزی رفتار مشابهی دارد.

در شکل‌های ۲۰ و ۲۱ تغییرات پاسخ زمانی و نسبت بسامد غیرخطی به خطی در میله گیردار-وزنه با تغییر نسبت  $\frac{\rho AL}{M}$  نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش این نسبت، مقدار بسامد نوسانات و نسبت بسامد غیرخطی به خطی افزایش می‌یابد. پس برای میله با وزنه کوچکتر، بررسی ارتعاشات غیرخطی در دامنه‌های بزرگتر دارای اهمیت بیشتری است.

**جدول ۳: مقدار تابع  $J$  برای بررسی حساسیت پاسخ ارتعاشاتی میله به تغییر ضریب های غیرخطی**

**Table 3. Value of  $J$  function for sensitive analysis of rod vibration response to change nonlinear coefficient**

$\alpha_3 (-10\%)$	$\alpha_3 (+10\%)$	$\alpha_2 (-10\%)$	$\alpha_2 (+10\%)$	نوع تکیه‌گاه
۰/۰۰۰۳۳۷	۰/۰۰۰۳۳۷	۰/۱۲۷۱	۰/۱۱۱۱	گیردار- آزاد
۰/۰۰۰۱۴۰	۰/۰۰۰۱۴۰	۰	۰	گیردار-گیردار
۰/۰۰۰۳۴۷	۰/۰۰۰۳۴۷	۰/۱۲۱۴	۰/۱۰۸۰	گیردار- وزنه
۰/۰۰۰۱۵۱	۰/۰۰۰۱۵۱	۰/۲۳۶۱	۰/۲۴۳۷	آزاد- فنر

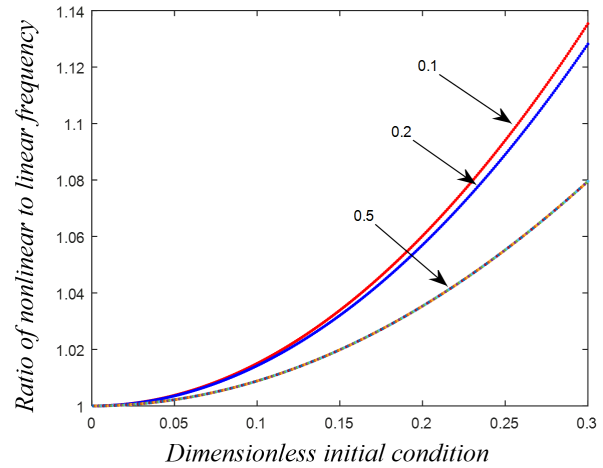
**۷- نتیجه‌گیری**

با توجه به اینکه انتظار می‌رود، استفاده از بیان لاگرانژی و در نظر گرفتن جابه‌جایی و کرنش بزرگ در نوشتن معادله‌های ارتعاشاتی میله، رابطه دقیق‌تری برای بررسی پاسخ ارتعاشات غیرخطی میله با شرایط تکیه‌گاهی متفاوت به دست دهد. در این مقاله، به تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی میله با شرایط تکیه‌گاهی متفاوت، تحت کرنش گرین-لاگرانژی پرداخته شده است تا تأثیر در نظر گرفتن این رابطه در پاسخ ارتعاشات غیرخطی میله با شرایط مرزی متفاوت بررسی شود و با توجه به این که همه مواد تا حدودی خاصیت ویسکوالاستیک دارند، میرایی ساختاری متناسب با کار مجازی ناشی از تغییرات نرخ زمانی کرنش، در نوشتن معادلات حاکم در نظر گرفته شده است. با استفاده از اصل هامیلتون معادله‌های ارتعاشاتی میله به صورت غیرخطی استخراج شده و سپس با استفاده از روش گالرکین معادله غیرخطی پاره‌ای به معادله غیرخطی معمولی تبدیل شده است. معادله حاصل برخلاف مقالاتی که برای معادله ارتعاشاتی غیرخطی فقط جمله غیرخطی درجه سه را در نظر می‌گیرند، دارای جمله غیرخطی درجه دو و سه است. این معادله به روش مقیاس‌های چندگانه حل شده و پاسخ ارتعاشاتی میله با شرایط مختلف تکیه‌گاهی در دو حالت بدون میرایی و با میرایی به دست آمده است. برای

**جدول ۴: مقدار تابع  $J$  برای بررسی حساسیت پاسخ ارتعاشاتی میله به تغییر ضریب‌های غیرخطی میرایی ( $10^{-5}$ )**

**Table 4. Value of  $J$  function for sensitive analysis of rod vibration response to change damping nonlinear coefficient ( $10^{-5}$ )**

$\mu_1 \alpha_3$	$\mu_1 \alpha_2$	$\mu_1 \alpha_1$	نوع تکیه‌گاه
۰/۰۰۰۴۲۳	۰/۰۰۰۰۰۳	۶/۲۵۲۲۲۲	گیردار- آزاد (+10%)
۰/۰۰۰۴۲۳	۰/۰۰۰۰۰۳	۶/۳۵۴۷۳۱	گیردار- آزاد (-10%)
۰/۰۰۰۹۱۲۴	۰/۰۰۰۰۰۶	۴۱/۹۲۸۵۲	گیردار- گیردار (+10%)
۰/۰۰۰۹۱۲۴	۰/۰۰۰۰۰۶	۴۴/۴۹۸۴۱	گیردار- گیردار (-10%)
۰/۰۰۰۲۸۱	۰/۰۰۰۰۰۱	۳/۱۲۷۷۶۱	گیردار- وزنه (+10%)
۰/۰۰۰۲۸۱	۰/۰۰۰۰۰۱	۳/۱۷۶۸۴۳	گیردار- وزنه (-10%)
۰/۰۰۰۲۸۱	۰/۰۰۰۰۰۱	۳/۱۲۷۷۶۱	آزاد- فنر (-10%)
۰/۰۰۰۲۸۱	۰/۰۰۰۰۰۱	۳/۱۷۶۸۴۳	آزاد- فنر (-10%)



**Fig. 23. Influence of  $AY/LK$  on nonlinear to linear frequency ratio with increasing of initial amplitude (free-spring rod)**

**شکل ۲۳: تأثیر نسبت  $AY/LK$  بر نسبت بسامد غیرخطی به خطی با افزایش شرط اولیه (میله آزاد-فنر)**

کیفیت مدل ارائه شده و اعتبار تحلیل مورد نظر شناخته می‌شود [۳۳]. برای ارزیابی حساسیت مدل تابع  $J$  به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۴] که در اینجا تأثیر تغییر ضریب‌های غیرخطی و تغییر ضریب‌های میرایی، بر پاسخ زمانی میله با شرایط تکیه‌گاهی متفاوت بررسی شده است.

$$J(\tilde{p}) = \left| \frac{\sum_{t=0}^N \theta(t, \tilde{p})^2 - \sum_{t=0}^N \theta(t, p)^2}{\sum_{t=0}^N \theta(t, p)^2} \right| \quad (54)$$

برای بررسی تأثیر تغییر ضریب‌های غیرخطی،  $\tilde{p}$  ضریب‌های غیرخطی در معادله (۲۴) و  $\theta(t, \tilde{p})$  پاسخ زمانی ارتعاشات میله به ازای مقدار تغییر یافته  $\tilde{p}$  و  $N$  زمان شبیه‌سازی را نشان می‌دهد. برای بررسی تأثیر تغییر ضریب‌های میرایی،  $\tilde{p}$  ضریب‌های میرایی در معادله (۲۳) است. در جدول‌های ۳ و ۴، مقدار تابع  $J$  برای زمان ۵ ثانیه به دست آمده است. به این منظور تمامی ضریب‌های معادله غیرخطی و ضریب‌های میرایی به مقدار  $\pm 10\%$  تغییر داده می‌شوند. نتایج به دست آمده از این روش در جدول‌های ۳ و ۴ ارائه شده است.

با توجه به جدول ۳ مشاهده می‌شود به جز تکیه‌گاه گیردار-گیردار که پارامتر  $\alpha_2$  صفر است، در سایر موارد تغییر ضریب  $\alpha_2$  تأثیر بیشتری در پاسخ ارتعاشاتی میله نسبت به تغییر ضریب  $\alpha_2$  دارد، در حالی که در مراجعی که معادله غیرخطی برای بررسی پاسخ ارتعاشاتی میله معرفی کرده‌اند، معمولاً یک غیرخطی درجه سه یعنی تنها ضریب  $\alpha_2$  در نظر گرفته می‌شود [۸، ۳۱]. با توجه به جدول ۴ مشاهده می‌شود که ضریب میرایی خطی  $\mu_1 \alpha_1$  تأثیر بیشتری بر پاسخ میله نسبت به ضریب‌های غیرخطی دارد و همانطور که در بخش قبلی بیان شد، بین دو ضریب میرایی غیرخطی، ضریب میرایی  $\mu_1 \alpha_2$  در پاسخ ارتعاشاتی میله تأثیر بسیار کمی دارد. علاوه بر این که میله با تکیه‌گاه گیردار-گیردار بیشتر تحت تأثیر تغییر ضریب‌های میرایی قرار می‌گیرد.

### مراجع

- [1] S. Abrate, Vibration of non-uniform rods and beams, *Journal of sound and vibration*, 185(4) (1995) 703-716.
- [2] C. Wang, Free vibration of a linked rod, *Journal of sound and vibration*, 274(1) (2004) 455-459.
- [3] W.-J. Hsueh, Free and forced vibrations of stepped rods and coupled systems, *Journal of sound and vibration*, 226(5) (1999) 891-904.
- [4] F. Cortés, M.J. Elejabarrieta, Longitudinal vibration of a damped rod. Part I: Complex natural frequencies and mode shapes, *International journal of mechanical sciences*, 48(9) (2006) 969-975.
- [5] V. Mermertaş, M. Gürgöze, Longitudinal vibrations of rods coupled by a double spring-mass system, *Journal of sound and vibration*, 202(5) (1997) 748-755.
- [6] D. Das, P. Sahoo, K. Saha, Dynamic analysis of non-uniform taper bars in post-elastic regime under body force loading, *Applied Mathematical Modelling*, 33(11) (2009) 4163-4183.
- [7] M. Poorjamshidan, an analytic solution of transversal vibrations and frequency response of quantic nonlinear beam, *modares mechanic engineering*, 13 (2014) 1-9 - In Persian
- [8] L. Cveticanin, Z. Uzelac, Nonlinear longitudinal vibrations of a rod, *Journal of Vibration and Control*, 5(6) (1999) 827-849.
- [9] L. Cveticanin, *Application of homotopy-perturbation to non-linear partial differential equations*, *Chaos, Solitons & Fractals*, 40(1) (2009) 221-228.
- [10] G. Bojadziew, R. Lardner, Monofrequent oscillations in mechanical systems governed by second order hyperbolic differential equations with small non-linearities, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 8(4) (1973) 289-302.
- [11] A. Munitsyn, Spatial vibrations of a nonlinearly elastic cantilever rod, *Russian Engineering Research*, 29(6) (2009) 555-558.
- [12] S.K. Parashar, U. Von Wagner, Nonlinear longitudinal vibrations of transversally polarized piezoceramics: experiments and modeling, *Nonlinear Dynamics*, 37(1) (2004) 51-73.
- [13] A.C. Luo, *On a nonlinear theory of thin rods*, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(12) (2010) 4181-4197.
- [14] S. Narendar, Wave dispersion in functionally graded magneto-electro-elastic nonlocal rod, *Aerospace Science and Technology*, 51 (2016) 42-51.
- [15] Y. Wei, H. Dai, An inverse eigenvalue problem for the finite element model of a vibrating rod, *Journal of*

بررسی دقت روش و صحت‌سنجی آن، نتایج به دست آمده از روش حاضر با نتایج روش عددی رانگ-کوتای درجه چهارم مقایسه گردید که نشان می‌دهد روش تقریبی حاضر، دارای دقت خوبی است. نتایج زیر از این تحلیل به دست آمده است.

- نمودارهای پاسخ زمانی میله با شرایط مرزی مختلف در حالت بدون میرایی و با میرایی نشان می‌دهد که میله با تکیه‌گاه گیردار-گیردار دارای بسامد نوسانی بیشتری نسبت به سایر شرایط مرزی است و همچنین زودتر میرا می‌شود.

- رسم نمودار نسبت بسامد، نشان می‌دهد که با افزایش مقدار دامنه اولیه، تفاوت بین بسامد خطی و غیرخطی افزایش می‌یابد و این اهمیت بررسی پدیده ارتعاشاتی میله به فرم غیرخطی را در دامنه بزرگ نشان می‌دهد. علاوه بر این که، در میله آزاد-فتر تحلیل غیرخطی در دامنه‌های بزرگ دارای اهمیت بیشتری است.

- بررسی تأثیر نسبت‌های  $\frac{AY}{LK}$  و  $\frac{PAL}{M}$  بر رفتار ارتعاشاتی و نمودار نسبت بسامد، نشان می‌دهد که برای میله گیردار-وزنه با وزنه کوچکتر و برای میله آزاد-فتر با فتر سخت‌تر بررسی ارتعاشات غیرخطی در دامنه‌های بزرگ‌تر دارای اهمیت بیشتری است.

- با در نظر گرفتن رابطه کامل کرنش گرین-لاگرانژی و استفاده از آن بدون ساده‌سازی در نوشتن معادله ارتعاشاتی میله، جمله  $\alpha_2$  (ضریب  $\theta^2$ ) در معادله ارتعاشاتی غیرخطی میله ظاهر شد و تحلیل حساسیت نشان داد که به جز تکیه‌گاه گیردار-گیردار که جمله  $\alpha_2$  صفر است، در سایر موارد تغییر ضریب  $\alpha_2$  تأثیر بیشتری در پاسخ ارتعاشاتی میله نسبت به تغییر ضریب  $\alpha_3$  دارد؛ بنابراین برای دست یافتن به پاسخ دقیق، برای بررسی ارتعاشات میله در شرایط تکیه‌گاهی متفاوت، در نظر گرفتن کرنش گرین-لاگرانژی در به دست آوردن معادله حاکم، لازم است.

- رسم نمودار نسبت بسامد، برای ضریب‌های مختلف میرایی، نشان می‌دهد که با انتخاب ماده با خاصیت ویسکوالاستیک بیشتر اختلاف بین تحلیل غیرخطی و خطی در دامنه‌های بیشتر کاهش می‌یابد.

- بررسی میرایی غیرخطی بر پاسخ ارتعاشاتی میله نشان می‌دهد که ضریب  $\mu_1 \alpha_2$ ، تأثیر بسیار کمی بر پاسخ ارتعاشاتی میله دارد و نمودار فاز برای شرایط مرزی متفاوت پدیده میرایی را تأیید می‌کند.

- نتایج نشان می‌دهد که ضریب میرایی خطی نسبت به ضریب‌های میرایی غیرخطی، تأثیر بیشتری بر پاسخ ارتعاشاتی میله دارد و تأثیر تغییر این ضریب‌ها با توجه به نوع تکیه‌گاه بر پاسخ میله متفاوت می‌باشد. میله با تکیه‌گاه گیردار-گیردار بیشتر تحت تأثیر تغییر ضریب‌های میرایی قرار می‌گیرد.

- undergoing finite strain, in: *Journal of Physics: Conference Series, IOP Publishing*, (2012) 1-8
- [26] A.M. Baghestani, and S.M. Mousavi, Low-Frequency Free Vibration of Rods with Finite Strain, *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, 1(3) (2014) 85-93.
- [27] F. Kaviani, H. R. Mirdamadi, Static Analysis of Bending, Stability, and Dynamic Analysis of Functionally Graded Plates by a Four-Variable Theory, *Amirkabir mechanic engineering*, 45(2) (2014)- In Persian.
- [28] S.S. Rao, *Vibration of continuous systems*, John Wiley & Sons, 2007.
- [29] S. Guo, S. Yang, Longitudinal vibrations of arbitrary non-uniform rods, *Acta Mechanica Solida Sinica*, 28(2) (2015) 187-199.
- [30] L. Li, Y. Hu, X. Li, Longitudinal vibration of size-dependent rods via nonlocal strain gradient theory, *International Journal of Mechanical Sciences*, 115 (2016) 135-144.
- [31] H. Askari, E. Esmailzadeh, D. Younesian, Nonlinear longitudinal vibration solutions of an elastic rod, in: ASME 2013 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, *American Society of Mechanical Engineers*, (2013)
- [32] A.H. Nayfeh, D.T. Mook, *Nonlinear oscillations*, John Wiley & Sons, 2008.
- [33] A. Saltelli, K. Chan, E. Scott, *Sensitivity analysis Wiley series in probability and statistics*, Willey, New York, (2000)
- [34] X. Feng, Z.-j. ZOU, J.-c. YIN, C. Jian, Parametric identification and sensitivity analysis for Autonomous Underwater Vehicles in diving plane, *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*, 24(5) (2012) 744-751.
- Computational and Applied Mathematics*, (2016).
- [16] V. Karman, encyklopadie der math, *wissenschaften*, 4 (1910) 349.
- [17] S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, S. Woinowsky-Krieger, *Theory of plates and shells*, McGraw-hill New York, 1959.
- [18] P.G. Ciarlet, A justification of the von Kármán equations, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 73(4) (1980) 349-389.
- [19] J. G. Guo, L. J. Zhou, S. Y. Zhang, Geometrical nonlinear waves in finite deformation elastic rods, *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 26(5) (2005) 667-674.
- [20] Z. f. Liu, S. y. Zhang, Solitary waves in finite deformation elastic circular rod, *Applied Mathematics and Mechanics*, 27(10) (2006) 1431-1437.
- [21] L.Z.Z. Shanyuan, Nonlinear waves and periodic solution in finite deformation elastic rod, *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1 (2006) 000.
- [22] S. y. Zhang, Z. f. Liu, Three kinds of nonlinear dispersive waves in elastic rods with finite deformation, *Applied Mathematics and Mechanics*, 29(7) (2008) 909-917.
- [23] P. Guo, G. Wan, X. Wang, X. Sun, New soliton and periodic solutions for nonlinear wave equation in finite deformation elastic rod, *International Journal of Nonlinear Science*, 15(2) (2013) 182-192.
- [24] J. Shi, X.L. Yan, Q.T. Deng, Solutions for the finite deformation elastic rod nonlinear wave equation, in: *Applied Mechanics and Materials, Trans Tech Publ*, (2014) 358-361.
- [25] S. Mousavi, S. Fariborz, Free vibration of a rod

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

B. Soleimani Roody, A. Fotuhi, M. Jalili, Nonlinear Longitudinal Free Vibration of a Rod Undergoing Finite Strain, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 50(5) (2018) 1085-1096.

DOI: 10.22060/mej.2017.11937.5223

