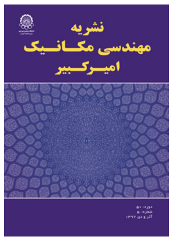

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۰، شماره ۵، سال ۱۳۹۷، صفحات ۱۰۳۹ تا ۱۰۵۰
DOI: 10.22060/mej.2017.12173.5274

تحلیل خمش و ارتعاش آزاد نانو ورق مدرج تابعی با استفاده از نظریۀ ورق مرتبه بالای مثلثاتی

علی عزیزی، علیرضا ستوده*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

چکیده: در این مقاله خمش و ارتعاش آزاد نانو ورق مدرج تابعی با استفاده از یک نظریۀ ورق مرتبه بالای مثلثاتی جدید بررسی شده است. معادلات حاکمه با استفاده از اصل همیلتون استخراج گردیده و سپس حل دقیق خمش و ارتعاش آزاد نانو ورق مستطیلی با شرط مرزی ساده به کمک روش ناویر به دست آمده است. همچنین ازنظریۀ غیرمحلی برای لحاظ اثرات اندازه استفاده شده است. خواص مکانیکی نانو ورق مدرج تابعی با تابع توانی در راستای ضخامت تغییر می‌کند. به منظور تأیید دقت نظریۀ ارائه شده، نتایج حاصل از حل حاضر با نتایج موجود مقایسه شده است و مطابقت بسیار خوبی حاصل گردیده است. همچنین، اثرات نسبت طول به ضخامت، نسبت ابعادی درون صفحه‌ای و پارامتر غیرمحلی روی رفتار خمشی و ارتعاش آزاد نانو ورق بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که لحاظ پارامتر غیرمحلی در معادلۀ حاکمه یا افزایش مقدار شاخص توانی، باعث کاهش بسامد طبیعی و افزایش خیز نانو ورق می‌شود و به عبارت دیگر موجب کاهش سفتی نانو ورق می‌گردد. در ضمن با افزایش طول نانو ورق یا نسبت ابعادی، تأثیر پارامتر غیرمحلی و اثرات اندازه کاهش می‌یابد. همچنین، نظریه ارائه شده علاوه بر ارائه جواب‌های دقیق خمش و ارتعاش آزاد برای نانو ورق ضخیم و نسبتاً ضخیم با هزینه محاسباتی کم، توزیع سهمیوار تنش برشی درون ضخامت را پیش‌بینی می‌کند.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۲۷ آبان ۱۳۹۵
بازنگری: ۴ بهمن ۱۳۹۵
پذیرش: ۱۵ اسفند ۱۳۹۵
ارائه آنلاین: ۲۳ اسفند ۱۳۹۵

کلمات کلیدی:
نانو ورق مدرج تابعی
نظریه مرتبه بالای مثلثاتی
نظریه غیر محلی
خمش
ارتعاش آزاد

۱- مقدمه

مواد مدرج تابعی یک نوع پیشرفته از مواد مرکب هستند، به طوری‌که جزء حجمی مواد سازندۀ آن‌ها به طور پیوسته به شکل یک تابع از یک نقطه به نقطۀ دیگر تغییر می‌کند. این پیوستگی یک توزیع پیوسته از خواص مواد را فراهم می‌سازد و مشکلات معمول سطوح مشترک در مواد مرکب را حذف می‌کند. مشخصات پیشرفتۀ فیزیکی و مکانیکی مواد مدرج تابعی، آن‌ها را به‌عنوان یک موضوع تحقیق مناسب برای شاخه‌های مختلف صنایع مانند هوافضا، اپتوالکترونیک[1]، بیومکانیک[2] و فناوری نانو–میکرو مطرح کرده است. معرفی مواد مدرج تابعی به فناوری نانو–میکرو باعث تولید دستگاه‌ها و وسایلی با خواص و قابلیت‌های بهتر، مانند سامانه‌های نانو–میکرو الکتریکی–مکانیکی[3]، آلیاژهای حافظه‌دار نوار نازک[4] و میکروسکوپ نیروی اتمی[5] شده است.

فناوری نانو، مطالعۀ اجسام بسیار کوچک با ابعاد حدود ۱ تا ۱۰۰ نانومتر و قابلیت استفاده آن‌ها در حوزه‌های مختلف علم، مانند شیمی، زیست، فیزیک، علم مواد و مهندسی است. اخیراً به علت خواص مکانیکی ویژه سازه‌های نانو، کاربرد این سازه‌ها در مهندسی توسعه یافته است و محققان برای حل مسائل جدید به طراحی ابزارهای با عملکرد بالا مانند نانو حسگرها، نانو عملگرها، نانو ژنراتورها و ... روی آورده‌اند. ابزارهای در مقیاس نانو با استفاده از خواص نانوتیرها، نانو غشاها و نانو ورق‌ها طراحی می‌شوند؛ بنابراین بحث مدل‌سازی و تحلیل نانو ورق‌ها مورد توجه محققان قرار گرفته است. بر این اساس مشاهده شده است که نظریه‌های پیوستۀ کلاسیک در پیش‌بینی رفتار این سازه‌ها پاسخ مناسبی ارائه نمی‌دهد. در واقع نظریه پیوستۀ کلاسیک قادر نیست که اثرات اندازه را در نظر بگیرد. یکی از راه‌های در نظر گرفتن اثرات اندازه، شبیه‌سازی دینامیک مولکولی[6] است که هزینۀ محاسباتی بالایی دارد؛ بنابراین نظریه‌های پیوستۀ غیرکلاسیک برای توصیف رفتار سازه‌های نانو به کار گرفته شده‌اند. معروف‌ترین نظریه‌های مکانیک پیوستۀ غیرکلاسیک عبارتند از: نظریه تنش کوپل کلاسیک، نظریه گرادیان کرنش، نظریه غیرمحلی الاستیسیته و نظریه تنش کوپل اصلاح شده که در این بین، نظریه‌های غیرکلاسیک تک متغیره مانند نظریه غیرمحلی و تنش کوپل اصلاح شده به علت سادگی محاسبات و هزینۀ زمانی کمتر، بیشتر از بقیه مورد توجه محققان قرار گرفته‌اند.

1 Optoelectronic
2 Biomechanics
3 Micro-Electro-Mechanical Systems -Nano-Electro-Mechanical Systems (MEMSs-NEMSs)
4 Thin-film shape memory alloys
5 Atomic-Force Microscopy (AFM)
6 Molecular Dynamics (MD)

نویسنده عهده‌دار مکاتبات: setoodeh@sutech.ac.ir

برای تحلیل تیر و ورق‌های مدرج تابعی تحقیقات زیادی انجام گرفته است که از جمله می‌توان به تحلیل ارتعاشات غیرخطی تیر مدرج تابعی توسط رفیعی پور و همکاران [۱] و بررسی سه بعدی دینامیکی و انتشار موج تنش در ورق‌های مدرج تابعی توسط ظفرمند و کدخدایان [۲] اشاره کرد. همچنین، اخیراً تحلیل نانو ورق‌ها نیز مورد توجه قرار گرفته است؛ منتها تعداد مقالاتی که بر استفاده از نظریه‌های ورق جدیدتر متمرکز باشند محدود می‌باشد. در این ارتباط، ملک‌زاده و شجاعی [۳] ارتعاش آزاد نانو ورق‌ها را با استفاده از یک نظریه ورق دو متغیره اصلاح شده با لحاظ پارامتر اندازه بررسی نمودند و نشان دادند که نقطه قوت نظریه، عدم لزوم استفاده از ضریب تصحیح برشی است. در تحقیقی دیگر کاربرد یک نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول[1] با دو متغیر برای ارتعاش آزاد نانو ورق‌ها با لحاظ اثرات سطح براساس نظریه غیرمحلی مورد مطالعه قرار گرفت [۴]. قربان‌پور آرانی و همکاران [۵] با کمک نظریه غیرمحلی و نظریه ورق تغییرشکل برشی مرتبه سوم[2]، ارتعاش صفحه گرافن در حال حرکت محوری با بستر ارتوتروپیک ویسکو- پسترناک را تحت میدان مغناطیسی طولی بررسی کردند. همچنین، محمدی مهر و همکاران [۶] برای تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های نانوکامپوزیت ویسکو الاستیک پیوند دوگانهٔ پلیمری که با استفاده از نانولوله‌های کربنی تک دیواره از جنس مواد مدرج تابعی[3] تقویت شده‌اند، نظریه گرادیان کرنش اصلاح شده[4] و نظریه ورق تغییرشکل برشی مثلثاتی را به کار گرفتند.

در این قسمت مهم‌ترین کارهایی که از دو نظریه غیرکلاسیک تک متغیره غیرمحلی و تنش کوپل اصلاح شده برای تحلیل نانو ورق‌های مدرج تابعی استفاده کرده‌اند، مرور شده‌اند. البته نظریه‌های ورق به کار رفته در هرکدام نیز، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. یک حل تحلیلی برای خمش و کمانش میکرو-نانو ورق مدرج تابعی با استفاده از نظریه تنش کوپل اصلاح شده و به کمک نظریه ورق کلاسیک توسط تای و چوی [۷] گزارش شد. حل تحلیلی ارتعاش آزاد ورق‌های نانو دایره-حلقه‌ای از جنس مواد مدرج تابعی با استفاده از نظریه غیرمحلی و نظریه ورق‌های میندلین توسط حسینی هاشمی و همکاران [۸] انجام شد. جان و هون [۹] روش ناویر[5] را برای یافتن پاسخ تحلیلی خمش و ارتعاش آزاد نانو ورق از جنس مواد مدرج تابعی دو ضابطه‌ای[6] با کمک نظریه غیرمحلی و نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول ارائه دادند. همچنین جان و همکاران [۱۰] روش تنش کوپل اصلاح شده را برای نانو ورق مدرج تابعی دو ضابطه‌ای روی یک بستر الاستیک به همراه نظریه ورق تغییرشکل برشی مرتبه اول به کار بردند و حل تحلیلی کمانش را به دست آوردند. تحلیل استاتیکی و مسأله مقدار ویژهٔ نانو ورق مدرج تابعی دو ضابطه‌ای با استفاده از نظریه تنش کوپل اصلاح شده به کمک نظریه تغییرشکل برشی مرتبه بالا با تابع شکل چند جمله‌ای توسط جان و هون [۱۱] انجام شد. کارهای ذکر شده تا اینجا همه از تابع توانی برای توصیف خواص ماده مدرج تابعی درون ضخامت استفاده کردند. حل تحلیلی دقیق سه بعدی ارتعاش آزاد میکرو-نانو ورق از جنس مواد مدرج تابعی به کمک نظریه غیرمحلی و با در نظر گرفتن تغییرات نمایی برای خواص مادهٔ مدرج تابعی توسط صالحی پور و همکاران [۱۲] ارائه شد. نامی و جانقربان [۱۳] دو نظریه غیرمحلی و نظریه ساده شده گرادیان کرنش با یک متغیر را برای بررسی وضعیت رزنانس میکرو-نانو ورق استفاده کردند و حل تحلیلی ارتعاش آزاد نانو ورق مدرج تابعی را به کمک نظریه ورق مرتبه دوم و نظریه غیرمحلی به دست آوردند [۱۴]. هی و همکاران [۱۵] نظریه تنش کوپل اصلاح شده را با به کارگیری نظریه اصلاح شده چهار متغیره ورق‌ها با یک تابع شکل چند جمله‌ای برای تحلیل کامل خمش، ارتعاش آزاد و کمانش نانو ورق مدرج تابعی استفاده کردند. صالحی‌پور و همکاران [۱۶] نظریه غیرمحلی اصلاح شده را معرفی کردند و به کمک نظریه ورق تغییرشکل برشی مرتبه اول حل تحلیلی ارتعاش آزاد سه بعدی را برای میکرو-نانو ورق مدرج تابعی با توزیع نمایی خواص به دست آوردند؛ همچنین، حل تحلیلی سه بعدی استاتیکی به کمک نظریه غیرمحلی [۱۷] و ارتعاش آزاد به کمک نظریه تنش کوپل اصلاح شده [۱۸] را برای نانو ورق مدرج تابعی با توزیع خواص نمایی به دست آوردند. زارع و همکاران [۱۹] به کمک یک روش تحلیلی، ارتعاش آزاد نانو ورق مدرج تابعی با شرایط مرزی مختلف را براساس نظریه‌های غیرمحلی و کلاسیک ورق‌ها بررسی کردند. نظریه ورق تغییرشکل برشی مرتبه سوم و نظریه غیرمحلی برای تحلیل ارتعاش آزاد نانو ورق‌های مدرج تابعی توسط دانش مهر و همکاران [۲۰] به کار گرفته شد. نامی و همکاران [۲۱] با استفاده از نظریه تغییرشکل برشی مرتبه سوم ورق‌ها و نظریه غیرمحلی برای نانو ورق مدرج تابعی به تحلیل کمانش تحت اثر دما پرداختند. همچنین، روش حل عددی VDQ[7] برای تحلیل خمش و ارتعاشات سه بعدی غیرمحلی نانو ورق مدرج تابعی توسط انصاری و همکاران [۲۲] به کار گرفته شد.

مطالعه مقالات گذشته بیانگر این واقعیت است که در پژوهش‌هایی که شامل نظریه غیرمحلی است، به ندرت از نظریه ورق مرتبه بالاتر استفاده شده است؛ ولی هرگز از نظریه ورق مرتبه بالاتر مثلثاتی به این منظور استفاده نشده است. در این مطالعه برای اولین بار یک نظریه مرتبه بالای جدید با تابع شکل مثلثاتی برای یافتن پاسخ تحلیلی دقیق‌تر خمش و ارتعاش آزاد نانو ورق از جنس مواد مدرج تابعی به کار گرفته شده است. حل تحلیلی خمش و ارتعاش آزاد به دست آمده است و پاسخ نانو ورق مستطیلی برای پارامتر غیرمحلی، نسبت ابعادی درون صفحه‌ای و نسبت طول به ضخامت‌های مختلف محاسبه شده است. نتایج حاصل از نظریه ارائه شده با نتایج گزارش شده توسط محققان پیشین مقایسه شده‌اند و توافق خوبی بین نتایج مشاهده شده است.

1 First-order Shear Deformation Theory (FSDT)
2 Third-order Shear Deformation Theory (TSDT)
3 Single-Walled Carbon Nanotubes (FG-SWCNs)
4 Modified Strain Gradient Theory (MSGT)
5 Navier approach
6 Sigmoid Functionally Graded Material (S-FGM).
7 Variational Differential Quadrature.

۲- فرمول‌بندی نظریه

۲- ۱- نظریه غیرمحلی

براساس نظریه غیرمحلی ارائه شده توسط ارینگن [۲۳]، در مقایسه با نظریه الاستیسیته کلاسیک، تانسور تنش در یک نقطه دلخواه مانند x در ناحیه مشخص ماده تنها به کرنش در نقطه x بستگی ندارد، بلکه به تانسور کرنش در همه نقاط ناحیه وابسته است. صحت این موضوع در نتایج شبیه‌سازی اتمی و همچنین مشاهدات تجربی تأیید شده است. براساس این نظریه، رابطه تنش-کرنش برای یک جامد همگن الاستیک، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_{ij}^{nl}=\iiint \alpha\left(\left|x'-x\right|,\tau\right)\sigma_{ij}^{l}\left(x'\right)dv\left(x'\right) \qquad (۱)$$

α مدول غیرمحلی یا تابع کرنل است که حاوی اثرات اندازه است و اثرات غیرمحلی در نقطه x را که با کرنش محلی نقطه مرجع x' تولید می‌شود، در معادلات ساختاری لحاظ می‌کند. این تابع به دو متغیر $\left|x'-x\right|$ و τ وابسته است. $\left|x'-x\right|$ فاصله مربوط به هندسه اقلیدسی است. $\tau=e_0\bar{a}/l$ یک ثابت ماده است که به مشخصه‌های طولی داخلی و خارجی ماده (مانند فاصله شبکه و طول موج) بستگی دارد. پارامتر e_0 برای اعتبار مدول غیرمحلی حیاتی است. این پارامتر با انطباق منحنی‌های انحراف براساس مدول‌های اتمی تعیین می‌شود. σ^{nl} تانسور تنش غیرمحلی در نقطه مرجع است و σ^{l} تانسور تنش کلاسیک در نقطه محلی است. همچنین تنش محلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma^{l}=C:\varepsilon \qquad (۲)$$

C تانسور الاستیسیته مرتبه چهار است و (:) نشان‌گر ضرب داخلی تانسوری مرتبه دو است. ارینگن تابع کرنل را به صورت عددی تعیین کرد و با انتخاب تابع کرنل مناسب نشان داد که معادله ساختاری غیرمحلی ارائه شده در فرم انتگرالی می‌تواند در یک فرم مناسب دیفرانسیلی بازنویسی شود:

$$\left(\Lambda\right)\sigma^{nl}=C:\varepsilon \qquad (۳)$$

و عملگر Λ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Lambda=\left(1-\mu\nabla^{2}\right),\ \mu=\left(e_0\bar{a}\right)^{2} \qquad (۴)$$

جایی که μ پارامتر غیرمحلی، $\bar{a}$ مشخصه طول‌های داخلی و e_0 ثابت ماده است.

۲- ۲- میدان جابه‌جایی

به منظور به دست آوردن فرمول‌بندی که اثرات تغییرشکل برشی را براساس توابع شکل مختلف، برای ورق‌های نسبتاً ضخیم و ضخیم لحاظ کند، میدان جابه‌جایی ($\bar{w},\bar{v},\bar{u}$) به ترتیب در جهات $(x,\ y,\ z)$ به صورت زیر معرفی می‌شود [۲۴]:

$$\begin{aligned}
\bar{u}\left(x,y,z,t\right)&=u\left(x,y,t\right)-z\frac{\partial w}{\partial x}+\varphi(z)\left[\psi_x\left(x,y,t\right)+\frac{\partial w}{\partial x}\right]\\
\bar{v}\left(x,y,z,t\right)&=v\left(x,y,t\right)-z\frac{\partial w}{\partial y}+\varphi(z)\left[\psi_y\left(x,y,t\right)+\frac{\partial w}{\partial y}\right]\\
\bar{w}\left(x,y,z,t\right)&=w\left(x,y,t\right)
\end{aligned} \qquad (۵)$$

که u، v و w جابه‌جایی‌های صفحه میانی ورق به ترتیب در جهات x، y و z می‌باشند، ψ_x و ψ_y به ترتیب چرخش جانبی حول محورهای y و x هستند و φ تابع شکل نظریه ارائه شده است که توزیع تنش و کرنش جانبی درون ضخامت ورق را تعیین می‌کند و می‌تواند به یکی از شکل‌های هایپربولیک [۲۴]، نمایی، مثلثاتی یا چند جمله‌ای [۱۱] به صورت زیر تعریف شود:

$$\varphi(z)=\frac{h}{2}.\tanh\left(2\left(\frac{z}{h}\right)\right)-\frac{4}{3\cosh^{2}(1)}.\left(\frac{z^{3}}{h^{2}}\right) \qquad (۶-الف)$$

$$\varphi(z)=z.\exp\left(-2\left(\frac{z}{h}\right)^{2}\right) \qquad (۶-ب)$$

$$\varphi(z)=\frac{h}{\pi}.\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \qquad (۶-ج)$$

$$\varphi(z)=z-\frac{4z^{3}}{3h^{2}} \qquad (۶-د)$$

می‌توان به آسانی دریافت که نظریه ارائه شده تغییرات سهمی‌وار کرنش جانبی و در نتیجه تنش جانبی درون ضخامت ورق را در نظر می‌گیرد. همچنین این نظریه شرایط مرزی بدون تنش روی سطوح بالا و پایین ورق را ارضا می‌کند.

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz}\left(x,y,z\right)\Big|_{z=\pm\frac{h}{2}}&=0\\
\sigma_{yz}\left(x,y,z\right)\Big|_{z=\pm\frac{h}{2}}&=0
\end{aligned} \qquad (۷)$$

همچنین با قرار دادن $\varphi=0$، این نظریه به نظریه کلاسیک ورق‌ها تبدیل می‌شود. در این‌جا از تابع شکل مثلثاتی برای نظریه ارائه شده به کار رفته است (رابطه (۶-ج)).

میدان جابه‌جایی ارائه شده، روابط کرنش زیر را تولید می‌کند:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\varphi(z)\left[\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]\\
\varepsilon_y&=\frac{\partial v}{\partial y}-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\varphi(z)\left[\frac{\partial\psi_y}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]\\
\varepsilon_z&=0\\
\gamma_{xy}&=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\varphi(z)\left[\frac{\partial\psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]\\
\gamma_{xz}&=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(\psi_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\
\gamma_{yz}&=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(\psi_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right)
\end{aligned} \qquad (۸)$$

۲- ۳- معادله ساختاری

در این‌جا فرض شده است برای یک ورق مستطیلی از جنس مواد مدرج تابعی به طول a و عرض b و ضخامت h که در شکل ۱ نشان داده شده است خواص مکانیکی به صورت پیوسته و با استفاده از قانون توانی درون ضخامت ورق تغییر می‌کنند. قانون توانی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$P(z)=P_b+(P_t-P_b)V(z) \tag{۹}$$

نسبت حجمی $V(z)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V(z)=(z/h+1/2)^n,\ -h/2\le z\le h/2 \tag{۱۰}$$

که P_b و P_t به ترتیب مربوط به خواص در سطوح پایینی و بالایی هستند و n شاخص نسبت حجمی است. $P(z)$ خاصیت مؤثر ماده مانند مدول یانگ E، نسبت پواسون ν و چگالی جرم ρ را نشان می‌دهد.

برای حالت تنش صفحه‌ای رابطه بین تانسورهای تنش محلی σ^l و غیرمحلی σ^{nl} و تانسور کرنش ε به صورت زیر بیان می‌شود [۲۰]:

$$\begin{Bmatrix}\sigma^l_x\\ \sigma^l_y\\ \sigma^l_{yz}\\ \sigma^l_{xz}\\ \sigma^l_{xy}\end{Bmatrix}=(\Lambda)\begin{Bmatrix}\sigma^{nl}_x\\ \sigma^{nl}_y\\ \sigma^{nl}_{yz}\\ \sigma^{nl}_{xz}\\ \sigma^{nl}_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11}&Q_{12}&0&0&0\\ Q_{12}&Q_{22}&0&0&0\\ 0&0&Q_{44}&0&0\\ 0&0&0&Q_{55}&0\\ 0&0&0&0&Q_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \tag{۱۱}$$

ثابت‌های مهندسی Q_{ij} که تابع مختصات z هستند به صورت زیر داده می‌شوند [۲۰]:

$$\begin{aligned}&Q_{11}=Q_{22}=\frac{E(z)}{1-\nu^2(z)},\ Q_{12}=Q_{21}=\ \nu(z)Q_{11},\\ &Q_{44}=Q_{55}=Q_{66}=\frac{E(z)}{2[1+\nu(z)]}\end{aligned} \tag{۱۲}$$

۲- ۴- معادلات انرژی

انرژی کرنشی ورق به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۰]:

$$U_d=\frac{1}{2}\int_A\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\sigma^{nl}_x\delta\varepsilon_x+\sigma^{nl}_y\delta\varepsilon_y+\sigma^{nl}_{xy}\delta\gamma_{xy}+\sigma^{nl}_{xz}\delta\gamma_{xz}+\sigma^{nl}_{yz}\delta\gamma_{yz}\right)dA\,dz \tag{۱۳}$$

همچنین انرژی جنبشی T برای ورق به صورت زیر بیان می‌گردد [۲۰]:

$$T=\frac{1}{2}\int_V\rho(z)\frac{\partial u_i}{\partial t}\frac{\partial u_i}{\partial t}dV=\frac{1}{2}\int_A\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho(z)\left\{\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial t}\right)^2\right\}dA\,dz \tag{۱۴}$$

کار انجام شده توسط بار گسترده جانبی q برابر است با :

$$V_q=-\int_A qw\,dA \tag{۱۵}$$

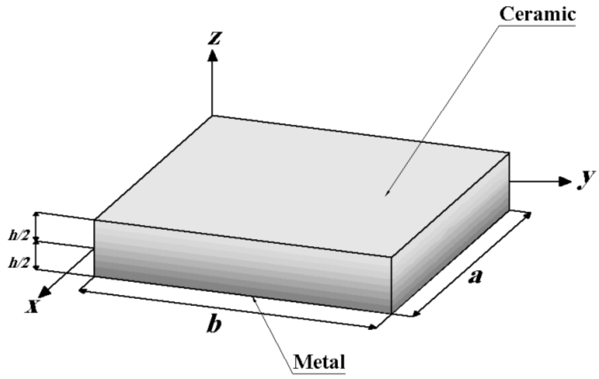

Fig. 1. Geometry of the FG nano-plate

شکل ۱: هندسه نانو ورق مدرج تابعی

۲- ۵- منتجه‌های نیرو و ممان

منتجه‌های نیرو و ممان اعمالی بر ورق مدرج تابعی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}&\left(N^l_x,M^l_x,S^l_x\right)=\int_{-h/2}^{h/2}(1,z,\varphi)\sigma^l_x dz\\ &\left(N^l_y,M^l_y,S^l_y\right)=\int_{-h/2}^{h/2}(1,z,\varphi)\sigma^l_y dz\\ &\left(N^l_{xy},M^l_{xy},S^l_{xy}\right)=\int_{-h/2}^{h/2}(1,z,\varphi)\sigma^l_{xy} dz\\ &\left(S^l_{xz},S^l_{yz}\right)=\int_{-h/2}^{h/2}\left(\sigma^l_{xz},\sigma^l_{yz}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\end{aligned} \tag{۱۶}$$

با استفاده از روابط (۸)، (۱۱) و (۱۶) منتجه‌های نیرو و ممان وارد بر ورق مدرج تابعی، برحسب جابه‌جایی و چرخش صفحه میانی ورق و به شکل ماتریسی به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$\begin{aligned}&\Lambda\begin{Bmatrix}N^{nl}_x\\ N^{nl}_y\\ M^{nl}_x\\ M^{nl}_y\\ S^{nl}_{xy}\\ S^{nl}_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&B_{11}&B_{12}&B^a_{11}&B^a_{12}\\ A_{12}&A_{22}&B_{12}&B_{22}&B^a_{12}&B^a_{22}\\ B_{11}&B_{12}&D_{11}&D_{12}&D^a_{11}&D^a_{12}\\ B_{12}&B_{22}&D_{12}&D_{22}&D^a_{12}&D^a_{22}\\ B^a_{11}&B^a_{12}&D^a_{11}&D^a_{12}&D^{aa}_{11}&D^{aa}_{12}\\ B^a_{12}&B^a_{22}&D^a_{12}&D^a_{22}&D^{aa}_{12}&D^{aa}_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_{,x}\\ v_{,y}\\ -w_{,xx}\\ -w_{,yy}\\ \psi_{x,x}+w_{,xx}\\ \psi_{y,y}+w_{,yy}\end{Bmatrix}\\ &\Lambda\begin{Bmatrix}N^{nl}_x\\ N^{nl}_y\\ M^{nl}_x\\ M^{nl}_y\\ S^{nl}_{xy}\\ S^{nl}_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&B_{11}&B_{12}&B^a_{11}&B^a_{12}\\ A_{12}&A_{22}&B_{12}&B_{22}&B^a_{12}&B^a_{22}\\ B_{11}&B_{12}&D_{11}&D_{12}&D^a_{11}&D^a_{12}\\ B_{12}&B_{22}&D_{12}&D_{22}&D^a_{12}&D^a_{22}\\ B^a_{11}&B^a_{12}&D^a_{11}&D^a_{12}&D^{aa}_{11}&D^{aa}_{12}\\ B^a_{12}&B^a_{22}&D^a_{12}&D^a_{22}&D^{aa}_{12}&D^{aa}_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_{,x}\\ v_{,y}\\ -w_{,xx}\\ -w_{,yy}\\ \psi_{x,x}+w_{,xx}\\ \psi_{y,y}+w_{,yy}\end{Bmatrix}\\ &\Lambda\begin{Bmatrix}S^{nl}_{xz}\\ S^{nl}_{yz}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A^a_{55}&0\\ 0&A^a_{44}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\psi_x+w_{,x}\\ \psi_y+w_{,y}\end{Bmatrix}\end{aligned} \tag{۱۷}$$

در جایی که سفتی‌های کششی، خمشی و برش جانبی به ترتیب A_{ij}، D_{ij} و

A_{ij}^{a} و سفتی‌های کوپلینگ B_{ij}، B_{ij}^{a} و D_{ij}^{a} و D_{ij}^{aa} به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\left(A_{ij},B_{ij},B_{ij}^{a}\right)=\int_{-h/2}^{h/2}Q_{ij}\left(1,z,\varphi\right)dz,\left(i,j=1,2,6\right)$$
$$\left(D_{ij},D_{ij}^{a},D_{ij}^{aa}\right)=\int_{-h/2}^{h/2}Q_{ij}\left(z^2,\varphi z,\varphi^2\right)dz,\left(i,j=1,2,6\right) \qquad (۱۸)$$
$$A_{ij}^{a}=\int_{-h/2}^{h/2}Q_{ij}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 dz,\ \left(i,j=4,5\right)$$

جمله‌های مربوط به اینرسی نیز با استفاده از رابطه انرژی جنبشی، به دست می‌آیند:

$$\left(I_1,I_2,I_3\right)=\int_{-h/2}^{h/2}\rho\left(z\right)\left(1,z,z^2\right)dz$$
$$\left(I_2^{a},I_3^{a},I_3^{aa}\right)=\int_{-h/2}^{h/2}\rho\left(z\right)\varphi\left(z\right)\left(1,z,\varphi\right)dz \qquad (۱۹)$$

جایی که I_1، I_2 و I_3 به ترتیب اینرسی‌های محوری، کوپلینگ و چرخان هستند. I_2^{a}، I_3^{a} و I_3^{aa} نیز به ترتیب اینرسی‌های مرتبه بالای محوری، کوپلینگ و چرخان هستند.

۲- ۶- معادلات حرکت

معادلات حرکت و شرایط مرزی مربوط به آن‌ها با استفاده از نسخه دینامیکی اصل کار مجازی که به اصل همیلتون معروف است، استخراج می‌شوند:

$$0=\int_{0}^{t}\left(\delta U_d+\delta V_q-\delta T\right) \qquad (۲۰)$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء نسبت به t، x، y و با جمع‌آوری ضرایب جابه‌جایی‌های مجازی δu، δv، δw، $\delta\psi_x$ و $\delta\psi_y$ معادله حرکت برحسب منتجه‌های تنش حاصل می‌شود که با در نظر گرفتن رابطه تنش غیرمحلی (۱۱) و اعمال آن به معادلات حرکت، معادلات حرکت نهایی به شکل زیر به دست خواهد آمد:

$$\frac{\partial N_x^l}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}^l}{\partial y}=\Lambda\left(I_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+I_2^a\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}+\left(I_2^a-I_2\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial t^2}\right)$$
$$\frac{\partial N_x^l}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}^l}{\partial y}=\Lambda\left(I_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+I_2^a\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}+\left(I_2^a-I_2\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial t^2}\right)$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(M_x^l-S_x^l\right)+2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(M_{xy}^l-S_{xy}^l\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(M_y^l-S_y^l\right)+\frac{\partial S_{xz}^l}{\partial x}+\frac{\partial S_{yz}^l}{\partial y}$$
$$=\Lambda\left(\left(I_2-I_2^a\right)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial t^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y\,\partial t^2}\right)+\left(I_3^a-I_3^{aa}\right)\left(\frac{\partial^3\psi_x}{\partial x\,\partial t^2}+\frac{\partial^3\psi_y}{\partial y\,\partial t^2}\right)+I_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right. \qquad (۲۱)$$
$$\left.-\left(I_3-2I_3^a+I_3^{aa}\right)\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^2\partial t^2}\right)-q\right)$$
$$\frac{\partial S_x^l}{\partial x}+\frac{\partial S_{xy}^l}{\partial y}-S_{xz}^l=\Lambda\left(I_2^a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+I_3^{aa}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}+\left(I_3^{aa}-I_3^a\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial t^2}\right)$$
$$\frac{\partial S_y^l}{\partial y}+\frac{\partial S_{xy}^l}{\partial x}-S_{yz}^l=\Lambda\left(I_2^a\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+I_3^{aa}\frac{\partial^2\psi_y}{\partial t^2}+\left(I_3^{aa}-I_3^a\right)\frac{\partial^3 w}{\partial y\,\partial t^2}\right)$$

سامانه معادلات (۲۱) به راحتی با جایگذاری منتجه‌های تنش از روابط (۱۷)، می‌تواند بر حسب جابه‌جایی‌ها و چرخش‌ها (u,v,w,ψ_x,ψ_y) بازنویسی شود.

شرایط مرزی لبه‌های تکیه‌گاه ساده به صورت زیر است:

$$W=N_x^l=M_x^l=S_x^l=0\Big|_{x=0,a}$$
$$W=N_y^l=M_y^l=S_y^l=0\Big|_{y=0,b} \qquad (۲۲)$$

۲- ۷- پاسخ تحلیلی برای ورق مدرج تابعی

برای حالتی که ورق هندسه ساده‌ای دارد و تکیه‌گاه‌های چهار طرف آن از نوع تکیه‌گاه ساده هستند، جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها به روش ناویر با دقت بسیار بالایی به دست می‌آیند. این روش نیازمند بسط دادن جابه‌جایی‌ها و چرخش‌ها به صورت سری‌های فوریه دوگانه به شکل زیر است:

$$u\left(x,y,z\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}U_{mn}\cos\left(\alpha x\right)\sin\left(\beta y\right)\sin\left(\omega t\right)$$
$$w\left(x,y,z\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}W_{mn}\sin\left(\alpha x\right)\sin\left(\beta y\right)\sin\left(\omega t\right)$$
$$\psi_x\left(x,y,z\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}X_{mn}\cos\left(\alpha x\right)\sin\left(\beta y\right)\sin\left(\omega t\right) \qquad (۲۳)$$
$$\psi_y\left(x,y,z\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}Y_{mn}\sin\left(\alpha x\right)\cos\left(\beta y\right)\sin\left(\omega t\right)$$

بار جانبی اعمالی q به صورت سری فوریه دوگانه زیر بسط داده می‌شود:

$$q\left(x,y\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}Q_{mn}\sin\left(\alpha x\right)\sin\left(\beta y\right) \qquad (۲۴)$$

به طوری که $\alpha=m\pi/a$ و $\beta=n\pi/b$ و U_{mn} ، V_{mn}، W_{mn}، X_{mn}، Y_{mn} و Q_{mn} دامنه نامعلوم بسط سری‌ها هستند. همچنین ω بسامد طبیعی ارتعاش است.

ضرایب Q_{mn} با توجه به نوع بارگذاری به صورت زیر داده می‌شوند:

$$Q_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b q\left(x,y\right)\sin\alpha x\,\sin\beta y\,dx\,dy= \qquad (۲۵)$$

$$=\begin{cases} q_0\left(sinusoidal\ load\right) \\ \dfrac{16q_0}{\pi^2 mn}\left(uniform\ load\right)\end{cases}$$

با جایگذاری سری‌های روابط (۲۳) و (۲۴) در رابطه (۲۱)، جواب‌های ناویر به صورت یک سامانه جبری از معادلات و به شکل زیر به دست خواهند آمد:

$$\left(\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{bmatrix}\right) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(1+\mu\left(\alpha^2+\beta^2\right)\right) Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{۲۶}$$

که ضرایب هرکدام از ماتریس‌های رابطه (۲۶) در پیوست آورده شده‌اند.

۳- نتایج

در این بخش، ارتعاش آزاد و خمش نانو ورق‌های مدرج تابعی، بررسی شده است. بر این اساس، پاسخ تحلیلی با استفاده از روش ناویر برای خمش و ارتعاش آزاد به دست آمده است. در دو قسمت مجزا نتایج حاصل مورد بررسی قرار گرفته‌اند: ارتعاش آزاد و خمش. موادی که در این مطالعه برای ماده مدرج تابعی به کار گرفته شده‌اند عبارتند از:

آلومینیوم – آلومینیوم اکسید، با خواص E_t =۳۸۰GPa، E_b =۷۰GPa، ρ_t =۳۸۰۰kg/m³، $\rho_b = 2702\ \text{kg}/\text{m}^3$ ۲۷۰۲kg/m³ و ν = ۰/۳، که به عنوان ماده ۱ در نظر گرفته شده است. ماده همگن ایزوتروپیک با خواص E =۳۰MPa و ν = ۰/۳ که به عنوان ماده ۲ نامگذاری شده است.

در جایی که اندیس‌های b و t به ترتیب نشانگر صفحات پایینی و بالایی ورق مدرج تابعی هستند و نسبت پواسون برای هر دو ماده به کار رفته در ورق برابر در نظر گرفته شده است ($\nu_b = \nu_t = \nu$). صفحات بالایی از جنس سرامیک هستند و به تدریج درون ضخامت جنس ماده مدرج تابعی طبق رابطه (۹) تغییر می‌کند و در صفحه پایینی به فلز می‌رسد.

پارامترهای بدون بعد استفاده شده در این مطالعه عبارتند از:

$$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h}\sqrt{\frac{\rho_b}{E_b}}, \bar{w} = \frac{100 E_t h^3}{a^4 q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right),$$
$$\bar{\sigma}_x = \frac{10h}{a q_0}\sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right), \bar{\tau}_{xz} = \frac{10h}{a q_0}\tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right) \tag{۲۷}$$

۳- ۱- ارتعاش آزاد

برای بررسی ارتعاش آزاد مقدار q صفر در نظر گرفته شده است. اثرات نسبت ابعادی درون صفحه‌ای b/a، نسبت طول به ضخامت a/h و پارامتر غیرمحلی μ بر بسامد طبیعی بدون بعد و مودهای ارتعاشی بررسی شده‌اند.

در ابتدا برای صحت‌سنجی نظریه ارائه شده، نتایج حاصل از نظریه حاضر با نتایج موجود از تحلیل سه بعدی توسط جمعه‌زاده و سعیدی [۲۵] و نتایج حاصل از نظریه تغییرشکل برشی مرتبه سوم توسط آقابابایی و ردی [۲۶] در جدول ۱ مقایسه شده است. همچنین در جدول ۲ نتایج حل حاضر با نتایج به دست آمده با تحلیل سه بعدی توسط جین و همکاران [۲۷] مقایسه شده‌اند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود تطابق بسیار خوبی بین نتایج حاصل شده است. با توجه به نتایج گزارش شده در جدول ۱ می‌توان نتیجه گرفت که نظریه ارائه شده در قیاس با نظریه تغییرشکل برشی مرتبه سوم نتایجی با دقت بیشتر تولید می‌کند. همچنین جدول ۲ قابلیت و دقت بالای نظریه در تخمین بسامد طبیعی نانو ورق‌های مدرج تابعی ضخیم (a/h =۵) و نسبتاً ضخیم (a/h =۱۰) را نشان می‌دهد.

اثرات شاخص توان n و پارامتر غیرمحلی بر بسامد طبیعی بدون بعد $\bar{\omega}$ در شکل ۲ بررسی شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش n و μ، بسامد طبیعی بدون بعد کاهش می‌یابد. افزایش μ باعث می‌شود نظریه غیرمحلی سفتی نانو ورق را کمتر پیش‌بینی کند. افزایش شاخص توان طبق روابط (۹) و (۱۰)، به معنای افزایش نسبت حجمی فلز و کاهش سفتی نانو ورق است. در ضمن، اثرات طول ورق و پارامتر غیرمحلی بر بسامد طبیعی بدون بعد $\bar{\omega}$، در شکل ۳ بررسی شده‌اند. همانطور که مشاهده می‌شود هر چه طول ورق بیشتر می‌شود، بسامد طبیعی بدون بعد افزایش می‌یابد و به مقدار محلی نزدیک می‌شود. در واقع می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش طول ورق اثرات اندازه کاهش می‌یابد.

شکل ۴ اثرات نسبت ابعادی و پارامتر غیرمحلی بر روی بسامد طبیعی بدون بعد $\bar{\omega}$ را نمایش می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، هرچه مقدار نسبت ابعادی درون صفحه‌ای (b/a) بزرگتر می‌شود اثر تغییرات پارامتر غیرمحلی بر بسامد طبیعی بدون بعد کمتر می‌شود که نشان می‌دهد نظریه حاضر اثرات اندازه را لحاظ کرده است.

شکل ۵ اثرات پارامتر غیرمحلی و مودهای ارتعاشی را بر بسامد طبیعی بدون بعد $\bar{\omega}$ بررسی می‌کند. مطابق شکل ۵ اثر تغییرات پارامتر غیرمحلی برای مودهای ارتعاشی بالاتر بیشتر است؛ لذا لزوم لحاظ اثرات اندازه در مودهای بالاتر بیشتر نمایان می‌گردد. همچنین در شکل‌های ۴ و ۵، با افزایش پارامتر غیرمحلی مقدار $\bar{\omega}$ کاهش می‌یابد؛ بنابراین، افزودن پارامتر غیرمحلی μ سفتی نانو ورق را کاهش می‌دهد.

۳- ۲- خمش

در این بخش پاسخ خمش نانو ورق با نادیده گرفتن ترم‌های انرژی

جنبشی در معادلات حاکمه به دست آمده است. اثرات نسبت ابعادی درون صفحه‌ای b/a، نسبت طول به ضخامت a/h و پارامتر غیرمحلی μ بر خیز بدون بعد و تنش‌های بدون بعد $\bar{\sigma}_x$ و $\bar{\tau}_{xz}$ بررسی شده‌اند.

در ابتدا برای صحت‌سنجی حل حاضر نتایج به دست آمده با نتایج گزارش شده توسط وو و همکاران [۲۸] در جدول ۳ مقایسه شده است. بین نتایج به دست آمده از نظریه ارائه شده با نتایج موجود همخوانی بسیار خوبی ملاحظه می‌شود. همچنین در جدول ۴ مقادیر خیز بدون بعد $\bar{w}$ یک نانو ورق مربعی ایزوتروپیک تحت بارگذاری سینوسی، با استفاده از نظریه حاضر با نتایج گزارش شده در [۲۹] با استفاده از نظریه دو متغیره با تابع شکل مثلثاتی، مقایسه شده است. مجدد بین نتایج توافق خوبی مشاهده می‌شود.

در شکل ۶ تغییرات خیز بدون بعد نانو ورق تحت بارگذاری سینوسی، به ازای شاخص توانی n و پارامتر غیرمحلی μ نمایش داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود با افزایش n و پارامتر غیرمحلی μ خیز بدون بعد افزایش می‌یابد. افزایش شاخص توان معادل افزایش نسبت حجمی فلز در نانو ورق بوده و باعث کاهش سفتی آن شده است. با مشاهده شکل ۷ که تغییرات خیز بدون بعد نانو ورق در $y=b/2$ به ازای پارامتر غیرمحلی را

جدول ۱: بسامد طبیعی اول بدون بعد $\omega h\sqrt{\rho_t/G_t}$ برای نانو ورق مربعی (ماده ۲)

Table 1. Dimensionless first natural frequency $\omega h\sqrt{\rho_t/G_t}$ of the square nano-plate (material 2)

μ	a/h	نتایج حاضر	مرتبه سوم [۲۶]	حل سه بعدی [۲۵]
۱	۲۰	۰/۰۲۱۸	۰/۰۲۱۸	۰/۰۲۱۱
	۱۰	۰/۰۸۵۰	۰/۰۸۵۴	۰/۰۸۲۷
۲	۲۰	۰/۰۲۰۲	۰/۰۲۰۲	۰/۰۱۹۱
	۱۰	۰/۰۷۸۸	۰/۰۷۹۱	۰/۰۷۵۱
۳	۲۰	۰/۰۱۸۹	۰/۰۱۸۹	۰/۰۱۷۶
	۱۰	۰/۰۷۳۷	۰/۰۷۴۱	۰/۰۶۹۲

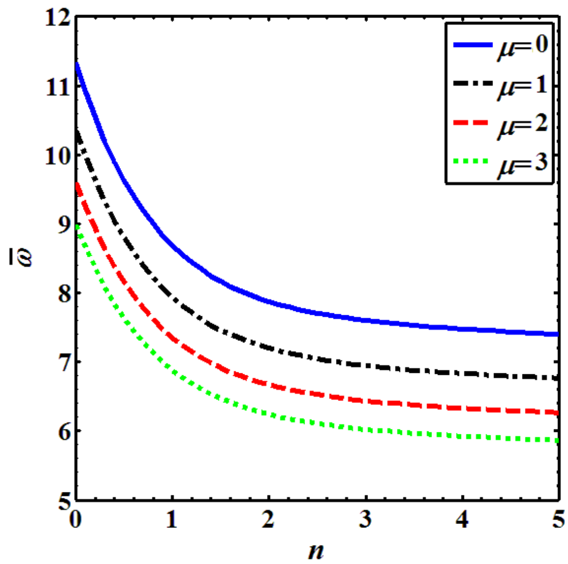

Fig. 2. Variation of dimensionless first natural frequency $\bar{\omega}$ of the square FG nano-plate for different values of power index n and nonlocal parameter μ (material 1, a/h=10)

شکل ۲: تغییرات بسامد طبیعی اول بدون بعد $\bar{\omega}$ برای نانو ورق مربعی مدرج تابعی به ازای مقادیر مختلف شاخص توان n و پارامتر غیرمحلی μ (ماده ۱، a/h=۱۰)

جدول ۲: بسامد طبیعی اول بدون بعد $\omega a^2/h\sqrt{\rho_t/E_t}$ برای ورق مربعی مدرج تابعی (ماده ۱، μ=۰)

Table 2. Dimensionless first natural frequency $\omega(a^2/h)\sqrt{\rho_t/E_t}$ of the FG plate (material 1, μ=0)

a/h	n	نتایج حاضر	حل سه بعدی [۲۷]	درصد خطا
۱۰	۰	۵/۷۷۰	۵/۷۷۹	۰/۱۶
	۱	۴/۴۱۹	۴/۴۲۸	۰/۲۰
	۵	۳/۷۶۷	۳/۷۷۴	۰/۱۹
۵	۰	۵/۲۸۲	۵/۳۰۴	۰/۴۲
	۱	۴/۰۷۹	۴/۱۰۰	۰/۵۱
	۵	۳/۳۹۱	۳/۴۰۵	۰/۴۱

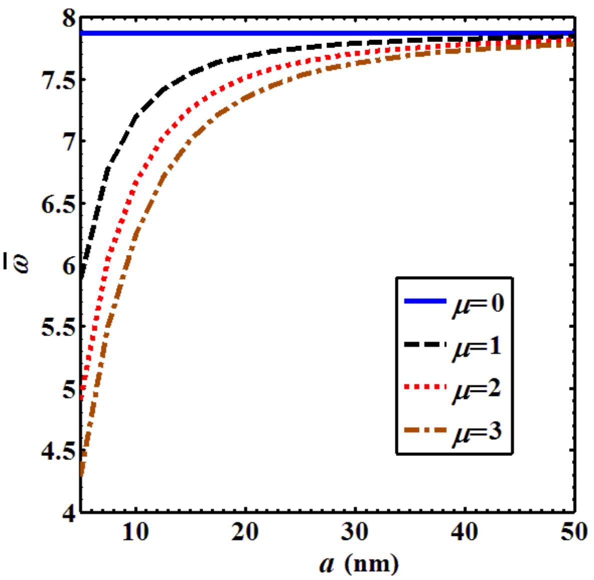

Fig. 3. Effect of the length of the FG nano-plate on dimensionless first natural frequency $\bar{\omega}$ for different values of nonlocal parameter μ (material 1, a/h=10, n=2)

شکل ۳: اثر طول نانو ورق مربعی مدرج تابعی بر بسامد طبیعی اول بدون بعد $\bar{\omega}$ به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرمحلی μ (ماده ۱، a/h=۱۰، n=۲)

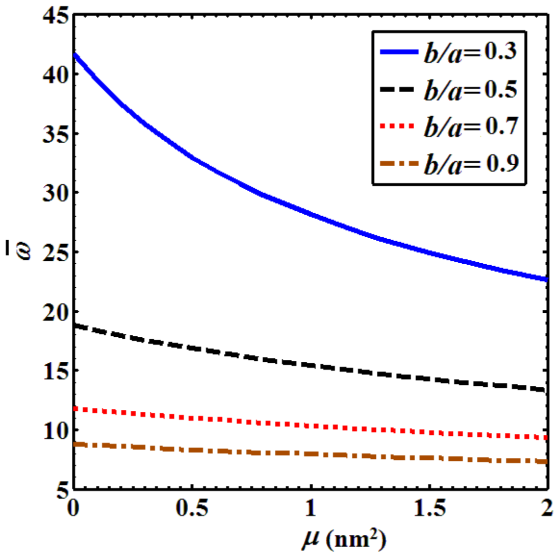

Fig. 4. Variation of dimensionless first natural frequency of the FG nano-plate for different values of nonlocal parameter μ and in-plane aspect ratio b/a (material 1, a/h=10, n=2)

شکل ٤: تغییرات بسامد طبیعی اول بدون بعد $\bar{\omega}$ نانو ورق مربعی مدرج تابعی به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرمحلی μ و نسبت‌های ابعادی درون صفحه‌ای b/a (ماده ۱، a/h=۱۰، n=۲)

جدول ۳: خیز بدون بعد $\bar{w}/10$ ورق مدرج تابعی مربعی تحت بار سینوسی (ماده ۱، a/h=۱۰، μ=۰)

Table 3. Dimensionless deflection $\bar{w}/10$ of the square FG plate under sinusoidal loading (material 1, a/h=10, μ=0)

نظریه	n = ۱	۲	۴	۸
نتایج حاضر	۰/۵۸۸۹	۰/۷۵۷۳	۰/۸۸۱۹	۰/۹۷۵۰
مرتبه سوم تعمیم داده شده [۲۸]	۰/۵۸۸۹	۰/۷۵۷۳	۰/۸۸۱۹	۰/۹۷۵۰
مرتبه سوم با روش RMVT[1] [۲۸]	۰/۵۸۹۰	۰/۷۵۷۳	۰/۸۸۱۵	۰/۹۷۴۷
حل سه بعدی [۲۸]	۰/۵۸۷۶	۰/۷۵۱۷	۰/۸۸۲۳	۰/۹۷۳۹

جدول ٤: مقایسه مقادیر بی‌بعد خیز $\bar{w}$، تنش نرمال $\bar{\sigma}_x$ و تنش برشی $\bar{\tau}_{xz}$ برای نانو ورق مربعی تحت بار سینوسی (ماده ۲، a/h=۱۰)

Table 4. Comparison between dimensionless values of deflection $\bar{w}$, normal stress $\bar{\sigma}_x$ and shear stress $\bar{\tau}_{xz}$ for the square FG nano-plate under sinusoidal loading (material 2, a/h=10)

μ	نظریه	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$
۰	نتایج حاضر	۲/۹۶۰۳	۱۹/۹۵۵۰	۲/۴۶۱۸
	مرجع [۲۹]	۲/۹۶۰۳	۱۹/۹۵۵۰	۲/۴۶۱۸
۴	نتایج حاضر	۵/۲۹۷۷	۳۵/۷۱۰۸	۴/۴۰۵۶
	مرجع [۲۹]	۵/۲۹۷۷	۳۵/۷۱۰۸	۴/۴۰۵۶

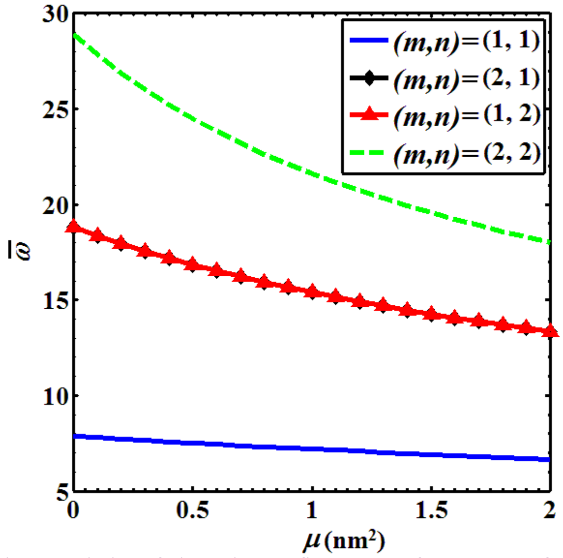

Fig. 5. Variation of dimensionless first natural frequency $\bar{\omega}$ of the square FG nano-plate for different values of nonlocal parameter μ and different modes of vibration (material 1, a/h=10, n=2, b/a=10)

شکل ۵: تغییرات بسامد طبیعی بدون بعد $\bar{\omega}$ نانوورق مربعی مدرج تابعی به ازای پارامتر غیرمحلی μ و مودهای ارتعاشی (ماده ۱، a/h=10، n=۲، b/a=۱۰)

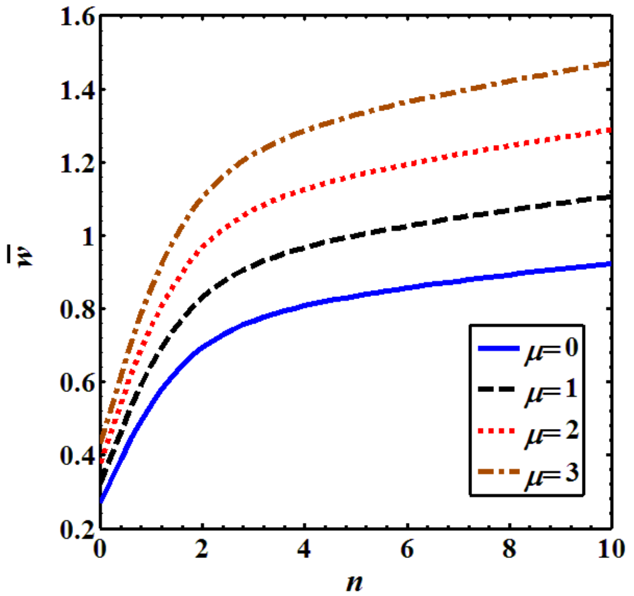

Fig. 6. Variation of dimensionless deflection $\bar{w}$ of the FG nano-plate under sinusoidal loading for different values of power index n and nonlocal parameter μ (material 1, a/h=10)

شکل ٦: تغییرات خیز بدون بعد $\bar{w}$ نانو ورق مربعی مدرج تابعی تحت بار سینوسی به ازای تغییرات شاخص توانی n و پارامتر غیرمحلی μ (ماده ۱، a/h=۱۰)

نمایش می‌دهد، باز هم می‌توان افزایش خیز بدون بعد را به ازای افزایش پارامتر غیرمحلی مشاهده کرد. می‌توان نتیجه گرفت که افزودن پارامتر غیرمحلی سبب کاهش سفتی نانو ورق می‌شود.

شکل‌های ۸ و ۹ تغییرات تنش‌های $\bar{\sigma}_x$ و $\bar{\tau}_{xz}$ را برای نانو ورق تحت بار سینوسی و در راستای ضخامت ورق را نشان می‌دهند. مشاهده می‌شود

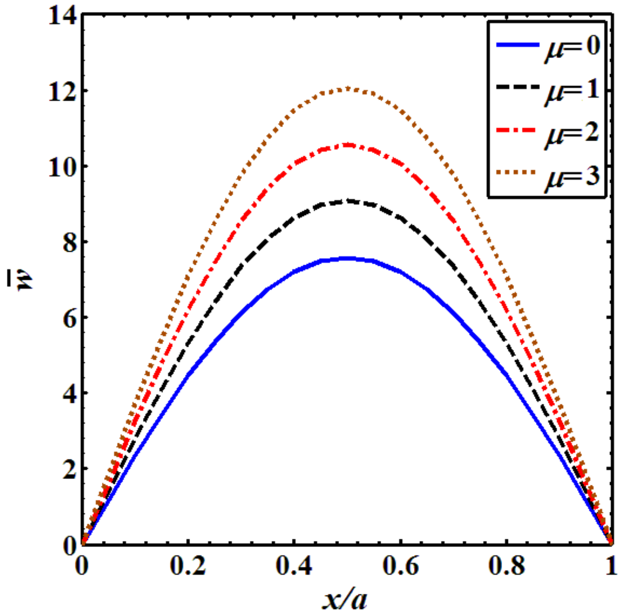

Fig. 7. Dimensionless deflection $\bar{w}$ of the FG nano-plate in $y=b/2$ under sinusoidal loading for different values of nonlocal parameter μ (material 1, $a/h=10$, $n=2$)

شکل ۷: خیز بدون بعد $\bar{w}$ نانو ورق مدرج تابعی در $y=b/2$ تحت بار سینوسی به ازای تغییرات پارامتر غیرمحلی μ (ماده ۱، $n=2$، $a/h=10$)

که با افزایش پارامتر غیرمحلی تنش‌های بدون بعد نیز افزایش می‌یابند. همچنین شکل ۸ نشان می‌دهد که نظریه ارائه شده به خوبی توزیع سهمی‌وار تنش برشی را پیش‌بینی می‌کند.

۴- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، برای بررسی خمش و ارتعاش آزاد نانو ورق مستطیلی از نظریه غیرمحلی ارینگن و یک نظریه ورق تغییرشکل برشی مرتبه بالای مثلثاتی جدید استفاده شد. پاسخ تحلیلی خمش و ارتعاش آزاد به کمک روش ناویر برای نانو ورق با شرایط مرزی ساده به دست آمدند. نتایج نظریه ارائه شده با نتایج موجود مقایسه شد. توافق بسیار خوبی بین نتایج مشاهده شد و قابلیت حل حاضر جهت تخمین رفتار نانو ورق‌های ضخیم و نسبتاً ضخیم تأیید گردید. در ادامه اثرات نسبت ضخامت و نسبت ابعادی و پارامتر غیرمحلی روی پاسخ خمشی و ارتعاش آزاد مورد ارزیابی قرار گرفت. مشخص گردید که لحاظ پارامتر غیرمحلی در معادلات حاکمه باعث کاهش بسامد طبیعی و افزایش خیز و تنش نانو ورق می‌شود. به عبارت دیگر افزودن پارامتر غیرمحلی به معادلات حاکمه سبب کاهش سفتی نانو ورق می‌شود. در مورد بسامد طبیعی این تأثیر با افزایش طول نانو ورق و افزایش نسبت ابعادی، کمتر می‌شود. در واقع با افزایش ابعاد، اثرات اندازه نظریه غیرمحلی کاهش می‌یابد. همچنین، نظریه مرتبه بالای مثلثاتی جدید به کار گرفته شده توزیع سهمی‌وار تنش برشی جانبی درون ضخامت نانو ورق را به خوبی پیش‌بینی می‌کند. علاوه بر این افزایش مقدار شاخص توان n موجب افزایش خیز و کاهش بسامد طبیعی می‌شود. به عبارت دیگر افزایش شاخص توان n

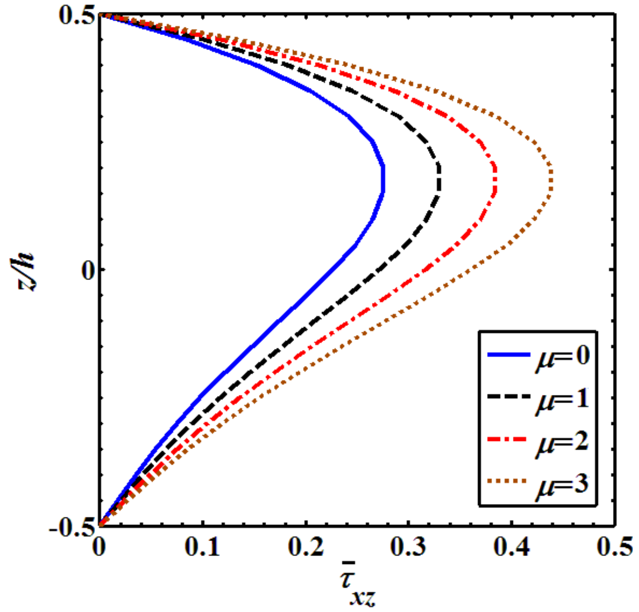

Fig. 8. Distribution of $\bar{\tau}_{xz}$ through the thickness for the FG nano-plate under sinusoidal loading for different values of nonlocal parameter μ (material 1, $a/h=10$, $n=2$)

شکل ۸: توزیع $\bar{\tau}_{xz}$ در راستای ضخامت برای نانو ورق مربعی مدرج تابعی تحت بار سینوسی به ازای تغییرات پارامتر غیرمحلی μ (ماده ۱، $n=2$، $a/h=10$)

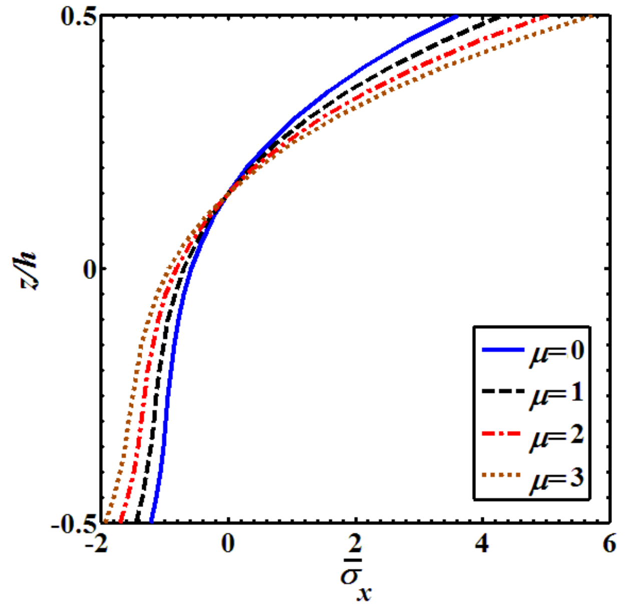

Fig. 9. Distribution of $\bar{\sigma}_x$ through the thickness for the FG nano-plate under sinusoidal loading for different values of nonlocal parameter μ (material 1, $a/h=10$, $n=2$)

شکل ۹: توزیع $\bar{\sigma}_x$ در راستای ضخامت برای نانو ورق مربعی مدرج تابعی تحت بار سینوسی به ازای تغییرات پارامتر غیرمحلی μ (ماده ۱، $n=2$، $a/h=10$)

، به کاهش سفتی نانو ورق می‌انجامد. علاوه بر دقت بسیار خوب نظریه در پیش‌بینی رفتار نانو ورق مدرج تابعی با ضخامت‌های متفاوت در مقایسه با نظریه‌های مشابه، هزینه محاسباتی پایین از دیگر مزیت مهم آن می‌باشد.

فهرست علائم

a	طول نانو ورق
b	عرض نانو ورق
h	ضخامت نانو ورق
n	شاخص توانی
E	مدول الاستیسیته
C	تانسور الاستیسیتی
q	بار جانبی
u, v	جابه‌جایی درون صفحه‌ای
w	خیز (جابه‌جایی جانبی)
$\overline{a}$	مشخصه طول‌های داخلی
e_0	ثابت ماده

علایم یونانی

σ	تنش صفحه‌ای
τ	تنش برشی
ν	نسبت پواسون
ε	کرنش
γ	کرنش برشی
ρ	چگالی
μ	پارامتر غیرمحلی
ω	بسامد طبیعی
φ	تابع شکل
ψ_x	چرخش جانبی حول محورهای y
ψ_y	چرخش جانبی حول محورهای x

بالانویس‌ها

nl	غیرمحلی
l	محلی

زیرنویس‌ها

b	صفحات پایینی
t	صفحات بالایی

پیوست

ضرایب ماتریس‌های رابطه (۲۶) به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$k_{11} = A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2,\ k_{12} = \left(A_{12} + A_{66}\right)\alpha\beta$$
$$k_{13} = \left(B_{11}^a - B_{11}\right)\alpha^3 + \left(2B_{66}^a - 2B_{66} + B_{12}^a - \quad B_{12}\right)\alpha\beta$$
$$k_{14} = B_{11}^a\alpha^2 + B_{66}^a\beta^2,\ k_{15} = \left(B_{66}^a + B_{12}^a\right)\alpha\beta$$
$$k_{21} = k_{12},\ k_{22} = A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2$$
$$k_{23} = \left(2B_{66}^a - 2B_{66} + B_{12}^a - B_{12}\right)\alpha^2\beta + \quad \left(B_{22}^a - B_{22}\right)\beta^2$$
$$k_{24} = \left(B_{66}^a + B_{12}^a\right)\alpha\beta,\ k_{25} = B_{66}^a\alpha^2 + B_{22}^a\beta^2$$
$$k_{31} = k_{13},\ k_{32} = k_{23}$$
$$k_{33} = \left(D_{11} - 2D_{11}^a + D_{11}^{aa}\right)\alpha^4 + 2\left(2D_{66} - \quad 4D_{66}^a + 2D_{66}^{aa} - D_{12} - \right.$$
$$\left. 2D_{12}^a + D_{12}^{aa}\right)\alpha^2\beta^2 + \quad \left(D_{22} - 2D_{22}^a + D_{11}^{aa}\right)\beta^4 + A_{55}^a\alpha^2 + A_{44}^a\beta^2$$
$$k_{34} = \left(D_{11}^{aa} - D_{11}^a\right)\alpha^3 + \left(D_{12}^{aa} - D_{12}^a + 2D_{66}^{aa} - \quad 2D_{66}^a\right)\alpha\beta^2 + \quad A_{55}^a\alpha$$
$$k_{35} = \left(D_{22}^{aa} - D_{22}^a\right)\alpha^3 + \left(D_{12}^{aa} - D_{12}^a + 2D_{66}^{aa} - \quad 2D_{66}^a\right)\alpha^2\beta + \quad A_{44}^a\alpha$$
$$k_{41} = k_{14},\ k_{42} = k_{24},\ k_{43} = k_{34}$$
$$k_{44} = D_{11}^{aa}\alpha^2 + D_{66}^{aa}\beta^2 + A_{55}^a,\ k_{45} = \quad \left(D_{12}^{aa} + D_{66}^{aa}\right)\alpha$$
$$k_{51} = k_{15},\ k_{52} = k_{25},\ k_{53} = k_{35},\ k_{54} = k_{45}$$
$$k_{55} = D_{66}^{aa}\alpha^2 + D_{22}^{aa}\beta^2 + A_{44}^a$$
$$m_{11} = I_1\left(1 + \mu\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right),\ m_{12} = 0$$
$$m_{13} = \left(I_2^a - I_2\right)\alpha\left(1 + \mu\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right)$$
$$m_{14} = I_2^a\left(1 + \mu\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right),\ m_{15} = 0$$
$$m_{21} = m_{12}, m_{22} = I_1\left(1 + \mu\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right)$$
$$m_{23} = \left(I_2^a - I_2\right)\beta\left(1 + \mu\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right),\ m_{24} = 0$$
$$m_{25} = I_2^a\left(1 + \mu\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right)$$
$$m_{31} = m_{13},\ m_{32} = m_{23}$$
$$m_{33} = \left(I_1 + \left(I_3^{aa} + I_3 - 2I_3^a\right)\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right)\left(1 + \quad \mu\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right)$$
$$m_{34} = \left(I_3^{aa} - I_3^a\right)\alpha\left(1 + \mu\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right)$$
$$m_{35} = \left(I_3^{aa} - I_3^a\right)\beta\left(1 + \mu\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right)$$
$$m_{41} = m_{14},\ m_{42} = m_{24},\ m_{43} = m_{34}$$
$$m_{44} = I_3^{aa}\left(1 + \mu\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right),\ m_{45} = 0$$
$$m_{51} = m_{15},\ m_{52} = m_{25},\ m_{53} = m_{35}$$
$$m_{54} = m_{45}$$
$$m_{55} = I_3^{aa}\left(1 + \mu\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right)$$

مراجع

[1] H. Rafieipour, A. Lotfavar, S. Hamzeh Shalamzari, Nonlinear vibration analysis of functionally graded beam on Winkler-Pasternak foundation under mechanical and thermal loading via homotopy analysis method, *Modares Mechanical Engineering,* 12(5) (2013) 87–101. (In Persian)

[2] M. Kadkhodayan, H. Zafarmand, An investigation into the three dimensional dynamic analysis and stress wave propagation in thick functionally graded plates under impact loading, *Modares Mechanical Engineering,* 14(11) (2015) 89–96. (In Persian)

[3] P. Malekzadeh, M. Shojaee, Free vibration of nanoplates based on a nonlocal two-variable refined plate theory, *Composite Structures,* 95 (2013) 443–452.

[4] P. Malekzadeh, M. Shojaee, A two-variable first-order shear deformation theory coupled with surface and nonlocal effects for free vibration of nanoplates, *Journal of Vibration and Control,* 21 (2015) 2755-2772.

[5] A. Ghorbanpour Arani, E. Haghparast, H. Baba AkbarZarei, Nonlocal vibration of axially moving graphene sheet resting on orthotropic visco-Pasternak foundation under longitudinal magnetic field, *Physica B: Physics of Condensed Matter,* 495 (2016) 35-49.

[6] M. Mohammadimehr, B. Rousta Navi, A. Ghorbanpour Arani, Free vibration of viscoelastic double-bonded polymeric nanocomposite plates reinforced by FG-SWCNTs using MSGT, sinusoidal shear deformation theory and meshless method, *Composite Structures,* 131 (2015) 654-671.

[7] H.T. Thai, D.H. Choi, Size dependent functionally graded Kirchhoff and Mindlin plate models based on a modified couple stress theory, *Composite Structures,* 95 (2012) 142-153.

[8] Sh. Hosseini Hashemi, R. Bedroud, M. Nazemnezhad, An exact analytical solution for free vibration of functionally graded circular annular Mindlin nanoplates via nonlocal elasticity, *Composite Structures,* 103 (2013) 108-118.

[9] W.Y. Jung, S.C. Han, Analysis of Sigmoid Functionally Graded Material (S-FGM) Nanoscale Plates Using the Nonlocal Elasticity Theory, *Mathematical Problems in Engineering,* 2013 (2013) 1–10.

[10] W.Y. Jung, S.C. Han, W.T. Park, A modified couple stress theory for buckling analysis of S-FGM nanoplates embedded in Pasternak elastic medium, *Composites: Part B,* 60 (2014) 746-756.

[11] W.Y. Jung, S.C. Han, Static and Eigenvalue problems of Sigmoid Functionally Graded Materials S-FGM micro-scale plates using the Modified Couple Stress Theory, *Applied Mathematical Modeling,* 39(12) (2014) 3506–3524.

[12] H. Salehipour, H. Nahvi, A.R. Shahidi, Exact analytical solution for free vibration of functionally graded micro-nano plates via three-dimensional nonlocal elasticity, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 66 (2015) 350–358.

[13] M.R. Nami, M. Janghorban, Resonance behavior of FG rectangular micro-nano plate based on nonlocal elasticity theory and SGT with one gradient constant, *Composite Structures,* 111 (2014) 349-353.

[14] M.R. Nami, M. Janghorban, Free vibration of functionally graded size-dependent nanoplates based on second order shear deformation theory using nonlocal elasticity theory, *Transactions of Mechanical Engineering,* 39(M1) (2015) 15-28.

[15] L. He, J. Lou, E. Zhang, Y. Wang, Y. Bai, A size-dependent four variable refined plate model for functionally graded microplates based on modified couple stress theory, *Composite Structures,* 130(M1) (2015) 107-115.

[16] H. Salehipour, A.R. Shahidi, H. Nahvi, Modified nonlocal elasticity theory for functionally graded materials, *International Journal of Engineering Science,* 90 (2015) 44-57.

[17] H. Salehipour, A.R.Shahidi, H. Nahvi, Closed-form elasticity solution for three-dimensional deformation of functionally graded micronano plates on elastic foundation, *Latin American Journal of Solids and Structures,* 12 (2015) 747-762.

[18] H. Salehipour, A.R.Shahidi, H. Nahvi, Exact closed-form free vibration analysis for functionally graded micronano plates based on modified couple stress and three-dimensional elasticity theories, *Composite Structures,* 124 (2015) 283-291.

[19] M. Zare, R. Nazemnezhad, Sh. Hosseini Hashemi, Natural frequency analysis of functionally graded rectangular nanoplates with different boundary conditions via an analytical method, *Meccanica*, 50 (2015) 2391-2408.

[20] A. Daneshmehr, A. Rajabpoor, A. Hadi, Size dependent free vibration analysis of nanoplates made of functionally graded materials based on nonlocal elasticity theory with high order theories, *International Journal of Engineering Science,* 95 (2015) 23-35.

[21] M.R. Nami, M. Janghorban, M. Damadan, Thermal buckling analysis of functionally graded rectangular nanoplates base on nonlocal third-ordershear deformation theory, *Aerospace Science and Technology,* 41 (2015) 7-15.

[22] R. Ansari, M.F. Shojaei, A. Shahabodini, M. Bazdid-

Vahdati, Three-dimensional bending and vibration analysis of functionally graded nanoplates by a novel differential quadrature-based approach, *Composite Structures,* 131 (2015) 753-764.

[23] A.C. Eringen, *Nonlocal continuum field theories,* Springer, New York, 2002.

[24] A. Mahi, E.A.A. Bedia, A. Tounsi, A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic functionally graded sandwich and laminated composite plates, *Applied Mathematical Modelling,* 39 (2015) 2489-2508.

[25] E. Jomehzadeh, A.R. Saidi, Decoupling the nonlocal elasticity equations for three dimensional vibration analysis of nano-plates, *Composite Structures,* 93 (2011) 1015-1020.

[26] R. ghababaei, J.N. Reddy, Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates, *Journal of Sound and Vibration,* 326 (2009) 277-289.

[27] G. Jin, Z. Su, S. Shi, T. Ye, S. Gao, Three-dimensional exact solution for the free vibration of arbitrarily thick functionally graded rectangular plates with general boundary conditions, *Composite Structures,* 108 (2014) 567-577.

[28] C.P. Wu, K.H. Chiu, Y.M. Wang, RMVT-based meshless collocation and element-free Galerkin methods for the quasi-3D analysis of multilayered composite and FGM plates, *Composite Structures,* 93 (2011) 923-943.

[29] M. Sobhy, A comprehensive study on FGM nanoplates embedded in an elastic medium, *Composite Structures,* 134 (2015) 966-980.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

A. Azizi, A. Setoodeh, Bending and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Nano-plate Using Trigonometric Higher-Order Plate Theory, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 50(5) (2018) 1039-1050.

DOI: 10.22060/mej.2017.12173.5274