



حل تحلیلی انتقال حرارت درون بافت پوست تحت تابش لیزر به همراه انتقال حرارت جابه‌جایی با استفاده از مدل تأخیر فاز دوگانه

مرضیه رضازاده^{*}، مصطفی نصیری، مجید حیدری

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی گلپایگان، گلپایگان، اصفهان، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۲۶ اردیبهشت ۱۳۹۵
بازنگری: ۶ بهمن ۱۳۹۵
پذیرش: ۱۵ اسفند ۱۳۹۵
ارائه آنلاین: ۲۳ اسفند ۱۳۹۵

کلمات کلیدی:

بافت پوست
انتقال حرارت جابه‌جایی
آسیب حرارتی
مدل تأخیر فاز دوگانه
لاپلاس معکوس عددی

چکیده: توزیع دما در بافت پوست در اثر تابش نور لیزر به همراه انتقال حرارت جابه‌جایی روی سطح پوست، بررسی می‌گردد. پیش‌بینی زمان سوختگی درجه اول و دوم با استفاده از تخمین آسیب حرارتی به بافت بدست می‌آید. از معادله انتقال حرارت زیستی با مدل تأخیر فاز دوگانه، که یک مدل غیر فوریه است، استفاده می‌شود. تابش لیزر روی بافت به صورت به شدت جذب شونده در نظر گرفته شده و تأثیر تأخیر فاز بر روی توزیع دما و عمق نفوذ جبهه‌ی موج حرارتی با در نظر گرفتن ضرایب انتقال حرارت جابه‌جایی متفاوت، بررسی شده است. با استفاده از تبدیل لاپلاس به همراه روش گسسته‌سازی و استفاده از شرایط مرزی، یک دستگاه معادله جبری در حوزه‌ی لاپلاس به دست آمده و با استفاده از لاپلاس معکوس عددی حل شده است. نتایج نشان می‌دهد که تابش لیزر به شدت جذب شونده، پارامتری تعیین‌کننده در مدت زمان سوختگی در بافت پوست می‌باشد. همچنین افزایش ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی، تأثیر چشمگیری بر نتایج دارد، به گونه‌ای که با در نظر گرفتن جابه‌جایی طبیعی روی سطح، زمان‌های سوختگی درجه اول و درجه دوم، حداقل ۰/۰۲ ثانیه به تعویق می‌افتد.

۱- مقدمه

شامل فوتوحرارتی، فوتومکانیکی و فوتوشیمیایی است. این روش درمان فقط مربوط به بیماری‌های پوستی نبوده بلکه برای تومورهای حساس به حرارت نیز استفاده می‌شود. همچنین از لیزر در پرتونگاری مقطعی گسیل پوزیترون^۵، الکتروانسفالوگرافی^۶ و تصویربرداری^۷ MRI، به منظور مطالعه‌ی مناطق درگیر استفاده می‌شود. پاسخ به درد ناشی از تعامل بین لیزر و بافت، به جذب حرارت ناشی از طول موج لیزر و عمق نفوذ که تابعی از طول موج لیزر است، بستگی دارد.

یکی از چالش‌های موجود در حرارت درمانی، دستیابی به میزان حرارت مناسب برای استفاده در بخش مورد نظر از بدن بیمار می‌باشد. چنانچه دمای قسمت در معرض حرارت، بیش از حد افزایش یابد یا برای مدت زمان طولانی در معرض حرارت قرار گیرد، عوارض جانبی جبران‌ناپذیری از جمله مرگ بیمار را در پی خواهد داشت. بنابراین دستیابی به یک میدان دمای مناسب جهت کنترل بهتر فرآیند درمان، بهبود ضریب درمان، افزایش امنیت جانی بیمار، انتخاب نحوه درمان و طراحی دستگاه‌های بالینی جدید، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

انتقال حرارت در بافت بیولوژیکی زنده، یک پروسه‌ی پیچیده است که شامل انتقال حرارت هدایتی درون بافت و سیستم عروق، انتقال حرارت

بافت پوست نقش مهمی در تنظیمات دمایی و محافظت از بدن در برابر عوامل خارجی ایفا می‌کند. پوست به عنوان اولین عضو که نقش کانال انتقال حرارت را بر عهده دارد، از بخش‌های مختلفی مانند بافت، رشته‌های عصبی، غدد چربی، رگ و مو تشکیل شده است. از طرفی پوست انسان از سه لایه‌ی بیرونی^۱، میانی^۲ و درونی^۳ با یک ساختار غیرهمگن تشکیل شده است. شار حرارتی گذرا روی سطح پوست در بسیاری از زمینه‌های مختلف پزشکی از جمله لیزر درمانی، انعقاد خون، جراحی با لیزر، حرارت درمانی، اندازه‌گیری ریزش خون، انجماد سلولی و درمان سرطان استفاده می‌شود. ظهور فناوری‌هایی مانند لیزر و میکروویو^۴ منجر به توسعه‌ی روش‌های حرارت درمانی بافت‌های آسیب دیده شده است. از تابش لیزر در علوم پزشکی برای تشخیص و درمان استفاده می‌شود. در لیزر درمانی، انرژی حرارتی آزاد شده از لیزر، بافت بیولوژیکی را درمان می‌کند. برخی از فرآیندهای درمانی توسط لیزر از جمله جراحی، آنژیوپلاستی، تومور درمانی و پیوند بافت، منجر به تولید حرارت در بافت پوست می‌شود. مکانیزم اثر لیزر روی بافت انسان

- 1 Epidermis layer
- 2 Dermis layer
- 3 Subcutaneous fat layer
- 4 Microwave

نویسنده عهده‌دار مکاتبات: rezazadeh@gut.ac.ir

5 Positron Emission Tomography
6 Electroencephalography
7 Magnetic Resonance Imaging

الکترومغناطیسی با شدت بالا، انتقال حرارت با نرخ زیاد در محیط رقیق و انتقال حرارت در ساختارهایی با ابعاد میکرون نتایج قابل قبولی ارائه نمی‌کند. علت این امر ناسازگاری مدل هدایت فوریه با شرایط واقعی انتشار گرما می‌باشد. به عبارت دیگر معادله‌ی پنز برای انتشار حرارت با سرعت محدود در هر محیطی مانند بافت پوست با ساختار داخلی غیر همگن، با شکست مواجه می‌شود. سرعت انتشار موج در قانون کلاسیک فوریه بی‌نهایت در نظر گرفته می‌شود، ولی این فرض در مسائل انتقال حرارت زیستی از نظر فیزیکی غیر منطقی به نظر می‌رسد. به همین دلیل در سال ۱۹۵۸ کاتانو [۲] و ورنوته [۳]، مدل اصلاح شده‌ای را برای قانون کلاسیک فوریه ارائه کردند که در آن یک تأخیر زمانی ثابت برای شار حرارتی در قانون فوریه در نظر گرفته و در نتیجه سرعت انتشار موج در محیط، بی‌نهایت در نظر گرفته نشده است. از آنجا که ساختار غیر همگن ماده باعث ایجاد یک تأخیر در پاسخ بین شار گرما و گرادیان دما می‌گردد، این تأخیر بیان‌گر زمان لازم برای ذخیره‌ی انرژی جهت تبادل حرارت بین اجزای ساختاری ماده می‌باشد.

در سال ۱۹۹۵ تزو و همکاران [۴]، یک شکل عمومی هذلولوی معادله انتقال حرارت زیستی درون بافت بیولوژیکی زنده را تحت عنوان مدل موج حرارتی بر اساس مدل کاتانو و ورنوته ارائه کردند. به منظور بررسی دقت مدل موج حرارتی در بررسی اثر دمای نوسانی درون بافت زنده، مجموعه‌ای از آزمایش‌ها درون بافت زنده انجام شد و با نتایج شبیه‌سازی مقایسه گردید که از لحاظ کیفی از تطابق خوبی برخوردار بود. لازم به ذکر است که مدل موج حرارتی در مواردی که اثرات واکنش‌های درون سلولی اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند، نمی‌تواند فرآیند انتقال حرارت گذرا را به خوبی مدل کند [۵]. همچنین در مدل موج حرارتی امواج حرارتی با سرعت محدود منتشر شده و نمی‌تواند اثر انتشار موج را در مقیاس‌های زمانی بسیار کوتاه به خوبی بیان کند [۶-۸]. مهم‌ترین هدف در بررسی مسائل انتقال حرارت زیستی، به‌دست آوردن توزیع دما درون بافت و همچنین پیش‌بینی میزان آسیب حرارتی به بافت زنده تحت تابش لیزر می‌باشد.

با توجه به موارد فوق، می‌توان نتیجه گرفت که مدل موج حرارتی نمی‌تواند به عنوان یک ادامه‌ی راه برای معادله‌ی پنز لحاظ شود. لذا به نظر می‌رسد که استفاده از یک معادله‌ی اصلاح شده می‌تواند بخشی از مشکلات موجود در مدل‌های پنز و موج حرارتی را برطرف سازد. در همین راستا در سال ۱۹۹۷ معادله‌ی انتقال حرارت زیستی مدل تأخیر فاز دوگانه^۶ توسط تزو [۹]، ارائه شد. در مدل تأخیر فاز دوگانه، علاوه بر شار حرارتی برای گرادیان دما نیز تأخیر فاز زمانی در نظر گرفته می‌شود که منجر به اضافه شدن دو ثابت زمانی در قانون کلاسیک فوریه می‌شود. مقادیر این تأخیر فازهای زمانی به صورت تجربی تعیین می‌شوند.

در سال‌های اخیر، مدل تعمیم یافته‌ی تأخیر فاز دوگانه به وسیله‌ی ژانگ [۱۰]، ارائه گردید. تفاوت این معادله با معادله‌ی تأخیر فاز دوگانه، وابستگی تأخیر فاز ناشی از شار حرارتی و گرادیان دما به خواص خون و بافت، ریزش

جابه‌جایی میان خون و بافت در نتیجه‌ی گردش خون در بدن از طریق رگ‌ها، ریزش خون^۱ (تزریق وریدی) از طریق مویرگ‌های درون بافت، تولید حرارت متابولیک ناشی از سوخت و ساز در بدن، اتلاف حرارت از طریق موهای سطح پوست و غیره می‌باشد.

انتقال حرارت در بافت با چهار فرآیند هدایت، جابه‌جایی، تبخیر و تابش از سطح پوست صورت می‌گیرد. مدل‌های مختلفی برای تشریح این فرآیندها ارائه شده است. برخی از این مدل‌ها به دلیل پیچیدگی و نیاز به اطلاعات فراوان از آناتومی سیستم عروقی بافت، در عمل کاربرد زیادی پیدا نکردند. اما مدل‌های پیوسته به دلیل سادگی پیاده‌سازی و توانایی آن در پیش‌گویی نتایج تجربی در بیشتر کاربردها از جمله در بررسی‌های درمان با حرارت یا بررسی اثرات سوختگی بر بافت پوست، استفاده شده‌اند. در مدل‌های پیوسته، انتقال حرارت در بافت با فرآیند هدایت مدل شده و اثر جریان خون تنها به صورت یک منبع تولید حرارت، به معادله افزوده می‌شود. برخی مدل‌های پیوسته که تا کنون برای حل معادله‌ی هدایت در داخل بافت پوست ارائه شده‌اند، عبارتند از:

۱. مدل پنز معادله‌ی انتقال حرارت زیستی^۲
 ۲. مدل موج حرارتی معادله‌ی انتقال حرارت زیستی^۳
 ۳. مدل تأخیر فاز دوگانه معادله‌ی انتقال حرارت زیستی^۴
 ۴. مدل تعمیم یافته‌ی تأخیر فاز دوگانه معادله‌ی انتقال حرارت زیستی^۵
- تحقیقات گسترده‌ای در زمینه مدل‌سازی انتقال حرارت درون بافت زنده انجام شده است که در ادامه به برخی از آن‌ها اشاره می‌شود. برای به دست آوردن توزیع دما درون بافت پوست، در سال ۱۹۴۸ معادله‌ی انتقال حرارت زیستی مدل پنز [۱] ارائه گردید. وی توزیع دما در ساعد را در حضور گرادیان دما و جریان خون بررسی کرد. نتایج وی نشان می‌دهد که جریان خون نه تنها باعث گرم شدن سطح بافت شده، بلکه موجب انتقال حرارت بین بافت پوست ساعد و محور اندام می‌شود. آنچه که درباره‌ی این مدل حائز اهمیت است، سادگی و امکان استفاده از آن جهت مدل‌سازی فرآیندهایی مانند حرارت درمانی، اندازه‌گیری ریزش خون، استفاده از سرما جهت از بین بردن سلول‌های یک اندام و شبیه‌سازی حرارتی کل بدن است. شاید بتوان گفت که مشکل اساسی مدل پنز، پیروی این مدل از قانون کلاسیک فوریه است. بر مبنای مدل فوریه، حرارت در محیط هادی با سرعت بی‌نهایت منتشر می‌شود. علی‌رغم این که مدل هدایت حرارت فوریه یک ماهیت غیر واقعی یعنی پخش ناگهانی انرژی حرارتی را در بر دارد، اما تقریب بسیار خوبی برای اکثر پدیده‌های متداول می‌باشد. قانون فوریه در برخی از مسائل از جمله انتقال حرارت گذرا در بازه‌ی زمانی کم، انتقال حرارت در دمای نزدیک صفر مطلق در فرآیند تبرید، تجزیه‌ی مواد به کمک لیزر، تابش موج‌های

- 1 Blood Perfusion
- 2 Pennes Model of Bioheat Transfer Equation
- 3 Thermal Wave Model of Bioheat Transfer Equation
- 4 Dual Phase Lag Model of Bioheat Transfer Equation
- 5 Generalized Dual Phase Lag Model of Bioheat Transfer Equation

6 Dual phase lag (DPL)

یک منبع حرارتی در بافت در نظر می‌گیرند. پس در حالت کلی، نور لیزر یا به صورت به شدت جذب شونده و یا به صورت به شدت پراکنده در نظر گرفته می‌شود. زمانی که نور لیزر به صورت به شدت جذب شونده در نظر گرفته شود، اثر آن به صورت یک شار حرارتی روی سطح پوست و در صورتی که تابش لیزر به شدت پراکنده فرض شود، اثر آن به صورت یک منبع حرارتی خارجی در معادله در نظر گرفته می‌شود.

لیو و همکاران [۱۴]، معادله‌ی انتقال حرارت زیستی مدل تأخیر فاز دوگانه را با فرض تابش لیزر به صورت به شدت پراکنده و اثر جابه‌جایی روی سطح پوست، با استفاده از بسط تیلور مرتبه دوم، به صورت عددی حل نمودند. این تحقیق به لحاظ تئوری به مطالعه‌ی توزیع دما در بافت سه لایه پوست می‌پردازد. اثر واکنش‌های میکروساختاری در معادله‌ی انتقال حرارت زیستی غیر فوری‌ی اصلاح شده بر اساس مدل تأخیر فاز دوگانه‌ی غیر خطی در نظر گرفته شده است. نفوذ لیزر در بافت، با استفاده از روش تابش پرتو گسترده اعمال شده است. وجود مشتق جزئی مرتبه بالای غیر خطی در معادله و شرایط مرزی پیچیده مربوط به دو لایه‌ی مجاور، موجب بروز مشکلاتی در حل معادله شده است. بنابراین در این تحقیق از روش عددی هیبریدی برای حل این مسأله استفاده شده و اثر زمان تأخیر فاز خطی و غیر خطی مقایسه شده است. در تأخیر فاز خطی از دو جمله بسط تیلور ولی در تأخیر فاز غیرخطی از سه جمله بسط تیلور برای تأخیر استفاده می‌شود.

لیو و وانگ [۱۵]، اثر آسیب حرارتی بافت در اثر تابش لیزر به شدت جذب شونده را بر اساس مدل تأخیر فاز دوگانه به صورت عددی، مدل‌سازی نمودند. آن‌ها از مدل تأخیر فاز دوگانه برای تخمین آسیب حرارتی درون بافت‌های بیولوژیکی در اثر تابش لیزر استفاده کردند و اثر نرخ ریزش خون و تولید انرژی متابولیک بر آسیب حرارتی را بررسی نمودند. نتایج آن‌ها نشان می‌دهند که معادله‌ی انتقال حرارت زیستی مدل تأخیر فاز دوگانه، حتی با وجود چشمه حرارتی، می‌تواند به شکل معادله‌ی انتقال حرارت زیستی فوریه برای زمان تأخیر فاز یکسان، ساده شود. عسکری‌زاده و احمدی‌کیا [۱۶]، معادله‌ی انتقال حرارت زیستی مدل تأخیر فاز دوگانه را با در نظر گرفتن ریزش خون و تولید حرارت متابولیک، در حین فرآیند انتقال حرارت گذرا درون بافت پوست را به صورت کاملاً تحلیلی با سه شرط مرزی متداول در حرارت درمانی حل کردند که از تطابق خوبی با نتایج گذشته برخوردار است. همچنین آن‌ها اثر تأخیر فاز ناشی از گرادیان دما بر توزیع دمای بافت و آسیب حرارتی، سوختگی‌های درجه یک و دو، عمق تأثیر شار حرارتی نوسانی و نرخ ریزش خون درون بافت را بررسی کردند.

در مطالعات گذشته، اثر انتقال حرارت جابه‌جایی روی سطح پوست با در نظر گرفتن تابش لیزر به صورت به شدت جذب شونده بررسی نشده است. هدف از انجام این تحقیق، حل معادله‌ی انتقال حرارت زیستی مدل تأخیر فاز دوگانه به صورت تحلیلی برای به دست آوردن توزیع دما درون بافت، بررسی آسیب حرارتی ناشی از تابش لیزر به شدت جذب شونده در حضور انتقال حرارت جابه‌جایی روی سطح پوست و اثر زمان تأخیر فاز بر عمق نفوذ

خون و انتقال حرارت جابه‌جایی می‌باشد. بدین ترتیب هر بخش از بدن دارای تأخیر فاز متفاوتی خواهد بود. در صورتی که چگالی، ظرفیت گرمایی ویژه و هدایت حرارتی خون و بافت یکسان باشند آن‌گاه تأخیر فازهای شار حرارتی و گرادیان دما نیز یکسان خواهند بود.

احمدی‌کیا و همکاران [۱۱]، معادلات سهموی و هذلولوی را تحت شرایط مرزی شار ثابت، نوسانی و پالسی به صورت تحلیلی و با استفاده از روش تبدیل لاپلاس برای پوست به صورت دو حوزه‌ی محدود و نیمه بی‌نهایت، حل کردند. نتایج حاصل از معادلات انتقال حرارت سهموی و هذلولوی، پس از گذشت زمان تفاوت قابل توجهی داشته و معادلات هذلولوی نتایج بهتری ارائه می‌دهند. نتایج حاصل از شار حرارتی گذرا نشان می‌دهد که دامنه‌ی پاسخ دما در لایه‌های عمیق‌تر پوست، به میزان قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد. همچنین نرخ ریزش خون برای مقادیر متفاوت تأخیر فاز دما و شار و میزان آسیب حرارتی به بافت نیز با استفاده از هر دو مدل سهموی و هذلولوی، پیش‌بینی شده است. مقادیر پیش‌بینی شده آنها برای نرخ ریزش خون، تولید حرارت متابولیک و دمای بافت در مقایسه با نتایج حل عددی، از دقت بالاتری برخوردار است. احمدی‌کیا و همکاران [۱۲]، توزیع دمای بافت پوست را با استفاده از مدل پنز و موج حرارتی برای دو مدل تابش لیزر با شدت زیاد در زمان و شدت کم و همچنین در زمان زیاد، به دست آوردند. در مقادیر بازتاب اولیه‌ی کم، درجه حرارت در عمق پوست که به طور مستقیم نتیجه‌ی انتقال حرارت هدایتی می‌باشد، باعث زمان آسایش حرارتی طولانی در بافت پوست می‌شود. این شرایط، منجر به اختلاف زیاد بین نتایج دو مدل پنز و موج حرارتی در شروع فرآیند انتقال حرارت می‌گردد. این اختلاف برای حالت شدت زیاد در زمان کم، افزایش می‌یابد. در هر صورت در شرایط بازتاب زیاد، به دلیل جذب پرتوهای لیزر توسط پوست، می‌توان از توزیع دما در عمق بافت پوست، صرف نظر نمود. لین [۱۳] انتقال حرارت گذرا درون پوست را با استفاده از هر سه مدل پنز، موج حرارتی و تأخیر فاز دوگانه بررسی نمود. وی برای حل معادلات از روش جابه‌جایی متغیر^۱ استفاده کرده و اثر میزان تأخیر فاز، فرکانس حرارتی و میزان شار حرارتی روی سطح پوست را بر توزیع دما و شاخص آسیب حرارتی بررسی نمود. نتایج وی برای مدل پنز با دو مدل دیگر متفاوت بوده و اثر تأخیر فاز، فرکانس حرارتی و میزان شار حرارتی بر تغییرات دما و شاخص آسیب حرارتی قابل ملاحظه بودند.

در صورتی که طول موج نور لیزر در محدوده‌ی فرابنفش یا فرو سرخ قرار داشته باشد، تابش لیزر توسط بافت به خوبی جذب خواهد شد. لذا گرمایش لیزر را می‌توان به صورت شار گرمایی روی سطح پوست در نظر گرفت. زیرا در این موارد تابش لیزر در عمق بسیار کمی از سطح پوست جذب می‌شود. در مقابل، اگر طول موج نور لیزر در محدوده‌ی طول موج‌های مرئی و نزدیک به مادون قرمز قابل توجه باشد دیگر نمی‌توان گرمایش لیزر را به صورت یک شار گرمایی روی سطح پوست در نظر گرفت. همچنین میرایی انرژی لیزر در بافت را باید با توجه به خواص نوری و نفوذ نور تعیین کرد که به صورت

1 Shifting variable

$$\rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{k \left(1 + \tau_r \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}}{\left(1 + \tau_q \frac{\partial}{\partial t} \right)} \right] + w_b r_b c_b (T_b - T) + q_m + q_r \quad (۴)$$

با ساده‌سازی معادله (۴) خواهیم داشت:

$$k \left(1 + \tau_r \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \left(1 + \tau_q \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + w_b r_b c_b (T - T_b) - q_m - q_r \right] \quad (۵)$$

که معادله‌ی فوق، معادله‌ی تأخیر فاز دوگانه می‌باشد. که τ_q تأخیر فاز ناشی از شار حرارتی، τ_r تأخیر فاز ناشی از گرادیان دما، q_m (W/m^۲) تولید حرارت ناشی از سوخت و ساز درون بدن، q_r (W/m^۲) تولید حرارت ناشی از منبع خارجی، T (°C) دمای بافت، T_b (°C) دمای خون، t (sec) زمان، ρ_b (kg/m^۳) چگالی خون، ρ (kg/m^۳) چگالی بافت، w_b (s^{-۱}) نرخ ریزش خون، c (J/kgK) گرمای ویژه‌ی بافت، c_b (J/kgK) گرمای ویژه‌ی خون و k (W/mK) ضریب هدایت حرارتی بافت می‌باشند. در این تحقیق با توجه به این که تابش لیزر به صورت به شدت جذب‌شونده در نظر گرفته شده است، لذا $q_r = 0$ در نظر گرفته شده است.

۴-۱- شرایط اولیه

دمای بافت قبل از اعمال شرایط مرزی، ثابت و برابر با دمای خون در نظر گرفته شده است. لذا مشتق مرتبه اول دما نسبت به زمان برابر با صفر خواهد بود [۱۵].

$$T(x,0) = T_b, \quad \frac{\partial T(x,0)}{\partial t} = 0 \quad (۶)$$

۴-۲- شرایط مرزی

عمق بافت همواره به صورت عایق در نظر گرفته می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت [۱۴].

$$q(L,t) = 0 \quad (۷)$$

با فرض تابش لیزر به صورت به شدت جذب‌شونده، شرط مرزی برای سطح پوست به شکل معادله (۸) در می‌آید [۱۴].

$$q(0^+,t) = \phi_{in} (1 - R_d) + h(T_f - T) \quad (۸)$$

که تابش لیزر (ϕ_{in}) به صورت پالسی به شکل معادله (۹) در نظر گرفته

جبهه‌ی موج حرارتی می‌باشد. از طرف دیگر، در انجام حرارت درمانی باید مدت زمان اعمال شار حرارتی بر روی سطح پوست کنترل شود تا از بروز سوختگی جلوگیری شود لذا در این مقاله با استفاده از روش تأخیر فاز دوگانه، اثر انتقال حرارت جابه‌جایی روی سطح پوست در زمان سوختگی مرتبه اول و دوم و تغییرات پارامتر آسیب حرارتی بررسی شده است. بنابراین با استفاده از این مدل می‌توان زمان سوختگی و تغییرات پارامتر آسیب حرارتی را برای انواع شار حرارتی بررسی نمود.

در این پژوهش، ابتدا با یک تغییر متغیر، شرایط مرزی معادله DPL حاکم، همگن می‌شود. با اعمال تبدیل لاپلاس بر روی متغیر زمان (t) از معادله تأخیر فاز دوگانه، یک معادله دیفرانسیل اولیه^۱ حاصل می‌شود. پس از شبکه‌بندی عمق بافت، معادله دیفرانسیل مرتبه اول حاکم در هر زیر بازه با استفاده از شرایط مرزی پیوستگی دما و شار حرارتی حل می‌شود. با حل این معادلات در هر زیر بازه و استفاده از شرایط مرزی پیوستگی، یک دستگاه معادلات جبری در حوزه‌ی لاپلاس ایجاد می‌شود. پس از حل این دستگاه معادله جبری خطی، پاسخ در حوزه لاپلاس برای هر گره به دست می‌آید. با استفاده از یک روش عددی برای محاسبه لاپلاس معکوس [۱۷]، توزیع دما در عمق پوست حاصل می‌شود.

۲- معادلات حاکم

قانون کلاسیک فوریه‌ی تعمیم یافته در مختصات کارتزین و برای حالت یک بعدی به شکل زیر می‌باشد [۹].

$$\left(1 + \tau_q \frac{\partial}{\partial t} \right) q(x,t) = -k \left(1 + \tau_T \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \quad (۱)$$

بنابراین:

$$q(x,t) = -\frac{k \left(1 + \tau_T \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}}{\left(1 + \tau_q \frac{\partial}{\partial t} \right)} \quad (۲)$$

از طرفی معادله‌ی عمومی انتقال حرارت زیستی نیز برای حالت یک بعدی و گذرا، به شکل معادله (۳) می‌باشد [۱۵].

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + w_b \rho_b c_b (T_b - T) + q_m + q_r \quad (۳)$$

با جایگذاری معادله‌ی (۲) در معادله‌ی (۳)، معادله (۴) حاصل می‌شود.

شده است.

$$k \left(1 + \tau_r \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \left(1 + \tau_q \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\rho c \frac{\partial H}{\partial t} + w_b \rho_b c_b H - q_m \right] \quad (12)$$

شرایط اولیه نیز به صورت زیر در می‌آیند.

$$H(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial H(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (13)$$

پس از اعمال تبدیل لاپلاس نسبت به متغیر زمان (t) ، معادله (۱۲) به شکل زیر خواهد شد.

$$k(1 + \tau_r s) \frac{d^2 \tilde{H}}{dx^2} = (1 + \tau_q s) (\rho c s + w_b \rho_b c_b) (\tilde{H}) - \frac{q_m}{s} \quad (14)$$

معادله‌ی (۱۴)، معادله تأخیر فاز دوگانه در فضای لاپلاس می‌باشد. اکنون پارامترهای زیر جهت ساده سازی معادله به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$K = \frac{k(1 + \tau_r s)}{(1 + \tau_q s)}$$

$$f = \frac{q_m}{k(1 + \tau_r s)s} \quad (15)$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{K} (\rho c s + w_b \rho_b c_b)$$

لذا معادله (۱۴) با استفاده از پارامترهای تعریف شده در معادله (۱۵) به شکل معادله (۱۶) در می‌آید.

$$\frac{d^2 \tilde{H}}{dx^2} - \lambda^2 \tilde{H} = -f \quad (16)$$

اگر i بیانگر شماره گره و j بیانگر شماره زیر بازه باشد آنگاه این معادله را می‌توان در زیر بازه i که بین دو گره i و $i+1$ قرار دارد به شکل زیر نوشت.

$$\frac{d^2 \tilde{H}_j}{dx^2} - \lambda^2 \tilde{H}_j = -f_j \quad \text{for } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad i = j \quad (17)$$

برای دستیابی به پیوستگی دما و شار حرارتی در کل دامنه، باید یک شرط مرزی مطابق معادله (۱۸) و (۱۹) در سطح مشترک دو زیر بازه‌ی $j-1$ و j که به ترتیب بین گره‌های $[x_{i-1}, x_i]$ و $[x_i, x_{i+1}]$ قرار دارند، تعریف شود.

$$\tilde{H}_{j-1}(x_i) = \tilde{H}_j(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = i \quad (18)$$

$$\phi_{in} = q. [U(t) - U(t - \Delta t)] \quad (9)$$

شدت تابش لیزر، q_0 (W/m^2) ضریب بازتابندگی، Δt (sec) مدت زمان تابش لیزر، T_f دمای محیط خنک کننده و h (W/m^2K) ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی روی سطح پوست می‌باشند. $U(t)$ نیز تابع پله واحد بوده و بنابراین $U(t) - U(t - \Delta t)$ بیانگر یک پالس با عرض Δt می‌باشد.

۳-۴- آسیب حرارتی

یکی از اهداف به دست آوردن توزیع دما در بافت پوست، تخمین میزان آسیب حرارتی در بافت زنده می‌باشد. جهت تخمین آسیب حرارتی در بافت زنده، پارامتر آسیب (Ω) به صورت زیر تعریف شده است [۱۸].

$$\Omega = \ln \left(\frac{C_c}{C_c - C_d} \right) \quad (10)$$

که در آن C_0 ، غلظت پروتئین در بافت نرمال و C_d غلظت پروتئین تغییر ماهیت یافته است. فرآیند تغییر ماهیت پروتئین عموماً به صورت یک واکنش شیمیایی در نظر گرفته شده و از مدل آرنیوس در معادله (۱۱) جهت ارزیابی پارامتر آسیب Ω استفاده می‌شود [۱۸].

$$\Omega = \int_0^t A \exp \left(-\frac{E}{RT} \right) dt \quad (11)$$

که در آن A ($1/sec$) ضریب فرکانس، E ($J/mol.K$) انرژی اکتیواسیون و واکنش تغییر ماهیت پروتئین که برای قسمت‌های مختلف بدن انسان به صورت تجربی به دست می‌آید، R ($J/mol.K$) ثابت جهانی گازها، T ($^{\circ}C$) دمای بافت در نقطه‌ای که Ω محاسبه می‌شود و t (sec) زمان هستند. برای تعیین سوختگی درجه اول و دوم، دمای بافت در سطح مشترک بین لایه‌ی بیرونی و میانی و برای سوختگی درجه سوم، دمای سطح مشترک بین سطح لایه‌ی میانی و درونی به عنوان معیار ارزیابی در نظر گرفته شده است. سوختگی درجه اول زمانی به وجود می‌آید که در سطح مشترک بین لایه‌ی بیرونی و میانی $T > 44^{\circ}C$ و $\Omega = 0.53$ باشد. همچنین سوختگی درجه دوم زمانی به وجود می‌آید که در سطح مشترک بین سطح لایه‌ی میانی و درونی $T > 44^{\circ}C$ و $\Omega = 1$ باشد [۱۹].

۳- روش حل

ابتدا متغیر H به صورت $H = T - T_b$ تعریف می‌شود. با جای گذاری H در معادله‌ی (۵)، معادله (۱۲) به دست می‌آید.

مجهول به شکل معادله (۲۶) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{hl}{K}\right) \tilde{H}_1 - \tilde{H}_2 &= \frac{\tilde{\Phi}_{in} l (1 - R_d)}{K} - \frac{hl(T_b - T_f)}{ks(1 + \tau_{Ts})} \\ \tilde{H}_1 - 2 \cosh(\lambda l) \tilde{H}_2 + \tilde{H}_3 &= \frac{2f}{\lambda^2} [1 - \cosh(\lambda l)] \\ \tilde{H}_2 - 2 \cosh(\lambda l) \tilde{H}_3 + \tilde{H}_4 &= \frac{2f}{\lambda^2} [1 - \cosh(\lambda l)] \\ &\vdots \\ \tilde{H}_{n-2} - 2 \cosh(\lambda l) \tilde{H}_{n-1} + \tilde{H}_n &= \frac{2f}{\lambda^2} [1 - \cosh(\lambda l)] \\ \tilde{H}_n - \tilde{H}_{n-1} &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

این دستگاه معادله را می‌توان به شکل ماتریسی $\{G\} \{\tilde{H}\} = \{B\}$ نشان داد. که در آن $\{G\}$ یک ماتریس، $\{\tilde{H}\}$ یک بردار ستونی و $\{B\}$ یک بردار ستونی مربوط به شارحرارتی بوده و همگی در حوزه‌ی لاپلاس می‌باشند. پس از حل دستگاه معادله‌ی (۲۶) و محاسبه بردار $\{\tilde{H}\}$ ، از هر \tilde{H}_i ، تبدیل لاپلاس معکوس به روش عددی گرفته شده و دما در حوزه‌ی زمان بدست می‌آید. برای محاسبه لاپلاس معکوس، با دقت بسیار خوبی می‌توان از روابط زیر استفاده نمود [۱۷].

$$\begin{aligned} f_c(t, a) &= \frac{e^a}{t} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{Im} \left\{ F \left[\frac{a}{t} + j \left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{t} \right] \right\} \\ f_s(t, a) &= \frac{e^a}{t} \left[\frac{1}{2} F \left(\frac{a}{t} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{Re} \left\{ F \left[\frac{a}{t} + j n \frac{\pi}{t} \right] \right\} \right] \\ f(t) &= \frac{1}{2} [f_c(t) + f_s(t)] \end{aligned} \quad (27)$$

که در اینجا $a=6$ بر اساس پیشنهاد مرجع [۱۷] انتخاب شده است.

۴- اعتبار سنجی

به منظور سنجش اعتبار نتایج به دست آمده از حل تحلیلی، با در نظر گرفتن یک شبکه با ۳۵ گره و اعمال شار حرارتی ثابت روی سطح با شدت $q = 5000 \text{ W/m}^2$ و مدت تابش برابر 500 sec ، توزیع دما روی سطح پوست بر اساس معادله‌ی پنز ($\tau_r = \tau_q = 0$) مطابق شکل ۱ به دست می‌آید. از مقایسه‌ی این نتایج با مرجع [۱۱]، مشاهده می‌شود که حداکثر خطا برابر ۲/۶٪ بوده است و بیان گر صحت الگوریتم به کار رفته می‌باشد. مدل سهموی عموماً دمای بالاتری نسبت به نتایج مدل هذلولوی ارائه می‌دهد [۱۹]، که این پدیده در شکل ۱ به خوبی مشاهده می‌شود.

$$\frac{d\tilde{H}_{j-1}(x_i)}{dx} = \frac{d\tilde{H}_j(x_i)}{dx} \quad i = 1, 2, \dots, n; j = i \quad (19)$$

که n تعداد کل گره‌ها می‌باشد. در واقع معادلات (۱۸) و (۱۹) بیانگر شرایط مرزی معادله (۵) در یک زیربازه می‌باشند. \tilde{H} با استفاده از دماهای گره‌ای در طول یک زیربازه کوچک به صورت تقریبی به دست آمده، سپس تابع شکل با استفاده از معادله‌ی (۱۷) به دست می‌آید. بنابراین شرایط مرزی برای زیربازه‌ی j ام بین دو گره‌ی $[x_i, x_{i+1}]$ ، بر اساس یک روش گسسته‌سازی اصلاح شده به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۵].

$$\tilde{H}_j(x_i) = \tilde{H}_i, \quad \tilde{H}_j(x_{i+1}) = \tilde{H}_{i+1} \quad (20)$$

معادله‌ی (۱۷) یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو است که دارای یک جواب عمومی و یک جواب خصوصی به شکل زیر، می‌باشد.

$$\tilde{H}_j(x) = C_1 \sinh(\lambda x) + C_2 \cosh(\lambda x) + \frac{f_j}{\lambda^2} \quad (21)$$

پس از محاسبه ثابت‌های C_1 و C_2 با استفاده از معادله (۲۰)، معادله (۲۱) به صورت معادله (۲۲) خواهد شد.

$$\begin{aligned} \tilde{H}_j(x) &= \frac{1}{\sinh(\lambda l)} \left\{ \left(\tilde{H}_i - \frac{f_j}{\lambda^2} \right) \sinh \lambda (x_{i+1} - x) \right. \\ &\quad \left. + \left(\tilde{H}_{i+1} - \frac{f_j}{\lambda^2} \right) \sinh \lambda (x - x_i) \right\} + \frac{f_j}{\lambda^2} \end{aligned} \quad (22)$$

که رابطه (۲۲) پاسخ معادله (۱۷) بوده و تابع شکل نامیده می‌شود. با تعریف فاصله‌ی بین دو گره‌ی مجاور به صورت $l = x_{i+1} - x_i$ رابطه (۲۲) به شکل زیر ساده می‌شود.

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{i-1} - 2 \cosh(\lambda l) \tilde{H}_i + \tilde{H}_{i+1} &= \\ \frac{f_{i-1} + f_i}{\lambda^2} [1 - \cosh(\lambda l)] \end{aligned} \quad (23)$$

که در آن $i = 2, \dots, n-1$ می‌باشد. با اعمال تبدیل لاپلاس و گسسته‌سازی، شرایط مرزی نیز به صورت معادله (۲۴) و (۲۵) به دست می‌آیند.

$$\left(1 + \frac{hl}{K}\right) \tilde{H}_1 - \tilde{H}_2 = \frac{\tilde{\Phi}_{in} l (1 - R_d)}{K} - \frac{hl(T_b - T_f)}{ks(1 + \tau_{Ts})} \quad (24)$$

$$\frac{\tilde{H}_n - \tilde{H}_{n-1}}{1} = 0 \quad (25)$$

با اعمال معادله (۲۳) به کلیه گره‌های غیر مرزی و همچنین استفاده از شرایط مرزی (۲۴) و (۲۵)، یک دستگاه معادله جبری خطی با n معادله و n

جدول ۱: خواص خون، بافت و محیط [۱۴ و ۲۱ و ۲۲]

Table 1. Properties of blood, tissue and environment

مقدار	واحد	علامت اختصاری	پارامتر
۱۰۶۰	kg/m ³	b_p	چگالی خون
۳۷۷۰	J/kgK	C_b	گرمای ویژه‌ی خون
۳۷	°C	T_b	دمای خون
۱۱۹۰	kg/m ³	ρ	چگالی بافت
۳۶۰۰	J/kgK	C	گرمای ویژه‌ی بافت
۰/۲۳۵	W/mK	k	ضریب هدایت حرارتی بافت
۳۶۸/۱	W/m ³	q_m	تولید حرارت متابولیک
۰/۰۰۶	m	L	ضخامت بافت
۰/۰۰۰۴۷۲	1/s	w_b	نرخ ریزش خون
۱۵۰ و ۷	W/m ² K	h	ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی
۲۵	°C	T_f	دمای محیط

دقیق‌تر شده تا جایی که برای مقادیر ۳۰ و ۳۵ گره، تغییر چندانی در توزیع دمای سطح پوست مشاهده نمی‌شود. بنابراین تعداد گره‌های شبکه برابر ۳۵ در نظر گرفته شده است. با توجه به اینکه عرض پالس تابش لیزر ۵ sec می‌باشد لذا در ۵ sec نخست ابتدا دما افزایش و سپس کاهش یافته است. همانطور که بیان شد، در این مسأله از یک شبکه با ۳۵ گره برای حل استفاده شده است. در اینجا دما در گره‌های موجود در عمق بافت به ازای تأخیرهای زمانی (τ) مختلف در زمان $t=5$ sec در شکل‌های ۲ و ۳ نشان داده شده است.

اثر تأخیر فاز ناشی از گرادیان دما بر توزیع دما و نیز عمق نفوذ جبهه‌ی موج حرارتی به ازای مقادیر مختلف τ_T و برای $\tau_q=15$ sec در شکل ۳ نشان داده شده است. مطابق شکل ۳، با افزایش τ_T دمای روی سطح کاهش یافته

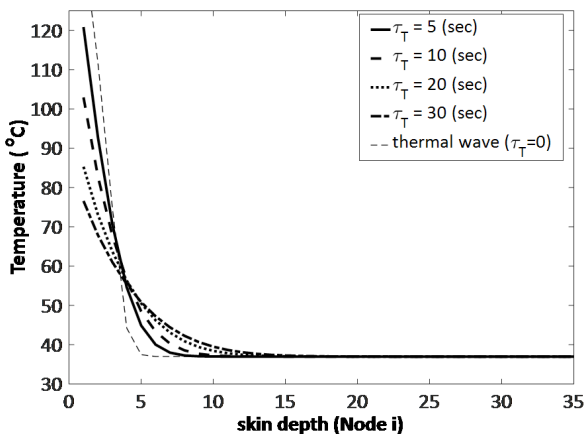


Fig. 3. Temperature distribution along skin depth at $t=5$ sec for various τ_T

شکل ۳: تغییر دما بر حسب عمق پوست در $t=5$ sec و برای τ_T های مختلف

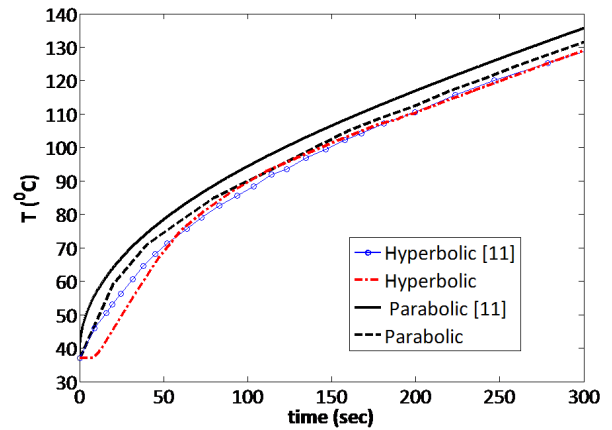


Fig. 1. Variation of temperature at skin surface with constant heat flux $q_0=5000$ W/m², and comparison with results in Ref. [11]

شکل ۱: مقایسه‌ی تغییر دمای سطح پوست تحت شار حرارتی ثابت $q_0=5000$ W/m² با مرجع [۱۱]

۵- نتایج

با حل دستگاه معادله‌ی (۲۶)، بردار ستونی $\{\bar{H}\}$ به دست می‌آید که در آن $\bar{H}_i = \mathcal{L}\{H_i\} = \mathcal{L}\{T_i - T_b\}$ دما در گره‌ی i می‌باشد. برای انتخاب شبکه‌ی مناسب، باید نمودار همگرایی شبکه به دست آید. بدین منظور مسأله برای شبکه‌های مختلف حل و بهترین شبکه انتخاب شده است. خواص خون، بافت و محیط، در جدول ۱ ارائه شده است. مقادیر تأخیر فاز ناشی از گرادیان دما (τ_T) و شار حرارتی (τ_q) را می‌توان در بازه‌ی زمانی بین $0/1$ sec تا 32 sec انتخاب نمود [۲۳-۲۵] که در اینجا از $\tau_q=15$ sec و $\tau_T=10$ sec انتخاب شده است. برای بررسی اثر تعداد گره، دما روی سطح بافت پوست برای تابش لیزر با شدت $q=20000$ W/m² و $R_d=0/05$ و مدت زمان تابش $\Delta t=5$ s انتخاب شده و ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی $h=0$ برای تعداد گره ۵، ۱۵، ۲۵، ۳۰ و ۳۵ در شکل ۲ نشان داده شده است. همان گونه که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، با افزایش تعداد گره‌ها پاسخ

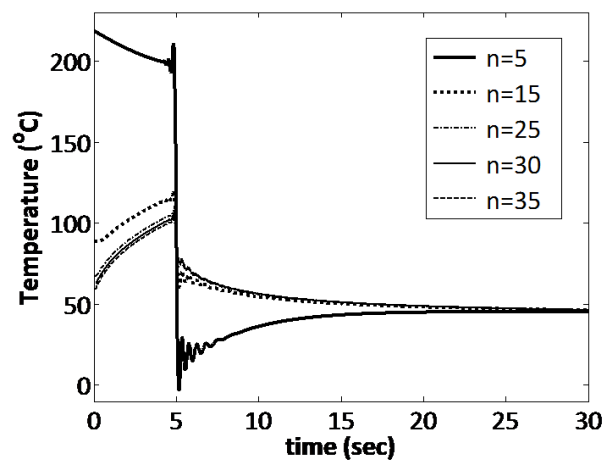


Fig. 2. Variation of temperature at skin surface for various mesh density

شکل ۲: تغییر دما روی سطح بافت برای تعداد گره مختلف

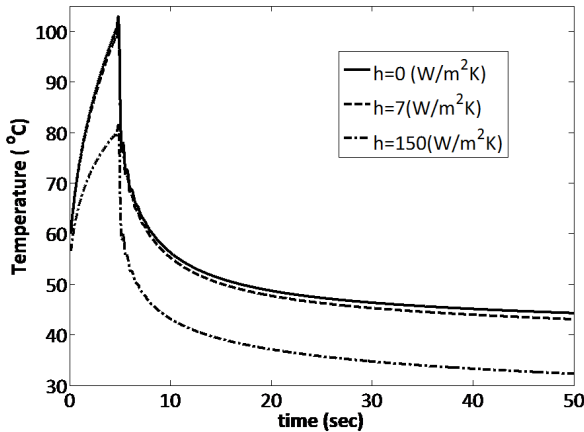


Fig. 5. Temperature transient at skin surface for various convective heat transfer coefficient, as $\tau_q=15$ sec and $\tau_r=10$ sec

شکل ۵: تغییر دما در سطح پوست نسبت به زمان برای ضرایب انتقال حرارت جابه‌جایی مختلف و $\tau_q=15$ sec و $\tau_r=10$ sec

به منظور بررسی آسیب حرارتی، انرژی فعال‌سازی واکنش تغییر ماهیت پروتئین $E=4/6 \times 10^5$ (J/mol.K) و ضریب فرکانس (1/sec) $A=1/43 \times 10^{12}$ در نظر گرفته شده است [۲۶]. برای پیش‌بینی زمان سوختگی درجه اول و درجه دوم، پارامتر آسیب حرارتی برای ضرایب انتقال حرارت مختلف در شکل ۶ نشان داده شده است.

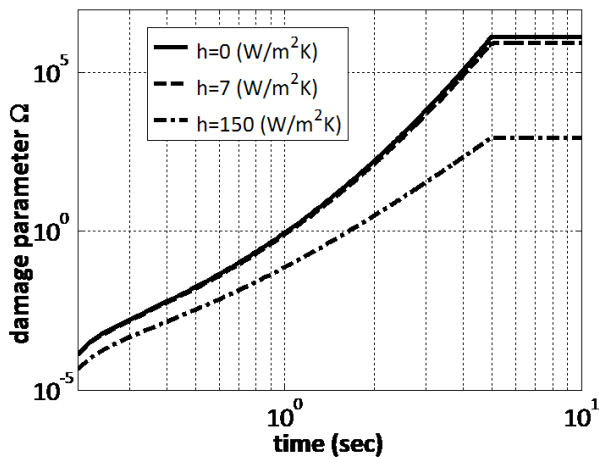


Fig. 6. Logarithmic representation of thermal damage versus time for various convective heat transfer coefficients

شکل ۶: تغییر آسیب حرارتی بر حسب زمان در حالت تقدم شیب به صورت نمایش لگاریتمی برای ضرایب انتقال حرارت جابه‌جایی مختلف

همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، سوختگی در بافت بسیار سریع و در همان مراحل اولیه تابش لیزر اتفاق می‌افتد. زمان‌های سوختگی درجه اول و دوم بر اساس معیار $\Omega=1$ و $\Omega=0.5$ در جدول ۲ آورده شده است. در سوختگی درجه اول و دوم، لازم است دمای سطح مشترک بین لایه بیرونی و میانی از ۴۴ درجه سانتیگراد بالاتر باشد لذا در جدول ۲، دمای این سطح مشترک نیز آورده شده است. همان‌طور که در این جدول

ولی عمق نفوذ جبهه‌ی موج حرارتی افزایش پیدا می‌کند. علاوه بر این با افزایش τ_r دمای سطح پوست تأثیر کمتری از تابش لیزر گرفته و شیب تغییرات کمتری در عمق بافت مشاهده می‌شود.

همچنین شکل ۴، تغییرات دما در عمق پوست را برای مقادیر مختلف τ_q و $\tau_r=10$ sec نشان می‌دهد. مطابق با این شکل، با افزایش τ_q دمای روی سطح افزایش یافته اما مقدار عمق نفوذ جبهه‌ی موج حرارتی کاهش می‌یابد. همچنین اثر τ_q به گونه‌ای است که با افزایش τ_q دمای سطح پوست تأثیر کمتری از تابش لیزر گرفته و شیب تغییرات کمتری در عمق بافت مشاهده می‌شود.

نمودار شکل‌های ۳ و ۴ نشان می‌دهد که اثر مربوط به تأخیرهای زمانی τ_q و τ_r در نواحی نزدیک به سطح پوست دارای اثر بیشتری نسبت به عمق بافت است و بر اثر تغییر این تأخیرهای زمانی، در سطح پوست تغییرات دمایی بالاتری در اثر تابش لیزر مشاهده می‌شود. با توجه به این که $K = \frac{1+\tau_r S}{1+\tau_q S}$ لذا با افزایش τ_r ضریب K افزایش و با افزایش τ_q ضریب K کاهش می‌یابد. بنابراین با توجه به معادله مربوط به شرط مرزی روی سطح پوست (معادله اول از معادلات ۲۴)، با افزایش ضریب K دمای سطح پوست کاهش و با کاهش ضریب K ، دمای سطح پوست افزایش می‌یابد.

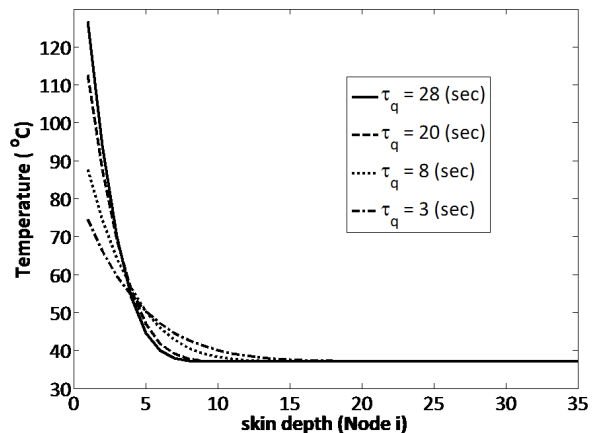


Fig. 4. Temperature distribution along skin depth at $t=5$ sec for various τ_q شکل ۴: تغییر دما بر حسب عمق پوست در $t=5$ sec و برای τ_q های مختلف

در شکل ۵، توزیع دمای سطح پوست در حالت تقدم شیب ($\tau_q > \tau_r$) برای ضرایب انتقال حرارت جابه‌جایی متفاوت برای لیزر با شدت $q_0=20$ kW/m² و در مدت زمان 5 sec نشان داده شده است. در این شکل، تغییرات دما در سطح پوست بدون در نظر گرفتن اثر انتقال حرارت جابه‌جایی روی سطح ($h=0$)، با در نظر گرفتن جابه‌جایی طبیعی ($h=7$) و همچنین با در نظر گرفتن جابه‌جایی اجباری ($h=150$) رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی، دمای سطح پوست کاهش می‌یابد که نشان‌دهنده‌ی افزایش انتقال حرارت از سطح پوست می‌باشد.

E	انرژی فعال‌سازی تغییر ماهیت، J/mol
f	پارامتر تعریف شده در معادله‌ی (۱۷)
H	متغیر وابسته‌ی جدید، $H=T-T_b$
\tilde{H}	تبدیل لاپلاس H
k	هدایت حرارتی، W/m.K
K	پارامتر تعریف شده در معادله‌ی (۱۸)
l	فاصله‌ی بین دو گره‌ی مجاور، m
L	طول بافت، m
n	تعداد کل گره‌ها
q_0	شدت لیزر، W/m^2
q_m	تولید گرمای متابولیک، W/m^2
q_r	منبع حرارتی فضایی، W/m^2
R	ثابت جهانی گازها، $8/314 J/mol.K$
R_d	ضریب بازتابندگی
s	پارامتر تبدیل لاپلاس
t	زمان، s
T	دمای بافت، $^{\circ}C$
T_b	دمای خون، $^{\circ}C$
u	تابع پله
W_b	نرخ گردش خون، ۱/s

علائم یونانی

λ	پارامتر تعریف شده در معادله‌ی (۱۶)
ρ	چگالی بافت، kg/m^3
ρ_b	چگالی خون، kg/m^3
τ_q	زمان آسایش شار حرارتی، s
τ_T	زمان آسایش گرادیان دما، s
Δt	مدت زمان اعمال تابش، s
Φ_{in}	تابعی از شدت لیزر

زیرنویس

i	شماره‌ی گره
j	شماره‌ی زیر بازه

منابع

- [1] H.H. Pennes, Analysis of tissue and arterial blood temperatures in the resting human forearm, *Journal of applied physiology*, 1(2) (1948) 93-122.
- [2] C. Cattaneo, A form of heat-conduction equations which eliminates the paradox of instantaneous propagation, *Comptes Rendus*, 247 (1958) 431.
- [3] P. Vernotte, Les paradoxes de la theorie continue de

مشاهده می‌شود، با افزایش ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی می‌توان زمان ایجاد سوختگی را به تأخیر انداخت، به طوری که با در نظر گرفتن جابه‌جایی طبیعی روی سطح، زمان‌های سوختگی درجه اول و درجه دوم، حداقل ۰/۰۲ ثانیه به تعویق می‌افتد.

جدول ۲: زمان پیش‌بینی شده برای سوختگی پوست برای $\Delta t=5$ sec و $q_0=20$ kW/m²

Table 2. Prediction of skin burn time when gradient precedes the heat flux for $\Delta t=5$ sec and $q_0=20$ kW/m²

$\Omega=1$		$\Omega=0/53$		ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی $h(W/m^2K)$
دمای سطح مشترک ($^{\circ}C$)	زمان سوختگی درجه دوم (sec)	دمای سطح مشترک ($^{\circ}C$)	زمان سوختگی درجه اول (sec)	
۶۱/۶۵	۰/۸۳۴	۶۰/۳۵	۰/۷۴	۰
۶۱/۶۵	۰/۸۵۷	۶۰/۳۰	۰/۷۶	۷
۶۱/۴۳	۱/۴۵۹	۶۰/۲۲	۱/۲۸	۱۵۰

۶- نتیجه‌گیری

در این تحقیق معادله‌ی انتقال حرارت زیستی بر اساس مدل تأخیر فاز دوگانه با در نظر گرفتن انتقال حرارت جابه‌جایی روی سطح پوست در حالت تابش لیزر به صورت به شدت جذب‌شونده، به روش تحلیلی بررسی شده است. اثر زمان‌های تأخیر فاز بر توزیع دما و عمق نفوذ جبهه‌ی موج حرارتی نشان می‌دهد که در نظر گرفتن مقادیر صحیح تأخیر فاز تأثیر چشم‌گیری بر نتایج خواهد داشت که به دنبال آن پیش‌بینی زمان‌های سوختگی نیز تحت تأثیر قرار می‌گیرد. زیرا با افزایش زمان تأخیر فاز ناشی از شار حرارتی، حداکثر دما روی سطح پوست افزایش و با افزایش زمان تأخیر فاز ناشی از گرادیان دما، حداکثر دما روی سطح پوست کاهش می‌یابد. در حالت کلی می‌توان نتیجه گرفت که در نظر گرفتن انتقال حرارت جابه‌جایی روی سطح (جابه‌جایی طبیعی)، هر چند اندک باعث ایجاد تغییر در نتایج شده و صرف نظر کردن از اثر آن، موجب ایجاد خطا به اندازه‌ی حداقل ۲/۶ درصد در نتایج می‌شود. بنابراین در نظر گرفتن انتقال حرارت جابه‌جایی روی سطح، بسیار مهم و ضروری به نظر می‌رسد.

فهرست علائم

A	ضریب فرکانس، ۱/s
C	ظرفیت گرمایی بافت، J/kg.K
C_b	ظرفیت گرمایی خون، J/kg.K

- laser irradiated tissue based on the dual-phase-lag model, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 70 (2014) 621-628.
- [16] H. Askarizadeh, H. Ahmadikia, Analytical analysis of the dual-phase-lag model of bioheat transfer equation during transient heating of skin tissue, *Heat and Mass Transfer*, 50(12) (2014) 1673-1684.
- [17] J. Valsa, L. Brančik, Approximate formulae for numerical inversion of Laplace transforms, *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, 11(3) (1998) 153-166.
- [18] A. Welch, The thermal response of laser irradiated tissue, *IEEE journal of quantum electronics*, 20(12) (1984) 1471-1481.
- [19] A. Moradi, H.Z. Poor, H. Moosavi, Analysis of the DPL bio-heat transfer equation with constant and time-dependent heat flux conditions on skin surface, (2014).
- [20] J. Liu, X. Chen, L.X. Xu, New thermal wave aspects on burn evaluation of skin subjected to instantaneous heating, *IEEE transactions on biomedical engineering*, 46(4) (1999) 420-428.
- [21] T.-C. Shih, P. Yuan, W.-L. Lin, H.-S. Kou, Analytical analysis of the Pennes bioheat transfer equation with sinusoidal heat flux condition on skin surface, *Medical Engineering & Physics*, 29(9) (2007) 946-953.
- [22] F. Xu, K. Seffen, T. Lu, Non-Fourier analysis of skin biothermomechanics, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 51(9-10) (2008) 2237-2259.
- [23] W. Kaminski, Hyperbolic heat conduction equation for materials with a nonhomogeneous inner structure, *Journal of Heat Transfer*, 112(3) (1990) 555-560.
- [24] K. Mitra, S. Kumar, A. Vedevarz, M. Moallemi, Experimental evidence of hyperbolic heat conduction in processed meat, *Journal of Heat Transfer*, 117(3) (1995) 568-573.
- [25] P.J. Antaki, New interpretation of non-Fourier heat conduction in processed meat, *Journal of Heat Transfer*, 127(2) (2005) 189-193.
- [26] A. Mehta, F. Wong, *Measurement of Flammability and Burn Potential of Fabrics*. Project DSR 73884, [CNTIS: COM-73-10960], in, MIT, 1973.
- l'equation de la chaleur, *Compt. Rendu*, 246 (1958) 3154-3155.
- [4] J. Liu, R. Zepei, W. Cuncheng, Interpretation of living tissue's temperature oscillations by thermal wave theory, *Chinese Science Bulletin*, 17 (1995) 021.
- [5] S. Brorson, J. Fujimoto, E. Ippen, Femtosecond electronic heat-transport dynamics in thin gold films, *Physical Review Letters*, 59(17) (1987) 1962.
- [6] Y. Taitel, On the parabolic, hyperbolic and discrete formulation of the heat conduction equation, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15(2) (1972) 369-371.
- [7] C. Bai, A. Lavine, On hyperbolic heat conduction and the second law of thermodynamics, *Journal of Heat Transfer*, 117(2) (1995) 256-263.
- [8] C. Körner, H. Bergmann, The physical defects of the hyperbolic heat conduction equation, *Applied Physics A*, 67(4) (1998) 397-401.
- [9] D.Y. Tzou, *Macro-to microscale heat transfer: the lagging behavior*, John Wiley & Sons, 2014.
- [10] Y. Zhang, Generalized dual-phase lag bioheat equations based on nonequilibrium heat transfer in living biological tissues, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52(21-22) (2009) 4829-4834.
- [11] H. Ahmadikia, R. Fazlali, A. Moradi, Analytical solution of the parabolic and hyperbolic heat transfer equations with constant and transient heat flux conditions on skin tissue, *International communications in heat and mass transfer*, 39(1) (2012) 121-130.
- [12] H. Ahmadikia, A. Moradi, R. Fazlali, A.B. Parsa, Analytical solution of non-Fourier and Fourier bioheat transfer analysis during laser irradiation of skin tissue, *Journal of Mechanical Science and Technology*, 26(6) (2012) 1937-1947.
- [13] S.-M. Lin, Analytical solutions of bio-heat conduction on skin in Fourier and non-Fourier models, *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*, 13(04) (2013) 1350063.
- [14] K.-C. Liu, C.-C. Wang, P.-J. Cheng, Nonlinear Behavior of Thermal Lagging in Laser-Irradiated Layered Tissue, *Advances in Mechanical Engineering*, 5 (2013) 732575.
- [15] K.-C. Liu, J.-C. Wang, Analysis of thermal damage to

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

M. Rezaadeh, M. Nasiri, M. Heidari, Analytical Solution of Heat Transfer in Laser-Irradiated Skin Tissue with Surface

Heat Convection Using Dual Phase Lag Model, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 50(2) (2018) 285-294.

DOI: 10.22060/mej.2017.11638.5147

