نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۰، شماره ۵، سال ۱۳۹۷، صفحات ۱۰۶۱ تا ۱۰۷۸
DOI: 10.22060/mej.2017.11858.5201

بررسی ارتعاشات آزاد نانوصفحات مرکب گرافن-برن نیترید در محیط حرارتی با استفاده از نظریهٔ آیفانتیس توأم با گرادیان سرعت و روش ریتز

سیما ضیایی*

دانشکده مهندسی، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران

چکیده: این مطالعه به بررسی ارتعاشات جانبی صفحات تک لایه و چند لایه با معماریهای متفاوت گرافن/برن نیترید در محیط حرارتی می پردازد. بدین منظور ابتدا نیروی واندوالز بین صفحات با استفاده از معادله لنارد-جونز ۶-۱۲ شبیه سازی شده است. سپس از تئوری ورق اصلاح شده دو متغیره برای شبیه سازی رفتار ارتعاشی صفحات مرکب تک لایه گرافن/برن نیترید یا صفحات مرکب با چیدمان عمودی، استفاده شده است. برای آمیختن اثر سایز با فرضیات تئوری ورق اصلاح شده دو متغیره، از تئوری آیفانتیس برای استخراج انرژی پتانسیل غیر کلاسیک استفاده شده است، همچنین با یک مقیاس طول اضافی از گرادیان سرعت نیز در استخراج انرژی جنبشی بهره گرفته شده است. برای استخراج معادلات مقادیر ویژه حاکم بر مساله از اصل همیلتون توام با روش ریتز استفاده شده است. یافته ها نشان می دهند که در تعداد لایه های ثابت گرافن و برن نیترید با انتخاب چیدمانی مناسب می توان فرکانس پایه غیر هم فاز را کمینه یا بیشینه نمود. در نانوصفحات مرکب تک لایه با کنترل فضای اشغال شده توسط برن نیترید می توان فرکانس پایه نانو ورق را بهبود بخشید. صرف نظر از نوع ورق مرکب مورد مطالعه، با افزایش دما یا افزایش مقیاس طول، فرکانس پایه کاهش می یابد.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۸ مرداد ۱۳۹۵
بازنگری: ۵ دی ۱۳۹۵
پذیرش: ۳ بهمن ۱۳۹۵
ارائه آنلاین: ۹ بهمن ۱۳۹۵

کلمات کلیدی:
سازه های مرکب
تئوری ورق اصلاح شده
تئوری آیفانتیس
گرادیان سرعت
بسامد پایه

۱- مقدمه

نانوسازه‌های دو بعدی همچون نانوصفحات گرافن و برن نیترید به دلیل خواص منحصربه فردشان که آنها را کاندیداهای مناسبی برای گسترده وسیعی از کاربردها می‌گرداند، توجه بسیاری از محققین را به خود جلب کرده‌اند.

نانوصفحات گرافن دارای خواص الکتریکی، مکانیکی، حرارتی و نور شناختی برجسته‌ای است و می‌تواند یک نامزد مناسب برای استفاده در پوشش سطح، حسگرهای شیمیایی، نانوکامپوزیت‌ها با پایه گرافن [۱]، مافوق خازن‌ها، الکترودهای ترانما، سلول‌های نیروزای نوری و دستگاه‌های زیستی [۲] باشد؛ لذا تحقیقات قابل ملاحظه‌ای پیرامون رفتار مکانیکی نانوصفحات گرافن در یک یا چند لایه صورت گرفته است. ظرفیت تحمل بار ایستایی [۷-۳]، ارتعاشات خطی [۱۱-۸] و ارتعاشات غیرخطی [۴ و ۱۳- ۱۲] از جمله مواردی است که بسیار به آنها پرداخته شده است.

نانوصفحات برن نیترید، همچون نانوصفحات گرافن، دارای ساختار شبکه‌ای لانه زنبوری هستند با این تفاوت که به جای اتم‌های کربن، به صورت یک در میان اتم‌های برن و نیتروژن در شبکه قرار گرفته‌اند [۱۴]. نانوسازه‌های برن نیترید خواص پایداری قوی شیمیایی و حرارتی، عایق الکتریکی، هدایت حرارتی خارق العاده و قابلیت حس جرم را از خود نشان می‌دهند [۱۵] و تاکنون به عنوان عایق با هدایت حرارتی بالا در میکرو/نانودستگاه‌های الکترونیکی، ساتع‌کننده نور ماوراء بنفش در اپتوالکترونیک و پرکننده‌های نانو در نانوکامپوزیت‌های استحکام بالا و رسانای حرارت استفاده شده‌اند [۱۶]. با این وجود، در مقایسه با نانوسازه‌های کربنی مطالعات چندانی در پیش‌بینی رفتار مکانیکی این نانوسازه‌ها صورت نگرفته است؛ هرچند که محققین با استفاده از روش‌های گوناگون مانند ای-بی اینیشیو۱ [۱۶ و ۱۷]، پتانسیل الکتروستاتیک و لنارد-جونز ۶-۱۲ [۱۸] و مکانیک مولکولی [۱۵ و ۱۹]، ثابت‌های مکانیکی صفحات برن نیترید را تخمین زده‌اند. مدل‌های اجزا محدود اتمی ترکیبی نشان دادند که نانوصفحات برون نیترید دارای رفتار مکانیکی ارتوتروپیک درون صفحه‌ای می‌باشند. براساس این نوع شبیه‌سازی درجه غیرایزوتروپی نانوصفحات برن نیترید ۰/۹۸ تقریب زده شده است [۱۵].

پیش‌بینی خواص مکانیکی نانوسازه‌های ترکیبی ساخته شده از گرافن/برن نیترید به صورت یک سامانه لایه‌ای متشکل از نانوسازه‌های برن نیترید و نانوسازه‌های کربنی [۲۰ و ۲۱] یا به صورت یک صفحه با محدوده‌های کنترل‌شده مرکب از برن نیترید و گرافن [۲۲]، از جمله مباحثی است که اخیراً به آن پرداخته می‌شود. در برخی از این سازه‌ها، لایه‌های نازک برن-نیترید به عنوان زیرلایه یا پوشش محافظتی گرافن عمل می‌کنند. همچنین این

نویسنده عهده‌دار مکاتبات: ziaee@yu.ac.ir

1 Ab initio

ساختار لایه‌ای برای ساخت تجهیزات عمودی که کلاس جدیدی از تجهیزات الکترونیکی می‌باشند، بسیار مورد توجه هستند [۲۳]. ارتعاش و اصطکاک داخلی نانوسازه هیبریدی مشتمل بر تک لایه گرافن قرار گرفته میان دو لایه برن نیترید (BN/G/BN) تحت فشار خارجی در مرجع [۲۰] مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که نه تنها ضریب اصطکاک داخلی معماری BN/G/BN، ۶۶/۶۷ درصد بیشتر از ضریب اصطکاک داخلی یک نانوصفحه سه لایه از گرافن می‌باشد؛ بلکه بسامد طبیعی این معماری نیز بیشتر است. در مقایسه با مواد معمول، حساسیت بیشتر بسامد طبیعی درون صفحه‌ای گرافن در معماری BN/G/BN به فشار خارجی، این معماری را به عنوان حسگر در میکرو/نانو حسگرهای نیرو حائز اهمیت می‌گرداند [۲۰]. خواص مکانیکی نانوصفحه تک لایه مرکب گرافن/برن نیترید در مرجع [۲۲] با استفاده از دینامیک مولکولی مورد مطالعه قرار گرفته است. این مطالعه نشان می‌دهد که اضافه شدن سطح اندکی برن نیترید به صفحه گرافن منجر به افت قابل ملاحظه استحکام تسلیم نانوصفحه می‌شود هرچند که نانوصفحه مرکب رفتار مومسان قویتری را نسبت به صفحه گرافن یا برن نیترید خالص از خود نشان می‌دهد [۲۲]. کرنش فشاری دو محوری در نانوصفحه مرکب تک لایه گرافن/برن نیترید در دو شکل مثلثی و متوازی السطوح با شرایط مرزی ساده بعد از سیکل حرارتی دما بالا ناشی از عدم تطابق ضریب انبساط حرارتی آنها نیز توسط پان و همکاران [۲۴] با استفاده از روش اجزا محدود مطالعه شده است.

با توجه به مطالعات اندکی که پیرامون رفتار مکانیکی نانوصفحات مرکب تک لایه و ترکیبی-لایه‌ای متشکل از برن نیترید و گرافن شده است، در این مطالعه به ارتعاشات جانبی صفحات تک لایه و چند لایه با معماری‌های متفاوت G/BN در محیط حرارتی پرداخته شده است. برای مطالعه رفتار مکانیکی نانوسازه‌ها، علاوه بر روش آزمایشگاهی، شبیه‌سازی با روش دینامیک مولکولی و استفاده از نظریه‌های محیط پیوسته، دو روش نظریه هستند که برای درک رفتار مکانیکی نانوسازه‌ها همچون نانوسازه‌های کربنی یا نانوسازه‌های برن نیترید استفاده می‌شوند. اگرچه شبیه‌سازی دینامیک مولکولی می‌تواند نتایج پرباری برای درک رفتار مکانیکی نانوسازه‌ها در اختیار محققین قرار دهد، با این وجود به سبب نیاز به توان محاسباتی بسیار بالا، این روش محدود به تحلیل سامانه‌های اتمی در ابعاد کوچک و در بازه‌های زمانی بسیار کوچک می‌باشد [۲۵ و ۲۶]. نظر به این‌که در مقیاس نانو، انجام آزمایش بی‌نهایت سخت و هزینه‌بر است [۲۵ و ۲۶] لذا توسعه مدل‌های مکانیک محیط پیوسته برای تحلیل نظری رفتار مکانیکی نانوسازه‌ها مطلوب محققین می‌باشد.

اهمیت الحاق اثر سایز به نظریه‌های محیط پیوسته به هنگام بررسی رفتار مکانیکی میکرو/نانوسازه‌ها بر کسی پوشیده نیست و به همین منظور نظریه‌های محیط پیوسته مرتبه بالاتر که ثابت‌های ماده اضافه‌تری را در بر می‌گیرند ارائه شده‌اند [۲۷ و ۲۸]. در این راستا میندلین [۲۹] نظریه الاستیسیته‌ای را که دربرگیرنده تأثیر میکروساختار می باشد، ارائه کرد. در نظریه اولیه میندلین، انرژی کرنشی به صورت تابعی از کرنش ماکروسکوپی، اختلاف میان تغییرشکل ماکروسکوپی، میکروسکوپی و گرادیان تغییرشکل میکروسکوپی بود [۲۹]. در این نظریه، انرژی کرنشی برای مواد ایزوتروپ دربرگیرنده ۱۶ ضریب ساختاری علاوه بر ثابت‌های لامه[1] می‌باشد. شایان ذکر است که در این نظریه، انرژی جنبشی نه تنها تابعی از سرعت بلکه تابعی از نرخ تغییرات زمانمند تغییرشکل میکروسکوپی نیز می‌باشد. بدین ترتیب یک مقیاس طول اضافی نیز در تعریف انرژی جنبشی دیده می‌شود [۲۹]. میندلین این نظریه را ساده کرد و سه ویرایش جدید را که در رابطه فرض شده بین گرادیان تغییرشکل میکروسکوپی و جابه‌جایی ماکروسکوپی با هم متفاوت بودند، ارائه نمود [۲۸]. نظریه ساده شده میندلین که در آن انرژی کرنشی فقط تابعی از گرادیان مرتبه اول تانسور کرنش می‌باشد (نظریه ساده شده میندلین فرمت ۲) علاوه بر ثابت‌های لامه، پنج ثابت جدید ماده دیگر را نیز دربر می‌گیرد و نظر به این‌که در این نظریه ساده شده، انرژی جنبشی تابعی از سرعت و گرادیان سرعت می‌باشد؛ لذا کل ثابت‌های ماده جدید موجود در این نظریه ۶ عدد می‌باشد [۳۰]. در این نظریه، پنج ثابت ماده جدید تعریف شده در انرژی کرنش را می‌توان در دو ثابت جدید گروه‌بندی کرد (برای جزئیات بیشتر به مرجع [۲۸] مراجعه شود) بدین ترتیب تعداد کل ثابت‌های ماده جدید تعریف شده در این نظریه از ۶ به ۳ تقلیل می یابد [۲۸]. براساس مطالعات آیفانتیس[2] در حوزه پلاستیسیته و الاستیسیته غیرخطی، آیفانتیس و همکاران نظریه گرادیان الاستیسیته دیگری را با یک مقیاس طول ارائه کردند [۲۸]. معادله حاکمه این نظریه تابعی از کرنش و لاپلاسین کرنش می‌باشد. می‌توان نشان داد که نظریه گرادیان الاستیسیته آیفانتیس حالت خاصی از نظریه ساده شده میندلین فرمت ۲ برای مسایل استاتیکی می‌باشد. کافی است که دو ثابت ماده جدید تعریف شده در نظریه ساده شده میندلین فرمت ۲ (حاصل از گروه‌بندی پنج ثابت ماده جدید تعریف شده در انرژی کرنشی) با هم برابر قرار داده شود تا نظریه ساده شده میندلین فرمت ۲ به نظریه گرادیان الاستیسیته آیفانتیس تبدیل شود [۳۱]. براساس نظریه گرادیان کرنش میندلین، نظریه گرادیان کرنش تعدیل شده[3] ای ارائه شد که در انرژی کرنشی آن فقط ۳ مقیاس طول جدید برای مواد ایزوتروپ الاستیک خطی پیشنهاد شده است [۳۲]. در این نظریه، چگالی انرژی تغییرشکل کل مستقل از تانسور گرادیان چرخش نامتقارن می‌باشد و فقط تابعی از تانسور کرنش متقارن، بردار گرادیان اتساع[4]، تانسور گرادیان کشش انحرافی[5] و تانسور گرادین چرخش متقارن می‌باشد [۳۲]. از دیگر نظریه‌های غیرکلاسیک مرتبه بالا شناخته شده می‌توان به نظریه کوپل تنش [۳۳] با دو مقیاس طول جدید تعریف شده برای انرژی کرنشی مواد الاستیک ایزوتروپ و نظریه کوپل تنش تعدیل شده [۳۴] با یک مقیاس

1 Lame's constants
2 Aifantis
3 Modified strain gradient theory
4 Dilatation gradient vector
5 Deviatoric stretch gradient tensor

طول جدید تعریف شده در انرژی کرنشی اشاره کرد. می‌توان نشان داد که نظریه کوپل تنش تعدیل شده حالت خاصی از نظریه گرادیان کرنش تعدیل شده می‌باشد. اگر در نظریه گرادیان کرنش تعدیل شده، ۲ مقیاس طول از ۳ مقیاس طول ماده تعریف شده، صفر گذاشته شود، گرادیان کوپل تنش تعدیل شده حاصل می‌گردد [۳۵]. نظریه الاستیسیته غیرمحلی ایرینگن[1] که بیشمار در تحلیل رفتار مکانیکی (استاتیکی و دینامیکی) نانوساختارها با پایه کربن استفاده می‌شود [۴۵- ۳۶] دربرگیرنده تانسور تنش و گرادیان تانسور تنش می‌باشد و فقط براساس یک مقیاس طول ماده جدید بیان می‌شود [۲۸]. پیرو نتایج موجود، واضح است که انتخاب مناسب پارامتر غیرمحلی موجود در نظریه ایرینگن (مقیاس کوچک) متضمن دقت شبیه‌سازی رفتار مکانیکی نانوسازه‌هایی همچون نانوسازه‌های کربنی می‌باشد. محققینی که رفتار مکانیکی نانوسازه‌ها را با استفاده از دو مدل نظریه الاستیسیته غیرمحلی و شبیه‌سازی دینامیک مولکولی مطالعه کرده‌اند، نشان دادند که مقدار مقیاس کوچک یا پارامتر غیرمحلی نه تنها به ماده، بلکه به شرایط مرزی، کایرالیتی[2]، نسبت ابعادی و ماهیت حرکت بستگی دارد [۴۵-۳۷]. ژانگ و همکاران [۳۷] نتایج حاصل از تحلیل کمانش نانولوله‌های کربنی تک لایه با شرایط مرزی ساده را که با استفاده از نظریه الاستیسیته غیرمحلی به‌دست آورده بودند با نتایج موجود از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی مقایسه کردند و مقدار مقیاس کوچک (e_0) را ۰/۸۲ پیش‌بینی نمودند. هیو و همکاران [۳۸] به روشی مشابه، مقدار مقیاس کوچک (e_0) را برای تفرق امواج عرضی ۰/۶ و برای تفرق امواج پیچشی بین ۰/۲ تا ۰/۲۳ اعلام نمودند. خادم الحسینی و همکاران [۳۹] اعلام کردند که مقیاس کوچک (e_0) در تحلیل کمانش پیچشی نانولوله‌های کربنی تک لایه آرمچیر و زیگزاگ بین ۰/۸۵ تا ۰/۸۶ می‌باشد. انصاری و همکاران [۴۰] نشان دادند که مقدار پارامتر غیرمحلی (e_0a) برای تحلیل کمانش محوری نانولوله‌های کربنی تک لایه با توجه به شرایط مرزی تغییر می‌کند. آنها مقدار ۰/۵۴ نانومتر را برای نانولوله با شرایط مرزی ساده، ۰/۵۳۱ نانومتر را برای شرایط مرزی گیردار-گیردار، ۰/۵۵ نانومتر را برای شرایط مرزی گیردار-ساده و ۰/۷۲۲ نانومتر را برای شرایط مرزی گیردار-آزاد پیشنهاد دادند [۴۰]. دوان و همکاران [۴۱] از نتایج شبیه‌سازی مولکولی برای تخمین مقدار مقیاس کوچک (e_0) به‌کار رفته در نظریه تیر تیموشنکو غیرمحلی که برای پیش‌بینی بسامدهای طبیعی نانولوله‌های کربنی تک لایه با شرایط مرزی گیردار-گیردار و یک سر درگیر استفاده شده بود، بهره گرفتند. نتایج آنها نشان می‌دهد که شرایط مرزی، نسبت ابعادی و شکل مد بر مقدار مقیاس طول تأثیر بسزایی دارد. براساس گزارش آنها [۴۱]، مقدار پارامتر غیرمحلی (e_0a) می‌تواند از ۰ تا ۲/۶۶ نانومتر تغییر کند. مقدار پارامتر غیرمحلی (e_0a) گزارش شده توسط انصاری و همکاران [۴۲] برای شبیه‌سازی ارتعاش جانبی صفحات گرافن تک لایه متضمن تأثیر بسزای شرایط مرزی و تأثیر اندک کایرالیتی بر مقدار پارامتر غیرمحلی می‌باشد. مقادیر پیشنهادی آنها برای نانوصفحه گرافن زیگزاگ با شرایط مرزی چهار طرف ساده و چهار طرف گیردار به ترتیب ۱/۴۱ نانومتر و ۰/۸۷ نانومتر می‌باشد. نتایج آنها برای نانوصفحه آرمچیر با شرایط مرزی مشابه با نانوصفحه زیگزاگ به ترتیب ۱/۳۴ نانومتر و ۰/۷۱ نانومتر می‌باشد. نتایج آنها نشان می‌دهد که مقدار مقیاس طول با تغییر نسبت ابعادی نانوورق تغییر نمی‌کند [۴۲]. این در حالی است که مطالعه شن و همکاران [۴۳] معرف تأثیر ابعاد نانوورق به‌علاوه کایرالیتی بر مقدار پارامتر غیرمحلی به‌کار رفته در شبیه‌سازی نانوصفحات گرافن می‌باشد. نتایج آنها [۴۳] نشان می‌دهد که با تغییر نسبت ابعادی و کایرالیتی نانوصفحات گرافن، مقدار پارامتر غیرمحلی (e_0a) بین ۰/۶۷-۰/۲۲ نانومتر تغییر می‌کند. انصاری و سهمنی [۴۴] مقدار مناسب پارامتر غیرمحلی برای شبیه‌سازی کمانش دو-محوری نانوصفحات گرافن تک لایه با شرایط مرزی ساده را پیش‌بینی نمودند. جالب توجه آن‌که نتایج آنها نشان می‌دهد برخلاف نوع نظریه ورق غیرمحلی استفاده شده در شبیه‌سازی که بر مقدار مقیاس کوچک تأثیر می‌گذارد، کایرالیتی تأثیر چندانی بر مقدار مقیاس کوچک ندارد. میاندوآب و همکاران [۴۵] مقدار پارامتر غیرمحلی (e_0a) را به هنگام مطالعه ارتعاش جانبی میکرو-تیرهای پلی سیلیکون، ۸ میکرومتر تخمین زده‌اند.

اگرچه نظریه غیرمحلی ایرینگن به طور گسترده ای برای شبیه‌سازی رفتار مکانیکی نانوسازه‌های کربنی به سبب توافق خوبی که میان نتایج حاصل از نظریه‌های محیط پیوسته غیرمحلی و شبیه‌سازی دینامیک مولکولی وجود دارد، استفاده می‌شود؛ اما این نظریه اجازه ساخت تابع انرژی را نمی‌دهد [۴۶] لذا، نظر به این‌که یک نظریه گرادیان الاستیسیته قوی برای تحلیل رفتار دینامیکی میکرو/نانو سازه‌ها از ترکیب گرادیان کرنش پایدار با گرادیان شتاب حاصل می‌باشد (مانند نظریه ساده شده میندلین فرمت ۲) [۲۸]، در این مطالعه از این نوع نظریه در شبیه‌سازی رفتار ارتعاشی نانوصفحات مرکب گرافن/برن نیترید استفاده شده است. بدین منظور از نظریه آیفانتیس برای استخراج انرژی کرنش سامانه استفاده شده است و در نگارش انرژی جنبشی نه تنها از سرعت بلکه از گرادیان سرعت نیز بهره گرفته شده است. شایان ذکر است که اسک و آیفانتیس [۴۷] با استفاده از تلفیق نظریه گرادیان کرنش پایدار با گرادیان شتاب به تحلیل دینامیکی نانولوله‌های کربنی پرداخته‌اند و با بهره‌گیری از نتایج حاصل از شبیه‌سازی مولکولی مقادیر نظیر مقیاس‌های طول را تقریب زده‌اند.

می‌دانیم که نظریه ورق کیرشوف فقط برای پیش‌بینی مدهای پایین ارتعاش صفحات نازک مناسب است. مطالعات انجام شده نشان می‌دهد که نظریه ورق کیرشوف بسامدهای مدهای مرتبه بالای ورق‌های نازک را نیز دست بالا برآورد می‌کند [۴۸] و این مهم با استفاده از نظریه‌های دیگر ورق مانند نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول یا نظریه‌های تغییرشکل برشی مرتبه بالا مانند نظریه تغییرشکل برشی مرتبه سوم، نظریه تغییرشکل برشی مثلثاتی، نظریه تغییرشکل برشی مرتبه چهارم و نظریه تغییرشکل برشی عمومی قابل تصحیح است. نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول با فرض

1 Eringens theory
2 Chirality

کرنش برشی ثابت در ضخامت ورق، نیازمند ضرایب تصحیح برش می‌باشد تا اختلاف میان بیان تنش واقعی و بیان تنش ثابت فرض شده را جبران کند درحالی‌که در نظریه‌های مرتبه بالاتر نیاز به استفاده از ضرایب تصحیح برش برطرف شده است و ضمناً پیش‌بینی بهتری از رفتار ارتعاشی ورق‌ها می‌دهند [۴۹]. برای بهبود نظریه‌های تغییرشکل برشی مرتبه بالاتر با کاهش پارامترهای نامشخص آنها بدون آن‌که دقت آنها کاهش یابد، نظریه ورق اصلاح شده دو متغیره (نظریه تغییرشکل برشی مرتبه بالا) توسط شیمپی [۵۰، ۵۱] پیشنهاد داده شد. این نظریه اخیراً برای مطالعه رفتار مکانیکی نانوورق‌ها مورد استفاده قرار گرفته است [۴۹ و ۵۳-۵۲] . در این مطالعه از نظریه ورق اصلاح شده دو متغیره (نظریه تغییرشکل برشی مرتبه بالا) برای استخراج معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشی نانوصفحات مرکب گرافن/برن نیترید بهره گرفته شده است.

همان‌گونه که پیش از این نیز اشاره شد، با توجه به مطالعات اندکی که پیرامون رفتار مکانیکی نانوصفحات مرکب تک لایه و ترکیبی-لایه‌ای متشکل از برن نیترید و گرافن شده است، در این مطالعه به ارتعاشات جانبی صفحات تک لایه و چند لایه با معماری‌های متفاوت G/BN در محیط حرارتی پرداخته شده است. بدین منظور ابتدا نیروی واندوالز بین صفحات با استفاده از معادله لنارد-جونز ۶-۱۲ شبیه‌سازی شده است. از نظریه ورق اصلاح شده دو متغیره (نظریه تغییرشکل برشی مرتبه بالا) و الحاق نظریه آیفانتیس توأم با گرادیان سرعت به آن و بهره‌گیری از روش ریتز معادلات حاکم بر ارتعاش جانبی نانوصفحات استخراج شده است. همچنین در پی مطالعه پان و همکاران [۲۴] که از شرایط مرزی ساده برای شبیه‌سازی کرنش فشاری دو محوری ناشی از بار حرارتی نانوصفحات مرکب تک لایه گرافن/برن نیترید بهره گرفته‌اند، در این مطالعه نیز از این شرط مرزی برای تحلیل رفتار ارتعاشی نانوصفحات مرکب در محیط حرارتی استفاده شده است.

۲- شبیه‌سازی نیروی واندروالز بین صفحات

در نانو صفحات دو لایه گرافن-گرافن، برن نیترید-برن نیترید یا گرافن-برن نیترید، برهم‌کنش بین لایه‌ها با نیروی واندروالز که می‌توان آن را با انرژی پتانسیل لنارد-جونز ۶-۱۲تشریح کرد، اداره می‌شود. از آنجایی که تقریب رفتار مکانیکی نانوصفحات چند لایه مستلزم شبیه‌سازی مناسب این نیرو می‌باشد؛ لذا در این بخش ابتدا نیروی واندر والز بین لایه‌ها فرموله شده است.

انرژی بین دو اتم به فاصله r به واسطه نیروی واندروالز با استفاده از مدل لنارد-جونز ۶-۱۲ به صورت زیر بیان می‌شود [۱۳ و ۲۱ و ۵۵-۵۴]:

$$V(r)=4\varepsilon_{12}\left(\frac{\sigma_{12}^{12}}{r^{12}}-\frac{\sigma_{12}^{6}}{r^{6}}\right) \quad (۱)$$

که در آن ε_{12} و σ_{12} دو پارامتر لنارد-جونز می‌باشند که مقادیر آنها برای اتم‌های کربن، برن و نیتروژن در جدول ۱ فهرست شده است. شایان ذکر است که ثابت‌های برن نیترید و کربن-برن نیترید براساس قانون مخلوط

جدول ۱: ثابت‌های لنارد-جونز برای اتم‌های مختلف [۲۱]
Table 1. Lenard-Jones constants for different atoms [21]

	σ,Å	ε,eV
C	۳/۳۶۹	۰/۰۰۲۶۳۵
B	۳/۴۵۳	۰/۰۰۴۱۱۶
N	۳/۳۶۵	۰/۰۰۶۲۸۱
BN	۳/۴۱	۰/۰۰۵۰۸۵
$C-BN$	۳/۳۹	۰/۰۰۳۶۶

که در آن

$$\varepsilon_{12}=\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} \quad (۲)$$

$$\sigma_{12}=(\sigma_1+\sigma_2)/2 \quad (۳)$$

می‌باشند، به‌دست آمده‌اند [۲۱].

نیروی واندروالز را می‌توان با مشتق‌گیری از انرژی پتانسیل لنارد-جونز نسبت به فاصله بین اتم‌ها، r ، به‌دست آورد [۱۳ و ۵۴]:

$$F(r)=-\frac{\partial V(r)}{\partial r}=\frac{24\varepsilon_{12}}{\sigma_{12}}\left(2\left(\frac{\sigma_{12}}{r}\right)^{13}-\left(\frac{\sigma_{12}}{r}\right)^{7}\right) \quad (۴)$$

با استفاده از بسط تیلور حول فاصله تعادلی $\bar{r}$ و با توجه به اینکه نیروی واندر والز تابعی فرد است [۱۳] می‌توان نیروی واندروالز بین دو اتم را که در راستای دو اتم است، به صورت زیر تقریب زد [۱۳ و ۵۴]:

$$F(r)=-\frac{24\varepsilon_{12}}{\sigma_{12}^{2}}\left(26\left(\frac{\sigma_{12}}{\bar{r}}\right)^{14}-7\left(\frac{\sigma_{12}}{\bar{r}}\right)^{8}\right)(r-\bar{r})-\frac{336}{\sigma_{12}^{4}}\left(65\left(\frac{\sigma_{12}}{\bar{r}}\right)^{16}-6\left(\frac{\sigma_{12}}{\bar{r}}\right)^{10}\right)(r-\bar{r})^{3} \quad (۵)$$

برای تعیین برهم‌کنش بین دو لایه نانوصفحه در راستای عمود بر صفحات، باید برآیند کل نیروهای واندروالز بین کل اتم‌ها در راستای عمود بر صفحه تصویر شود.

بدین ترتیب کل نیروی عمود بر واحد سطح وارد بر صفحه i ام به صورت زیر قابل بیان است:

$$q_i=\sum_{j=1,j\neq i}^{N} q_{ij} \quad (۶)$$

که در آن q_{ij} معرف برآیند کل نیروی عمود بر واحد سطح ناشی از نیروی واندروالز بین دو لایه iام و jام می‌باشد و N تعداد لایه‌هاست. شایان ذکر است که q_{ii} صفر می‌باشد. چگونگی تعیین q_{ij}ها براساس نوع نانوصفحه، گرافن یا برن نیترید، در زیر آورده شده است.

آنچه در پی می‌آید براساس صفحاتی بی‌نهایت از اتم‌ها می‌باشد. در ضمن چگالی سطح اتم‌های برن و نیتروژن در صفحه برن نیترید و چگالی سطح اتم‌های کربن در صفحه گرافن به ترتیب

$$\rho_b = 2\Big/\left(3\sqrt{3}l_{bn}^2\right) \quad (۷)$$

$$\rho_n = 2\Big/\left(3\sqrt{3}l_{bn}^2\right) \quad (۸)$$

$$\rho_c = 4\Big/\left(3\sqrt{3}l_c^2\right) \quad (۹)$$

می‌باشند که در آنها l_{bn} و l_c به ترتیب طول باند بین اتم‌های برن و نیتروژن و طول باند بین اتم‌های کربن قبل از تغییر شکل می‌باشند.

۲- ۱- نیروی واندروالز بین صفحه گرافن و برن نیترید

تعداد اتم‌های کربن در مساحت dA بر روی صفحه گرافن $\rho_c dA$ می‌باشد. فاصله بین نقطه (x_i, y_i, z_i) بر روی صفحه گرافن و نقطه‌ای به مختصات (x_j, y_j, z_j) روی صفحه برن نیترید (شکل ۱) عبارت است از $r=\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2}$ و i و j معرف شماره صفحه می‌باشد. با استفاده از معادله (۵) برای تعیین نیروی واندروالز بین دو اتم واقع شده در این دو نقطه و تصویر آن در راستای z و انتگرال‌گیری بر روی کل سطح می‌توان اندرکنش بین دو صفحهٔ گرافن-برن نیترید بر واحد سطح را در راستای z به صورت زیر تقریب زد:

$$q_{ij} = \sum_{m=B,N} \left(\begin{array}{l} \rho_c \rho_m \left\{ -\dfrac{24\varepsilon_{Cm}}{\sigma_{Cm}^2} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(26\left(\dfrac{\sigma_{Cm}}{\bar{r}}\right)^{14} \right.\right. \\ \left. -7\left(\dfrac{\sigma_{Cm}}{\bar{r}}\right)^{8} \right)(r-\bar{r})\dfrac{(z_i-z_j)}{\bar{r}}dxdy \\ -\dfrac{336\varepsilon_{Cm}}{\sigma_{Cm}^2} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(65\left(\dfrac{\sigma_{Cm}}{\bar{r}}\right)^{16} \right. \\ \left.\left. -7\left(\dfrac{\sigma_{Cm}}{\bar{r}}\right)^{10} \right)(r-\bar{r})^3\dfrac{(z_i-z_j)}{\bar{r}^3}dxdy \right\} \end{array} \right) \quad (۱۰)$$

از سوی دیگر می‌توان نشان داد که $(r-\bar{r})=(w_i-w_j)\bar{r}\big/(z_i-z_j)$

پس

$$q_{ij} = \bar{C}_{ij}(w_i-w_j) + \bar{E}_{ij}(w_i-w_j)^3 \quad (۱۱)$$

که در آن

$$\bar{C}_{ij} = \sum_{m=B,N} -\rho_c\rho_m \left(\frac{24\varepsilon_{Cm}}{\sigma_{Cm}^2}\right)\left(\frac{13\pi\sigma_{Cm}^{14}}{3\bar{h}_{ij}^{12}} - \frac{7\pi\sigma_{Cm}^{8}}{3\bar{h}_{ij}^{6}}\right) \quad (۱۲)$$

$$\bar{E}_{ij} = \sum_{m=B,N} -\rho_c\rho_m \left(\frac{336\varepsilon_{Cm}}{\sigma_{Cm}^2}\right)\left(\frac{65\pi\sigma_{Cm}^{14}}{6\bar{h}_{ij}^{14}} - \frac{2\pi\sigma_{Cm}^{8}}{3\bar{h}_{ij}^{8}}\right) \quad (۱۳)$$

که $\bar{h}_{ij}$ فاصله تعادلی بین دو صفحه گرافن و برن نیترید (صفحه i ام و j ام) می‌باشد.

در حالت تعادل انرژی پتانسیل ناشی از نیروی واندروالز بین دو صفحه i ام و jام در واحد سطح عبارت است از (مراجعه شود به شکل ۱ و معادله (۱)):

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} &= \sum_{i=B,N} 2\pi\rho_c\rho_i \int_0^{\infty} 4\varepsilon_{Ci}\left(\left(\frac{\sigma_{Ci}}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma_{Ci}}{r}\right)^{6}\right)\hat{r}d\hat{r} \\ &= \sum_{i=B,N} 4\pi\rho_c\rho_i\varepsilon_{Ci}\sigma_{Ci}^6\left(\frac{\sigma_{Ci}^6}{5h_{ij}^{10}} - \frac{1}{2h_{ij}^{4}}\right) \end{aligned} \quad (۱۴)$$

که $r=\sqrt{\hat{r}^2+h_{ij}^2}$ و $\hat{r}=\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2}$ و h_{ij} فاصله بین دو صفحه گرافن و برن نیترید (صفحه iام و jام) می‌باشد.

۲- ۲- نیروی واندروالز بین صفحات برن-نیترید

اتم‌های برن و نیتروژن در مساحت dA بر روی صفحه برن نیترید به ترتیب $\rho_B dA$ و $\rho_N dA$ می‌باشد. فاصله بین نقطه (x_i, y_i, z_i) بر روی صفحه ۱ برن نیترید و نقطه‌ای به مختصات (x_j, y_j, z_j) روی صفحه ۲ برن نیترید عبارت است از $r=\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2}$. حال با استفاده از معادله (۵) برای تعیین نیروی واندروالز بین دو اتم واقع شده در این دو نقطه و تصویر آن در راستای z و انتگرال‌گیری بر روی سطح می‌توان اندرکنش بین دو صفحهٔ برن نیترید-برن نیترید بر واحد سطح را در راستای z به صورت زیر تقریب زد:

$$q_{ij} = \sum_{m,n=B,N} \left(\begin{array}{l} \rho_m \rho_n \left\{ -\dfrac{24\varepsilon_{mn}}{\sigma_{mn}^2} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(26\left(\dfrac{\sigma_{mn}}{\bar{r}}\right)^{14} \right.\right. \\ \left. -7\left(\dfrac{\sigma_{mn}}{\bar{r}}\right)^{8} \right)(r-\bar{r})\dfrac{(z_i-z_j)}{\bar{r}}dxdy \\ -\dfrac{336\varepsilon_{mn}}{\sigma_{mn}^2} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(65\left(\dfrac{\sigma_{mn}}{\bar{r}}\right)^{16} \right. \\ \left.\left. -7\left(\dfrac{\sigma_{mn}}{\bar{r}}\right)^{10} \right)(r-\bar{r})^3\dfrac{(z_i-z_j)}{\bar{r}^3}dxdy \right\} \end{array} \right) \quad (۱۵)$$

از سوی دیگر می‌توان نشان داد که $(r-\bar{r})=(w_i-w_j)\bar{r}\big/(z_i-z_j)$

پس

$$q_{ij} = \bar{C}_{ij}(w_i-w_j) + \bar{E}_{ij}(w_i-w_j)^3 \quad (۱۶)$$

که در آن

$$\bar{C}_{ij} = \sum_{m,n=B,N} -\rho_m\rho_n \left(\frac{24\varepsilon_{mn}}{\sigma_{mn}^2}\right)\left(\frac{13\pi\sigma_{mn}^{14}}{3\bar{h}_{ij}^{12}} - \frac{7\pi\sigma_{mn}^{8}}{3\bar{h}_{ij}^{6}}\right) \quad (۱۷)$$

$$\bar{E}_{ij} = \sum_{m,n=B,N} -\rho_j\rho_i \left(\frac{336\varepsilon_{mn}}{\sigma_{mn}^2}\right)\left(\frac{65\pi\sigma_{mn}^{14}}{6\bar{h}_{ij}^{14}} - \frac{2\pi\sigma_{mn}^{8}}{3\bar{h}_{ij}^{8}}\right) \quad (۱۸)$$

که $\bar{h}_{ij}$ فاصله تعادلی بین دو صفحه برن نیترید می‌باشد.

در حالت تعادل انرژی پتانسیل ناشی از نیروی واندروالز بین دو صفحه iام و jام که هر دو از جنس برن نیترید می‌باشند در واحد سطح عبارت است از (مراجعه شود به شکل ۱ و معادله (۱)):

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} &= \sum_{m,n=B,N} 2\pi\rho_m\rho_n \int_0^{\infty} 4\varepsilon_{mn}\left(\left(\frac{\sigma_{mn}}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma_{mn}}{r}\right)^{6}\right)\hat{r}d\hat{r} \\ &= \sum_{m,n=B,N} 4\pi\rho_m\rho_n\varepsilon_{mn}\sigma_{mn}^6\left(\frac{\sigma_{mn}^6}{5h_{ij}^{10}} - \frac{1}{2h_{ij}^{4}}\right) \end{aligned} \quad (۱۹)$$

که $r=\sqrt{\hat{r}^2+h_{ij}^2}$ و $\hat{r}=\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2}$ و h_{ij} فاصله بین دو صفحه برن نیترید (صفحه iام و jام) می‌باشد.

۲- ۳- نیروی واندروالز بین صفحات گرافن

به طوری مشابه می‌توان نیروی عمود بر واحد سطح ناشی از اندرکنش بین دو صفحه گرافن-گرافن و انرژی پتانسیل واحد بر سطح نظیر آن را برای دو صفحه گرافن-گرافن به صورت زیر تقریب زد (برای جزئیات مراجعه شود به زیربخش ۲-۱ و ۲-۲).

$$q_{ij}=\rho_c^2\left\{-\frac{24\varepsilon_{CC}}{\sigma_{CC}^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(26\left(\frac{\sigma_{CC}}{\bar{r}}\right)^{14}-7\left(\frac{\sigma_{CC}}{\bar{r}}\right)^{8}\right)(r-\bar{r})\frac{(z_i-z_j)}{\bar{r}}dxdy-\frac{336\varepsilon_{CC}}{\sigma_{CC}^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(65\left(\frac{\sigma_{CC}}{\bar{r}}\right)^{16}-7\left(\frac{\sigma_{CC}}{\bar{r}}\right)^{10}\right)(r-\bar{r})^3\frac{(z_i-z_j)}{\bar{r}^3}dxdy\right\}\approx \bar{C}_{ij}(w_i-w_j)+\bar{E}_{ij}(w_i-w_j)^3 \quad (۲۰)$$

$$\Phi_{ij}=4\pi\rho_c^2\varepsilon_{CC}\sigma_{CC}^6\left(\frac{\sigma_{CC}^6}{5h_{ij}^{10}}-\frac{1}{2h_{ij}^{4}}\right) \quad (۲۱)$$

که در آن

$$\bar{C}_{ij}=-\rho_C^2\left(\frac{24\varepsilon_{CC}}{\sigma_{CC}^2}\right)\left(\frac{13\pi\sigma_{CC}^{14}}{3\bar{h}_{ij}^{12}}-\frac{7\pi\sigma_{CC}^{8}}{3\bar{h}_{ij}^{6}}\right) \quad (۲۲)$$

$$\bar{E}_{ij}=-\rho_C^2\left(\frac{336\varepsilon_{CC}}{\sigma_{CC}^2}\right)\left(\frac{65\pi\sigma_{CC}^{14}}{6\bar{h}_{ij}^{14}}-\frac{2\pi\sigma_{CC}^{8}}{3\bar{h}_{ij}^{8}}\right) \quad (۲۳)$$

و $\bar{h}_{ij}$ و h_{ij} به ترتیب فاصله تعادلی و فاصله بین دو صفحه گرافن (صفحه iام و jام) می‌باشد.

۲- ۴- تعیین فاصله تعادلی میان صفحات

به منظور تعیین فاصله تعادلی بین صفحات، ابتدا انرژی پتانسیل کل سامانه با توجه به فرمول زیر یافت می‌شود.

$$\Phi=\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\Phi_{ij} \quad (۲۴)$$

که N معرف تعداد لایه‌ها است. توجه داشته باشید که در فاصله تعادلی انرژی پتانسیل کمینه می‌باشد [۵۵]. لذا با صفر قرار دادن مشتق انرژی

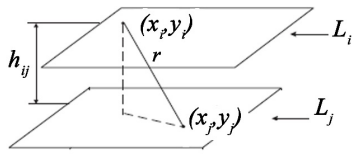

Fig. 1. Position of the ith and j^th nanoplate which are not necessarily in vicinity of each other, together with, geometric parameters used to simulate van der waals force.

شکل ۱: موقعیت هندسی نانوصفحه i ام و jام که ضرورتاً مجاور یکدیگر نیستند به همراه پارامترهای هندسی استفاده شده برای شبیه‌سازی نیروی واندروالز بین این دو نانو صفحه

پتانسیل کل نسبت به $h_{i(i+1)}$ می‌توان فاصله تعادلی لایه‌های مجاور را یافت.

۲- ۵- استخراج معادلات حاکم بر ارتعاش جانبی صفحات N لایه گرافن/برن نیترید

در این بخش با استفاده از اصل همیلتون و استفاده از روش ریتز دسته معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش جانبی صفحات گرافن/برن نیترید استخراج می‌شود. برای تلفیق اثر سایز با فرضیات حاکم بر نظریه ورق اصلاح شده دو متغیره (نظریه تغییرشکل برشی مرتبه بالا) از نظریه آیفانتیس توأم با گرادیان سرعت استفاده شده است.

پیرو اصل همیلتون معادله (۲۵) برقرار می‌باشد:

$$\int_0^{t_1}\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\delta T^{(k)}-\delta U^{(k)}\right)+\delta W\right)dt=0 \quad (۲۵)$$

که در آن $T^{(k)}$ و $U^{(k)}$ به ترتیب معرف انرژی جنبشی کل و انرژی کرنشی کل صفحه kام هستند و W کار نیروی واندروالز می‌باشد. N معرف تعداد لایه‌های ساختار می‌باشد.

پیرو نظریه ساده شده میندلین، تغییرات انرژی جنبشی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۲۸]:

$$\delta T=\int_V\left(\rho\dot{u}\delta\dot{u}+\rho\dot{v}\delta\dot{v}+\rho\dot{w}\delta\dot{w}\right)dV+\int_V\left(\rho l_1^2\left(\dot{u}_{,i}\delta\dot{u}_{,i}+\dot{v}_{,i}\delta\dot{v}_{,i}+\dot{w}_{,i}\delta\dot{w}_{,i}+\right)\right)dV \quad (۲۶)$$

در معادله (۲۶) ، l_1 مقیاس طول می‌باشد؛ u، v و w مؤلفه‌های بردار جابجایی هر نقطه از ورق به مختصات (x,y,z) می‌باشد که طبق فرضیات ورق اصلاح شده دو متغیره قابل بیان برحسب مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی نقطه در صفحه میانی ورق مربوطه می‌باشند یعنی [۵۰]:

$$u(x,y,z)=u_0-z\frac{\partial w_b}{\partial x}+f(z)\frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (۲۷)$$

$$v(x,y,z)=v_0-z\frac{\partial w_b}{\partial y}+f(z)\frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (۲۸)$$

$$w(x,y,z)=w_b(x,y,0)+w_s(x,y,0) \quad (۲۹)$$

و تابع $f(z)$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۵۰]:

$$f(z)=z\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^2\right) \quad (۳۰)$$

(v_0,u_0) مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی هر نقطه با مختصات $(x,y,0)$ در صفحه میانی ورق می‌باشند، W_b و W_s به ترتیب جزء خمشی و برشی جابه‌جایی جانبی ورق می‌باشند [۵۰]. (.) مشتق جزئی نسبت به زمان و $(\ )_{,i}$ معرف مشتق جزئی نسبت به هر یک از مؤلفه‌های مختصات (x,y,z) می‌باشد.

طبق نظریه آیفانتیس δU برای هر صفحه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\delta U=\int_V\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV \quad (۳۱)$$

که در آن σ_{ij} و ε_{ij} به ترتیب مؤلفه‌های تانسور تنش و کرنش می‌باشند

و مؤلفه‌های تانسور تنش در آن برای هر صفحه به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۸]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl} - l^2\varepsilon_{kl,mm}\right) \quad (۳۲)$$

که در آن $\varepsilon_{kl,mm}$ لاپلاسین تانسور کرنش و l مقیاس طول می‌باشند و C_{ijkl} را می‌توان براساس فرضیات حاکم بر نظریه ورق اصلاح شده دو متغیره (نظریه تغییرشکل برشی مرتبه بالا) [۵۰] برای یک صفحه ایزوتروپیک به صورت زیر نوشت [۴۷]:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (۳۳)$$

که

$$Q_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}, Q_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}$$
$$Q_{66} = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (۳۴)$$

که E معرف مدول الاستیک ورق می‌باشد. ν نسبت پواسون و G مدول صلبیت برشی هستند.

طبق فرضیات حاکم بر نظریه ورق اصلاح شده دو متغیره (نظریه تغییرشکل برشی مرتبه بالا) روابط زیر برقرار هستند [۵۰]،

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + f(z)\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - \alpha\Delta T \quad (۳۵)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + f(z)\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - \alpha\Delta T \quad (۳۶)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 w_b}{\partial x\partial y} + 2f(z)\frac{\partial^2 w_s}{\partial x\partial y}\right) \quad (۳۷)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{df(z)}{dz}\frac{\partial w_s}{\partial x}\right) \quad (۳۸)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{df(z)}{dz}\frac{\partial w_s}{\partial y}\right) \quad (۳۹)$$

که در معادلات (۳۵) تا (۳۹) تابع $f(z)$ و مشتق آن به صورت زیر تعریف شده‌اند [۵۰]:

$$f(z) = z\left(\frac{1}{4} - \frac{5}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^2\right) \quad (۴۰)$$

$$\frac{df(z)}{dz} = \left(\frac{1}{4} - 5\left(\frac{z}{h}\right)^2\right) \quad (۴۱)$$

در ضمن α معرف ضریب انبساط حرارتی و ΔT تغییر یکنواخت دما را نشان می‌دهد.

تغییرات کار نیروی خارجی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\delta W = \int_A \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \bar{C}_{ij}\left(w_i - w_j\right)\left(\delta w_i - \delta w_j\right)dA \quad (۴۲)$$

که در آن $(-\bar{C}_{ij})$ معرف سختی فنر خطی است که برای مدل‌سازی اندرکنش واندروالز استفاده شده است (معادلات (۱۲)، (۱۷) و (۲۲) را ملاحظه نمایید) .

بعد از جایگزین کردن معادلات (۲۶) تا (۴۲) به همراه تقریب مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی صفحه میانی هر ورق با توابعی که شرایط مرزی هندسی آن ورق را ارضا می‌کنند (طبق روش ریتز) در معادله (۲۵)، می‌توان دسته معادله دیفرانسیل معمولی حاکم بر ارتعاش ورق‌ها را یافت:

$$\begin{bmatrix} \left[M_{mnpq}\right]^{(11)} & .. & 0 \\ .. & .. & 0 \\ 0 & 0 & \left[M_{mnpq}\right]^{(NN)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [\ddot{r}_{pq}]^{(1)} \\ .. \\ [\ddot{r}_{pq}]^{(N)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K^{11}_{mnpq}] & .. & [K^{1N}_{mnpq}] \\ .. & .. & .. \\ [K^{N1}_{mnpq}] & .. & [K^{NN}_{mnpq}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [r_{pq}]^{(1)} \\ .. \\ [r_{pq}]^{(N)} \end{Bmatrix} = 0 \quad (۴۳)$$

در معادله (۴۳) مقادیر M_{mnpq} و K_{mnpq} به ترتیب در معادلات (۱-الف) تا (۶-الف) در ضمیمه تعریف شده‌اند و $[r_{pq}]^{(k)}$ معرف بردار جابه‌جایی لایه kام می‌باشد که معرف جابه‌جایی درون صفحه‌ای و جانبی می‌باشد. همچنین $m,n,p,q = 1,2,...,NS$ و NS معرف تعداد توابع شکل استفاده شده در تقریب مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی می‌باشد.

در این مطالعه ارتعاشات نانوصفحات چند لایه با شرایط مرزی ساده مورد مطالعه قرار گرفته است که از نقطه نظر تحلیل دینامیک مولکولی معادل غیرفعال سازی (ثابت شدن) یک ردیف از اتم‌های مرزی در چهار سوی نانوورق‌ها می‌باشد. لذا مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی با توابع شکل زیر که پیرو روش ریتز شرایط مرزی هندسی صفحات را ارضا می‌نمایند [۵۰] (در نظریه غیرکلاسیک به‌کار گرفته شده، معادلات حاکم بر شرط مرزی هندسی نانوصفحات و ماکرو صفحات یکسان هستند)، تقریب خورده‌اند:

$$u_0(x,y,t) = \sum_{p=1}^{NS}\sum_{q=1}^{NS} U_{pq}(t)\sin(\frac{p\pi x}{a})\cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right)$$
$$v_0(x,y,t) = \sum_{p=1}^{NS}\sum_{q=1}^{NS} V_{pq}(t)\cos(\frac{p\pi x}{a})\sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right)$$
$$w_b(x,y,t) = \sum_{p=1}^{NS}\sum_{q=1}^{NS} W_{Bpq}(t)\sin(\frac{p\pi x}{a})\sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) \quad (۴۴)$$
$$w_s(x,y,t) = \sum_{p=1}^{NS}\sum_{q=1}^{NS} W_{Spq}(t)\sin(\frac{p\pi x}{a})\sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right)$$

لذا بردار جابه‌جایی $[r_{pq}]^{(k)}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[r_{pq}]^{(k)} = \left\{[U_{pq}] \quad [V_{pq}] \quad [W_{Bpq}] \quad [W_{Spq}]\right\}^T \quad (۴۵)$$

نظر به این‌که در ارتعاش آزاد خطی، بردار شتاب را می‌توان به صورت زیر برحسب بردار جابه‌جایی بیان کرد [۵۶]،

$$[\ddot{r}^1_{pq} \quad \dots \quad \ddot{r}^N_{pq}]^{(T)} = \omega^2[r^1_{pq} \quad \dots \quad r^N_{pq}]^{(T)} \quad (۴۶)$$

لذا با جاگذاری معادله (۴۶) در معادله (۴۳)، معادلات مقادیر ویژه حاکم بر بسامدهای طبیعی حاصل می‌گردد:

$$\begin{bmatrix} [M_{mnpq}]^{(11)} & .. & 0 \\ .. & .. & 0 \\ 0 & 0 & [M_{mnpq}]^{(NN)} \end{bmatrix}^{(-1)} \times \begin{bmatrix} [K^{11}_{mnpq}] & .. & [K^{1N}_{mnpq}] \\ .. & .. & .. \\ [K^{N1}_{mnpq}] & .. & [K^{NN}_{mnpq}] \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{Bmatrix} [r_{pq}]^{(1)} \\ .. \\ [r_{pq}]^{(N)} \end{Bmatrix} \quad (۴۷)$$

با حل معادله (۴۷) می‌توان بسامدهای طبیعی و مدهای نظیر آن را یافت.

۳- اعتبارسنجی مدل

۳- ۱- اعتبارسنجی مدل خطی نیروی واندوالز بین نانوصفحات و فاصله تعادلی

جهت اعتبارسنجی معادلات استخراج شده جهت تقریب خطی اندرکنش بین نانوصفحات چند لایه ضرایب تقریب خطی نیروی واندروالز یک نانو صفحه ۱۰ لایه گرافن با استفاده از مقادیر $\varepsilon = ۲/۹۶۸\text{meV}$ و $\sigma = ۳/۴۰۷ = \text{Å}$ که برگرفته از مرجع [۵۴] می‌باشد، محاسبه شده است و با نتایج موجود در مرجع [۵۴] مقایسه شده‌اند (مراجعه شود به جدول ۲). همان‌گونه که دیده می‌شود، هم‌خوانی خوبی بین نتایج دیده می‌شود و براساس گزارش اعداد تا چهار رقم اعشار درصد اختلاف میان نتایج کمتر از ۰/۱ درصد می‌باشد. باید توجه داشت که علامت منفی معرف جذب دو لایه و علامت مثبت معرف دفع دولایه می‌باشد [۵۴].

شایان ذکر است که مقادیر گزارش شده متفاوتی برای پارامترهای لنارد-جونز در مراجع مختلف دیده می‌شود که این تفاوت‌ها تأثیر قابل توجهی بر ضرایب تقریب خطی نیروی واندروالز دارد. به عنوان نمونه مقادیر موجود در مرجع [۲۱] نیز (یعنی $\varepsilon = ۲/۶۳۵\text{meV}$ و $\sigma = ۳/۳۶۹ = \text{Å}$) برای تعیین ضرایب تقریب خطی واندروالز در یک نانوصفحه گرافن ۱۰ لایه استفاده شده است. نتایج این محاسبه در جدول ۳ آورده شده است. مقایسه نتایج موجود در جدول ۲ و جدول ۳ نشان می‌دهد که با کاهش حدودی ۱۱ درصد مقدار ε و ۱ درصد مقدار σ، بیشترین ضریب تقریب خطی نیروی واندروالز که بین لایه‌های مجاور دیده می‌شود ۲۸ درصد کاهش می‌یابد.

از سوی دیگر فاصله تعادلی محاسبه شده برای دو صفحه برن نیترید براساس معادلات پیشنهاد شده ۰/۳۴۰۶۷ نانومتر است که حدوداً ۱۰ درصد کمتر از مقدار گزارش شده در مرجع [۵۷] یعنی ۰/۳۸ نانومتر می‌باشد و

جدول ۲: مقایسه ضرایب تقریب خطی نیروی واندروالز، GPa.nm^{-1} بین هر دو لایه از یک نانوصفحه گرافن ۱۰ لایه‌ای (اعداد بالایی در هر ردیف مقادیر گزارش شده در مرجع [۵۴] می‌باشد و اعداد پایینی حاصل از محاسبات حاضر می‌باشد)

Table 2. Comparison of linear approximation of Lenard-Jones force coefficients between the two layers of a ten-layered graphene nanoplate (the presented data and the data reported by Ref. [54] are shown by the lower numbers and upper numbers, respectively)

شماره لایه	$j=۱$	$j=۲$	$j=۳$	$j=۴$	$j=۵$	$j=۶$	$j=۷$	$j=۸$	$j=۹$	$j=۱۰$
$i=۱$	۰ ۰	−۱۰۸/۶۵۱ −۱۰۸/۶۵۶	۱/۸۷۲۰۶ ۱/۸۷۲۲	۰/۱۶۸۸۹ ۰/۱۶۸۹	۰/۰۳۰۱۲ ۰/۰۳۰۱	۰/۰۰۷۹۰ ۰/۰۰۷۹	۰/۰۰۲۶۵ ۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۱۰۵ ۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۰۴۷ ۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۰۲۳ ۰/۰۰۰۲
$i=۲$	−۱۰۸/۶۵۱ −۱۰۸/۶۵۶	۰ ۰	−۱۰۸/۶۵۱ −۱۰۸/۶۵۶	۱/۸۷۲۰۶ ۱/۸۷۲۲	۰/۱۶۸۸۹ ۰/۱۶۸۹	۰/۰۳۰۱۲ ۰/۰۳۰۱	۰/۰۰۷۹۰ ۰/۰۰۷۹	۰/۰۰۲۶۵ ۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۱۰۵ ۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۰۴۷ ۰/۰۰۰۵
$i=۳$	۱/۸۷۲۰۶ ۱/۸۷۲۲	−۱۰۸/۶۵۱ −۱۰۸/۶۵۶	۰ ۰	−۱۰۸/۶۵۱ −۱۰۸/۶۵۶۸	۱/۸۷۲۰۶ ۱/۸۷۲۲	۰/۱۶۸۸۹ ۰/۱۶۸۹	۰/۰۳۰۱۲ ۰/۰۳۰۱	۰/۰۰۷۹۰ ۰/۰۰۷۹	۰/۰۰۲۶۵ ۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۱۰۵ ۰/۰۰۱۰
$i=۴$	۰/۱۶۸۸۹ ۰/۱۶۸۹	۱/۸۷۲۰۶ ۱/۸۷۲۲	−۱۰۸/۶۵۱ −۱۰۸/۶۵۶	۰ ۰	−۱۰۸/۶۵۱ −۱۰۸/۶۵۶	۱/۸۷۲۰۶ ۱/۸۷۲۲	۰/۰۳۰۱۲ ۰/۰۳۰۱	۰/۰۰۷۹۰ ۰/۰۰۷۹	۰/۰۰۲۶۵ ۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۰۴۷ ۰/۰۰۰۵
$i=۵$	۰/۰۳۰۱۲ ۰/۰۳۰۱	۰/۱۶۸۸۹ ۰/۱۶۸۹	۱/۸۷۲۰۶ ۱/۸۷۲۲	−۱۰۸/۶۵۱ −۱۰۸/۶۵۶	۰ ۰	−۱۰۸/۶۵۱ −۱۰۸/۶۵۶	۱/۸۷۲۰۶ ۱/۸۷۲۲	۰/۱۶۸۸۹ ۰/۱۶۸۹	۰/۰۳۰۱۲ ۰/۰۳۰۱	۰/۰۰۷۹۰ ۰/۰۰۷۹
$i=۶$	۰/۰۰۷۹۰ ۰/۰۰۷۹	۰/۰۳۰۱۲ ۰/۰۳۰۱	۰/۱۶۸۸۹ ۰/۱۶۸۹	۱/۸۷۲۰۶ ۱/۸۷۲۲	−۱۰۸/۶۵۱ −۱۰۸/۶۵۶	۰ ۰	−۱۰۸/۶۵۱ −۱۰۸/۶۵۶	۱/۸۷۲۰۶ ۱/۸۷۲۲	۰/۱۶۸۸۹ ۰/۱۶۸۹	۰/۰۳۰۱۲ ۰/۰۳۰۱
$i=۷$	۰/۰۰۲۶۵ ۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۷۹۰ ۰/۰۰۷۹	۰/۰۳۰۱۲ ۰/۰۳۰۱	۰/۱۶۸۸۹ ۰/۱۶۸۹	۱/۸۷۲۰۶ ۱/۸۷۲۲	−۱۰۸/۶۵۱ −۱۰۸/۶۵۶	۰ ۰	−۱۰۸/۶۵۱ −۱۰۸/۶۵۶	۱/۸۷۲۰۶ ۱/۸۷۲۲	۰/۱۶۸۸۹ ۰/۱۶۸۹
$i=۸$	۰/۰۰۱۰۵ ۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۲۶۵ ۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۷۹۰ ۰/۰۰۷۹	۰/۰۳۰۱۲ ۰/۰۳۰۱	۰/۱۶۸۸۹ ۰/۱۶۸۹	۱/۸۷۲۰۶ ۱/۸۷۲۲	−۱۰۸/۶۵۱ −۱۰۸/۶۵۶	۰ ۰	−۱۰۸/۶۵۱ −۱۰۸/۶۵۶	۱/۸۷۲۰۶ ۱/۸۷۲۲
$i=۹$	۰/۰۰۰۴۷ ۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۱۰۵ ۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۲۶۵ ۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۷۹۰ ۰/۰۰۷۹	۰/۰۳۰۱۲ ۰/۰۳۰۱	۰/۱۶۸۸۹ ۰/۱۶۸۹	۱/۸۷۲۰۶ ۱/۸۷۲۲	−۱۰۸/۶۵۱ −۱۰۸/۶۵۶	۰ ۰	−۱۰۸/۶۵۱ −۱۰۸/۶۵۶
$i=۱۰$	۰/۰۰۰۲۳ ۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۴۷ ۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۱۰۵ ۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۲۶۵ ۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۷۹۰ ۰/۰۰۷۹	۰/۰۳۰۱۲ ۰/۰۳۰۱	۰/۱۶۸۸۹ ۰/۱۶۸۹	۱/۸۷۲۰۶ ۱/۸۷۲۲	−۱۰۸/۶۵۱ −۱۰۸/۶۵۶	۰ ۰

جدول ۳: ضرایب تقریب خطی نیروی واندروالز، $GPa.nm^{-1}$ بین هر دو لایه از یک نانوصفحه گرافن ۱۰ لایه‌ای به ازاء ε=۲/۶۳۵ meV و σ=۳/۳۶۹ A

Table 3. Linear approximation of Lenard-Jones force coefficients between two layers of ten-layered graphene nanoplate with ε=2.635 meV and σ=3.369 A

شماره لایه	j =۱	j =۲	j =۳	j =۴	j =۵	j =۶	j =۷	j =۸	j =۹	j =۱۰
i =۱	۰	−۷۷/۶۴۹	۱/۵۵۷۰	۰/۱۴۰۲	۰/۰۲۵۰	۰/۰۰۶۶	۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۰۹	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۰۲
i =۲	−۷۷/۶۴۹	۰	−۷۷/۶۴۹	۱/۵۵۷۰	۰/۱۴۰۲	۰/۰۲۵۰	۰/۰۰۶۶	۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۰۹	۰/۰۰۰۴
i =۳	۱/۵۵۷۰	−۷۷/۶۴۹	۰	−۷۷/۶۴۹	۱/۵۵۷۰	۰/۱۴۰۲	۰/۰۲۵۰	۰/۰۰۶۶	۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۰۹
i =۴	۰/۱۴۰۲	۰/۵۵۷۰	−۷۷/۶۴۹	۰	−۷۷/۶۴۹	۱/۵۵۷۰	۰/۱۴۰۲	۰/۰۲۵۰	۰/۰۰۶۶	۰/۰۰۲۲
i =۵	۰/۰۲۵۰	۰/۱۴۰۲	۱/۵۵۷۰	−۷۷/۶۴۹	۰	−۷۷/۶۴۹	۱/۵۵۷۰	۰/۱۴۰۲	۰/۰۲۵۰	۰/۰۰۶۶
i =۶	۰/۰۰۶۶	۰/۰۲۵۰	۰/۱۴۰۲	۱/۵۵۷۰	−۷۷/۶۴۹	۰	−۷۷/۶۴۹	۱/۵۵۷۰	۰/۱۴۰۲	۰/۰۲۵۰
i =۷	۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۶۶	۰/۰۲۵۰	۰/۱۴۰۲	۱/۵۵۷۰	−۷۷/۶۴۹	۰	−۷۷/۶۴۹	۱/۵۵۷۰	۰/۱۴۰۲
i =۸	۰/۰۰۰۹	۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۶۶	۰/۰۲۵۰	۰/۱۴۰۲	۱/۵۵۷۰	−۷۷/۶۴۹	۰	−۷۷/۶۴۹	۱/۵۵۷۰
i =۹	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۰۹	۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۶۶	۰/۰۲۵۰	۰/۱۴۰۲	۱/۵۵۷۰	−۷۷/۶۴۹	۰	−۷۷/۶۴۹
i =۱۰	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۰۹	۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۶۶	۰/۰۲۵۰	۰/۱۴۰۲	۱/۵۵۷۰	−۷۷/۶۴۹	۰

جدول ٤: مقایسه بین بسامدهای بی‌بعد شده $\Omega_{mn}=\omega_{mn}h\sqrt{\rho/G}$ ورق مربعی با شرایط مرزی ساده

Table 4. Comparison between dimensionless frequencies ($\Omega_{mn}=\omega_{mn}h\sqrt{\rho/G}$) of a simply supported square plate

Ω_{mn}	نتایج حاضر	نتایج موجود در مرجع [۵۰]	نتایج حاصل از ورق ردی [۵۰]	% اختلاف با نتایج موجود در مرجع [۵۰]	% اختلاف با نتایج حاصل از ورق ردی [۵۰]
Ω_{11}	۰/۰۹۳۰۲	۰/۰۹۳۰	۰/۰۹۳۱	۰/۰۲	−۰/۰۸۵
Ω_{12}	۰/۲۲۱۹۵	۰/۲۲۲۰	۰/۲۲۲۲	−۰/۰۲	−۰/۰۲۲
Ω_{22}	۰/۳۴۰۶۲	۰/۳۴۰۶	۰/۳۴۱۱	۰/۰۰۵۸	−۰/۱۴
Ω_{13}	۰/۴۱۵۰۶	۰/۴۱۵۱	۰/۴۱۵۸	−۰/۰۰۹۶	−۰/۱۷
Ω_{23}	۰/۵۲۰۷۹	۰/۵۲۰۸	۰/۵۲۲۱	−۰/۰۰۱۹	−۰/۲۵

با افزایش تعداد لایه‌ها به مقدار ۰/۳۳ نانومتر نزدیک می‌شود که با نتایج گزارش شده در مرجع [۱۴ و ۵۷] هم‌خوانی خوبی دارد که این امر می‌تواند معرف یک نتیجه قابل قبول باشد.

۳- ۲- اعتبارسنجی معادلات استخراج شده حاکم بر بسامد طبیعی نانوصفحات

جهت صحت‌سنجی معادلات استخراج شده حاکم بر ارتعاش نانوورق‌ها، در ابتدا پنج بسامد اول بی‌بعد شده صفحه تک لایه کلاسیک ($l = l_1 = 0$) با نتایج موجود در مراجع [۵۰] در جدول ۴ مقایسه شده‌اند. درصد اختلاف مقادیر پیش‌بینی شده با نتایج گزارش شده در مرجع [۵۰] که با استفاده از نظریه ورق اصلاح شده دو متغیره (نظریه تغییرشکل برشی مرتبه بالا) حاصل شده‌اند نیز در جدول ۴ فهرست شده است. همان‌گونه که دیده می‌شود توافق خوبی میان داده‌ها وجود دارد. درصد اختلاف مقادیر پیش‌بینی شده با استفاده از نظریه ورق اصلاح شده دو متغیره (نظریه تغییرشکل برشی مرتبه بالا) و نظریه ورق ردی نیز در جدول ۴ فهرست شده است.

به منظور تأیید درستی نتایج حاصل از شبیه‌سازی نانوصفحات چند لایه، بسامد پایه هم‌فاز و غیر هم‌فاز یک نانوصفحه ده لایه گرافن که ضرایب مدل نیروی واندوالز بین لایه‌های آن در جدول ۲ فهرست شده است، محاسبه شده و با نتایج حاصل از فرمول پیشنهادی در مرجع [۵۸] مقایسه شده است. نتیجه این مقایسه در جدول ۵ نشان داده شده است و براساس درصد اختلاف موجود (ستون سوم در جدول ۵) توافق خوبی بین داده‌ها وجود دارد. اختلاف ۴/۲۷ درصد بین مقادیر پیش‌بینی شده برای بسامد غیر هم‌فاز، ناشی از این مهم است که در مرجع [۵۸] از فرضیات حاکم بر نظریه ورق کیرشوف

جدول ۵: مقایسه بین بسامدهای پایه هم‌فاز و غیر هم‌فاز بی‌بعد شده یک نانو صفحه ۱۰ لایه مربعی با شرایط مرزی ساده ($\Omega_{mn}=\omega_{mn}h\sqrt{\rho/G}$)

Table 5. Comparison between in-phase and out-of-phase dimensionless fundamental frequencies ($\Omega_{mn}=\omega_{mn}h\sqrt{\rho/G}$) of a ten-layered simply supported square nanoplate

Ω_{mn}	نتایج حاضر	با استفاده از فرمول پیشنهادی در مرجع [۵۸]	درصد اختلاف
Ω_{11} (هم‌فاز)	۰/۰۱۰۱۲	۰/۰۱۰۱۵	−۰/۲
Ω_{11} (غیر هم‌فاز)	۰/۰۸۷۲۷	۰/۰۹۱۱۷	−۴/۲۷

برای مطالعه رفتار ارتعاشی صفحات گرافن چند لایه بهره گرفته شده است و پذیرفته شده است که نظریه ورق کیرشف فقط در پیش‌بینی بسامد پایه ورق‌های نازک (بسامد نظیر پایین‌ترین مد) از دقت خوبی برخوردار است و بسامدهای مدهای بالاتر را بیشتر از مقدار واقعی تقریب می‌زند [۴۷].

۳- ۳- امکان‌سنجی استفاده از نظریه آیفانتیس توأم با گرادیان سرعت در تخمین رفتار ارتعاشی نانوصفحات گرافن/برن نیترید

در جدول ۶ نشان داده شده است که با استفاده از نظریه آیفانتیس توأم با گرادیان سرعت و انتخاب مناسب مقیاس طول در حالی‌که $l = l_1$ گذاشته شده است، می‌توان بسامد طبیعی نانوصفحات گرافن را پیش‌بینی کرد. بدین منظور از مقادیر بسامد پایه موجود در مرجع [۱۲] که براساس شبیه‌سازی دینامیک مولکولی تعیین شده‌اند، بهره گرفته شده است. خواص مواد و ابعاد هندسی مربوط به نانوصفحه دولایه آرمچیر l موجود در این مرجع برای داده‌گیری استفاده شده است. البته شایان ذکر است که با توجه به نسبت غیر ایزوتروپی نزدیک به ۱ صفحات گرافن، صفحات دو لایه گرافن به صورت ایزوتروپ مدل شده‌اند

جدول ٦: پیش‌بینی بسامد پایه گرافن (GHz) دو لایه با استفاده از نظریه آیفانتیس توام با گرادیان سرعت تحت دما

Table 6. Prediction of a two-layered graphene fundamental frequency by Aifantis's theory with velocity gradient in thermal environment

اختلاف دما K	مقیاس طول $l = l_1$ nm	روش حاضر	شبیه‌سازی دینامیک مولکولی [۱۲]
۰	۰/۱۱۵	۵۰/۴۲	۵۰/۴۲
۱۰۰	۰/۳۵	۳۹/۶۳	۳۹/۶۲
۲۰۰	۰/۳۵	۳۷/۴۲	۳۷/۴

٤- نتایج عددی و بحث

در این بخش از خواص ترمومکانیکی موجود در مرجع [۵۹] برای شبیه‌سازی نانوصفحات تک لایه مرکب یا چند لایه گرافن/برن نیترید استفاده شده است .

۴- ۱- نانوصفحات ترکیبی تک لایه گرافن/برن نیترید

شکل ۲ چگونگی منطقه‌بندی نانوصفات ترکیبی تک لایه گرافن/برن نیترید را که در این مطالعه مورد بررسی قرار گرفته‌اند نشان می‌دهد. اختصار استفاده شده در زیر هر شکل برای نامگذاری هر صفحه مرکب استفاده شده و در متن و /یا جداول و شکل‌ها از آنها استفاده می‌شود. انتخاب نوع چیدمان (نواری و مربعی)، از چیدمان‌های پیشنهاد شده در مرجع [۶۰] اقتباس شده‌اند. فرض شده است که کل مساحت گرافن نسبت به مساحت کل نانوورق ثابت باقی می‌ماند. در جدول ۷ تأثیر افزایش دما و چیدمان درون صفحه‌ای گرافن/ برن نیترید بر کوچکترین بسامد طبیعی نانوصفحه مرکب فهرست شده است.

همان‌گونه که از داده‌های جدول برمی‌آید، اضافه شدن برن نیترید به صفحات گرافن منجر به کاهش بسامد پایه نانوصفحه نسبت به گرافن خالص می‌گردد. باید توجه داشت که چگونگی قرار گرفتن صفحه برن نیترید در صفحه گرافن، تعداد و محل تمرکز آن بر بسامد پایه نانوورق مرکب حاصله، تأثیرگذار است. در نانوورق‌های نواری که با دو نوار گرافن محصور شده‌اند، افزایش تعداد نوارهای برن نیترید منجر به کاهش بیشتر بسامد پایه می‌گردد. باید یادآوری نمود که در تمام نمونه‌ها سطح اشغال شده توسط صفحات برن نیترید ثابت می‌باشد. تأثیر کاهشی افزایش دما بر بسامد پایه به سبب اثر نرم‌شدگی بار حرارتی–فشاری درون صفحه‌ای حاصله نیز در جدول ۷ مشهود می‌باشد. این درحالی است که نتایج حاصل از نظریه کلاسیک ($l = ۰\text{nm}$) رفتاری متفاوت را نشان می‌دهد (جدول ۸).

تمام ورق‌های مستطیلی نشان داده شده در شکل ۲ دارای طول و عرضی به اندازه ۱۱ و ۵ نانومتر می‌باشند. در تمام نمونه‌ها مساحت اشغال شده توسط برن نیترید ۱۵ نانومتر مربع می‌باشد. در نمونه‌های نواری، نوارهای برن نیترید دارای مساحت‌های برابر و نوارهای گرافن نیز دارای سطوح برابر هستند.

در نمونه‌های معرفی شده با نماد "مربعی" سطوح برن نیترید در میانه ورق گرافن پراکنده شده‌اند. در نمونه "مربعی ۱" طول و عرض صفحه برن نیترید به ترتیب ۵ و ۳ می‌باشد. این سطح در نمونه "مربعی ۲" به دو سطح مساوی که از یکدیگر به اندازه ۲ نانومتر فاصله دارند، تقسیم شده‌اند. فاصله طولی چهار سطح مساوی برن نیترید در نمونه "مربعی ۳"، ۲ نانومتر و فاصله عرضی آنها ۱ نانومتر است.

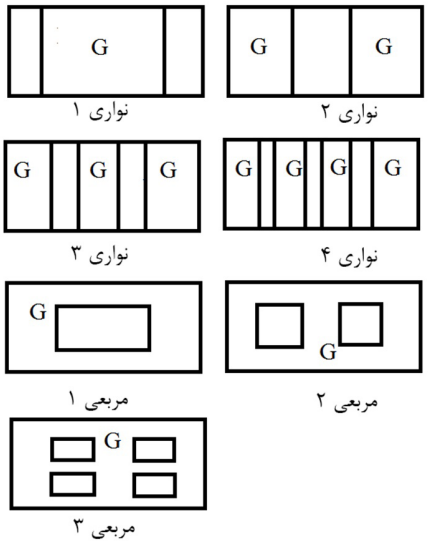

Fig. 2. Geometric dimensions and in-plane layout of G/BN

شکل ۲: ابعاد هندسی و چیدمان درون صفحه‌ای گرافن/برن نیترید.

همان‌گونه که جدول ۸ نشان می‌دهد در برخی از ورق‌های مرکب بسامد پایه از بسامد پایه صفحه خالص گرافن بیشتر است و در میان نمونه‌های

جدول ۷ : تأثیر چیدمان درون صفحه‌ای گرافن/برن نیترید بر کوچکترین بسامد طبیعی (THz) نانو صفحه مرکب (l=۰/۵ nm)

Table 7. The effects of in-plane layout of G/BN on the fundamental natural frequency (THz) of heterostractures (*l=0.5nm*)

نام شکل	$\Delta T=0$ K	$\Delta T=100$ K	$\Delta T=200$ K
گرافن	۰/۱۴۲۰	۰/۱۴۱۳	۰/۱۳۸۱
نواری ۱	۰/۱۳۵۶	۰/۱۳۵۲	۰/۱۳۲۱
نواری ۲	۰/۱۴۱۷	۰/۱۴۱۰	۰/۱۳۷۵
نواری ۳	۰/۱۴۰۱	۰/۱۳۹۵	۰/۱۳۶۱
نواری ۴	۰/۱۳۹۰	۰/۱۳۸۵	۰/۱۳۵۲
مربعی ۱	۰/۱۳۵۸	۰/۱۳۴۸	۰/۱۳۰۲
مربعی ۲	۰/۱۳۷۱	۰/۱۳۶۳	۰/۱۳۲۲
مربعی ۳	۰/۱۳۵۶	۰/۱۳۵۴	۰/۱۳۳۱

جدول ۸ : تأثیر مقیاس طول بر کوچکترین بسامد طبیعی (THz) نانو صفحه مرکب درون صفحه‌ای گرافن/برن نیترید (ΔT=۰K)

Table 8. The effects of length scale values on the fundamental natural frequency (THz) of heterostractures (ΔT=0K)

نام شکل	$l=0$ nm	$l=0.5$ nm	$l=1$ nm
گرافن	۰/۱۶۰۴	۰/۱۴۲۰	۰/۱۳۵۲
نواری ۱	۰/۱۵۴۲	۰/۱۳۵۶	۰/۱۳۰۰
نواری ۲	۰/۱۶۲۶	۰/۱۴۱۷	۰/۱۳۴۲
نواری ۳	۰/۱۶۰۵	۰/۱۴۰۱	۰/۱۳۳۲
نواری ۴	۰/۱۵۹۰	۰/۱۳۹۰	۰/۱۳۲۴
مربعی ۱	۰/۱۶۳۸	۰/۱۳۵۸	۰/۱۲۵۷
مربعی ۲	۰/۱۶۱۵	۰/۱۳۷۱	۰/۱۲۸۴
مربعی ۳	۰/۱۴۹۳	۰/۱۳۵۶	۰/۱۳۲۳

بررسی شده، بیشترین اختلاف متعلق به صفحه مربعی ۱ می‌باشد. براساس جدول ۸، همان‌گونه که انتظار می‌رود با افزایش مقیاس طول بسامد پایه هر ترکیب‌بندی کاهش می‌یابد.

تأثیر افزایش سطح برن نیترید نسبت به سطح کل نانوورق مرکب بر بسامد پایه، در جدول ۹ نشان داده شده است. بدین منظور نانوورق مرکب «نواری ۲» مورد استفاده قرار گرفته است. براساس جدول ۹ درصد سطح اشغال شده توسط برن نیترید می‌تواند بر افزایش یا کاهش بسامد صفحه مرکب مدل شده براساس نظریه کلاسیک ($l=0$) نسبت به بسامد گرافن خالص تأثیر بگذارد هرچند که به نظر می‌رسد با اعمال مقیاس طول، بسامد صفحه مرکب روندی کاهشی را طی می‌کند.

جدول ۹ : تأثیر افزایش سطح برن نیترید نسبت به سطح کل نانوصفحه مرکب بر کوچکترین بسامد طبیعی(THz) نانوصفحه مرکب درون صفحه‌ای گرافن/برن نیترید (ΔT=۰K)

Table 9. The effects of increasing the BN area-to-total area on the fundamental natural frequency of in-plane heterostructures

درصد سطح برن نیترید به سطح کل	$l=0$ nm	$l=0.5$ nm	$l=1$ nm
۰	۰/۱۶۰۴	۰/۱۴۲۰	۰/۱۳۵۲
۵/۵۵	۰/۱۶۱۲	۰/۱۴۲۰	۰/۱۳۵۰
۱۰/۵۵	۰/۱۶۲۰	۰/۱۴۱۹	۰/۱۳۴۷
۱۵/۵۵	۰/۱۶۲۶	۰/۱۴۱۷	۰/۱۳۴۲
۲۰/۵۵	۰/۱۶۲۹	۰/۱۴۰۰	۰/۱۳۳۴
۲۵/۵۵	۰/۱۶۲۶	۰/۱۳۹۹	۰/۱۳۲۱
۳۰/۵۵	۰/۱۶۱۵	۰/۱۳۸۰	۰/۱۳۰۲
۳۵/۵۵	۰/۱۵۹۵	۰/۱۳۵۲	۰/۱۲۷۷
۴۰/۵۵	۰/۱۵۶۵	۰/۱۳۱۷	۰/۱۲۴۶

جدول ۱۰: تأثیر تعداد لایه‌ها و چیدمان لایه‌های گرافن و برن نیترید بر بسامد پایه هم‌فاز و غیرهم‌فاز (ΔT= ۰ K ، l=۰/۵ nm)

The effects of number of layers as well as layers arrangement on in-phase and out-of-phase frequencies (ΔT=0K ، l=0. nm)

تعداد لایه و نوع چیدمان	بسامد هم‌فاز ω_{11},THz	بسامد غیر هم‌فاز $\bar{\omega}_{11}$,THz
BN/G/BN	۰/۲۵۱۱	۳/۱۲۲۸
G/BN/BN	۰/۲۵۱۱	۲/۸۴۰۷
G/BN/G	۰/۲۵۹۱	۲/۲۳۹۵
G/G/BN	۰/۲۵۹۱	۲/۲۳۵۹
BN/BN/G/BN/BN	۰/۲۴۶۵	۱/۹۹۹۱
G/BN/BN/BN/BN	۰/۲۴۶۵	۱/۹۲۵۶
BN/BN/BN/G/BN	۰/۲۴۶۵	۱/۹۷۰۲
G/BN/BN/BN/G	۰/۲۵۳۰	۱/۶۴۶۶
BN/G/BN/G/BN	/۲۵۳۰	۱/۶۸۵۲
G/G/BN/BN/BN	۰/۲۵۳۰	۱/۶۵۲۹
BN/G/G/BN/BN	۰/۲۵۳۰	۱/۶۴۵۵

۴- ۲- صفحات مرکب لایه‌ای گرافن/برن نیترید

تأثیر تعداد لایه‌های گرافن و برن نیترید در نانوصفحه چند لایه و چگونگی چیدمان آنها بر کوچکترین بسامد هم‌فاز و غیر هم‌فاز نانوصفحهٔ چند لایه در جدول ۱۰ بررسی شده است. نانو صفحات مربعی دارای ابعاد ۵ نانومتر در ۵ نانومتر می‌باشند.

در جدول ۱۰، BN معرف نانوصفحه برن نیترید و G معرف نانوصفحه گرافن می‌باشد. براساس نتایج موجود در جدول ۱۰، در تعداد لایه برابر، نانوصفحه‌ای که دارای صفحات گرافن بیشتری است، دارای بسامد پایه بزرگتری است؛ اما با افزایش تعداد لایه‌های برن نیترید (به ازای تعداد صفحات گرافن ثابت) بسامد پایه کاهش می‌یابد. در تعداد ثابت لایه‌ها (لایه‌های گرافن و برن نیترید) تغییر در چیدمان صفحات بر بسامد پایه هم‌فاز بی‌تأثیر است که به سبب غیرفعال بودن نیروی واندوالز معادل شده در مد ارتعاش هم‌فاز می‌باشد. در حالی‌که تغییر در چیدمان منجر به تغییر در سختی فنر خطی معادل نیروی واندوالز می‌گردد که بیشترین تأثیر را در بسامدهای غیرهم فاز نشان می‌دهد؛ لذا بسامد پایه غیرهم فاز تحت تأثیر چیدمان افزایش یا کاهش می‌یابند.

تأثیر کاهشی افزایش دما و مقیاس طول بر بسامد پایه هم‌فاز و غیر هم‌فاز در شکل ۳ نشان داده شده است. همان‌گونه که دیده می‌شود تأثیر دما بر بسامد غیرهم فاز چندان ملموس نیست.

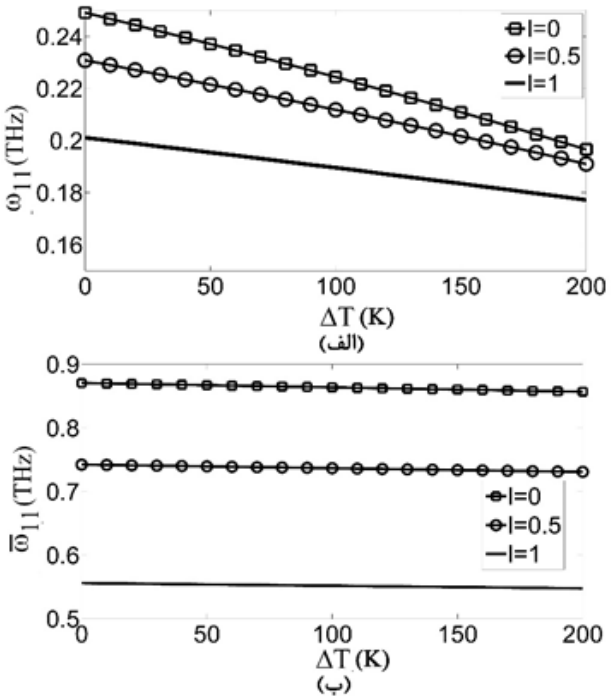

Fig. 3. The effects of temperature rise and length scale values on (a) the in-phase and (b) out-of-phase natural frequencies of BN/BN/G/BN/BN/G/BN/BN/G/BN/BN

شکل ۳: تأثیر افزایش دما ،K و مقیاس طول، nm بر بسامد الف) هم فاز (ω_{11}) و ب) غیر هم فاز (ω_{11}) نانو صفحه ۱۱ لایه با چیدمانِ BN/BN/G/BN/BN/G/BN/BN/G/BN/BN

۵- نتیجه‌گیری

در این مطالعه بسامد پایه نانوصفحات مرکب ساخته شده از گرافن و برن نیترید تک لایه و چند لایه بر پایه مدل غیرکلاسیک ورق اصلاح شده دومتغیره تخمین زده شده است.

با توجه به اهمیت نیروی واندوالز در مطالعه نانوصفحات چند لایه شکل گرفته براساس این نیرو، در ابتدا تقریب خطی نیروی واندوالز میان صفحات گرافن/برن نیترید فرموله گشته است. دیده می‌شود که سختی نظیر فنر خطی معادل نیروی واندوالز میان لایه‌ها براساس چیدمان لایه‌ها تغییر می‌کند. همچنین نتایج نشان می‌دهند که:

۱. پارامترهای لناردجونز تأثیر قابل توجهی بر ضرایب تقریب خطی نیروی واندروالز دارند که به نوبه خود می‌تواند بر مقادیر پیش‌بینی شده بسامدهای غیر هم‌فاز نانوصفحات چند لایه تأثیرگذار باشد.

۲. در تعداد لایه‌های ثابت، تغییر در چیدمان تأثیری بر بسامد هم‌فاز نانوصفحه مرکب ندارد.

۳. با چیدمان مناسب لایه‌های گرافن و برن نیترید می‌توان بسامد غیر هم‌فاز را کمینه یا بیشینه کرد.

۴. با افزایش تعداد لایه‌های برن نیترید که به صورت زیر لایه گرافن یا پوشاننده گرافن استفاده می‌شوند، بسامد پایه نانوصفحه مرکب کاهش می‌یابد.

۵. در نانوصفحه تک لایه مرکب نواری، در نسبت سطح برن نیترید به سطح گرافن ثابت، نانوصفحه‌ای که با تعداد نوارهای برن نیترید بیشتری تقسیم شده است دارای بسامد پایه کمتری است.

۶. با افزایش دما و مقیاس طول بسامد طبیعی نانوصفحات مرکب (تک لایه یا لایه‌ای) کاهش می‌یابد.

ضمیمه الف

$$[M_{mnpq}]^{(kk)}=\begin{bmatrix}[M]_{uu} & 0 & 0 & 0\\ 0 & [M]_{vv} & 0 & 0\\ 0 & 0 & [M]_{w_bw_b} & [M]_{w_bw_s}\\ 0 & 0 & [M]_{w_sw_b} & [M]_{w_sw_s}\end{bmatrix}^{(kk)}$$

(الف-۱)

که در آن

$$[M]_{uu}=\int_0^a\int_0^b h\rho(\varphi_{umn}\varphi_{upq}+l_1^2\frac{\partial\varphi_{umn}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{upq}}{\partial x}+l_1^2\frac{\partial\varphi_{umn}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{upq}}{\partial y})dxdy$$

$$[M]_{vv}=\int_0^a\int_0^b h\rho(\varphi_{vmn}\varphi_{vpq}+l_1^2\frac{\partial\varphi_{vmn}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{vpq}}{\partial x}+l_1^2\frac{\partial\varphi_{vmn}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{vpq}}{\partial y})dxdy$$

$$[M]_{w_bw_b}=\int_0^a\int_0^b \rho h(\frac{h^2}{12}+2l_1^2)(\frac{\partial\varphi_{Bmn}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{Bpq}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{Bmn}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{Bpq}}{\partial y})dxdy$$
$$+\int_0^a\int_0^b \frac{h^3}{12}\rho l_1^2(\frac{\partial^2\varphi_{Bmn}}{\partial^2 x}\frac{\partial^2\varphi_{Bpq}}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2\varphi_{Bmn}}{\partial^2 y}\frac{\partial^2\varphi_{Bpq}}{\partial^2 y}+2\frac{\partial^2\varphi_{Bmn}}{\partial y\partial x}\frac{\partial^2\varphi_{Bpq}}{\partial y\partial x})dxdy$$
$$+\int_0^a\int_0^b \rho h\varphi_{Bmn}\varphi_{Bpq}dxdy$$

$$[M]_{w_bw_s}=\int_0^a\int_0^b \rho h\varphi_{Smn}\varphi_{Bpq}dxdy$$
$$+\int_0^a\int_0^b \frac{7\rho l^2h}{6}(\frac{\partial\varphi_{Smn}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{Bpq}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{Smn}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{Bpq}}{\partial y})dxdy$$

$$[M]_{w_sw_b}=\int_0^a\int_0^b \rho h\varphi_{Bmn}\varphi_{Spq}dxdy$$
$$+\int_0^a\int_0^b \frac{7\rho l^2h}{6}(\frac{\partial\varphi_{Spq}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{Bmn}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{Spq}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{Bmn}}{\partial y})dxdy$$

$$[M]_{w_sw_s}=\int_0^a\int_0^b \rho\left[\frac{h^3}{1008}(\frac{\partial\varphi_{Smn}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{Spq}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{Smn}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{Spq}}{\partial y})+\varphi_{Smn}\varphi_{Spq}\right]dxdy$$
$$+\int_0^a\int_0^b \frac{h^3}{1008}\rho l_1^2(\frac{\partial^2\varphi_{Smn}}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi_{Spq}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_{Smn}}{\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi_{Spq}}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2\varphi_{Smn}}{\partial y\partial x}\frac{\partial^2\varphi_{Spq}}{\partial y\partial x})dxdy$$
$$+\int_0^a\int_0^b \frac{7h\rho l_1^2}{6}(\frac{\partial\varphi_{S_{mn}}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{S_{pq}}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{S_{mn}}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{S_{pq}}}{\partial y})dxdy$$

(الف-۲)

و

$$\left[K_{mnpq}^{(kk)}\right]=\begin{bmatrix}[K]_{uu} & [K]_{uv} & 0 & 0\\ [K]_{vu} & [K]_{vv} & 0 & 0\\ 0 & 0 & [K]_{w_bw_b} & [K]_{w_bw_s}\\ 0 & 0 & [K]_{w_sw_b} & [K]_{w_sw_s}\end{bmatrix}^{(kk)}$$

(الف-۳)

که در آن

$$[K]_{uu}=\int_0^a\int_0^b h(Q_{11}\frac{\partial\varphi_{umn}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{upq}}{\partial x}+Q_{66}\frac{\partial\varphi_{umn}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{upq}}{\partial x})dxdy$$
$$-\int_0^a\int_0^b hl^2(Q_{11}(\frac{\partial^3\varphi_{umn}}{\partial x^3}\frac{\partial\varphi_{upq}}{\partial x}+\frac{\partial^3\varphi_{umn}}{\partial x\partial y^2}\frac{\partial\varphi_{upq}}{\partial x}))dxdy$$
$$-\int_0^a\int_0^b hl^2(Q_{66}(\frac{\partial^3\varphi_{umn}}{\partial y\partial x^2}\frac{\partial\varphi_{upq}}{\partial y}+\frac{\partial^3\varphi_{umn}}{\partial y^3}\frac{\partial\varphi_{upq}}{\partial y}))dxdy$$

$$[K]_{uv}=\int_0^a\int_0^b hQ_{12}(\frac{\partial\varphi_{vmn}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{upq}}{\partial x}-l^2\frac{\partial^3\varphi_{vmn}}{\partial y^3}\frac{\partial\varphi_{upq}}{\partial x})dxdy$$
$$-\int_0^a\int_0^b (hQ_{12}l^2\frac{\partial^3\varphi_{vmn}}{\partial x^2\partial y}\frac{\partial\varphi_{upq}}{\partial x}+Q_{66}hl^2\frac{\partial^3\varphi_{vmn}}{\partial y^2\partial x}\frac{\partial\varphi_{upq}}{\partial y})dxdy$$
$$+\int_0^a\int_0^b Q_{66}h(\frac{\partial\varphi_{vmn}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{upq}}{\partial y}-l^2\frac{\partial^3\varphi_{vmn}}{\partial x^3}\frac{\partial\varphi_{upq}}{\partial x})dxdy$$

$$[K]_{vu}=\int_0^a\int_0^b hQ_{12}(\frac{\partial\varphi_{vpq}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{umn}}{\partial x}-l^2\frac{\partial\varphi_{vpq}}{\partial y}\frac{\partial^3\varphi_{umn}}{\partial x^3})dxdy$$
$$-\int_0^a\int_0^b (hQ_{12}l^2\frac{\partial\varphi_{vpq}}{\partial y}\frac{\partial^3\varphi_{umn}}{\partial x\partial y^2}+Q_{66}hl^2\frac{\partial^3\varphi_{umn}}{\partial y^3}\frac{\partial\varphi_{vpq}}{\partial x})dxdy$$
$$+\int_0^a\int_0^b Q_{66}h(\frac{\partial\varphi_{umn}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{vpq}}{\partial x}-l^2\frac{\partial^3\varphi_{umn}}{\partial x^2\partial y}\frac{\partial\varphi_{vpq}}{\partial x})dxdy$$

$$[K]_{vv}=\int_0^a\int_0^b h(Q_{11}\frac{\partial\varphi_{vmn}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{vpq}}{\partial y}+Q_{66}\frac{\partial\varphi_{vmn}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{vpq}}{\partial x})dxdy$$
$$-\int_0^a\int_0^b hl^2(Q_{11}(\frac{\partial^3\varphi_{vmn}}{\partial y^3}\frac{\partial\varphi_{vpq}}{\partial y}+\frac{\partial^3\varphi_{vmn}}{\partial x^2\partial y}\frac{\partial\varphi_{vpq}}{\partial y}))dxdy$$
$$-\int_0^a\int_0^b hl^2(Q_{66}(\frac{\partial^3\varphi_{vmn}}{\partial x^3}\frac{\partial\varphi_{vpq}}{\partial x}+\frac{\partial^3\varphi_{vmn}}{\partial x\partial y^2}\frac{\partial\varphi_{vpq}}{\partial x}))dxdy$$

$$[K]_{w_b w_b} =$$

$$-\int_0^a\int_0^b h\alpha\Delta T(Q_{11}(\frac{\partial\varphi_{Bmn}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{Bpq}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{Bmn}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{Bpq}}{\partial y}))dxdy$$

$$-\int_0^a\int_0^b h\alpha\Delta T(Q_{12}(\frac{\partial\varphi_{Bmn}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{Bpq}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{Bmn}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{Bpq}}{\partial y}))dxdy$$

$$+\int_0^a\int_0^b \frac{h^3}{12}(Q_{11}(\frac{\partial^2\varphi_{Bmn}}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi_{Bpq}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_{Bmn}}{\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi_{Bpq}}{\partial y^2}))dxdy$$

$$+\int_0^a\int_0^b \frac{h^3}{12}Q_{12}(\frac{\partial^2\varphi_{Bmn}}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi_{Bpq}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi_{Bmn}}{\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi_{Bpq}}{\partial x^2})dxdy$$

$$-\int_0^a\int_0^b \frac{h^3}{12}l^2(Q_{11}(\frac{\partial^4\varphi_{Bmn}}{\partial x^4}\frac{\partial^2\varphi_{Bpq}}{\partial x^2}+\frac{\partial^4\varphi_{Bmn}}{\partial y^2\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi_{Bpq}}{\partial x^2})dxdy$$

$$-\int_0^a\int_0^b \frac{h^3l^2}{12}Q_{12}(\frac{\partial^4\varphi_{Bmn}}{\partial y^4}\frac{\partial^2\varphi_{Bpq}}{\partial x^2}+\frac{\partial^4\varphi_{Bmn}}{\partial y^2\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi_{Bpq}}{\partial x^2})dxdy$$

$$-\int_0^a\int_0^b \frac{h^3}{12}l^2(Q_{12}(\frac{\partial^4\varphi_{Bmn}}{\partial x^4}\frac{\partial^2\varphi_{Bpq}}{\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi_{Bmn}}{\partial x^2\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi_{Bpq}}{\partial y^2})dxdy$$

$$-\int_0^a\int_0^b \frac{h^3}{12}l^2Q_{11}(\frac{\partial^4\varphi_{Bmn}}{\partial y^4}\frac{\partial^2\varphi_{Bpq}}{\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi_{Bmn}}{\partial y^2\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi_{Bpq}}{\partial y^2})dxdy$$

$$+\int_0^a\int_0^b \frac{4h^3}{12}Q_{66}(\frac{\partial^2\varphi_{Bmn}}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\varphi_{Bpq}}{\partial y\partial x}-l^2\frac{\partial^4\varphi_{Bmn}}{\partial x^3\partial y}\frac{\partial^2\varphi_{Bpq}}{\partial y\partial x})dxdy$$

$$+\sum_{j=1}^{N}(-\bar{C}_{kj})\int_0^a\int_0^b \varphi_{B_{mn}}\varphi_{B_{pq}}dxdy$$

$$[K]_{w_b w_s} =$$

$$-\int_0^a\int_0^b h\alpha\Delta T(Q_{11}(\frac{\partial\varphi_{Smn}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{Bpq}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{Smn}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{Bpq}}{\partial y}))dxdy$$

$$-\int_0^a\int_0^b h\alpha\Delta TQ_{12}(\frac{\partial\varphi_{Smn}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{Bpq}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{Smn}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{Bpq}}{\partial y})dxdy$$

$$+\sum_{j=1}^{N}(-\bar{C}_{kj})\int_0^a\int_0^b \varphi_{s_{mn}}\varphi_{B_{pq}}dxdy$$

$$[K]_{w_s w_b} =$$

$$-\int_0^a\int_0^b h\alpha\Delta TQ_{11}(\frac{\partial\varphi_{Spq}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{Bmn}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{Spq}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{Bmn}}{\partial y})dxdy$$

$$-\int_0^a\int_0^b h\alpha\Delta TQ_{12}(\frac{\partial\varphi_{Spq}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{Bmn}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{Spq}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{Bmn}}{\partial y})dxdy$$

$$+\sum_{j=1}^{N}(-\bar{C}_{kj})\int_0^a\int_0^b \varphi_{s_{pq}}\varphi_{B_{mn}}dxdy$$

$$[K]_{w_s w_s} =$$

$$-\int_0^a\int_0^b h\alpha\Delta T(Q_{11}(\frac{\partial\varphi_{Spq}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{Smn}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{Spq}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{Bmn}}{\partial y}))dxdy \quad \text{(الف-۴)}$$

$$-\int_0^a\int_0^b h\alpha\Delta TQ_{12}(\frac{\partial\varphi_{Spq}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{Smn}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{Spq}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{Smn}}{\partial y})dxdy$$

$$+\int_0^a\int_0^b \frac{h^3}{1008}(Q_{11}(\frac{\partial^2\varphi_{Spq}}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi_{Smn}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_{Spq}}{\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi_{Smn}}{\partial y^2})dxdy$$

$$+\int_0^a\int_0^b \frac{h^3}{1008}Q_{12}(\frac{\partial^2\varphi_{Spq}}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi_{Smn}}{\partial y^2})dxdy$$

$$-\int_0^a\int_0^b \frac{h^3l^2}{1008}Q_{11}(\frac{\partial^2\varphi_{Spq}}{\partial x^2}\frac{\partial^4\varphi_{Smn}}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi_{Spq}}{\partial x^2}\frac{\partial^4\varphi_{Smn}}{\partial x^4})dxdy$$

$$-\int_0^a\int_0^b \frac{h^3l^2}{1008}Q_{11}(\frac{\partial^2\varphi_{Spq}}{\partial y^2}\frac{\partial^4\varphi_{Smn}}{\partial y^4}+\frac{\partial^2\varphi_{Spq}}{\partial y^2}\frac{\partial^4\varphi_{Smn}}{\partial x^2\partial y^2})dxdy$$

$$-\int_0^a\int_0^b \frac{h^3l^2}{1008}(Q_{12}(\frac{\partial^2\varphi_{Spq}}{\partial y^2}\frac{\partial^4\varphi_{Smn}}{\partial x^4}+\frac{\partial^2\varphi_{Spq}}{\partial y^2}\frac{\partial^4\varphi_{Smn}}{\partial x^2\partial y^2})dxdy$$

$$+\int_0^a\int_0^b 4\frac{h^3}{1008}Q_{66}(\frac{\partial^2\varphi_{Spq}}{\partial y\partial x}\frac{\partial^2\varphi_{Smn}}{\partial y\partial x})dxdy$$

$$-\int_0^a\int_0^b 4\frac{h^3}{1008}Q_{66}l^2(\frac{\partial^2\varphi_{Spq}}{\partial y\partial x}\frac{\partial^4\varphi_{Smn}}{\partial y\partial x^3}+\frac{\partial^2\varphi_{Spq}}{\partial y\partial x}\frac{\partial^4\varphi_{Smn}}{\partial y^3\partial x})dxdy$$

$$+\int_0^a\int_0^b (\frac{5h}{6}Q_{66}-\frac{25}{3h}l^2Q_{66})(\frac{\partial\varphi_{Spq}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{Smn}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{Spq}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{Smn}}{\partial y})dxdy$$

$$-\int_0^a\int_0^b \frac{5h}{6}l^2Q_{66}(\frac{\partial\varphi_{Spq}}{\partial y}\frac{\partial^3\varphi_{Smn}}{\partial y^3}+\frac{\partial\varphi_{Spq}}{\partial y}\frac{\partial^3\varphi_{Smn}}{\partial y\partial x^2})dxdy$$

$$-\int_0^a\int_0^b \frac{5h}{6}l^2Q_{66}(\frac{\partial\varphi_{Spq}}{\partial x}\frac{\partial^3\varphi_{Smn}}{\partial x^3}+\frac{\partial\varphi_{Spq}}{\partial x}\frac{\partial^3\varphi_{Smn}}{\partial x\partial y^2})dxdy$$

$$+\sum_{j=1}^{N}(-\bar{C}_{kj})\int_0^a\int_0^b \varphi_{s_{mn}}\varphi_{s_{pq}}dxdy$$

(الف-۴)

و

$$[K_{mnpq}^{(ef)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [K^{ef}]_{BB} & [K^{ef}]_{BS} \\ 0 & 0 & [K^{ef}]_{SB} & [K^{ef}]_{SS} \end{bmatrix}^{(ef)} \quad (e \neq f)$$

(الف-۵)

که e و f معرف شماره ورق‌های مرتبط با نیروی واندروالز می‌باشد.

و

$$[K^{ef}]_{BB} = \bar{C}_{ef} \int_0^a \int_0^b \varphi_{B_{mn}} \varphi_{B_{pq}} dxdy$$

$$[K^{ef}]_{BS} = \bar{C}_{ef} \int_0^a \int_0^b \varphi_{s_{mn}} \varphi_{B_{pq}} dxdy$$

$$[K^{ef}]_{BS} = \bar{C}_{ef} \int_0^a \int_0^b \varphi_{B_{mn}} \varphi_{s_{pq}} dxdy \qquad \text{(الف-۶)}$$

$$[K^{ef}]_{SS} = \bar{C}_{ef} \int_0^a \int_0^b \varphi_{s_{mn}} \varphi_{s_{pq}} dxdy$$

در معادلات بالا a و b معرف طول و عرض ورق‌هاست و ρ ، h و α معرف چگالی مخصوص، ضخامت و ضریب انبساط حرارتی لایه kام می‌باشد. ($-\bar{C}_{ef}$) معرف ضریب سختی فنر خطی معادل نیروی واندروالز میان دو لایه e و f می‌باشد و مقدار $\bar{C}_{ef}$ با توجه به تعداد لایه‌ها و چگونگی چیدمان به شیوه توضیح داده شده در بخش ۲ محاسبه می‌گردد. همچنین N معرف تعداد کل لایه‌های مدل شده می‌باشد.

توابع شکل استفاده شده در معادلات بالا به توجه به شرایط مرزی ساده به صورت زیر انتخاب شده‌اند؛ چرا که شرایط مرزی هندسی را ارضا می‌کنند:

$$\varphi_{umn} = \sin(\frac{m\pi x}{a})\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\varphi_{vmn} = \cos(\frac{m\pi x}{a})\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\varphi_{Bmn} = \sin(\frac{m\pi x}{a})\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \qquad \text{(الف-۷)}$$

$$\varphi_{Smn} = \sin(\frac{m\pi x}{a})\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

مراجع

[1] X. Y. Sun, Z. Fu., M. Xia, Y. Xu, Effect of vacancy defect on the tensile behavior of graphene, *Theoretical and Applied Mechanics Letters,* 4(2014), 051002.

[2] A. Zandiatashbar, G-H. Lee, S.J. An, S. Lee, N. Mathew, M. Terrones, T. Hayashi, C.R. Picu, J. Hone, N. Koratkar, Effect of defects on the intrinsic strength and stiffness of grapheme, *Nature Communications,* (2014) DOI: 10.1038/ ncomms4186.

[3] L. Murmu, S.C. Pradhan, Buckling of biaxially compressed orthotropic plates at small scales. *Mechanics Research Communications, 36(2009).933-938*.

[4] M.H. Mahdavi, L.Y. Jiang, X. Sun, Nonlinear vibration and postbuckling analysis of single layer graphene sheet embedded in a polymer matrix, *Physica E*, 44(2012)1708-1715.

[5] K. Yang, Y. Chen, F. Pan, S. Wang, Y. Ma, Q. Liu, Buckling Behavior of Substrate Supported Graphene Sheets, *Materials*, 9(32) (2016) DOI:10.3390/ma9010032.

[6] A. Anjomshoa, A.R. Shahidi, B. Hassani, E. Jomehzadeh, Finite element buckling analysis of multi-layered grapheme sheets on elastic substrate based on nonlocal elasticity theory, *Applied Mathematical Modelling,* 38 (2014) 5934-5955.

[7] D. Karlicic, M. Cajic, P. Kozic, I. Pavlovic, 2015, Temperature effects on the vibration and stability behavior of multi-layered graphene sheets embedded in an elastic medium*, Composite Structures*, 131(2015) 672-681.

[8] S.C. Pradhan, J.K. Phadikar, Small scale effect on vibration of embedded multilayered graphene sheets based on nonlocal continuum models, *Physics Letters A*, 373 (2009)1062-1069.

[9] T. Murmu, S. Adhikari, Nonlocal mass nanosensors based on vibrating monolayer graphene sheets, *Sensors and Actuators B: Chemical*, 188(2013)1319-1327.

[10] D. Karlicic, P. Kozic, R. Pavlovic, Free transverse vibration of nonlocal viscoelastic orthotropic multi-nanoplate system (MNPS) embedded in a viscoelastic medium, *Composite Structures*, 115 (2014) 89-99.

[11] D. Karlicic, P. Kozic, S. Adhikari, M. Cajic, T. Mutmu, M. Lazarevic, Nonlocal mass-nanosensor model based on the damped vibration of single-layer grapheme sheet influenced by in-plane magnetic field, *International Journal of Mechanical Sciences*, 96-97 (2015) 132-142.

[12] H.S. Shen, Y-M Xu, C.-L Zhang, Prediction of nonlinear vibration of bilayer graphene sheets in thermal environments via molecular dynamics simulations and nonlocal elasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 267 (2013) 458–470.

[13] E. Jomehzadeh, A.R. Saidi, N.M. Pugno, Large amplitude vibration of a bilayer grapheme embedded in a nonlinear polymer matrix, *Physica E*, 44(2012)1973-1982.

[14] D. Golberg, Y. Bando, Y. Huang, T. Terao, M. Mitome, C. Tang, C. Zhi, Boron nitride nanotubes and nanosheets, *ACSNano*,4(2010)2979-2993.

[15] L. Boldrin, F. Scarpa, R. Chwdhury, S. Adhikari, Effective mechanical properties of hexagonal boron nitride nanosheets, *Nanotechnology*, 22(2011) 505702.

[16] Q. Peng, W. Ji, S. De, Mechanical properties of the hexagonal boron nitride monolayer: Ab initio study,

[30] R.D. Mindlin, N.N. Eshel, On first strain-gradient theories in linear elasticity, *International Journal of Solids and Structures*,4(1968)109 -124.

[31] B. Altan, E.C. Aifantis, On some aspects in the special theory of gradient elasticity, *Journal of the Mechanical Behavior of Matherials*, 8(1997)231–282.

[32] D.C.C. Lam, F. Yang, A.C.M. Chong, J. Wang, P. Tong,"Experiments and theory in strain gradient elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*,51(2003)1477 – 1508.

[33] R.D. Mindlin, H.F. Tiersten, Effects of couple-stresses in linear elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*,11(1962)415-448.

[34] F. Yang, A.C. Chong, D.C.C. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, International *Journal of Solids and Structures*, 39(2002)2731-2743.

[35] A. Ashoori Movassagh, A.M.J. Mahmoodi. A micro-scale modeling of Kirchhoff plate based on modified strain-gradient elasticity theory, *European Journal of Mechanics A-Solids*, 40(2013)50-59.

[36] S. Ziaee, M. Asadipour, The effect of small scale on torsional buckling of the embedded double-to five-walled nanotubes under axial loading and thermal field, Am*irkabir Journal of Science & Research (Mechanical Engineering)*, 46(2014)25-27.

[37] Y.Q. Zhang, G.R. Liu, X.Y. Xie, Free transverse vibrations of double-walled carbon nanotubes using a theory of nonlocal elasticity, *Physical Review B*, 9(2005)195404.

[38] Y.-G. Hu, K.M. Liew, Q. Wang, X.Q. He, B.I. Yakobson, Nonlocal shell model for elastic wave propagation in single- and doublewalled carbon nanotubes, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56 (2008) 3475–3485.

[39] F. Khademolhosseini, R.K.N.D. Rajapakse, A. Nojeh , Torsional buckling of carbon nanotubes based on nonlocal elasticity shell models, *Computational Materials Science*,48(2010)736–742.

[40] R. Ansari, S. Sahmani, H. Rouhi, Rayleigh-Ritz axial buckling analysis of single-walled carbon nanotubes with different boundary conditions, *Physics Letters A*, 375(2011)1255–1263.

[41] W.H. Duan, C.M. Wang, Y.Y. Zhang, Calibration of nonlocal scaling effect parameter for free vibration of carbon nanotubes by molecular dynamics, *Journal of Applied Physics*,101(2007)024305.

[42] R. Ansari, S. Sahmani, B Arash, , Nonlocal plate model for free vibrations of single-layered graphene sheets, *Physics Letters A*, 375(2010) 53–62.

Computational Materials Science,56(2012)11-17.

[17] K.N. Kudin, G.E. Scuseria, B.I. Yakobson, F2C,BN and C nanoshell elasticity from ab initio computations, *Physical Review B*, 64(2001)235406.

[18] J.F. Green, T.K. Bolland, J.W. Bolland, Theoretical elastic behavior for hexagonal boron nitride, *Journal of Chemical Physics*, 64(1976) 656-662.

[19] B. Akdim, R. Pachter, X. Duan, W. Adams, Comparative theoretical study of single-wall carbon and boron-nitride nanotubes, *Physical Review*, 67(2003) 245404.

[20] J. Yuan, K.M. Liew, Internal friction characteristic and analysis of inplane natural frequency of trilayer complexes formed from graphenes and boron nitride nanosheets, *RSC Advances*., 4(2014)45425–45432.

[21] D. Baowan, J.M. Hill, *Nested boron nitride and carbon-boron nitride nanocones*, Micro and Nano Letters,2, (2007)46-49.

[22] S. Zhao, J. Xue, Mechanical properties of hybrid graphene and hexagonal boron nitride sheets as revealed by molecular dynamic simulations, *Journal of Physics D: A Aplied Physics*,46(2013)135303.

[23] S. Park, C. Park, G. Kim, Interlayer coupling enhancement in graphene/hexagonal boron nitride heterostructures by intercalated defects or vacancies, *The Journal of Chemical Physics*, 140(2014) 134706.

[24] W. Pan, J. Xiao, J. Zhu, Y.C. Yu, G. Zhang, Z. Ni, K. Watanabe, T. Taniguchi, Y. Shi, X. Wang, Biaxial Compressive Strain Engineering in graphene/Boron nitride Heterostructures, *Scientific Reports*,2(893) (2012) doi: 10.1038/srep00893.

[25] Y. Xiaohu, H. Qiang, Investigation of axially compressed buckling of a multi-walled carbon nanotube under temperature field, *Composites Science and Technology*, 67(2007)125-134.

[26] Y. Xiaohu, H. Qiang, A continuum mechanics nonlinear postbuckling analysis for single-walled carbon nanotubes under torque, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 27 (2008) 796-807.

[27] J. Lei, Y. He, B. Zhang, Z. Gan, P. Zeng, Bending and vibration of functionally graded sinusoidal microbeams based on the strain gradient elasticity theory. *International Journal of Engineering Science*, 72(2013)36-52.

[28] H. Askes, E.C. Aifantis, Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results, Inter*national Journal of Solids and Structures,* 48(2011)1962-1990.

[29] R.D. Mindlin, Micro-structure in linear elasticity. Archive for Rational Mechanics and Analysis.16(1964)52–78.

[43] L. Shen, H-S Shen, C-L Zhang, A nonlocal plate model for nonlinear vibration of single layer graphene sheets in thermal environments, *Computational Material Science*, 48(2010)680–685.

[44] R. Ansari, S. Sahmani, Prediction of biaxial buckling of single-layered graphene sheets based on nonlocal plate models and molecular dynamics simulations, *Applied Mathematical Modelling*, 37(2013)7338-7351

[45] E.M. Miandoab, H.N. Pishkenari, A. Yousefi-Koma, H. Hoorzad, , Polysiliconnano-beam model based on modified couple stress and Eringen's nonlocal elasticity theories, *Physica E*, 63(2014)223–228.

[46] J.N. Reddy, Microstructure-dependent couple stress theories of functionally graded beams, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59(2011)2382-2399.

[47] H. Askes, E.C. Aifantis, Gradient elasticity and flexural wave dispersion in carbon nanotubes, *Physical Review B*, 80 (2009) 195412.

[48] J.N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic Plates and Shell, 2th ed, *Taylor & Francis Group*, 2007.

[49] P. Malekzadeh, M. Shojaee, Free vibration of nanoplates based on a nonlocal two-variable refined plate theory, *Composite Structures*, 95 (2013) 443-452.

[50] R.P.Shimpi, Refined plate theory and its variants. *AIAA Journal* 40(2002)137–46.

[51] R.P. Shimpi, H.G. Patel, Free vibrations of plate using two variable refined plate theory, *Journal of Sound and Vibration*,296 (2006)979–999.

[52] S. Narendar, Buckling analysis of micro-/nano-scale plates based on twovariable refined plate theory incorporating nonlocal scale effects, *Composite Structures*, 93(2011) 3093–3103.

[53] H.T. Thai, A nonlocal beam theory for bending, buckling, and vibration of nanobeams, *International Journal of Engineering Science*, 52(2012)56–64.

[54] J. Wang, X. He, S. Kitipornchai, H. Zhang, Geometrical nonlinear free vibration of multi-layered grapheme sheets, *Journal of Physics D: Applied Physics*, 44(2011) 13401.

[55] Y. Jiang, Y. Huang, H. Jiang, G. Ravichandran, H. Gao, K.C. Hwang, B. Liu, A cohesive law for carbon nanotube/polymer interfaces based on the van der Waals force, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54 (2006) 2436 – 2452.

[56] W. Thomson, M.D. Dahleh, *Theory of vibration with application*, 5th ed, Prentice Hall, 1998.

[57] X. Wang, C. Zhi, Q. Weng, Y. Bando, D. Golberg, Boron Nitride Nanosheets: novel Syntheses and Applications in polymeric Composites, *Journal of Physics: Conference Series*, 471(2013) 012003.

[58] S.C. Pradhan, J.K. Phadikar, Small scale effect on vibration of embedded multilayered grapheme sheets based on nonlocal continuum models, *Physics Letters A*, 373(2009,)1062-1069.

[59] S.K. Singh, M. Neek-Amal, S. Costamagna, F.M. Peeters, Thermomechanical properties of a single hexagonal boron nitride sheet, *Physical Review B*, 87(2013)184106, DOI:10.1103/PhysRevB.87.184106.

[60] Z. Liu, L. Ma, G. Shi, W. Zhou, Y. Gong, S. Lei, X. Yang, J. Zhang, J. Yu, K.P. Hackenberg, A. Babakhani, J-C. Idrobo, R. Vajtai, J. Lou, P.M. Ajayan, In-plane heterostructures of grapheme and hexagonal boron nitride with controlled domain sizes, *Nature Nanotechnology,* 8(2013)119-124

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

S. Ziaee, Free Vibration of Heterostructures of Graphene and Boron Nitride in Thermal Environment via Aifantis Theory with Velocity Gradients and Ritz Method, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 50(5) (2018) 1061-1078.

DOI: 10.22060/mej.2017.11858.5201