



شناسایی آسیب در سازه‌ها با استفاده از حساسیت تابع پاسخ فرکانسی و مولفه‌های اصلی آن

محمد رهایی^۱، علی بخشی^{۱*}، اکبر اسفندیاری^۲

^۱ دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

^۲ دانشکده مهندسی دریا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

چکیده: در این پژوهش، محل و شدت آسیب با استفاده از حل معادلات حساسیت مولفه‌های اصلی^۱ تابع پاسخ فرکانسی^۲

(FRF) و همچنین معادلات حساسیت تابع پاسخ فرکانسی تولید شده از روی داده‌های دینامیکی، بدست آمده‌اند. استفاده از معادله‌ی حساسیت شبه خطی توابع پاسخ فرکانسی و مولفه‌های اصلی آن، از مهم‌ترین قابلیت‌های این روش در عیب‌یابی می‌باشد. معادلات حساسیت بدست آمده به صورت خطی بوده و نیازی به استفاده از مشتقات معکوس مولفه‌های اصلی تابع پاسخ فرکانسی در تشکیل آنها نبوده است. با استفاده از این معادلات حساسیت و کمینه‌سازی با روش حداقل مربعات^۳، مدل اجزای محدود سازه مورد نظر به‌هنگام شده و بدین ترتیب محل و شدت خرابی به صورت همزمان بدست آمده‌اند. همچنین میزان حساسیت روش مذکور به خطای اندازه‌گیری نیز محاسبه شده است. نتایج مدل عددی حاکی از دقت بالای روش برای حل مسأله‌ی معکوس^۴ بوده که ضمن کم نمودن حساسیت آن به خطای اندازه‌گیری، خرابی در خرپا را به خوبی شبیه‌سازی می‌کند.

کلمات کلیدی:

مولفه‌های اصلی
تابع پاسخ فرکانسی
به‌هنگام سازی^۵
معادله حساسیت
حداقل مربعات

پیچیدگی‌های غیر ضرور خودداری می‌کند. فلذا کارایی بیشتری در پایش سلامت^۸ بسیاری از سازه‌های بزرگ و با جرم بالا دارد.

در پایش سلامت سازه، می‌توان از ۲ روش برای تحلیل مولفه‌های اصلی^۹ (PCA) استفاده کرد. در اولین روش، تحلیل مولفه‌های اصلی، نقش اصلی خودش را در شناسایی و مکان‌یابی خرابی ایفا می‌کند. در حالی که کاربرد آن در دومین روش، صرفاً به عنوان مرحله اولیه برای استفاده در سایر الگوریتم‌های شناسایی خرابی می‌باشد. حیطه الگوریتم به روز رسانی این پژوهش نیز معطوف به روش اول بوده است. جهت انجام عیب‌یابی، ماتریس حساسیت^{۱۰} مربوط به رابطه تغییرات پارامتر سختی با تغییرات بوجود آمده در تابع پاسخ فرکانسی و مقادیر اصلی حاصل از تجزیه مقادیر تکین^{۱۱} (SVD) آن، تشکیل شده و با مقایسه بین مقادیر بدست آمده از حل معادله حساسیت و مقادیر شبیه سازی شده اندازه‌گیری، مدل عددی اولیه به منظور نزدیک شدن به مدل عددی تغییر یافته بخاطر خرابی، به‌هنگام می‌شود. معادلات حساسیت با روش حداقل مربعات و با اعمال وزن دهی مناسب حل می‌گردند.

فرضیات بنیادین موجود در این پژوهش عبارتند از:

۱. رفتار سازه تحت بارهای وارده در دامنه‌ی ارتعاشی مورد مطالعه،

۱- مقدمه

در حوزه‌ی تشخیص خرابی در سازه‌ها، استفاده از الگوریتم‌هایی که بتواند روی حجم زیاد داده‌های حاصل از مدل تحت تحریک‌های گوناگون، الگوهای کاهشی اعمال کرده و ضمن تضمین از دست رفتن اطلاعات اصلی موجود در پاسخ فرکانسی سیستم که در تشخیص خرابی اهمیت دارند، داده‌های مورد نیاز برای اعمال تحلیل‌های بعدی را به میزانی منطقی فشرده‌سازی کنند، بسیار حائز اهمیت است. روش ارائه شده در این پژوهش، مبتنی بر استفاده از داده‌های حوزه فرکانس بوده که عملاً دارای نمود بیرونی روشن‌تری نسبت به داده‌های حاصل از روش‌های حوزه زمان است. همچنین صرفاً از تغییرات بوجود آمده در سختی المان‌ها جهت عیب‌یابی^۶ استفاده شده است. این تغییرات شامل تغییرات در مدول الاستیسیته^۷ و یا سطح مقطع آن‌ها بوده و نسبت به روش‌های دیگر که علاوه بر ماتریس سختی، از تغییرات ماتریس‌های جرم و میرایی نیز برای عیب‌یابی استفاده می‌کنند، از

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: bakhshi@sharif.edu

- 1 Principal Components
- 2 Frequency Response Function
- 3 Least Square
- 4 Inverse Problem
- 5 Updating
- 6 Damage Detection
- 7 Elastic Modulus

- 8 Health Monitoring
- 9 Principal Component Analysis
- 10 Sensitivity Matrix
- 11 Singular Value Decomposition

استفاده کنند. سپس روش‌های دسته بندی فازی را به منظور دسته بندی کردن آسیب در یک سازه قابی شکل معیار، به کار بردند [۸].
ترندافیلاو^۷ و همکاران، نشان دادند که PCA اصلاح شده، ابعاد FRF را کاهش می‌دهد و سپس یک روش ساده شناسایی الگو، می‌تواند برای شناسایی آسیب در یک مدل بال هواپیمای مقیاس شده به کار رود [۹].
تیبادیزا^۸ و همکاران، دو شاخص به منظور آشکارسازی و مکان‌یابی آسیب بر اساس مدل بدست آمده از تصویر کردن اطلاعات با استفاده از PCA، معرفی کردند [۱۰].

ژیویان^۹ و همکاران، به منظور تشخیص آسیب از روش ترکیبی PCA با نمودار کنترلی بیضوی استفاده نمودند. انحنای FRF بهبود یافته، متغیرهای اصلی این روش است. این روش از آنالیز عددی استفاده نمی‌کند و تنها با FRF سر و کار دارد [۱۱]. گالینوال^{۱۰} و همکاران [۱۲]، یک شاخص آسیب، به عنوان مقایسه بین زیر فضای محدود شده توسط PCA، مرتبط با سازه سالم و آسیب دیده را تعریف کردند. یان^{۱۱} و همکاران، به منظور حذف اثرات محیطی از خصوصیات لرزه‌ای، روشی را ارائه کردند که شامل دو مرحله است: یکی جمع آوری فضای داده‌ها به چندین ناحیه و سپس به کار بردن PCA، در هر ناحیه محلی [۱۳].

ها و گالینوال^{۱۲}، حساسیت PCA ماتریس FRF یک مدل تیر را بررسی کردند. آنان پیشنهاد کردند که آسیب می‌تواند با استفاده از تغییرات مولفه‌های اصلی بین سازه سالم و آسیب دیده شناسایی شود. شناسایی محل و تعیین شدت آسیب با استفاده از این روش، طی دو مرحله انجام می‌گیرد. یعنی ابتدا محل آسیب شناسایی می‌شود و سپس با استفاده از نتایج آن و روش بروز رسانی مدل اجزای محدود، میزان شدت آسیب نیز ارزیابی می‌گردد. آنان به منظور تعیین ماتریس حساسیت، از مشتق مولفه‌های اصلی حاصل از تجزیه مقادیر تکین ماتریس استفاده کردند [۱۴].

۳- استحصال معادله حساسیت تابع پاسخ فرکانسی با استفاده از تجزیه شبه طیفی ماتریس سختی

روش‌های مبتنی بر اندازه‌گیری پاسخ فرکانسی به علت تعداد معادلات زیادی که در مقایسه با روش‌های مبتنی بر شکل مود یا داده‌های استاتیکی در اختیار می‌نهند، دارای پایداری بیشتری در برابر خطای اندازه‌گیری هستند. از آنجا که معادلات حساسیت مرتبه‌ی اول استخراج شده در روش‌های مبتنی بر مشتق تابع پاسخ فرکانسی، قادر به بیان تغییرات ایجاد شده در پاسخ نبوده، تابع حساسیت با فرض اندازه‌گیری کامل در کلیه درجات آزادی و در مواردی با فرض اندازه‌گیری درجات آزادی انتقالی و سپس استفاده از روش‌های تراکمی بدست می‌آیند. رسیدن به این فرضیات در عمل

خطی فرض می‌شود.

۲. تحریک سازه توسط نیروی مشخص نظیر چکش مودال انجام می‌شود و از اثرات ارتعاشات محیطی صرف نظر می‌شود.
۳. خرابی تحت بارگذاری استاتیکی ایجاد شده و به عواملی چون خزش و خوردگی فولاد پرداخته نمی‌شود.
۴. در این پژوهش، از اثر شرایط محیطی نظیر دما و رطوبت بر روی پاسخ سازه، صرف نظر می‌شود.

۲- مروری بر ادبیات فنی

اسفندیاری و همکاران، با استفاده از معادلات حساسیت شبه خطی تابع پاسخ فرکانسی، اقدام به بهنگام سازی و یافتن خرابی در خرپا و قاب، به صورت عددی و آزمایشگاهی کردند [۱].
اسفندیاری، یک الگوریتم به‌هنگام‌سازی با استفاده از نمایش داده‌های کرنش در محدوده‌ی فرکانس ارائه داد. معادلات حساسیت برای پارامترهای جرم و سختی، با استفاده از توابع تبدیل جدا شده‌ی براساس کرنش، بدست آمده‌اند [۲].

سیپل^۱ و صنایعی، یک روش برای به‌هنگام‌سازی مدل المان محدود برپایه‌ی استفاده از تابع پاسخ فرکانسی، جهت تخمین پارامترهای سازه‌ی معیار مربوط به دانشگاه فلوریدای مرکزی ارائه کردند [۳]. طبق تعریف اسمیت^۲، PCA یک روش برای یافتن الگوها در بین مجموعه‌ای از داده‌ها و برجسته کردن تفاوت‌ها و شباهت‌های موجود بین آن‌ها می‌باشد [۴] استفاده از PCA در پایش سلامت سازه، به صورت‌های مختلف به کار رفته است. لی^۳ و همکاران، یک روش شناسایی آسیب را با استفاده از تغییرات الگوهای آسیب در تابع پاسخ فرکانسی و شبکه‌های عصبی مصنوعی (ANNs) ارائه دادند. به منظور بدست آوردن خصوصیات آسیب و پارامترهای ورودی مناسب برای ANNs، از روش‌های PCA استفاده کردند. تفاوت FRF سازه سالم و آسیب دیده، به مولفه‌های اصلی کمتر فشرده شده و به عنوان ورودی ANNs در نظر گرفته شدند تا محل و شدت آسیب، تخمین زده شود [۵] دی بو و گالینوال^۴، با به کار بردن PCA روی پاسخ‌های زمانی سنسورها و مقایسه آن با سازه اولیه، امکان تشخیص آسیب را فراهم کردند [۶]. جیانگ^۵ و همکاران عملکردهای PCA و الگوریتم Isomap را در طبقه بندی محل‌های آسیب بر اساس تغییرات فرکانس‌های مودال مقایسه کردند و پی به بهتر بودن PCA در شناسایی سازه‌های غیر خطی که شامل مجموعه داده پیچیده است، بردند [۷].

سیلوا^۶ و همکاران، از PCA به منظور متراکم کردن داده‌ها در محدوده زمانی استفاده کردند تا از آن در ایجاد مدل خودرگرسیون میانگین متحرک

7 Trendafilova
8 Tibaduiza
9 Xiaoyan
10 Golinval
11 Yan
12 Golinval و Hà

1 Sipple
2 Smith
3 Li
4 Di Boe
5 Jeong
6 Silva

اولیه یا سازه سالم، ماتریس های سختی، جرم و میرایی به میزان δM ، δK و δC تغییر خواهند کرد. بنابراین، معادله (۸) به صورت رابطه زیر باز نویسی می شود:

$$(-\omega^2(M + \delta M) + j\omega(C + \delta C) + (K + \delta K))(X(\omega) + \delta X(\omega)) = F(\omega) \quad (9)$$

با بسط رابطه (۹) و جایگزین نمودن رابطه (۸) در آن، رابطه زیر به دست می آید:

$$\delta X(\omega) = -H_d(\omega)(\delta K + j\omega\delta C - \omega^2\delta M)X(\omega) \quad (10)$$

که $\delta K(w)$ تغییر پاسخ دینامیکی ناشی از ایجاد آسیب، در هر فرکانس و $H_d(w)$ ، FRF سازه آسیب دیده است، که به صورت رابطه زیر تعریف می شود:

$$H_d(\omega) = (-\omega^2(M + \delta M) + j\omega(C + \delta K) + (K + \delta K))^{-1} \quad (11)$$

لازم به ذکر است که، هریک از ستون های $H(w)$ ، پاسخ سازه به یک بار واحد را نشان می دهد. در حالیکه $X(w)$ می تواند پاسخ سازه تحت اثر چند بار همزمان باشد. در صورتی که بار اعمالی به سازه، تنها در یک نقطه وارد شود، $X(w)$ از نظر عددی برابر با ستون متناظر $H(w)$ ، در درجه آزادی است که بار اعمال شده است.

ماتریس سختی یک سازه، را می توان با استفاده از روش تجزیه شبه طیفی^۱ به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$K_e = A_{Se} P_{Se} A_{Se}^T \quad (12)$$

که در آن ماتریس A_{Se} ، ماتریس حاوی بردارهای ویژه^۲ بوده و به ماتریس اتصال سختی^۳ موسوم است. این ماتریس تابعی از مشخصات هندسی و رفتار المان بوده و به مشخصات مکانیکی (سختی خمشی و محوری) وابسته نمی باشد. همچنین ماتریس قطری P_{Se} نیز حاوی مقادیر ویژه^۴ بوده و تاثیر پارامترهای سختی خمشی و محوری در آن مشاهده می شود.

نظر به اینکه ماتریس A ، تنها تابع مشخصات هندسی و مستقل از خرابی می باشد. با تغییر ماتریس سختی به علت خرابی، رابطه زیر برقرار خواهد بود:

$$\delta K = A_S \delta P_S A_S^T \quad (13)$$

با جای گذاری (۱۳) در رابطه (۱۰)، رابطه زیر نتیجه می شود:

$$\delta X = S \delta P \quad (14)$$

مشکل بوده و باعث محدود شدن کاربرد روش های برپایه ی اندازه گیری پاسخ فرکانسی می شود. از سوی دیگر، استخراج معادلات حساسیت خطی و یا معادلات با دقت بالا، می تواند در بهبود پایداری روش، موثر باشد. علت غیرخطی شدن معادلات، در اکثر روش های بهنگام سازی، مشتق گیری از معکوس ماتریس ها می باشد. از این رو، هدف از این بخش، استخراج معادلات حساسیت شبه خطی برای تابع پاسخ فرکانسی، بدون نیاز به مشتق گیری از معکوس ماتریس ها می باشد.

معادله ارتعاش یک سیستم با n درجه آزادی، به صورت زیر می باشد:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t) \quad (1)$$

در این رابطه M ، C و K ، به ترتیب ماتریس های سختی، جرم و میرایی می باشد. $f(t)$ بردار نیرو و $x(t)$ بردار جابجایی است. با فرض اعمال یک بار هارمونیک، نیرو وارده و جابجایی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$f(t) = F(\omega)e^{j\omega t} \quad (2)$$

$$x(t) = X(\omega)e^{j\omega t} \quad (3)$$

که در آن ω ، فرکانس اعمالی و $j = \sqrt{-1}$ می باشد. با جای گذاری رابطه ۲ و ۳ در رابطه ۱، رابطه ۴ بدست می آید:

$$(-\omega^2 M + j\omega C + K)X(\omega)e^{j\omega t} = F(\omega)e^{j\omega t} \quad (4)$$

در اینجا تابع پاسخ فرکانسی به صورت رابطه ۵ تعریف می شود:

$$H(\omega) = (-\omega^2 M + j\omega C + K)^{-1} \quad (5)$$

همچنین این تابع را می توان با استفاده از تجزیه طیفی به صورت معادله ۶ بدست آورد:

$$H(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{\phi_i \phi_i^T}{\Omega_i^2 - \omega^2 + 2j\zeta_i \Omega_i \omega} \quad (6)$$

که در آن، i درجه آزادی اندازه گیری شده و l درجه آزادی تحریک است. تعداد شکل مدهای لازم برای محاسبه ی $H(\omega)$ ، بستگی به فرکانس تحریک دارد. بدین ترتیب، در حالت سازه ی آسیب دیده، تابع پاسخ فرکانسی از رابطه ی زیر بدست می آید:

$$H_d(\omega) \cong \sum_{i=1}^{nm} \frac{\phi_i \phi_i^T}{\Omega_{di}^2 - \omega^2 + 2j\zeta_{di} \Omega_{di} \omega} + \sum_{i=nm+1}^n \frac{\phi_i \phi_i^T}{\Omega_i^2 - \omega^2 + 2j\zeta_i \Omega_i \omega} \quad (7)$$

که در آن، nm تعداد درجات آزادی اندازه گیری شده می باشد. بنابراین، پاسخ سازه در دامنه فرکانس به صورت رابطه (۸) محاسبه می شود:

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega) \quad (8)$$

در حالت آسیب دیده، به علت تغییر پارامترهای سازه ای نسبت به مدل

1 Pseudo-Spectral Decomposition
2 Eigenvectors
3 Stiffness Connectivity Matrix
4 Eigenvalues

غیر وابسته و متعامد هستند، فراهم می‌شود. به این صورت، چند متغیر اول، بیشترین تغییرات موجود در متغیرهای اصلی را شامل می‌شوند.

به طور کلی اهداف PCA را می‌توان به شرح زیر بیان کرد:

۱. بدست آوردن مهم ترین اطلاعات از ماتریس داده‌ها
۲. فشرده کردن سایز مجموعه داده‌ها با نگاه داشتن تنها اطلاعات مهم
۳. ساده کردن توصیف مجموعه داده‌ها
۴. تحلیل کردن مشاهدات و متغیرها

به منظور رسیدن به این اهداف، PCA متغیرهای جدیدی را محاسبه می‌کند که مولفه‌های اصلی نامیده شده و یک ترکیب خطی از متغیرهای اولیه می‌باشد. اولین مولفه‌های اصلی، بیشترین واریانس ممکن را دارد. دومین مولفه بر اساس این قید که متعامد بر اولین مولفه است و بزرگترین واریانس ممکن بعدی را دارد، محاسبه می‌شود. بقیه مولفه‌ها نیز به همین ترتیب بدست می‌آیند. مقادیر این متغیرهای جدید، Factor Scores نامیده می‌شوند که می‌توانند به صورت هندسی به عنوان تصویرهای مشاهدات روی مولفه‌های اصلی تصویر و سپس تفسیر شوند.

در این پژوهش، تابع پاسخ فرکانسی به ازای تحریک در محل S به صورت رابطه ۱۶ در نظر گرفته می‌شود که یک زیر مجموعه از FRF بدست آمده مطابق رابطه ۵ است:

$$H^S = \begin{pmatrix} h_1(\omega_1) & \dots & h_1(\omega_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_m(\omega_1) & \dots & h_m(\omega_n) \end{pmatrix}_{m \times n} \quad (16)$$

m تعداد درجات آزادی اندازه گیری شده (تعداد سنسورها) و n تعداد فرکانس‌های تحریک می‌باشد.

برای محاسبه PCA برای تابع پاسخ فرکانسی از تجزیه مقادیر تکین این تابع، استفاده شده است. این روش زمانی کاربرد دارد که FRF برای هر متغیر حول میانگین آن نوشته شود. در واقع هر درایه ماتریس FRF اصلاح شده به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\bar{H}_{ij}^S = H_{ij}^S - \mu_j \quad (17)$$

که μ_j میانگین ستون jام ماتریس H^S می‌باشد. بدین ترتیب تجزیه SVD ماتریس FRF اصلاح شده مربوط به مدل اجزای محدود سازه به صورت رابطه ۱۸ بیان می‌شود:

$$S = -H_d(\omega) \text{Adiag}(A^T X(\omega)) \quad (15)$$

تابع diag، بردار $A^T X(\omega)$ را به صورت ماتریس قطری از آرایه های این بردار بیان می‌کند. δP نیز، برداری است که از آرایه های ماتریس قطری (δP) با همین نام تشکیل شده است. خاطر نشان می‌شود، حاصل ضرب یک ماتریس قطری (δP) در یک بردار ($A^T X(\omega)$) را می‌توان با حاصلضرب یک ماتریس قطری ($\text{diag}(A^T X(\omega))$) که از آرایه های بردار $A^T X(\omega)$ تشکیل شده و یک بردار δP ، متشکل از آرایه های روی قطر ماتریس δP جایگزین نمود. معادلات (۱۴) و (۱۵)، در واقع همان معادلات لازم برای بهنگام سازی مشخصات سازه با استفاده از حساسیت تابع پاسخ فرکانسی هستند که با استفاده از مقادیر تابع پاسخ فرکانسی تقریبی سازه خراب و تابع پاسخ فرکانسی سازه سالم (مدل المان محدود) بدست می‌آیند. موفقیت در تعیین میزان پارامترهای سختی (و یا جرم) یک سیستم به عواملی چون نقاط تحریک، نقاط اندازه‌گیری، فرکانس تحریک، دقت اندازه‌گیری، دقت مدل ریاضی (خطای مدلسازی) و روش حل دستگاه معادلات حساسیت بستگی دارد. تمرکز بر روی روش انتخاب نقاط اندازه‌گیری، نقاط تحریک و خطای مدلسازی، خارج از اهداف این پژوهش بوده است.

۴- یافتن مولفه های اصلی ماتریس‌ها با استفاده از تجزیه مقادیر تکین

PCA، یک روش قوی آنالیز داده‌های آماری برای رسیدن به کاهش ابعاد در داده‌هاست. در دینامیک سازه، PCA به طور گسترده به منظور اندازه‌گیری سیگنال‌های لرزه‌ای برای مطالعات ابعادی، مدل کردن با ابعاد کمتر، آنالیز مودال، شناسایی پارامترهای سیستم های غیر خطی و حذف تاثیرات محیطی بکار می‌رود.

PCA را می‌توان به دو روش زیر محاسبه نمود:

۱. تجزیه مقدار ویژه ماتریس کوواریانس^۱ داده‌ها
۲. تجزیه مقدارهای تکین که زمانی کاربرد دارد که ماتریس داده‌ها برای هر متغیر حول میانگین آن نوشته شده باشد.

PCA، در واقع یک روش برای شناسایی الگوها در یک مجموعه داده است و داده‌ها را طوری بیان می‌کند که شباهت‌ها و تفاوت‌هایشان برجسته شوند. از آنجایی که پیدا کردن الگوها در یک مجموعه داده با ابعاد بالا سخت است، PCA یک روش قدرتمند برای تحلیل داده‌ها محسوب می‌شود. فایده مهم دیگر PCA آن است که وقتی این الگوها در مجموعه داده‌ها یافت شد، می‌توان داده‌ها را فشرده کرد. به عبارت دیگر، PCA ابعاد یک مجموعه داده را که شامل تعداد زیادی متغیرهای وابسته است، کاهش می‌دهد. به طوری که تا حد امکان تغییرات موجود در مجموعه اطلاعات را حفظ کند. امکان این کار با انتقال دادن به مجموعه جدیدی از متغیرها (مولفه‌های اصلی) که

طبیعی، مهم می‌باشد و دامنه پاسخ فرکانسی را تحت تاثیر قرار می‌دهد. اثر میرایی با دور شدن از فرکانس‌های طبیعی، به شدت کاهش می‌یابد. در این جا نیز فرکانس تحریک انتخاب شده جهت به‌هنگام‌سازی، دور از فرکانس‌های طبیعی در نظر گرفته شده، بدین ترتیب از مدل سازی میرایی و به‌هنگام‌سازی آن صرف نظر شده است. همچنین با دور شدن از فرکانس‌های طبیعی، پاسخ، حساسیت کمتری به میرایی و در نتیجه، خطای اندازه‌گیری ضریب میرایی (در صورت نیاز به مدل سازی آن) دارد. همچنین با در نظر گرفتن فرکانس‌ها در نزدیکی فرکانس‌های طبیعی، مخرج رابطه مربوط به تابع تبدیل سازه رابطه ۶ کنترل کننده می‌شود و در نتیجه، تقریب در نظر گرفتن شکل مود سازه سالم به جای سازه آسیب دیده در بعضی محاسبات قابل چشم پوشی می‌شود. در این پژوهش، فرض شده است که در اثر آسیب دیدگی سازه، تنها ماتریس سختی تغییر ایجاد شده و در ماتریس جرم تغییری ایجاد نمی‌شود. این فرض برای سازه‌های عمرانی که معمولاً دارای یک روسازه سنگین هستند، صحیح است. در نتیجه، برای بدست آوردن معادله حساسیت برای ماتریس H^S داریم:

$$\begin{aligned} \delta H_{ij}^S &= -H_{di}(\omega_j) \text{Adiag}(A^T H_s(\omega_j)) \delta P \\ &= S_i^S(\omega_j) \delta P \end{aligned} \quad (22)$$

بردار $A^T H_s$ را به صورت ماتریس قطری از آرایه‌های این بردار بیان می‌کند. δP نیز، برداری است که از آرایه‌های ماتریسی قطری با همین نام تشکیل شده است. خاطر نشان می‌شود، حاصل ضرب یک ماتریس قطری (δP در فرم ماتریسی) در یک بردار ($A^T H_s$) را می‌توان با حاصلضرب یک ماتریس قطری که از آرایه‌های آن بردار تشکیل شده ($\text{diag}(A^T H_s(\omega))$) و یک بردار δP ، متشکل از آرایه روی قطر ماتریس قطری δP جایگزین نمود.

بدین ترتیب، با استفاده از تجزیه مقادیر تکین ماتریس H^S رابطه ۱۸، و خاصیت تعامد در ماتریس‌های U و V رابطه ۱۹، حساسیت مولفه اصلی i ام ($\sum_{j=1}^n$) نسبت به بردار تغییرات در سختی P ، با استفاده از رابطه ۲۳ بدست می‌آید:

$$\frac{\partial \sum_i}{\partial P} = U_i^T \frac{\partial \bar{H}^S}{\partial P} V_i \quad (23)$$

که عبارت $\frac{\partial \bar{H}^S}{\partial P}$ ماتریسی است که تک تک درایه‌های آن از رابطه ۲۲ بعد از کم کردن میانگین درایه‌های هر ستون ماتریس (μ_j) بدست می‌آید.

۶- کلیات مدل عددی

روش‌های پیشنهاد شده در عیب یابی بر روی خرابی فولادی شکل ۱ امتحان شده‌اند. رفتار سازه برای المان‌های خرابی، صرفاً محوری در نظر گرفته می‌شود. بنابراین در تحلیل المان محدود این سازه، از المان‌های دو محوری استفاده

$$\bar{H}^S = U \Sigma V^T \quad (18)$$

که در آن ستون‌های ماتریس‌های $U(m \times m)$ و $V(n \times n)$ به ترتیب، بردارهای تکین سمت چپ و راست \bar{H}^S می‌باشند و ماتریس $\Sigma(m \times n)$ شامل مقادیر تکین آن است که از بزرگترین به کوچکترین مقدار مرتب شده‌اند. ماتریس‌های U و V متعامد هستند، بنابراین:

$$\begin{aligned} U^T &= U^{-1} \\ V^T &= V^{-1} \end{aligned} \quad (19)$$

در حقیقت ستون‌های ماتریس V مولفه‌های اصلی (بردارهای اصلی) ماتریس FRF اصلاح شده و درایه‌های روی قطر ماتریس، مقادیر \sum متعلق به این مولفه‌ها هستند که طبق آنچه در بالا گفته شد، Factor Scores نامیده می‌شوند. بنابراین می‌توان با الگوبرداری از نحوه تعیین حساسیت پاسخ فرکانسی سیستم به خرابی که در بخش قبل بیان شد، محل و شدت آسیب، با استفاده از معادله حساسیت بدست آمده از مولفه‌های اصلی ماتریس FRF اصلاح شده نیز تعیین گردد.

۵- استحصال معادلات حساسیت مقادیر و بردارهای تکین تابع پاسخ فرکانسی

هریک از ستون‌های $H(\omega)$ پاسخ سازه به یک بار واحد را نشان می‌دهد. در حالی که، $X(\omega)$ می‌تواند پاسخ سازه تحت اثر چند بار همزمان باشد. با در نظر گرفتن روابط حاکم بر پاسخ و تحریک در حوزه فرکانس رابطه ۴، و اعمال تغییرات در دو طرف رابطه داریم:

$$\delta X(\omega) = -H_d(\omega)(\delta K + j\omega \delta C - \omega^2 \delta M) X(\omega) \quad (20)$$

در صورتی که بار اعمالی به سازه، تنها در یک نقطه وارد شود، $X(\omega)$ از نظر عددی برابر با ستون متناظر $H(\omega)$ ، در درجه آزادی است که بار اعمال شده است. با استفاده از رابطه ۱۳ و ساده کردن رابطه ۲۰ داریم:

$$\delta H_{is}(\omega) = -H_{di}(\omega) \text{Adiag}(A^T H_s(\omega)) \delta P \quad (21)$$

استفاده از رابطه ۲۱، به علت وجود $H_d(\omega)$ در آن، در عمل غیرممکن است. زیرا اندازه‌گیری $H_d(\omega)$ نیازمند تعداد زیادی حسگر^۱ و تحریک سازه در کلیه درجات آزادی است، که تاکنون میسر نشده است. بنابراین گرچه معادله ۲۱ یک تابع حساسیت دقیق و خطی را در اختیار می‌گذارد ولی به علت این محدودیت‌ها، به سادگی قابل استفاده نمی‌باشد. از جمله مزیت‌های یک تابع حساسیت خطی می‌توان، به امکان استفاده از روش‌های قوی تر بهینه‌سازی و اجتناب از قرار گرفتن در مینیمم‌های محلی اشاره نمود.

میرایی در این پژوهش در نظر گرفته نشده و در مدل‌سازی لحاظ نشده است. این فرض، برای بررسی نتایج حاصل از به‌هنگام‌سازی سازه‌های با میرایی کم، اثر قابل توجهی ندارد. میرایی در محدوده اطراف فرکانس

اگرچه با افزایش فرکانس تحریک از دقت معادله کاسته می‌شود، ولی در معادله، اطراف فرکانس‌های طبیعی اندازه‌گیری شده از دقت بهتری نسبت به فرکانس‌های طبیعی دور از آن‌ها برخوردار است.

از جمله عوامل موثر در دقت یک روش، شاخص انتخاب شده برای تشخیص خرابی می‌باشد. این شاخص می‌تواند فرکانس طبیعی، شکل مود، جابه‌جایی استاتیکی، پاسخ فرکانسی و دیگر موارد باشد. شاخص در نظر گرفته شده برای شناسایی می‌بایست تغییرات قابل مشاهده‌ای با وقوع خرابی داشته و میزان تغییرات پاسخ بعثت خرابی، نیز می‌بایست بیش از تغییرات به علت اثرات محیطی نظیر درجه‌ی حرارت، نامعینی‌ها و خطای اندازه‌گیری باشد.

۷- نتایج عیب‌یابی با استفاده از حساسیت تابع پاسخ فرکانسی و مولفه‌های اصلی آن

در روش ارائه شده بر اساس حساسیت پاسخ فرکانسی، مقدار ثابت دستگاه معادلات حساسیت، (سمت راست معادلات) از تفاوت دو مقدار $H_{ild}(\omega)$ و $\tilde{H}_{ild}(\omega)$ بدست می‌آید که در آن، $H_{ild}(\omega)$ پاسخ سازه‌ی آسیب‌دیده بوده و $\tilde{H}_{ild}(\omega)$ طبق رابطه‌ی ۱۰ بدست می‌آید.

جهت کم‌اثر نمودن اثر خطای اندازه‌گیری لازم است که فرکانس‌های

تحریک جهت به‌هنگام‌سازی در محدوده‌ای انتخاب شوند که تفاوت

$H_{ild}(\omega)$ و $\tilde{H}_{ild}(\omega)$ قابل توجه باشد. همانطور که در شکل ۲ نیز مشاهده

شد، در محدوده‌ی فرکانس‌های پایین، اختلاف قابل مشاهده‌ای بین این دو

تابع وجود ندارد. نظر به اینکه این تفاوت فقط در استفاده از شکل موده‌های

سازه‌ی سالم به جای شکل موده‌های سازه‌ی آسیب‌دیده می‌باشد، عدم تفاوت

آن‌ها تاکید می‌نماید که تغییرات شکل مود در فرکانس‌های پایین ناچیز

است. با افزایش فرکانس تحریک، مشاهده می‌شود که این اختلاف بیشتر

می‌شود. علت این امر، تغییرات بیشتر شکل موده‌های بالاتر سازه است. لازم

به ذکر است که اگرچه اختلاف بین $H_{ild}(\omega)$ و $\tilde{H}_{ild}(\omega)$ در اطراف آتی

رزونانس‌ها بسیار زیاد و قابل توجه است، استفاده از این محدوده‌ی فرکانسی

در روش‌های برپایه‌ی پاسخ فرکانسی برای به‌هنگام‌سازی توصیه نمی‌شود،

زیرا دامنه‌ی ارتعاش در این نواحی کم بوده و اندازه‌گیری پاسخ فرکانسی در

این نواحی با خطای زیادی همراه خواهد بود. از سوی دیگر، افزایش اختلاف

بین این دو تابع، نشان از افزایش اثر تغییرات شکل مود می‌باشد. بیان

تغییرات زیاد شکل مود، با استفاده از سری مرتبه‌ی اول تیلور، با خطا همراه

خواهد بود و به طور ضمنی باعث غیرخطی شدن الگوریتم به‌هنگام‌سازی

خواهد شد. از این رو، جهت برقراری تعادل بین محدودیت‌های توضیح داده

شده، فرکانس‌های مناسب برای به‌هنگام‌سازی در اطراف فرکانس‌های طبیعی

و نه دقیقاً منطبق با فرکانس‌های طبیعی انتخاب شده‌اند.

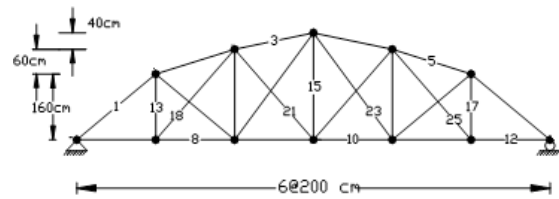
جهت بررسی دقت روش پیشنهادی در حالات مختلف خرابی، خرابی، دو

حالت مختلف خرابی بعنوان نمونه در جدول ۱ مشخص شده‌اند. برای هر یک

از حالت‌های خرابی، جزئیات مربوط به محل المان‌های آسیب دیده و شدت

خرابی مشخص شده است.

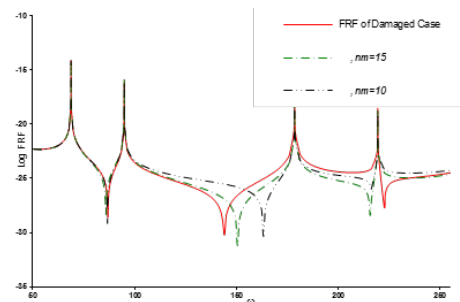
شده است. محل تحریک و اندازه‌گیری پاسخ به صورت دلخواه به ترتیب درجات آزادی ۴، ۸، ۱۷ و ۱، ۸، ۱۴، ۱۵، ۲۰، ۲۱ در نظر گرفته شده‌اند.



شکل ۱: درجات آزادی خرابی انتخابی خرابی. هر کدام از میله‌ها، یک المان محوری در نظر گرفته شده‌اند

Fig.1. Freedom degrees of selected truss, Each bar have been considered as axial elements

معادله‌ی اساسی در روش پیشنهادی، استفاده از شکل تجزیه شده‌ی پاسخ فرکانسی با استفاده از شکل موده‌های سازه بوده است. از آنجا که این رابطه براساس اندازه‌گیری بخشی از فرکانس‌های طبیعی نوشته می‌شود و نه همه‌ی فرکانس‌های طبیعی، میزان دقت این رابطه، تاثیر عمده‌ای بر موفقیت روش دارد. بنابراین می‌بایست از آن در محدوده‌ای از فرکانس‌های تحریک



شکل ۲: تابع پاسخ فرکانسی سازه با استفاده از بخشی از داده‌های مودال

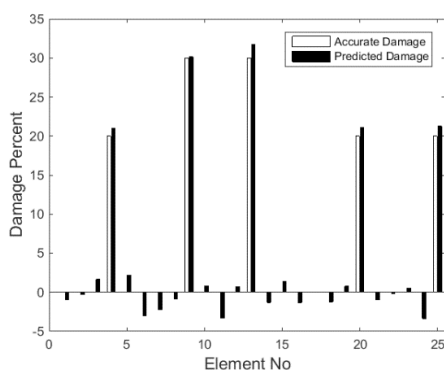
Fig.2. Response frequency function of the structure using a part of modal data

همانگونه که شکل ۲ نشان می‌دهد، نمودارهای رسم شده با استفاده از ۱۰ و ۱۵ شکل مود، در نواحی فرکانس پایین، دارای دقت بسیار خوبی می‌باشند، در شکل تجزیه شده، تابع پاسخ فرکانسی و در محدوده‌های فرکانسی پایین، با افزایش اختلاف بین فرکانس طبیعی و فرکانس تحریک، مقدار تفاضل مجذور آن‌ها در مخرج کسر بزرگ می‌شود و بنابراین، رابطه از شکل موده‌های بالا کمتر متاثر خواهد بود. با افزایش فرکانس تحریک و در محدوده‌ی استفاده شده برای به‌هنگام‌سازی، از دقت پاسخ کاسته می‌شود. در این محدوده، اختلاف مجذور فرکانس‌های طبیعی و تحریک در مخرج کسر کمتر می‌شود و اثر آن در پاسخ افزایش می‌یابد. لازم به ذکر است که

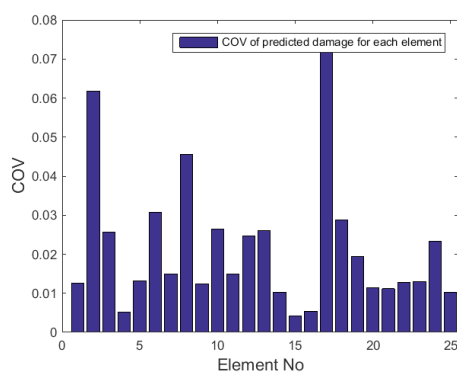
ضریب تغییرات (COV)^۱ شناخته می‌شوند. این مقادیر برای حساسیت مولفه های اصلی پاسخ فرکانسی در اشکال (۳-ب) و (۴-ب) نشان داده شده اند.

علاوه بر خطای موجود در مدلسازی ریاضی، ۱۰ درصد خطای اتفاقی با توزیع یکنواخت جهت شبیه سازی خطا در اندازه گیری پاسخ فرکانسی در نظر گرفته شده و اندازه گیری فرکانس های طبیعی بدون خطا در نظر گرفته شده اند.

لازم به ذکر است که با کاهش سختی، انتظار کاهش فرکانس های طبیعی داشته و در فرکانس های پایین، رفتار سازه توسط سختی کنترل می‌شود.



شکل ۳- الف: خرابی واقعی و برآورد شده برای حالت خرابی ۱ (با استفاده از حساسیت مولفه های اصلی تابع پاسخ فرکانسی) Fig.3a. Real and estimated damage for case 1 (using the sensitivity of the main components of response frequency function)



شکل ۳- ب: مقادیر ضریب تغییرات برای حالت خرابی ۲ (با استفاده از حساسیت مولفه های اصلی تابع پاسخ فرکانسی) Fig.3b. Coefficient of variation for case 1 (using the sensitivity of the main components of response frequency function)

1 Coefficient of Variation

جدول ۱: شماره المان و درصد خرابی هر کدام

Table.1. Element number and damage percentage of each element

درصد خرابی	شماره المان	نمونه خرابی
۲۰	۴ و ۲۵	حالت ۱
۳۰	۹ و ۱۳	
۴۰	۷	حالت ۲
۵۰	۱۸	

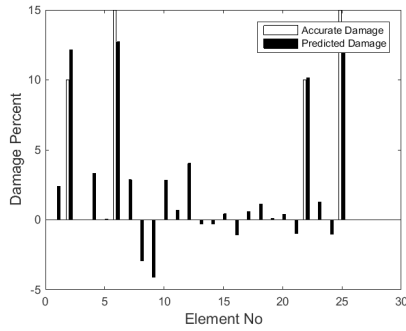
جهت انتخاب فرکانس های مناسب برای به هنگام سازی، تعداد فرکانس های لازم برای محاسبه ی ماتریس حساسیت و محل قرارگیری آن ها با توجه به شکل ۲ بررسی شده و فرکانس های تحریک جدول ۲، به عنوان بهترین محدوده به هنگام سازی برای ۲ حالت مختلف خرابی جدول ۱ توصیه گردیده اند. در مواقع لزوم، از نرم دوم ردیف های ماتریس حساسیت، نیز برای وزن دار نمودن دستگاه معادلات حساسیت بهره گرفته شده است.

جدول ۲: محدوده فرکانسی در نظر گرفته شده برای به هنگام سازی با استفاده از هر دو روش

Table.2. Considered frequency range for model updating using both methods

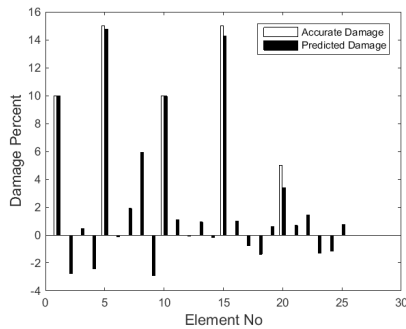
بازه فرکانسی مناسب (Hz)	
حالت خرابی ۱	حالت خرابی ۲
۲۱۰-۱۰۵	۱۶۹-۱۴۷
۲۳۵-۲۲۸	۱۹۷-۱۸۵
۲۶۳-۲۵۸	۲۱۸-۲۱۴
۲۸۵-۲۷۸	۲۳۵-۲۲۷
۳۳۰-۳۲۵	۲۸۵-۲۷۷

روش حساسیت برپایه مولفه های اصلی تابع پاسخ فرکانسی روی سناریوهای جدول ۱ اعمال شده و نتایج در اشکال (۳-الف) و (۴-الف) آورده شده اند. نتایج ارائه شده، میانگین ۵۰ مشاهده ی مونت کارلو می باشند. میانگین پارامترهای پیش بینی شده به تنهایی نمی تواند نشان دهنده ی دقت نتایج باشد و لازم است که پراکندگی جواب ها در اطراف میانگین به صورت پارامتر انحراف معیار نیز بررسی شود. جهت بی بعد نمودن مقادیر انحراف معیار، مقادیر بدست آمده بر میانگین محاسبه شده تقسیم می شوند و بعنوان



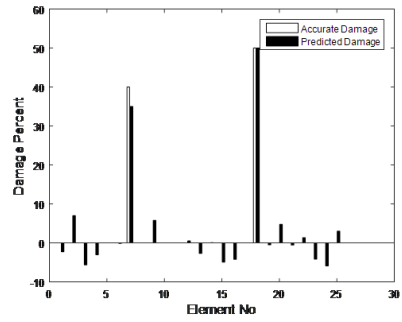
شکل ۵: خرابی واقعی و برآورد شده برای حالت خرابی مشابه ۱ (با استفاده از حساسیت مولفه های اصلی تابع پاسخ فرکانسی)

Fig.5. Real and estimated damage for case 1 (using the sensitivity of the response frequency function)



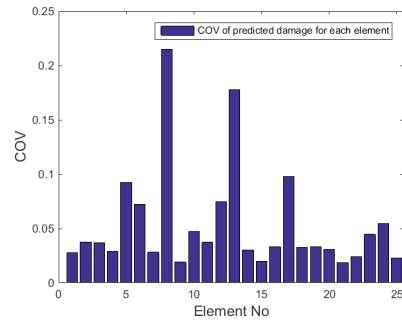
شکل ۶: خرابی واقعی و برآورد شده برای حالت خرابی مشابه ۲ (با استفاده از حساسیت مولفه های اصلی تابع پاسخ فرکانسی)

Fig.6. Real and estimated damage for case 1 (using the sensitivity of the response frequency function)



شکل ۴-الف: خرابی واقعی و برآورد شده برای حالت خرابی ۱ (با استفاده از حساسیت مولفه های اصلی تابع پاسخ فرکانسی)

Fig.4a. Real and estimated damage for case 2 (using the sensitivity of the main components of response frequency function)



شکل ۴-ب: مقادیر ضریب تغییرات برای حالت خرابی ۲ (با استفاده از حساسیت مولفه های اصلی تابع پاسخ فرکانسی)

Fig.4b. Coefficient of variation for case 2 (using the sensitivity of the main components of response frequency function)

به منظور بررسی کمی نتایج پیش بینی شده و مقایسه آن ها، از اندیس نزدیکی^۱ که بیانگر فاصله نسبی بین بردار خرابی پیش بینی شده و واقعی می باشد، مطابق تعریف زیر استفاده شده است:

$$CI = 1 - \frac{\|\delta\bar{P}_t - \delta\bar{P}_p\|}{\|\delta\bar{P}_t\|} \quad (24)$$

که $\delta\bar{P}_p$ و $\delta\bar{P}_t$ به ترتیب، مقادیر واقعی و پیش بینی شده برای بردار خرابی می باشد. علامت $\|\cdot\|$ ، نیز نشانگر نرم بردار می باشد. چنانچه شناسایی کلیه المان ها به صورت دقیق انجام شود، CI برابر یک خواهد بود. مقادیر مطلق اندیس نزدیکی برای حالات مختلف خرابی به ازای هر دو روش روش در جدول ۳ آورده شده است.

جهت مقایسه قوت روش ارائه شده، نتایج بهنگام سازی، با نتایج بهنگام سازی همین موارد خرابی با استفاده از معادله حساسیت تابع پاسخ فرکانسی (معادله (۱۴) و (۱۵))، مقایسه گردیده است.

1 Closeness Index

و تحریکی که بتواند کلیه‌ی المان‌ها را با دقت مناسبی شناسایی نماید، از موضوعات جالب توجه برای تحقیقات آینده می‌باشد.

مراجع

- [1] Esfandiari, A., Bakhtiari-Nejad, F., Rahai, A., & Sanayei, M. Structural model updating using frequency response function and quasi-linear sensitivity equation. *Journal of sound and vibration*, 326(3) (2009) 557-573.
- [2] Esfandiari, A. Structural model updating using incomplete transfer function of strain data. *Journal of Sound and Vibration*, 333(16)(2014) 3657-3670.
- [3] Sipple, J. D., & Sanayei, M. Finite element model updating of the UCF grid benchmark using measured frequency response functions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 46(1) (2014) 179-190.
- [4] Smith, L. I. A tutorial on principal components analysis. Cornell University, USA, (2002) 51, 52.
- [5] Li, J., Dackermann, U., Xu, Y. L., & Samali, B. Damage identification in civil engineering structures utilizing PCA-compressed residual frequency response functions and neural network ensembles. *Structural Control and Health Monitoring*, 18(2) (2011) 207-226.
- [6] De Boe, P., & Golinval, J. C. Principal component analysis of a piezosensor array for damage localization. *Structural health monitoring*, 2(2) (2003) 137-144.
- [7] Jeong, M., Choi, J. H., & Koh, B. H. Isomap-based damage classification of cantilevered beam using modal frequency changes. *Structural Control and Health Monitoring*, 21(4) (2014) 590-602
- [8] Da Silva, S., Junior, M. D., Junior, V. L., & Brennan, M. J. Structural damage detection by fuzzy clustering. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22(7) (2008) 1636-1649.
- [9] Trendafilova, I., Cartmell, M. P., & Ostachowicz, W. Vibration-based damage detection in an aircraft wing scaled model using principal component analysis and pattern recognition. *Journal of Sound and Vibration*, 313(3) (2008) 560-566.
- [10] Tibaduiza, D. A., Mujica, L. E., & Rodellar, J. Damage classification in structural health monitoring using principal component analysis and self-organizing maps. *Structural Control and Health Monitoring*, 20(10) (2013) 1303-1316.
- [11] Xiaoyan, X., Feng, W., Liang, W., & Tailong, Q. (2011, March). Structural Damage Detection Using PCA and Improved FRF Curvature Method. *International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation (ICICTA)*, 2011 (Vol. 1, pp. 723-726). IEEE.

جدول ۳: مقادیر اندیس نزدیکی برای حالت های خرابی مختلف و روش های مختلف بر پایه حساسیت

Table. 3. Closeness index for different damage cases and various sensitivity based methodes

حساسیت مولفه های اصلی پاسخ فرکانسی	حساسیت پاسخ فرکانسی	CI
۰/۸۶	۰/۶۹	حالت خرابی ۱
۰/۷۳	۰/۷۶	حالت خرابی ۲

۸- نتیجه گیری

پایین بودن ضریب تغییرات، نشان از دقت خوب روش و پراکندگی کم نتایج پیش بینی شده دارد. ضریب تغییرات بعضی از المان‌ها در مقایسه با دیگر المان‌ها، به طور مشخصی بیشتر می‌باشند. این امر دال بر عدم قابلیت شناسایی این المان با استفاده از نقاط تحریک و اندازه‌گیری‌های در نظر گرفته شده می‌باشد. مقادیر کم ضریب تغییرات در هر دو روش، نشان از مقاومت حساسیت مولفه‌های اصلی در مقابل خطای مدل‌سازی دارد. اما با توجه به مجموعه مشاهدات، می‌توان روش‌های بر مبنای پاسخ فرکانسی سازه روش‌هایی پایاتر نسبت به خطاهای با توزیع یکنواخت دانست.

در حالی که میزان تغییرات در پاسخ سازه کم است، به هنگام‌سازی حتی با وجود خطای کم اندازه‌گیری ممکن است به نتایج با دقت پایین منجر شود. در این حالات، وزن‌دهی معادلات حساسیت مربوط به این داده‌ها می‌تواند اثر معکوس بر روی بهبود نتایج داشته باشد. در چنین حالتی، استفاده از فرکانس‌های بالاتر، که در آن نواحی، رفتار سازه، دارای تغییرات بیشتری است، می‌تواند به بهبود نتایج منجر شود.

همچنین نتایج روش به هنگام‌سازی بر پایه مولفه‌های اصلی تابع تبدیل نشان می‌دهند که این روش به طور کلی قابلیت بهتری در شناسایی خرابی با شدت کم و گسترده را داراست. اگرچه بعضی المان‌ها با دقت کم شناسایی شده‌اند، که آن هم، می‌تواند به علت قابلیت پایین مشاهده‌ی این المان‌ها در فرکانس‌های انتخاب شده باشد که می‌توان آن را با استفاده از فرکانس‌هایی که تغییرات رفتاری تابع تبدیل در آن‌ها همگن تر و یکنواخت تری است، بهبود بخشید.

گرچه بعلت خرابی، ماتریس جرم سازه تغییر نمی‌نماید و می‌توان از شناسایی پارامترهای جرم صرف نظر نمود، اما ممکن است که فرضیات اولیه برای محاسبه‌ی جرم سازه دارای خطا باشد. خطاهای موجود باعث خطا در بردارهای ویژه‌ی سازه شده که جهت محاسبه‌ی ماتریس حساسیت لازم می‌باشند. لذا می‌توان برای مطالعات عددی آینده، با افزودن ۱۰ درصد خطای اتفاقی، در فرضیات اولیه‌ی مربوط به پارامترهای جرم، قابل قبول نتایج بدست‌آمده را بررسی کرد. همچنین یافتن بهترین ترکیب از نقاط اندازه‌گیری

- [14] Hà, N. V., & Golinval, J. C. Localization and quantification of damage in beam-like structures using sensitivities of principal component analysis results. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 24(6) (2010) 1831-1843.
- [12] Golinval, J. C., De Boe, P., Yan, A. M., & Kerschen, G. (2004). Structural damage detection based on PCA of vibration measurements. In 58th Meeting of the Soc. for Mach. Failure Prevention Tech.
- [13] Yan, A. M., Kerschen, G., De Boe, P., & Golinval, J. C. Structural damage diagnosis under varying environmental conditions—part II: local PCA for non-linear cases. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 19(4) (2005) 865-880.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

M. Rahai, A. Bakhshi, A. Esfandiari, Damage Detection of Structures using Transfer Function and its Singular Values, *Amirkabir J. Civil Eng.*, 50(6) (2019) 1071-1080.

DOI: 10.22060/ceej.2017.11938.5103

