نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۰، شماره ۵، سال ۱۳۹۷، صفحات ۹۷۳ تا ۹۸۸
DOI: 10.22060/mej.2017.11824.5194

# بررسی گسترش موج در نانوصفحه مدرج تابعی تحت بار حرارتی غیرخطی روی بستر الاستیک براساس نظریه پالایش یافته چهار متغیره

فرزاد ابراهیمی*، علی دباغ

دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران

**چکیده:** در این مقاله از یک روش حل تحلیلی به منظور مطالعه اثرات بارگذاری حرارتی روی یک نانوصفحه مدرج تابعی قرار گرفته روی بستر الاستیک با استفاده از یک نظریه چهار متغیره پالایش شده استفاده شده است. بارگذاری حرارتی مورد استفاده از نوع رسانش گرمایی می‌باشد که در این پژوهش از تغییرات غیرخطی دما استفاده شده است. با به کارگیری روابط انتقال حرارت جابه‌جایی روابط توزیع دمای غیرخطی در راستای ضخامت صفحه به دست آمده‌اند. خواص فیزیکی وابسته به دمای نانوصفحه با استفاده از مدل موری-تاناکا درجه‌بندی شده‌اند. برای در نظر گرفتن اثرات مقیاس کوچک از نظریه غیرمحلی ارینگن استفاده شده است. معادلات حاکم با به کارگیری اصل همیلتون به دست آمده‌اند. بسامدهای به دست آمده با مقایسه با تحقیقات اخیر صحت‌سنجی شده‌اند. علاوه بر این، اثرات پارامترهای گوناگون مثل توزیع دما، ضرایب بستر الاستیک، پارامتر غیرمحلی و شاخص گرادیان بر روی گسترش موج نانوصفحه وابسته به اندازه مدرج تابعی مورد بررسی قرار گرفته است.

**تاریخچه داوری:**
دریافت: ۹ مرداد ۱۳۹۵
بازنگری: ۲۹ دی ۱۳۹۵
پذیرش: ۱۵ اسفند ۱۳۹۵
ارائه آنلاین: ۲ فروردین ۱۳۹۶

**کلمات کلیدی:**
اثرات حرارتی
نظریه صفحه چهار متغیره
گسترش موج غیر محلی
مدل‌سازی در مقیاس کوچک
مدل موری-تاناکا

## ۱- مقدمه

مواد مدرج تابعی[1] گونه جدیدی از مواد کامپوزیتی می‌باشند که خواص مکانیکی آنها به صورت تدریجی در راستای ضخامت تغییر می‌کند و این ویژگی باعث کاهش یافتن تمرکز تنش در کامپوزیت‌ها می‌شود. این مواد دارای خواص بهبود یافته بسیاری از جمله مقاومت حرارتی، چگالی پایین و استحکام بالای سرامیک‌ها و نیز چقرمگی، هدایت الکتریکی و قابلیت ماشین‌کاری فلزات، گستردگی تنش بهتر و فاکتور شدت[2] کم‌تری می‌باشند [۱] که منجر به کاربردهای وسیع این نوع مواد در زمینه‌های گوناگون مهندسی از جمله هوافضا، عمران، هسته‌ای، مکانیک و الکترونیک می‌شود. به عنوان نمونه از این مواد در فضاپیماها که شرایط دمایی متغیری را در داخل کابین و سطح خارجی بدنه تحمل می‌کنند، استفاده می‌شود [۲]. از این نوع مواد هدفمند در تحلیل استاتیکی و دینامیکی رفتار سازه‌ها در برخی از مقالات علمی-پژوهشی استفاده شده است. به عنوان نمونه، شرعیات و همکارانش [۳] با استفاده از خواص بهبود یافته استوانه توخالی ضخیم مدرج تابعی، به مطالعه رفتار گذرای ترموالاستیک این سازه پرداختند. مطالعه خصوصیات ارتعاشات غیرخطی واداشته صفحات دایروی پیزوالکتریک[3] مدرج تابعی توسط قاهری و نثیر [۴] انجام گرفته است. تحلیل پایداری دینامیکی صفحات دایروی پیزوالکتریک مدرج تابعی با در نظر گرفتن نظریه صفحه کیرشهف توسط ابراهیمی انجام شده است [۵]. موسایی و پناهی کالوس [۶] در یک اثر پژوهشی به تحلیل و ارائه نتایجی در ارتباط با حل دقیق هدایت گرمایی غیرخطی در پوسته‌های جدار ضخیم استوانه‌ای و کروی پرداختند. با بهره از خصوصیات مواد مدرج تابعی، چراقی و لزگی نظرگاه [۷] رفتار استاتیکی صفحات هوشمند مگنتو-الکترو-الاستیک[4] را مورد بحث و بررسی قرار دادند.

علاوه بر این در دو دهه اخیر و پس از ابداع نانولوله‌های کربنی توسط لیجیما [۸] در اوایل دهه ۱۹۹۰ میلادی در خیل عظیمی از سامانه‌های الکترومکانیکی در ابعاد نانو از نانولوله‌های کربنی، نانوتیرها و نانوصفحات به عنوان حسگر[5]، عملگر[6]، ترانزیستور[7]، تشدید کننده[8] و ... استفاده می‌شود [۱۱-۹]. از این‌رو در نظر گرفتن اثرات مقیاس کوچک[9] در تحلیل رفتار مکانیکی این سازه‌ها دارای اهمیت بسیاری می‌باشد. عدم وجود پارامتر مقیاس[10]

1 Functionally Graded Materials (FGMs).
2 Intensity Factor
3 Piezo-electric
4 Magneto-electro-elastic
5 Sensor
6 Actuator
7 Transistor
8 Resonator
9 Small Scale.
10 Scale Parameter.

نویسنده عهده‌دار مکاتبات: febrahimy@gmail.com

در نظریه کلاسیک محیط پیوسته[1] باعث می‌شود تا این نظریه نتواند اثرات مقیاس را به خوبی تحت پوشش قرار دهد؛ بنابراین، نظریه‌های محیط پیوسته وابسته به اندازه همانند نظریه غیرمحلی ارینگن [۱۲ و ۱۳] و نظریه غیرمحلی گرادیان کرنش [۱۴] به منظور در نظر گرفتن اثرات مقیاس به وجود آمده‌اند. نظریه غیرمحلی الاستیک به منظور در نظر گرفتن اثرات مقیاس در رفتار مکانیکی نانوصفحات توسط تعداد زیادی از محققان استفاده شده است [۲۰-۱۵]. بررسی اثرات اندازه بر روی رفتار گسترش موج نانوصفحه قرار گرفته بر روی محیط الاستیک توسط وانگ [۲۱] بررسی شده است. وانگ و همکاران [۲۲] همچنین اثرات اندازه بر روی گسترش موج طولی نانوصفحات را با به کارگیری نظریه غیرمحلی ارینگن مورد مطالعه قرار دادند. نرندار[2] [۲۳] اثرات حرارتی را بر روی ویژگی‌های گسترش موج صوتی بر روی نانوصفحات بررسی کرده است. رفتار گسترش موج نانوصفحات پیزوالکتریک توسط ژانگ و همکاران نشان داده شده است [۲۴]. ژانگ [۲۵] رفتار گسترش موج نانوصفحات را با در نظر گرفتن اثرات سطح[3] مورد بررسی قرار داد. همچنین، زانگ و همکاران [۲۶] اثرات اندازه بر روی گسترش موج نانوصفحات پیزوالکتریک را با در نظر گرفتن اثرات سطح نشان دادند. اخیراً ورزندیان و ضیایی [۲۷] ارتعاشات غیرخطی ورق‌های همگن را با در نظر گرفتن اثرات اندازه بررسی کردند. کاغذیان و همکاران با استفاده از روابط سینماتیکی تیر اویلر-برنولی و تئوری غیرمحلی الاستیسیته به مطالعه رفتار ارتعاشات الکترومکانیکی نانوعملگر بایمورف[4] پرداختند [۲۸]. با توجه به اثرات اندازه اشاره شده در تئوری ارینگن، ناظم نژاد و کمالی [۲۹] اثرات جابه‌جایی‌های جانبی را در تحلیل ارتعاشات آزاد نانومیله‌ها در نظر گرفتند.

در بسیاری از موارد تشخیص عیوب داخلی در سازه ها با استفاده از آزمون‌های غیرمخرب[5] صورت می‌گیرد. با این اوصاف در مواردی با توجه به بزرگی سازه‌ها نمی‌توان از روش آزمون غیرمخرب برای آن دسته از سازه‌ها استفاده کرد. در روشی دیگر امواج فراصوت و یا حرارتی با بسامد بالا و با دامنه کم به داخل قطعه فرستاده می‌شوند و پس از برخورد به هر گسستگی بازتابیده می‌شوند و از روی دامنه، زاویه بازگشت و زمان بازگشت آنها می‌توان به مشخصه‌های این گسستگی پی برد. یکی از امتیازات مهم این روش توانایی آن در تشخیص عیوب بسیار کوچک به سبب بسامد بالای این امواج و در نتیجه طول موج بسیار کوچک آنها می‌باشد. در این روش‌ها با توجه به آن که ضخامت سازه‌ها متفاوت می‌باشد گاهی از چند مد ارتعاشی ممکن است استفاده گردد و یا از تمام گستره بسامدی پوشش داده شده در یک مد استفاده شود [۳۰]. در بسیاری از مصارف صنعتی با تکنولوژی پیشرفته از پوشش‌های مقاومی استفاده می‌شود که سطح خارجی آنها با روش‌های حرارتی اسپری شده است[6]. هدف از به کارگیری این پوشش‌ها به دست آوردن یک سری خواص سطحی مخصوص می‌باشد که در آن کاربردها مورد نیاز است [۳۱]. در این مصارف به منظور مقاوم کردن پوشش در برابر خوردگی و سایش، عایق کردن در برابر بار حرارتی یا الکتریکی سطح این پوشش‌ها را اسپری می‌کنند. در یکی از پژوهش‌های صورت پذیرفته پاتل و آلموند با استفاده از گسترش دادن موج‌های حرارتی به بررسی وجود عیوب داخلی، رفتار حرارتی و تعیین ضخامت پوشش‌های مقاوم پرداختند [۳۲].

از طرفی، اخیراً تحلیل استاتیکی و دینامیکی نانوصفحات مدرج تابعی غیرمحلی مورد توجه گسترده بسیاری از محققان واقع شده است. به عنوان نمونه، بررسی ویژگی‌های ارتعاشات عرضی آزاد نانوصفحات مدرج تابعی با به کارگیری روش اجزا محدود توسط نترجان [۳۳] صورت گرفته است. ویژگی‌های کمانش حرارتی و ارتعاشات آزاد نانوتیرهای مدرج تابعی تحت بارگذاری حرارتی توسط ابراهیمی و سالاری [۳۴] مورد تحقیق قرار گرفته است. پاسخ ارتعاشی ترمومکانیکی نانوتیرهای مدرج تابعی تحت بارگذاری‌های خطی و غیرخطی نیز توسط ابراهیمی و همکاران [۳۵] بررسی شده است. تحلیل ارتعاشات و خمش سه بعدی نانوصفحات مدرج تابعی نیز توسط انصاری [۳۶] مورد مطالعه قرار گرفته است. با استفاده از یک نظریه اصلاح شده غیرمحلی، رفتار ارتعاشی نانوصفحات مدرج تابعی توسط بلکوریسات[7] و همکاران [۳۷] بررسی شده است. نامی و همکاران [۳۸] اثرات بار حرارتی بر روی پاسخ کمانشی نانوصفحات مدرج تابعی را با استفاده از یک نظریه تغییر شکل برشی مرتبه سوم نشان دادند.

به علاوه، نظریه‌های متعددی وجود دارند که در تحلیل رفتار استاتیک، ارتعاشات، کمانش و گسترش موج صفحات به کار می‌روند. ساده‌ترین نظریه، نظریه کلاسیک صفحه[8] نامیده می‌شود که تغییرشکل ناشی از برش را در نظر نمی‌گیرد. از آنجایی‌که اثرات تغییرشکل برشی در نظریه‌های مرتبه بالای صفحات[9] لحاظ شده است، این نظریه‌ها بی‌نیاز از فاکتور اصلاحی برشی می‌باشند. اخیراً، نظریه‌های صفحه پالایش شده چهار متغیره[10] توسعه یافته و برای بررسی رفتار صفحات مدرج تابعی مورد استفاده قرار گرفته‌اند؛ به عنوان مثال، یک نظریه پالایش شده چهارمتغیره توسط تای و همکاران [۳۹] به منظور بررسی رفتار ارتعاشات آزاد نانوصفحات مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک[11] توسعه داده شده است. تای [۴۰] همچنین از یک نظریه پالایش شده مرتبه بالا با تابع درجه دو برای تحلیل ارتعاشی صفحات مدرج تابعی استفاده کرده است. به علاوه، کاویانی و میردامادی [۴۱] توانستند با استفاده از یک تئوری مرتبه بالای تغییرشکل برشی صفحات به تحلیل استاتیکی و دینامیکی ورق‌های مدرج تابعی بپردازند. در پژوهش دیگری تونسی و همکاران [۴۲] اثرات تخلخل بر روی رفتار گسترش موج صفحات مدرج تابعی را با استفاده از نظریه‌های گوناگون پالایش شده مرتبه بالا مورد بررسی

1 Classical Continuum Theory.
2 Narendar.
3 Surface Effects.
4 Bimorph nano-actuator
5 Non-destructive test (NDT)
6 Thermal Spray Coatings

7 Belkorissat.
8 Classical Plate Theory (CPT).
9 Higher-Order Plate Theories.
10 Four-variable Refined Plate Theory.
11 Elastic Foundation.

قرار دادند. تحلیل گسترش موج الکترومغناطیسی نانوصفحات ساندویچی ویسکوالاستیک[1] با استفاده از نظریه‌های پالایش شده با در نظر گرفتن اثرات اندازه توسط آرانی [۴۳] نشان داده شده است. رفتار کمانش حرارتی نانوصفحات مدرج تابعی با استفاده از یک نظریه مرتبه بالای پالایش شده جدید در محیط‌های حرارتی گوناگون توسط براتی و همکاران [۴۴] بررسی شده است.

از بررسی پیشینه پژوهش فوق مشخص می‌شود که تحقیقات بسیاری بر روی ارتعاشات و کمانش نانوتیرها و نانوصفحات انجام شده است، در حالی‌که مقالات کمی وجود دارند که در آنها به بررسی گسترش موج همچنین سازه‌هایی پرداخته باشند. ژانگ و همکاران [۴۵] اثر بار حرارتی و اثرات سطح بر روی گسترش موج عرضی نانوتیرهای مدرج تابعی پیزوالکتریک را با استفاده از نظریه غیرمحلی ارینگن مورد بررسی قرار داده‌اند. تحلیل رفتار گسترش موج عرضی نانوتیرهای مدرج تابعی با به کارگیری نظریه غیرمحلی گرادیان کرنش نیز توسط لی و همکاران [۴۶] مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. هردو این تحقیقات بر روی نانوتیرها صورت گرفته‌اند و تاکنون تحقیقی در زمینه گسترش موج در نانوصفحات مدرج تابعی تحت بار حرارتی با ویژگی‌های مکانیکی وابسته به دما ارائه نشده است.

در این پژوهش از نظریه غیرمحلی ارینگن برای بررسی رفتار گسترش موج در نانوصفحه مدرج تابعی که تحت بارگذاری حرارتی قرار دارد، استفاده شده است. به منظور در نظر گرفتن تغییرشکل ناشی از برش از نظریه تغییرشکل برشی مرتبه سوم پالایش شده[2] استفاده شده است. خواص ماده با استفاده از مدل موری–تاناکا[3] در راستای ضخامت نانوصفحه تغییر می‌کنند و به صورت وابسته به دما در نظر گرفته می‌شوند. با استفاده از اصل همیلتون[4] معادلات حاکم بر مسأله به دست آمده‌اند و با استفاده از یک روش حل تحلیلی مقادیر بسامد موج[5] و سرعت فازی[6] به دست می‌آیند. اثر پارامترهای مختلفی مثل ضرایب سختی وینکلر[7] و پاسترناک[8]، شاخص گرادیان، توزیع دما و پارامتر غیرمحلی بر روی ویژگی‌های موج نانوصفحات مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند.

## ۲- نظریه و فرمول بندی

### ۲- ۱- مدل موری تاناکا برای نانوصفحات ساخته شده از مواد مدرج تابعی

در شکل ۱ هندسه یک نانوصفحه مدرج تابعی قرار گرفته بر روی بستر الاستیک نشان داده شده است. براساس مدل همگن سازی موری–تاناکا ویژگی‌های معادل ماده مثل مدول بالک معادل $K_e$ و مدول برشی معادل $\mu_e$ به شکل زیر قابل محاسبه می‌باشند [۳۵]:

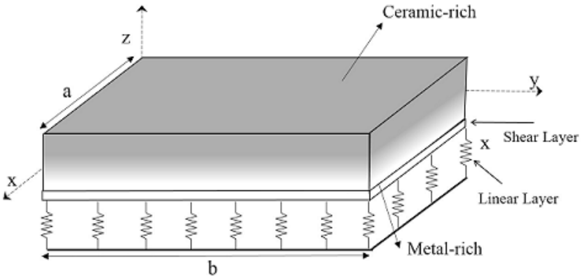



**Fig. 1. The geometry of a nanoplate embedded on an elastic foundation**

**شکل ۱: هندسه یک نانوصفحه قرار گرفته روی بستر الاستیک**

$$\frac{K_e-K_m}{K_c-K_m}=\frac{V_c}{1+V_m\left(K_c-K_m\right)/\left(K_m+4\mu_m/3\right)} \qquad (۱)$$

$$\frac{\mu_e-\mu_m}{\mu_c-\mu_m}=\frac{V_c}{1+\dfrac{V_m\left(\mu_c-\mu_m\right)}{\left[\mu_m+\dfrac{\mu_m\left(9K_m+8\mu_m\right)}{6(K_m+2\mu_m)}\right]}} \qquad (۲)$$

در روابط بالا اندیس‌های $m$ و $c$ به ترتیب به فازهای فلزی و سرامیکی اشاره می‌کنند و کسر حجمی مربوط به این دو فاز با رابطه زیر به هم مرتبط می‌شوند:

$$V_c+V_m=1 \qquad (۳)$$

کسر حجمی سرامیک به طور مفروض برابر است با:

$$V_c=\left(\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)^p \qquad (۴)$$

در اینجا، $p$ شاخص گرادیان می‌باشد که توزیع ماده در راستای ضخامت صفحه را مشخص می‌کند و $z$ فاصله اندازه‌گیری شده از تارخنثی نانوصفحه می‌باشد؛ بنابراین، برطبق مدل موری–تاناکا مدول الاستیسیته معادل $E$، ضریب پواسون معادل $v$ و چگالی معادل $\rho$ با روابط زیر قابل محاسبه می‌باشند:

$$E(z)=\frac{9K_e\mu_e}{3K_e+\mu_e} \qquad (۵)$$

$$v(z)=\frac{3K_e-2\mu_e}{6K_e+2\mu_e} \qquad (۶)$$

$$\rho(z)=\rho_cV_c+\rho_mV_m \qquad (۷)$$

همچنین، ضریب انبساط حرارتی $\alpha$ و ضریب رسانندگی حرارتی $K$ به صورت ذیل محاسبه خواهند شد:

$$\frac{\alpha_e-\alpha_m}{\alpha_c-\alpha_m}=\frac{\dfrac{1}{K_e}-\dfrac{1}{K_m}}{\dfrac{1}{K_c}-\dfrac{1}{K_m}} \qquad (۸)$$

---

1 Viscoelastic Sandwich Nanoplates.
2 Third Order Refined Plate Theory.
3 Mori-Tanaka.
4 Hamilton Principle.
5 Wave Frequency.
6 Phase Velocity.
7 Winkler Parameter.
8 Pasternak Parameter.

$$\frac{K_e-K_m}{K_c-K_m}=\frac{V_c}{1+V_m\dfrac{\left(K_c-K_m\right)}{3K_m}} \tag{۹}$$

براساس رابطه زیر، ضرایب وابسته به دمای خواص ماده برای فازهای فلزی و سرامیکی با هم ترکیب شده و خاصیت مورد نظر محاسبه می‌گردد:

$$P=P_0(1+P_{-1}T^{-1}+P_1T+P_2T^2+P_3T^3) \tag{۱۰}$$

در رابطه فوق ضرایب $P_i$، ضرایب وابسته به دمایی هستند که در جدول برای $Si_3N_4$ و $SUS304$ آورده شده‌اند.

**جدول ۱: ضرایب وابسته به دما برای $Si_3N_4$ و $SUS304$**

**Table 1. Temperature-dependent properties of $Si_3N_4$ and SUS304**

| Properties | | Material | |
|---|---|---|---|
| | | $Si_3N_4$ | SUS304 |
| $E$, Pa | $P_0$ | ۳۴۸/۴۳e+۹ | ۲۰۱/۰۴e+۹ |
| | $P_{-1}$ | ۰ | ۰ |
| | $P_1$ | -۳/۰۷۰e-۴ | ۳/۰۷۹e-۴ |
| | $P_2$ | ۲/۱۶۰e-۷ | -۶/۵۳۴e-۷ |
| | $P_3$ | -۸/۹۴۶e-۱۱ | ۰ |
| $\alpha$, K$^{-1}$ | $P_0$ | ۵/۸۷۲۳e-۶ | ۱۲/۳۳۰e-۶ |
| | $P_{-1}$ | ۰ | ۰ |
| | $P_1$ | ۹/۰۹۵e-۴ | ۸/۰۸۶e-۴ |
| | $P_2$ | ۰ | ۰ |
| | $P_3$ | ۰ | ۰ |
| $\rho$, kg/m$^3$ | $P_0$ | ۲۳۷۰ | ۸۱۶۶ |
| | $P_{-1}$ | ۰ | ۰ |
| | $P_1$ | ۰ | ۰ |
| | $P_2$ | ۰ | ۰ |
| | $P_3$ | ۰ | ۰ |
| $\kappa$, W/mK | $P_0$ | ۱۳/۷۲۳ | ۱۵/۳۷۹ |
| | $P_{-1}$ | ۰ | ۰ |
| | $P_1$ | -۱/۰۳۲e-۳ | -۱/۲۶۴e-۳ |
| | $P_2$ | ۵/۴۶۶e-۷ | ۲/۰۹۲e-۶ |
| | $P_3$ | -۷/۸۷۶e-۱۱ | -۷/۲۲۳e-۱۰ |
| $\nu$ | $P_0$ | ۰/۲۴ | ۰/۳۲۶۲ |
| | $P_{-1}$ | ۰ | ۰ |
| | $P_1$ | ۰ | -۲/۰۰۲e-۴ |
| | $P_2$ | ۰ | ۳/۷۹۷e-۷ |
| | $P_3$ | ۰ | ۰ |

سطح پایینی صفحه کاملا فلزی و از جنس $SUS304$ می‌باشد؛ در حالی‌که سطح بالایی صفحه کاملاً سرامیکی و از جنس $SUS304$ است. در این مقاله توزیع دما به صورت غیرخطی در راستای ضخامت نانوصفحه مفروض است. توزیع دما با حل کردن یک معادله حالت پایدار رسانش گرمایی با توجه به شرایط مرزی در سطوح بالایی و پایینی صفحه در راستای ضخامت حاصل می‌شود:

$$-\frac{d}{dz}\left(K\left(z,T\right)\frac{dT}{dz}\right)=0 \tag{۱۱}$$

شرایط مرزی به صورت زیر می‌باشند:

$$T\left(\frac{h}{2}\right)=T_c \tag{۱۲–الف}$$

$$T\left(-\frac{h}{2}\right)=T_m \tag{۱۲–ب}$$

با حل معادلات بالا به یک رابطه برای توزیع دما می‌رسیم که به صورت زیر می باشد:

$$T=T_m+\left(T_c-T_m\right)\frac{\int_{-\frac{h}{2}}^{z}\frac{1}{K\left(z,T\right)}dz}{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{1}{K\left(z,T\right)}dz} \tag{۱۳}$$

## ۲–۲– روابط سینماتیکی

براساس نظریه‌های مرتبه بالای پالایش شده، میدان جابه‌جایی یک نانوصفحه مدرج تابعی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$U\left(x,y,z,t\right)=u_0\left(x,y,t\right)-z\frac{\partial w_b}{\partial x}-f\left(z\right)\frac{\partial w_s}{\partial x} \tag{۱۴–الف}$$

$$V\left(x,y,z,t\right)=v_0\left(x,y,t\right)-z\frac{\partial w_b}{\partial y}-f\left(z\right)\frac{\partial w_s}{\partial y} \tag{۱۴–ب}$$

$$W\left(x,y,z,t\right)=w_b\left(x,y,t\right)+w_s\left(x,y,t\right) \tag{۱۴–پ}$$

در روابط بالا $u_0$ جابه‌جایی طولی، $w_b$ و $w_s$ تغییرشکل‌های در راستای $z$ می‌باشند که به ترتیب ناشی از خمش و برش می‌باشند. $z(f)$ تابعی می‌باشد که توزیع تنش و یا کرنش برشی در راستای ضخامت را بیان می‌کند. در کار حاضر این تابع به صورت $f\left(z\right)=\frac{4z^3}{3h^2}$ در نظر گرفته می‌شود. مقادیر کرنش غیرصفر می‌توانند با استفاده از روابط زیر محاسبه شوند:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^0\\ \varepsilon_y^0\\ \gamma_{xy}^0\end{Bmatrix}+z\begin{Bmatrix}k_x^b\\ k_y^b\\ k_{xy}^b\end{Bmatrix}+f\left(z\right)\begin{Bmatrix}k_x^s\\ k_y^s\\ k_{xy}^s\end{Bmatrix} \tag{۱۵}$$

که در رابطه بالا:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^0\\ \varepsilon_y^0\\ \gamma_{xy}^0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u_0}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v_0}{\partial x}\\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y}+\dfrac{\partial v_0}{\partial x}\end{Bmatrix}\qquad \begin{Bmatrix}k_x^b\\ k_y^b\\ k_{xy}^b\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}\\ -\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\\ -2\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}k_x^s\\ k_y^s\\ k_{xy}^s\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\\ -\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\\ -2\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix}\qquad \begin{Bmatrix}\gamma_{yz}^0\\ \gamma_{xz}^0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial w_s}{\partial y}\\ \dfrac{\partial w_s}{\partial x}\end{Bmatrix}$$ (۱۶–الف)

$$g(z)=1-\frac{df(z)}{dz}$$ (۱۶–ب)

حال با استفاده از اصل همیلتون معادلات اویلر–لاگرانژ نانوصفحه مدرج تابعی را در محیط حرارتی به دست می‌آوریم:

$$\int_0^t \delta\left(U-K+V\right)dt=0$$ (۱۷)

در رابطه فوق $\delta U$ تغییرات انرژی کرنشی، $\delta K$ تغییرات انرژی جنبشی و $\delta V$ تغییرات کار انجام شده توسط نیروهای خارجی می‌باشد. تغییرات انرژی به صورت زیر قابل بیان می‌باشد:

$$\begin{aligned}&\delta U=\int\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV=\\&[\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy}+\tau_{yz}\delta\gamma_{yz}+\tau_{xz}\delta\gamma_{xz}]dV\end{aligned}$$ (۱۸)

با جایگذاری معادلات (۱۵) و (۱۶) در معادله (۱۸) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\delta U=\int_0^L[&N_x\frac{\partial\delta u_0}{\partial x}-M_x^b\frac{\partial^2\delta w_b}{\partial x^2}-M_x^s\frac{\partial^2\delta w_s}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial\delta v_0}{\partial x}\\&-M_y^b\frac{\partial^2\delta w_b}{\partial y^2}-M_y^s\frac{\partial^2\delta w_s}{\partial y^2}+N_{xy}\left(\frac{\partial\delta u_0}{\partial y}+\frac{\partial\delta v_0}{\partial x}\right)\\&-2M_{xy}^b\frac{\partial^2\delta w_b}{\partial x\partial y}-2M_{xy}^s\frac{\partial^2\delta w_s}{\partial x\partial y}+Q_{yz}\frac{\partial\delta w_s}{\partial y}+Q_{xz}\frac{\partial\delta w_s}{\partial x}\;]dx\end{aligned}$$ (۱۹)

در رابطه بالا ترکیبات تنشی $N$، $M$ و $Q$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}&\left(N_i,M_i^b,M_i^s\right)=\int\left(1,z,f\right)\sigma_i dA\\&\qquad i=\left(x,y,xy\right)\end{aligned}$$ (۲۰–الف)

$$Q_i=\int g\sigma_i\,dA,\ i=\left(x,y,xy\right)$$ (۲۰–ب)

اولین تغییرات کار انجام شده توسط نیروهای خارجی برابر است با:

$$\begin{aligned}\delta V=\int(&N_x^0\frac{\partial\left(w_b+w_s\right)}{\partial x}\frac{\partial\delta\left(w_b+w_s\right)}{\partial x}\\&+N_y^0\frac{\partial\left(w_b+w_s\right)}{\partial y}\frac{\partial\delta\left(w_b+w_s\right)}{\partial y}\\&+2\delta N_{xy}^0\frac{\partial\left(w_b+w_s\right)}{\partial x}\frac{\partial\left(w_b+w_s\right)}{\partial y}\\&-k_w\delta\left(w_b+w_s\right)+k_p\frac{\partial^2\delta\left(w_b+w_s\right)}{\partial x^2})dx\end{aligned}$$ (۲۱)

در رابطه بالا $N_{xy}^0=0$ است و $N_x^0=N_y^0=N^T$ می‌باشد و $N^T$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N^T=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{E(z)}{1-v}\alpha\left(z,T\right)\left(T-T_0\right)dz$$ (۲۲)

تغییرات انرژی جنبشی برابر است با:

$$\begin{aligned}&\delta K=\int[\dot u\delta\dot u+\dot v\delta\dot v+\dot w\delta\dot w]\\&\rho(z)dV=\int_0^L\{I_0\left[\dot u_0\,\delta\dot u_0+\dot v_0\,\delta\dot v_0+\left(\dot w_b+\dot w_s\right)(\delta\dot w_b+\delta\dot w_s)\right]\\&-I_1\left[\dot u_0\frac{\partial\delta\dot w_b}{\partial x}+\frac{\partial\dot w_b}{\partial x}\delta\dot u_0+\dot v_0\frac{\partial\delta\dot w_s}{\partial y}+\frac{\partial\dot w_s}{\partial y}\delta\dot v_0\right]\\&-J_1\left[\dot u_0\frac{\partial\delta\dot w_s}{\partial x}+\frac{\partial\dot w_s}{\partial x}\delta\dot u_0+\dot v_0\frac{\partial\delta\dot w_s}{\partial y}+\frac{\partial\dot w_s}{\partial y}\delta\dot v_0\right]\\&+I_2\left[\frac{\partial\delta\dot w_b}{\partial x}\frac{\partial\delta\dot w_b}{\partial x}+\frac{\partial\delta\dot w_b}{\partial y}\frac{\partial\delta\dot w_b}{\partial y}\right]+K_2\left[\frac{\partial\dot w_s}{\partial x}\frac{\partial\delta\dot w_s}{\partial x}+\frac{\partial\dot w_s}{\partial y}\frac{\partial\delta\dot w_s}{\partial y}\right]\\&+J_2[\frac{\partial\dot w_b}{\partial x}\frac{\partial\delta\dot w_s}{\partial x}+\frac{\partial\dot w_s}{\partial x}\frac{\partial\delta\dot w_b}{\partial x}+\frac{\partial\dot w_b}{\partial y}\frac{\partial\delta\dot w_s}{\partial y}+\frac{\partial\dot w_s}{\partial y}\frac{\partial\delta\dot w_b}{\partial y}]\}dx\end{aligned}$$ (۲۳)

در تمامی روابط بالا علامت "." به معنای دیفرانسیل‌گیری نسبت به زمان می‌باشد، همچنین اینرسی‌های به کار رفته در معادلات با روابط زیر قابل محاسبه‌اند:

$$\begin{aligned}&\left(I_0,I_1,J_1,I_2,J_2,K_2\right)=\\&\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(1,z,f(z),z^2,z\,f(z),f^2(z)\right)\rho(z)\,dz\end{aligned}$$ (۲۴)

با قرار دادن معادلات (۱۸)، (۲۰) و (۲۲) در رابطه (۲۴) و قرار دادن ضرایب $\delta u_0$، $\delta v_0$، $\delta w_b$ و $\delta w_s$ برابر با صفر معادلات اویلر–لاگرانژ به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=I_0\ddot u_0-I_1\frac{\partial\ddot w_b}{\partial x}-J_1\frac{\partial\ddot w_s}{\partial x}$$ (۲۵)

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}=I_0\ddot v_0-I_1\frac{\partial\ddot w_b}{\partial y}-J_1\frac{\partial\ddot w_s}{\partial y}$$ (۲۶)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2M_x^b}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2M_{xy}^b}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2M_y^b}{\partial y^2}-N^T\nabla^2\left(w_b+w_s\right)\\&-k_w\left(w_b+w_s\right)+k_p\nabla^2\left(w_b+w_s\right)\\&=I_0\left(\ddot w_b+\ddot w_s\right)+J_1\left(\frac{\partial\ddot u_0}{\partial x}+\frac{\partial\ddot v_0}{\partial y}\right)-J_2\nabla^2\ddot w_b-K_2\nabla^2\ddot w_s\end{aligned}$$ (۲۷)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2M_x^s}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2M_{xy}^s}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2M_y^s}{\partial y^2}+\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial Q_{yz}}{\partial y}\\&-N^T\nabla^2\left(w_b+w_s\right)-k_w\left(w_b+w_s\right)+k_p\nabla^2\left(w_b+w_s\right)\\&=I_0\left(\ddot w_b+\ddot w_s\right)+J_1\left(\frac{\partial\ddot u_0}{\partial x}+\frac{\partial\ddot v_0}{\partial y}\right)-J_2\nabla^2\ddot w_b-K_2\nabla^2\ddot w_s\end{aligned}$$ (۲۸)

### ۲-۸- نظریه غیرمحلی الاستیسیته ارینگن

براساس این نظریه، حالت تنش در هر نقطه درون جسم تابعی از کرنش در سایر نقاط اطراف آن است. در اینجا به منظور در نظر گرفتن اثرات اندازه کوچک از این نظریه استفاده می‌شود. براساس این نظریه، مؤلفه‌های تانسور تنش غیرمحلی در هر نقطه دلخواه $x$ در جامدات همگن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sigma_{ij}\left(x\right)=\int\alpha\left(\left|x'-x\right|,\tau\right)t_{ij}\left(x'\right)d\Omega\left(x'\right) \qquad (۲۹)$$

در معادله بالا $t_{ij}\left(x'\right)$ مؤلفه‌های تنش محلی در نقطه دلخواه $x$ می‌باشند که با رابطه زیر به تانسور کرنش مرتبط می‌شوند:

$$t_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad (۳۰)$$

تابع کرنل $\alpha\left(\left|x'-x\right|,\tau\right)$ اثر کرنش در نقطه $x'$ بر تنش نقطه $x$ در اجسام الاستیک را در نظر می‌گیرد، همچنین $\left|x'-x\right|$ فاصله اقلیدوسی می‌باشد و $\tau$ مقدار ثابتی است که با توجه به رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$\tau=\frac{e_0 a}{l} \qquad (۳۱)$$

$e_0 a$ اثرات اندازه بر پاسخ نانوسازه‌ها را در نظر می‌گیرد. ارینگن و همکاران (۲-۳) با روش‌های عددی توانستند تابع کرنل مناسب را پیدا کنند. با انتخاب تابع کرنل مناسب، صورت معادله دیفرانسیل گونه نظریه ارینگن را می‌توان مطابق زیر بیان نمود:

$$\left(1-\left(e_0 a\right)\nabla^2\right)\sigma_{kl}=t_{kl} \qquad (۳۲)$$

در معادله بالا $\nabla^2$ عملگر لاپلاسین دو بعدی می‌باشد؛ بنابراین، فرم نهایی معادلات تشکیل‌دهنده ارینگن برای نانوصفحات مدرج تابعی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\left(1-\mu\nabla^2\right)\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}Q_{11}&Q_{12}&0&0&0\\ Q_{12}&Q_{22}&0&0&0\\ 0&0&Q_{66}&0&0\\ 0&0&0&Q_{44}&0\\ 0&0&0&0&Q_{55}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix} \qquad (۳۳)$$

در معادله بالا $\mu=\left(e_0 a\right)^2$ و $Q_{ij}$ ها می‌توانند به صورت زیر محاسبه شوند:

$$Q_{11}=Q_{22}=\frac{E\left(z\right)}{1-\nu^2} \qquad (۳۴\text{-الف})$$

$$Q_{12}=\frac{\nu E\left(z\right)}{1-\nu^2} \qquad (۳۴\text{-ب})$$

$$Q_{44}=Q_{55}=Q_{66}=\frac{E\left(z\right)}{2\left(1+\nu\right)} \qquad (۳۴\text{-پ})$$

معادلات نیرو-کرنش و ممان-کرنش یک نانوصفحه مدرج تابعی با بهره‌گیری از نظریه پالایش شده می‌توانند با انتگرال‌گیری از معادله (۳۲) روی سطح مقطع نانوصفحه به دست آیند:

$$\left(1-\mu\nabla^2\right)\begin{Bmatrix}N_x\\ N_y\\ N_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&0\\ A_{21}&A_{22}&0\\ 0&0&A_{66}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u_0}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y}+\dfrac{\partial v_0}{\partial x}\end{Bmatrix}+\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}&0\\ B_{21}&B_{22}&0\\ 0&0&B_{66}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}-\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}\\ -\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\\ -2\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix}+\begin{pmatrix}B_{11}^s&B_{12}^s&0\\ B_{21}^s&B_{22}^s&0\\ 0&0&B_{66}^s\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}-\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\\ -\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\\ -2\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix} \qquad (۳۵)$$

$$\left(1-\mu\nabla^2\right)\begin{Bmatrix}M_x^b\\ M_y^b\\ M_{xy}^b\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}&0\\ B_{21}&B_{22}&0\\ 0&0&B_{66}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u_0}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y}+\dfrac{\partial v_0}{\partial x}\end{Bmatrix}+\begin{pmatrix}D_{11}&D_{12}&0\\ D_{21}&D_{22}&0\\ 0&0&D_{66}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}-\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}\\ -\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\\ -2\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix}+\begin{pmatrix}D_{11}^s&D_{12}^s&0\\ D_{21}^s&D_{22}^s&0\\ 0&0&D_{66}^s\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}-\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\\ -\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\\ -2\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix} \qquad (۳۶)$$

$$\left(1-\mu\nabla^2\right)\begin{Bmatrix}M_x^s\\ M_y^s\\ M_{xy}^s\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11}^s&B_{12}^s&0\\ B_{21}^s&B_{22}^s&0\\ 0&0&B_{66}^s\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u_0}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y}+\dfrac{\partial v_0}{\partial x}\end{Bmatrix}+\begin{pmatrix}D_{11}^s&D_{12}^s&0\\ D_{21}^s&D_{22}^s&0\\ 0&0&D_{66}^s\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}-\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}\\ -\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\\ -2\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix}+\begin{pmatrix}H_{11}^s&H_{12}^s&0\\ H_{21}^s&H_{22}^s&0\\ 0&0&H_{66}^s\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}-\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\\ -\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\\ -2\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix} \qquad (۳۷)$$

$$\left(1-\mu\nabla^2\right)\begin{Bmatrix}Q_x\\ Q_y\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}A_{44}^s&0\\ 0&A_{55}^s\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial w_s}{\partial x}\\ \dfrac{\partial w_s}{\partial y}\end{Bmatrix} \qquad (۳۸)$$

در معادلات (۳۵) تا (۳۸) صلبیت‌های سطح مقطع به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11}(1, z, z^2, f(z), z\, f(z), f^2(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz \qquad \text{(۳۹–الف)}$$

$$\left(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s\right) = \left(A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s\right) \qquad \text{(۳۹–ب)}$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{44}\left[g(z)\right]^2 dz \qquad \text{(۳۹–پ)}$$

با قرار دادن روابط (۳۵) تا (۳۸) در روابط (۲۵) تا (۲۸) معادلات حاکم نهایی براساس جابه‌جایی‌های $u_0$، $v_0$، $w_b$ و $w_s$ به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} & A_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \left(A_{12}+A_{66}\right)\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{66}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - B_{11}\frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} \\ & -(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} - B_{11}^s\frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - \left(B_{12}^s+2B_{66}^s\right)\frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} \\ & +\left(1-\mu\nabla^2\right)\left(-I_0\ddot{u}_0 + I_1\frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} + J_1\frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x}\right) = 0 \end{aligned} \qquad (۴۰)$$

$$\begin{aligned} & A_{22}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \left(A_{12}+A_{66}\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - B_{22}\frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} \\ & -(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - B_{22}^s\frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - \left(B_{12}^s+2B_{66}^s\right)\frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} \\ & +\left(1-\mu\nabla^2\right)\left(-I_0\ddot{v}_0 + I_1\frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} + J_1\frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y}\right) = 0 \end{aligned} \qquad (۴۱)$$

$$\begin{aligned} & B_{11}^s\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \left(B_{12}^s+2B_{66}^s\right)\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + B_{22}^s\frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + \left(B_{12}^s+2B_{66}^s\right)\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \\ & -D_{11}^s\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2\left(D_{12}^s+2D_{66}^s\right)\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s\frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} \\ & -H_{11}^s\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(H_{12}^s+2H_{66}^s)\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22}^s\frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + A_{44}^s\nabla^2 w_s \\ & +\left(1-\mu\nabla^2\right)(-I_0\left(\ddot{w}_b+\ddot{w}_s\right) - J_1\left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y}\right) + J_2\nabla^2\ddot{w}_b \\ & +K_2\nabla^2\ddot{w}_s + \left(k_p - N^T\right)\nabla^2\left(w_b+w_s\right) - k_w\left(w_b+w_s\right)) = 0 \end{aligned} \qquad (۴۲)$$

$$\begin{aligned} & B_{11}^s\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \left(B_{12}^s+2B_{66}^s\right)\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + B_{11}^s\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \left(B_{12}^s+2B_{66}^s\right)\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} \\ & +B_{22}^s\frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + \left(B_{12}^s+2B_{66}^s\right)\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - D_{11}^s\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \\ & -2\left(D_{12}^s+2D_{66}^s\right)\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s\frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - H_{11}^s\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} \\ & -2(H_{12}^s+2H_{66}^s)\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22}^s\frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + A_{44}^s\nabla^2 w_s \\ & +\left(1-\mu\nabla^2\right)(-I_0\left(\ddot{w}_b+\ddot{w}_s\right) - J_1\left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y}\right) + J_2\nabla^2\ddot{w}_b \\ & +K_2\nabla^2\ddot{w}_s + \left(k_p - N^T\right)\nabla^2\left(w_b+w_s\right) - k_w\left(w_b+w_s\right)) = 0 \end{aligned} \qquad (۴۳)$$

## ۳- روش حل

در اینجا با فرض نمایی بودن میدان جابه‌جایی موج منتشر شده در صفحه $x$-$y$ خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} u_0(x,y,t) \\ v_0(x,y,t) \\ w_b(x,y,t) \\ w_s(x,y,t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U\ \exp\left[i\left(k_1 x + k_2 y - \omega t\right)\right] \\ V\ \exp\left[i\left(k_1 x + k_2 y - \omega t\right)\right] \\ W_b\ \exp\left[i\left(k_1 x + k_2 y - \omega t\right)\right] \\ W_s\ \exp\left[i\left(k_1 x + k_2 y - \omega t\right)\right] \end{Bmatrix} \qquad (۴۴)$$

که در این رابطه ضرایب $U$، $V$، $W_b$ و $W_s$ دامنه‌های جابه‌جایی موج می‌باشند، مقادیر $k_1$ و $k_2$ به ترتیب عدد موج در راستای $x$ و $y$ می‌باشند. همچنین $\omega$ بسامد موج منتشر شده می‌باشد. با قرار دادن معادله (۴۴) در معادلات (۴۰) تا (۴۳) خواهیم داشت:

$$\left(\left[K\right] - \omega^2\left[M\right]\right)\left\{\Delta\right\} = \left\{0\right\} \qquad (۴۵)$$

در رابطه بالا پارامترهای مجهول به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\left\{\Delta\right\} = \left\{U, V, W_b, W_s\right\}^T \qquad \text{(۴۶–الف)}$$

$$\left[K\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad \left[M\right] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \qquad \text{(۴۶–ب)}$$

در رابطه فوق مقادیر مجهول $a_{ij}$ و $m_{ij}$ در ضمیمه آورده شده‌اند. مقادیر ویژه گسترش موج نانوصفحه با قرار دادن حاصل دترمینان زیر با صفر به دست می‌آید:

$$\left|\left[K\right] - \omega^2\left[M\right]\right| = 0 \qquad (۴۷)$$

با در نظر گرفتن عدد موج در راستاهای $x$ و $y$ به صورت $k_1 = k_2 = k$

$$P = P_0(1+P_{-1}T^{-1}+P_1T+P_2T^2+P_3T^3) \quad (۴۷)$$

$$\omega_1 = M_0(k), \omega_2 = M_1(k),$$
$$\omega_3 = M_2(k), \omega_4 = M_3(k). \quad (۴۸)$$

که مقادیر به دست آمده از رابطه فوق به ترتیب مربوط به مدهای $M_0$ تا $M_3$ می‌باشند. مدهای $M_0$ و $M_3$ مربوط به موج‌های عرضی و مدهای $M_1$ و $M_2$ مربوط به موج‌های طولی می‌باشند. پس از محاسبه $M_i(k)$ برای هر مد، سرعت فازی می‌تواند به شکل زیر تعریف شود:

$$C_i = \frac{M_i(k)}{k}, \quad (i=0,1,2,3) \quad (۴۹)$$

بسامد فرار[1] نیز با میل دادن عدد موج به سمت بی‌نهایت به دست خواهد آمد. واضح است که در بسامدهای بیشتر از بسامد فرار موج‌های عرضی دیگر انتشار پیدا نخواهند کرد.

## ۴- ارائه نتایج و بحث و بررسی آنها

در این کار ویژگی‌های گسترش موج یک نانوصفحه مدرج تابعی ساخته شده از $Si_3N_4$ و $SUS304$ تحت بار حرارتی مورد بررسی قرار گرفته است. برای رسیدن به نتایج دقیق‌تر خواص ماده به صورت وابسته به دما در نظر گرفته شده‌اند. بسامدها در شاخص گرادیان ۵ با مقادیر محاسبه شده مشابه توسط نترنجان[2] و همکاران (۲۰۱۲) مقایسه شده و نتایج در جدول ۲ آورده شده‌اند.

**جدول ۲: مقایسه بسامد موج نانوصفحات مدرج تابعی برای پارامترهای غیرمحلی مختلف ($p$=۵).**

**Table 2. Comparison of the wave frequencies of the FG nanoplates for various nonlocal parameters (p=5).**

| µ | مطالعه حاضر | نترنجان و همکاران (۲۰۱۲) |
|---|---|---|
| | a/h=۱۰ | |
| ۰ | ۰/۰۴۳۸۰۳ | ۰/۰۴۴۱ |
| ۱ | ۰/۰۴۰۰۵۱ | ۰/۰۴۰۳ |
| ۲ | ۰/۰۳۷۱۲۳ | ۰/۰۳۷۴ |
| ۴ | ۰/۰۳۲۷۹۱ | ۰/۰۳۳ |
| | a/h=۲۰ | |
| ۰ | ۰/۰۱۱۲۵۵ | ۰/۰۱۱۳ |
| ۱ | ۰/۰۱۰۲۸۸ | ۰/۰۱۰۳ |
| ۲ | ۰/۰۰۹۵۳۴ | ۰/۰۰۹۶ |
| ۴ | ۰/۰۰۸۴۱۸ | ۰/۰۰۸۵ |

از مقایسه نتایج فوق دریافت می‌شود که کار حاضر می‌تواند با دقت خوبی بسامد نانوصفحات مدرج تابعی را پیش‌بینی کند.

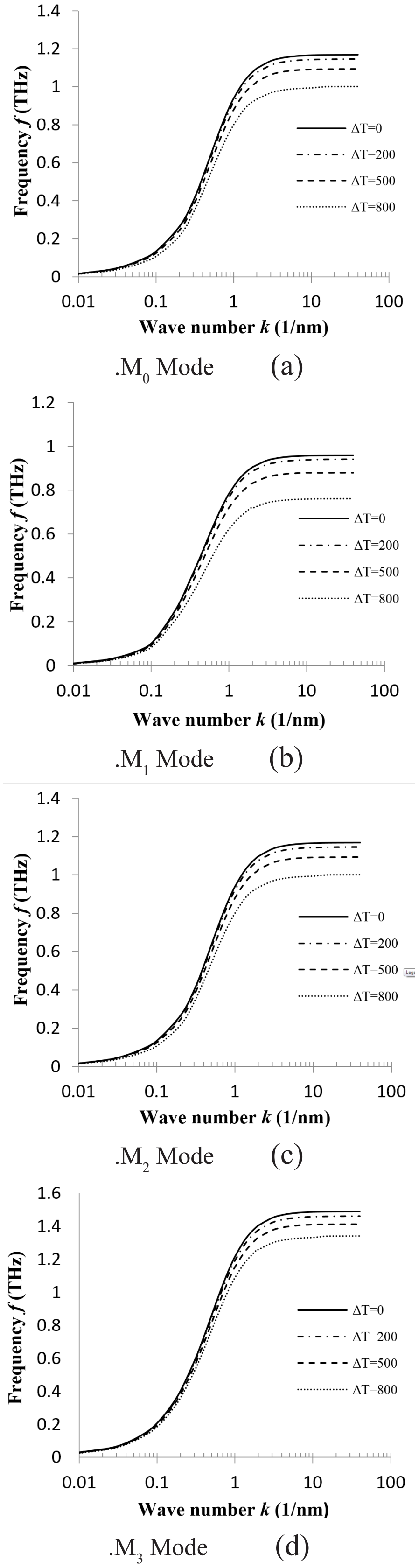



**Fig. 2. Effect of various temperature changes on the wave frequency of FG nanoplates (p=1, μ=1 nm²).**

**شکل ۲: اثر توزیع دماهای گوناگون بر بسامد نانوصفحات مدرج تابعی در ($p$=۱,$\mu$=۱ nm$^2$)**

1 Escape Frequency.
2 Nataranjan.

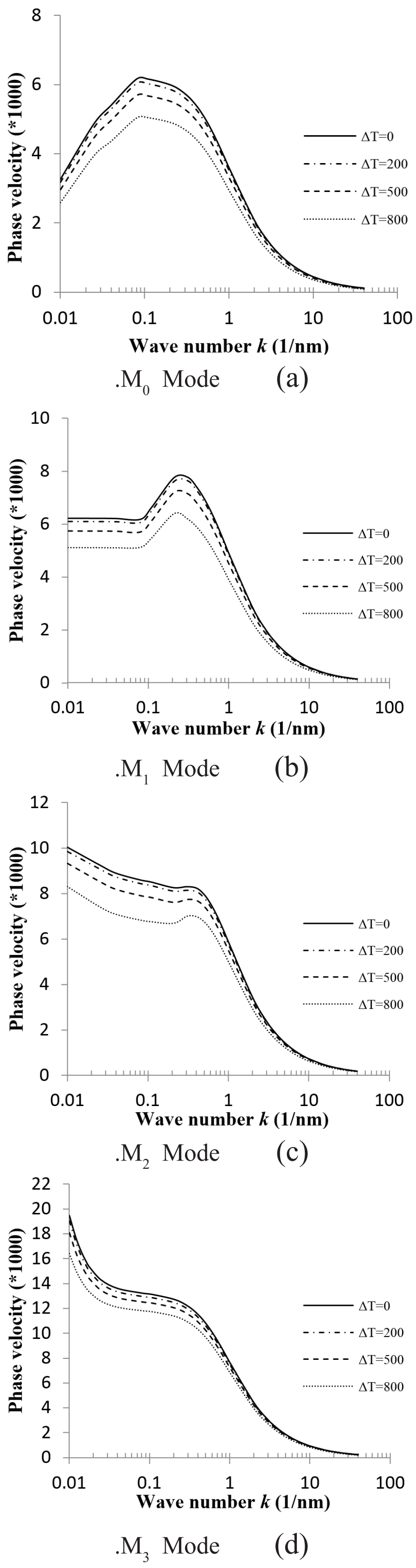



**Fig. 3. Effect of various temperature changes on the phase velocity of FG nanoplates (p=1, μ=1 nm$^2$).**

**شکل ۳: اثر توزیع دماهای گوناگون بر سرعت فازی نانوصفحه مدرج تابعی در ($p$=۱,$\mu$=۱ nm$^2$)**

در شکل ۲ تغییرات بسامد نانوصفحه مدرج تابعی نسبت به تغییر دما در $p$=۱ و $\mu$=۱ nm$^2$رسم شده است. ملاحظه می‌شود که در تمامی مدها تغییرات دما در عدد موج‌های کوچک تأثیر قابل‌توجهی بر بسامد نانوصفحات مدرج تابعی ندارد؛ اما در عدد موج‌های بزرگ‌تر این تأثیر را می‌توان ملاحظه کرد. اندازه بسامد در هر مد با افزایش اختلاف دما کاهش می‌یابد که این تغییر اندازه در عدد موج‌های بزرگ‌تر واضح‌تر است؛ بنابراین، اثرات اختلاف دما بر بسامد در عدد موج‌های بزرگ‌تر نمایان‌تر است. براساس نمودار واضح است که در عدد موج‌های بزرگ تر از ۱۰×۱۰$^۹$ مقادیر بسامد بدون تغییر باقی خواهند ماند.

شکل ۳ اثرتوزیع دما روی سرعت فازی نانوصفحات مدرج تابعی را در $p$=۱ و $\mu$=۱ nm$^2$ نشان می‌دهد. با وجود این‌که شکل کلی نمودار برای تمامی مدها مشابه است؛ اما در مدهای $M_0$ و $M_1$ در ابتدا سرعت فازی به صورت تدریجی تا مقدار بیشینه خود افزایش می‌یابد و سپس کاهش می‌یابد. در مدهای $M_2$ و $M_3$ مقدار بیشینه در ابتدای نمودار رخ می‌دهد و پس از آن سرعت فازی به طور یکنواخت همانند مدهای قبلی روند کاهشی خواهد داشت. لازم به ذکر است که در تمامی مدها با افزایش اختلاف دما، مقدار سرعت فازی کاهش می‌یابد که این اثر در عدد موج‌های بزرگ‌تر، کم‌تر دیده می‌شود.

اثر ضریب الاستیک وینکلر (خطی) بر سرعت فازی نانوصفحه در ΔT=۵۰۰، $p$=۱ و $\mu$=۱ nm$^2$ در شکل ۴ نشان داده شده است. وجه تشابه تمامی مدها در عدم وابستگی سرعت فازی به ضریب وینکلر در عدد موج‌های بزرگ‌تر می‌باشد. به عنوان وجه اشتراک دیگر می‌توان به افزایش مقدار سرعت فازی در عدد موج‌های کوچک به هنگام افزایش ضریب وینکلر در تمامی مدها اشاره کرد؛ بنابراین، تغییر در ضریب وینکلر در عدد موج‌های بزرگ‌تر اثر قابل توجهی بر اندازه سرعت فازی ندارد.

در شکل ۵ اثر ضریب الاستیک پاسترناک (غیرخطی) بر سرعت فازی نانوصفحه در ΔT=۵۰۰، $p$=۱ و $\mu$=۱ nm$^2$ نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، افزایش ضریب پاسترناک منجر به افزایش مقدار سرعت فازی مخصوصاً در عدد موج‌های کوچک می‌شود. به عبارت دیگر، اثر ضریب پاسترناک بر سرعت فازی در عدد موج‌های بزرگ‌تر از ۱×۱۰$^۹$ آنقدر کوچک است که می‌توان از آن چشم‌پوشی کرد.

در شکل ۶ اثر پارامترهای شاخص گرادیان و توزیع دما بر سرعت فازی نانوصفحات مدرج تابعی، هنگامی‌که ضرایب بستر الاستیک برابر صفر می‌باشند، نشان داده شده است. براساس این شکل، در مدهای $M_0$ و $M_1$ در ابتدا سرعت فازی به صورت تدریجی تا مقدار بیشینه خود افزایش می‌یابد و سپس کاهش می‌یابد. در مدهای $M_2$ و $M_3$ این روند به صورت یکنواخت کاهشی می‌باشد. به عنوان یک روند قابل پیش بینی، افزایش در مقدار اختلاف دما منجر به کاهش سرعت فازی می‌شود. همچنین با زیاد کردن شاخص گرادیان مقدار سرعت فازی کاهش می‌یابد که دلیل آن افزایش کسر حجمی فاز فلزی با افزایش شاخص گرادیان می‌باشد.

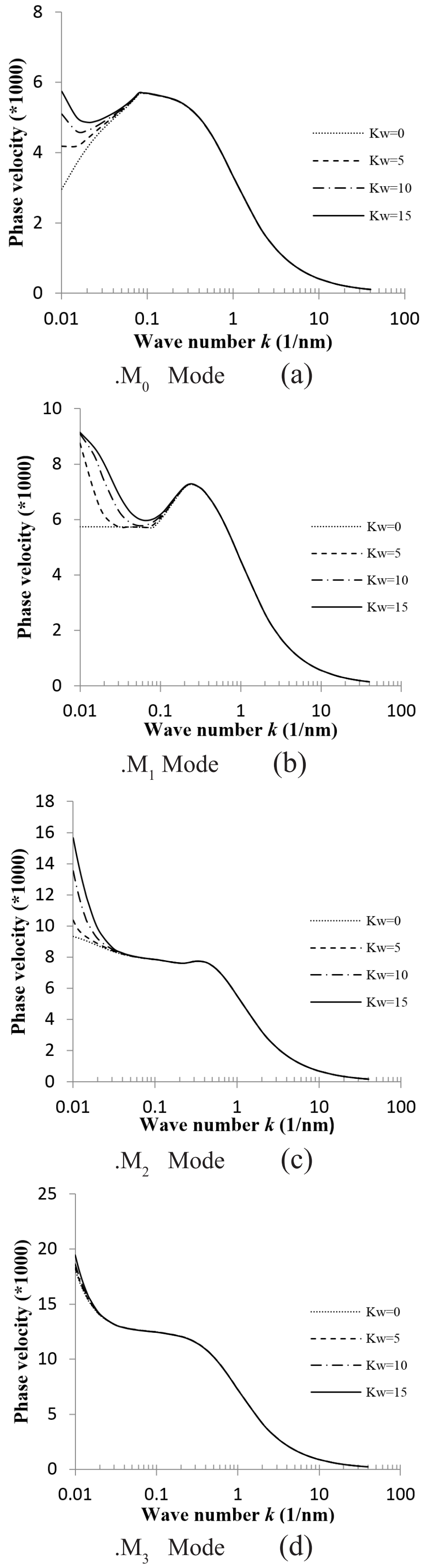



**Fig. 4. Effect of Winkler parameter on the phase velocity of FG nanoplates (p=1, μ=1 nm², ΔT=500).**

**شکل ٤: اثر ضریب وینکلر بر سرعت فازی نانوصفحه مدرج تابعی در ( $\Delta T=500$, $p=1$, $\mu=1$ nm² )**

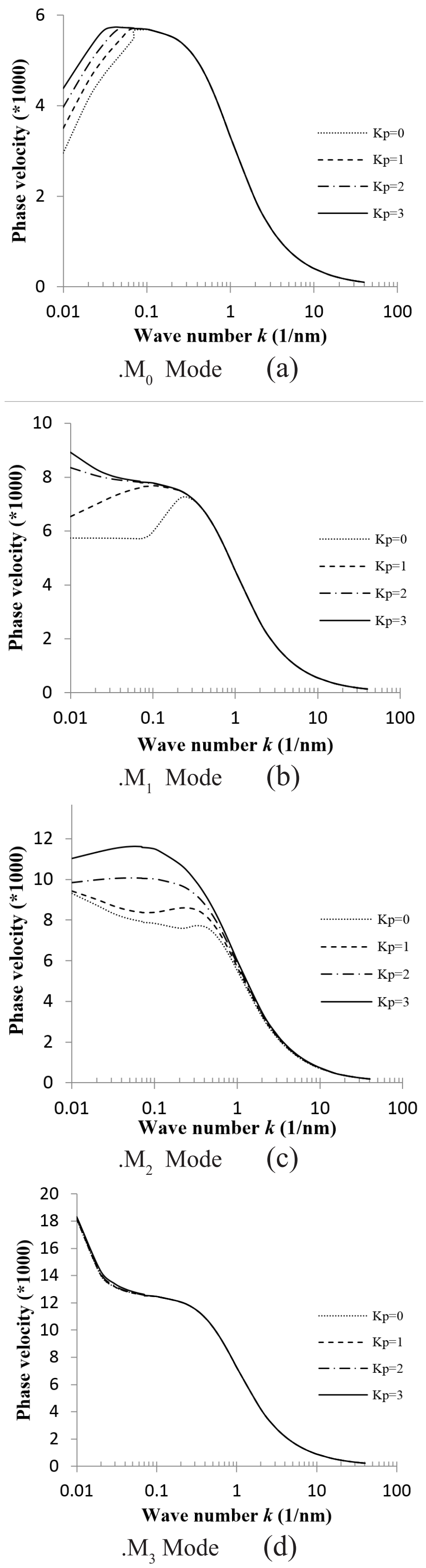
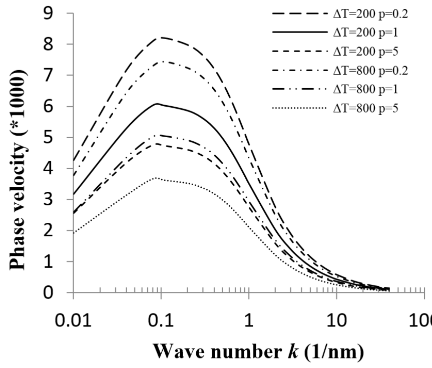
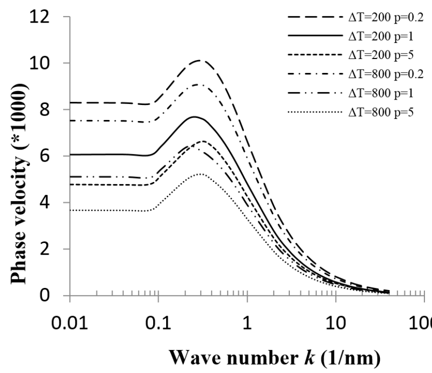



**Fig. 5. Effect of Pasternak parameter on the phase velocity of FG nanoplates (p=1, μ=1 nm², ΔT=500).**

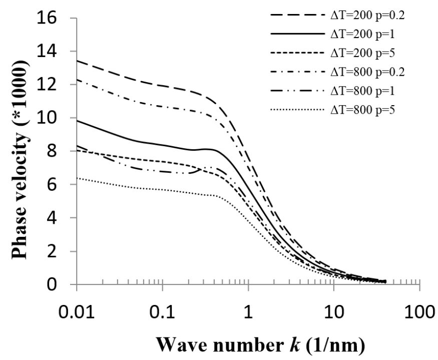
**شکل ٥: اثر ضریب پاسترناک بر سرعت فازی نانوصفحه مدرج تابعی در ( $\Delta T=500$, $p=1$, $\mu=1$ nm² )**



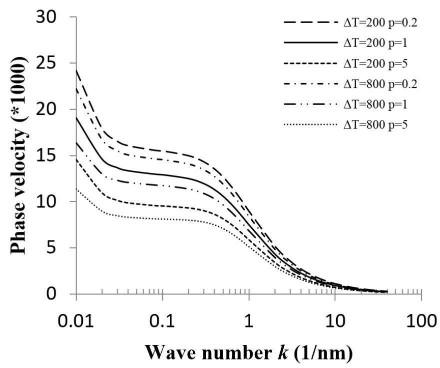

(a) $M_0$ Mode.




(b) $M_1$ Mode.



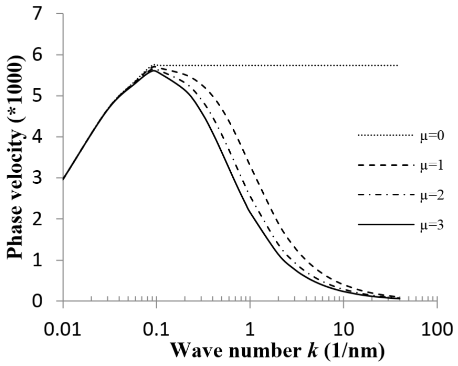

(c) $M_2$ Mode.



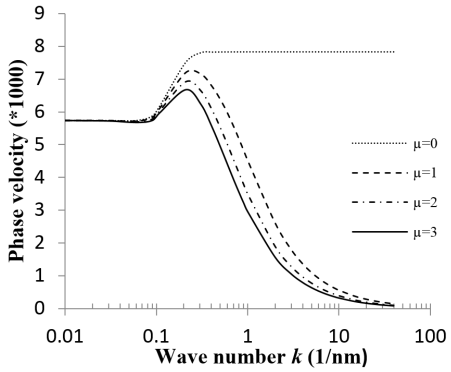

(d) $M_3$ Mode.

**Fig. 6. Effects of gradient index and temperature change on the phase velocity of the FG nanoplates.**

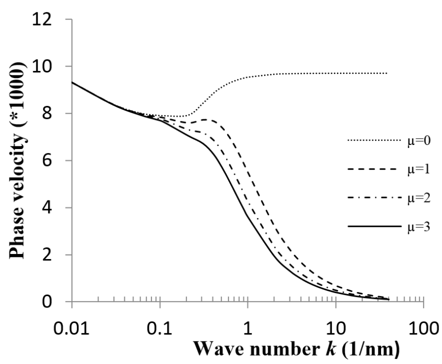
**شکل ٦: اثر شاخص گرادیان و اختلاف دما بر سرعت فازی نانوصفحه مدرج تابعی.**



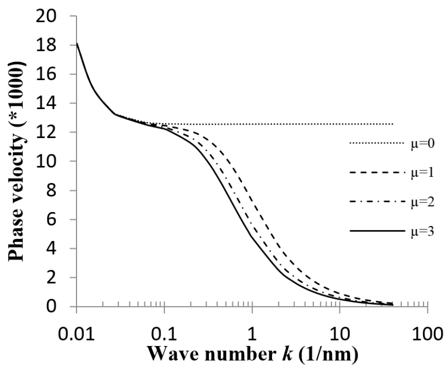

(a) $M_0$ Mode.




(b) $M_1$ Mode.




(c) $M_2$ Mode.




(d) $M_3$ Mode.

**Fig. 7. Effect of nonlocal parameter on the phase velocity of FG nanoplate (p=1).**

**شکل ۷: اثر پارامتر غیرمحلی بر سرعت فازی نانوصفحه مدرج تابعی در ($p$=1).**

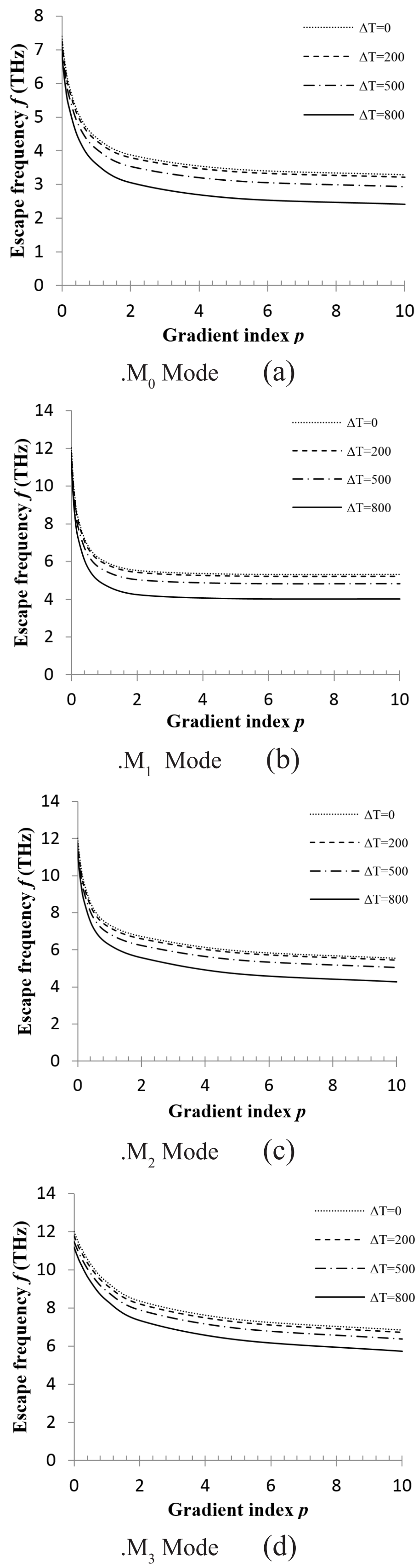



**Fig. 8. Effect of temperature change on the escape frequency of FG nanoplate in various gradient indices.**

**شکل ۸: اثر توزیع دماهای گوناگون بر بسامد فرار نانوصفحه مدرج تابعی در شاخص گرادیان‌های مختلف.**

اثر پارامتر غیرمحلی بر سرعت فازی نانوصفحه مدرج تابعی در $p=1$ و با ضرایب بستر الاستیک صفر در شکل ۷ رسم شده است. براساس شکل در تمامی مدها با افزایش پارامتر غیرمحلی مقدار سرعت فازی کاهش می‌یابد. این تغییر در عدد موج‌های بزرگتر محسوس‌تر است. در تمامی مدها، هنگامی‌که مقدار پارامتر غیرمحلی صفر است؛ سرعت فازی پس از عدد موج تقریباً ۱۰^۹×۱ ثابت باقی می‌ماند. علاوه بر این، برای مقادیر ناصفر پارامتر غیرمحلی، با زیاد شدن عدد موج مقدار سرعت فازی به سمت صفر میل می‌کند و اثر پارامتر غیرمحلی در اینجا کم‌تر می‌شود.

شکل ۸ اثر توزیع دماهای گوناگون بر روی بسامد فرار نانوصفحات مدرج تابعی را بیان می‌کند. برای این کار عدد موج به سمت بی‌نهایت میل داده می‌شود ($k \to \infty$). واضح است که افزایش شاخص گرادیان منجر به کاهش بسامد فرار می‌شود و این روند در شاخص گرادیان‌های کوچک محسوس‌تر است. ملاحظه می‌شود که با افزایش اختلاف دما اندازه بسامد فرار کاهش می‌یابد که این روند در شاخص گرادیان‌های بزرگتر واضح‌تر است.

## ۵- نتیجه‌گیری

در چارچوب یک نظریه صفحه پالایش شده مرتبه سوم، گسترش موج یک نانوصفحه مدرج تابعی قرار گرفته روی بستر الاستیک تحت بارگذاری حرارتی غیرخطی مورد بحث و بررسی قرار گرفته. ویژگی‌های ماده مربوط به این نانوصفحه با استفاده از مدل موری-تاناکا در راستای ضخامت درجه‌بندی می‌شوند. با به کارگیری اصل همیلتون، معادلات دیفرانسیل نهایی حاکم بر مسأله استخراج شده‌اند. در یک بررسی پارامتری اثر پارامترهای گوناگون مثل توزیع دما، شاخص گرادیان، پارامتر غیرمحلی و ضرایب خطی و غیرخطی بستر الاستیک بر روی ویژگی‌های گسترش موج نانوصفحه مدرج تابعی بررسی شده است. ملاحظه می‌شود که بسامد موج، سرعت فازی و بسامد فرار هر سه با افزایش اختلاف دما کاهش می‌یابند؛ همچنین، پارامتر غیرمحلی اثر نرم‌کننده‌ای بر رفتار نانوصفحه دارد و منجر به کاهش سرعت فازی می‌شود. شاخص گرادیان اثر کاهنده قابل ملاحظه‌ای بر سرعت فازی نانوصفحات دارد. اثر شاخص گرادیان و اختلاف دما بر سرعت فازی در عدد موج‌های بزرگ قابل چشم‌پوشی است. افزایش ضرایب سختی الاستیک وینکلر و پاسترناک منجر به افزایش سرعت فازی در عدد موج‌های کوچک می‌شود. اثر ضرایب بستر الاستیک در عدد موج‌های بزرگ قابل چشم‌پوشی است.

## علائم انگلیسی

| | |
|---|---|
| $A_{ij}$ | صلبیت مقطع، N/m |
| $A^s_{ij}$ | صلبیت مقطع، N/m |
| a | طول نانوصفحه، m |
| $a_{ij}$ | درایه های ماتریس [K] |
| $B_{ij}$ | صلبیت مقطع، N |

| | |
|---|---|
| $B^s_{ij}$ | صلبیت مقطع، N |
| B | عرض نانوصفحه، m |
| $C_i$ | سرعت فازی، km/s |
| $D_{ij}$ | صلبیت مقطع، Nm |
| $D^s_{ij}$ | صلبیت مقطع، Nm |
| E | مدول الاستیسیته، Pa |
| $f$ | بسامد موج، Hz |
| $f(z)$ | تابع تغییرشکل برشی مرتبه سوم، m |
| $g(z)$ | یک منهای مشق f(z) نسبت به z (بی‌بعد) |
| $H^s_{ij}$ | صلبیت مقطع، Nm |
| H | ضخامت نانوصفحه، m |
| $I_0$ | اینرسی، |
| $I_1$ | اینرسی، |
| $I_2$ | اینرسی، kg |
| $J_0$ | اینرسی، |
| $J_2$ | اینرسی، kg |
| K | کار انرژی جنبشی، J |
| k | عدد موج، ۱/nm |
| $k_i^b$ | ثوابت کرنشی (بی‌بعد) |
| $k_i^s$ | ثوابت کرنشی (بی‌بعد) |
| $K_c$ | مدول بالک فاز سرامیکی |
| $K_e$ | مدول بالک معادل |
| $K_m$ | مدول بالک فاز فلزی |
| $K_p$ | ضریب پاسترناک |
| $K_w$ | ضریب وینکلر |
| $K_2$ | اینرسی، kg |
| $k_1$ | عدد موج در راستای محور $x$ ها، ۱/nm |
| $k_2$ | عدد موج در راستای محور $y$ ها، ۱/nm |
| $M_i$ | مد های گوناگون موج |
| $M_i^b$ | ترکیب تنشی، Nm |
| $M_i^s$ | ترکیب تنشی، Nm |
| $m_{ij}$ | درایه های ماتریس [M] |
| $N_i$ | ترکیب تنشی، N |
| $N^T$ | بار حرارتی، N |
| P | شاخص گرادیان (بی بعد) |
| $P_i$ | ویژگی ماده |
| $Q_i$ | ترکیب تنشی، N |
| $Q_{ij}$ | ثابت های الاستیک، Pa |
| T | دما، °C |
| $T_c$ | دمای فاز سرامیکی، °C |
| $T_m$ | دمای فاز فلزی، °C |
| U | انرژی کرنشی، J |
| U(x,y,z,t) | تغییر شکل کل در راستای $x$، m |
| $u_0$ | تغییر شکل در راستای $x$، m |
| $V$ | کار ناشی از نیرو های خارجی، J |
| $V$(x,y,z,t) | تغییر شکل کل در راستای $y$، m |
| $v_0$ | تغییر شکل در راستای $y$، m |
| $v(z)$ | نسبت پواسون (بی بعد) |
| $V_c$ | کسر حجمی فاز سرامیکی (بی بعد) |
| $V_m$ | کسر حجمی فاز فلزی (بی بعد) |
| $W(x,y,z,t)$ | تغییر شکل کل در راستای $z$، m |
| $W_b$ | تغییر شکل کل در راستای $z$ ناشی از خمش، m |
| $w_b$ | تغییر شکل در راستای $z$ ناشی از خمش، m |
| $W_s$ | تغییر شکل کل در راستای $z$ ناشی از برش، m |
| $W_s$ | تغییر شکل در راستای $z$ ناشی از برش، m |
| $x$ | محور مختصات |
| $y$ | محور مختصات |
| $z$ | محور مختصات |

## علائم یونانی

| | |
|---|---|
| α | ضریب انبساط حرارتی، ۱ / °C |
| γ | کرنش برشی (بی بعد) |
| Δ | ماتریس تغییر شکل کل |
| ΔT | اختلاف دما، °C |
| δ | مقدار جزیی |
| δ$K$ | تغییرات کار انرژی جنبشی، J |
| δ$U$ | تغییرات کار انرژی کرنشی، J |
| δ$V$ | تغییرات کار ناشی از نیرو های خارجی، J |
| ε | کرنش محوری (بی بعد) |
| μ | پارامتر غیرمحلی، |
| $\mu_c$ | مدول برشی سرامیک، Pa |
| $\mu_e$ | مدول برشی معادل، Pa |
| $\mu_m$ | مدول برشی فلز، Pa |
| ρ | چگالی، $kg/m^3$ |
| σ | تنش محوری، Pa |
| τ | تنش برشی، Pa |
| ω | بسامد موج، Hz |

## زیرنویس‌ها

| | |
|---|---|
| $b$ | خمشی |
| $c$ | بیانگر سرامیک |
| $e$ | معادل |
| $m$ | بیانگر فلز |
| $s$ | برشی |

| | |
|---|---|
| $x$ | مولفه x |
| $y$ | مولفه $y$ |
| $xy$ | مولفه $xy$ |
| $xz$ | مولفه $xz$ |
| $yz$ | مولفه $yz$ |

### بالانویس‌ها

| | |
|---|---|
| $b$ | خمشی |
| $s$ | برشی |

## ضمیمه

در معادله (ب.۴۲) درایه‌های $a_{ij}$ و $m_{ij}$ به صورت زیر می‌باشند:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}=-\left(A_{11}k_1^{\,2}+A_{66}k_2^{\,2}\right);\\
&a_{12}=-\left(A_{12}+A_{66}\right)k_1k_2;\\
&a_{13}=ik_1\left[B_{11}k_1^{\,2}+\left(B_{12}+2B_{66}\right)k_2^{\,2}\right];\\
&a_{14}=ik_1\left[B_{11}^{s}k_1^{\,2}+\left(B_{12}^{s}+2B_{66}^{s}\right)k_2^{\,2}\right]\\
&a_{21}=-\left(A_{12}+A_{66}\right)k_1k_2;\\
&a_{22}=-\left(A_{66}k_1^{\,2}+A_{22}k_2^{\,2}\right)\\
&a_{23}=ik_2\left[\left(B_{12}+2B_{66}\right)k_1^{\,2}+B_{22}k_2^{\,2}\right];\\
&a_{24}=ik_2\left[\left(B_{12}^{s}+2B_{66}^{s}\right)k_1^{\,2}+B_{22}^{s}k_2^{\,2}\right]\\
&a_{31}=-ik_1\left[B_{11}k_1^{\,2}+\left(B_{12}+2B_{66}\right)k_2^{\,2}\right];\\
&a_{32}=-ik_2\left[\left(B_{12}+2B_{66}\right)k_1^{\,2}+B_{22}k_2^{\,2}\right]\\
&a_{33}=-\left(D_{11}k_1^{\,4}+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)k_1^{\,2}k_2^{\,2}+D_{22}k_2^{\,4}\right)\\
&+\left[\left(N^{T}-k_p\right)\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)-k_w\right]\left(1+\mu\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)\right)\\
&a_{34}=-\left(D_{11}^{s}k_1^{\,4}+2\left(D_{12}^{s}+2D_{66}^{s}\right)k_1^{\,2}k_2^{\,2}+D_{22}^{s}k_2^{\,4}\right)\\
&+\left[\left(N^{T}-k_p\right)\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)-k_w\right]\left(1+\mu\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)\right)\\
&a_{41}=-ik_1\left[B_{11}^{s}k_1^{\,2}+\left(B_{12}^{s}+2B_{66}^{s}\right)k_2^{\,2}\right];\\
&a_{42}=-ik_2\left[\left(B_{12}^{s}+2B_{66}^{s}\right)k_1^{\,2}+B_{22}^{s}k_2^{\,2}\right]\\
&a_{43}=-\left(D_{11}^{s}k_1^{\,4}+2\left(D_{12}^{s}+2D_{66}^{s}\right)k_1^{\,2}k_2^{\,2}+D_{22}^{s}k_2^{\,4}\right)\\
&+\left[\left(N^{T}-k_p\right)\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)-k_w\right]\left(1+\mu\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)\right)\\
&a_{44}=-\left(H_{11}^{s}k_1^{\,4}+2\left(H_{12}^{s}+2H_{66}^{s}\right)k_1^{\,2}k_2^{\,2}+H_{22}^{s}k_2^{\,4}\right)\\
&+\left[\left(N^{T}-k_p\right)\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)-k_w\right]\left(1+\mu\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)\right)-\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)A_{44}^{s}
\end{aligned}
\tag{الف-۱}
$$

$$
\begin{aligned}
&m_{11}=-I_0\left(1+\mu\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)\right);\\
&m_{12}=m_{21}=0\\
&m_{13}=I_1\left(1+\mu\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)\right);\\
&m_{14}=J_1\left(1+\mu\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)\right)\\
&m_{22}=-I_0\left(1+\mu\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)\right);\\
&m_{23}=iI_1k_2\left(1+\mu\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)\right)\\
&m_{24}=iJ_1k_2\left(1+\mu\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)\right);\\
&m_{31}=-iI_1k_1\left(1+\mu\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)\right)\\
&m_{32}=-iI_1k_2\left(1+\mu\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)\right);\\
&m_{33}=-\left(I_0+I_2\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)\right)\left(1+\mu\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)\right)\\
&m_{34}=-\left(I_0+J_2\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)\right)\left(1+\mu\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)\right)\\
&m_{41}=-J_1\left(1+\mu\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)\right);\\
&m_{42}=-iJ_1k_2\left(1+\mu\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)\right)\\
&m_{43}=-\left(I_0+J_2\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)\right)\left(1+\mu\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)\right)\\
&m_{44}=-\left(I_0+K_2\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)\right)\left(1+\mu\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{الف-۲}
$$

## مراجع


[1] V. Birman, L.W. Byrd, Modeling and analysis of functionally graded materials and structures, *Applied mechanics reviews,* 60(5) (2007) 195-216.

[2] N. Zhao, P.Y. Qiu, L.L. Cao, Development and application of functionally graded material, in: Advanced Materials Research, *Trans Tech Publ,* 2012, pp. 371-375.

[3] M. Shariyat, D. Asgari, M. AZADI, Nonlinear Transient Thermoelastic Analysis of a Thick FGM Cylinder with Temperature-Dependent Material Properties Using the Finite Element Method, (2010).

[4] A. Nosier, A. Ghaheri, Nonlinear forced vibrations of thin circular functionally graded plates, (2015).

[5] F. Ebrahimi, Effect of functionally graded microstructure on dynamic stability of piezoelectric circular plates, (2015).

[6] A. Moosaie, K.H. PANAHI, Exact solution of steady nonlinear heat conduction in exponentially graded cylindrical and spherical shells with temperature-dependent properties, (2016).

[7] N. Cheraghi, M. Lazgy Nazargah, An exact bending solution for functionally graded magneto-electro-elastic plates resting on elastic foundations with considering interfacial imperfections, *Modares Mechanical Engineering,* 15(12) (2016) 346-356.

[8] S. Iijima, Helical microtubules of graphitic carbon, nature, 354(6348) (1991) 56.

[9] Y. Zhang, G. Liu, J. Wang, Small-scale effects on buckling of multiwalled carbon nanotubes under axial compression, *Physical review B,* 70(20) (2004) 205430.

[10] Q. Wang, Wave propagation in carbon nanotubes via nonlocal continuum mechanics, *Journal of Applied physics,* 98(12) (2005) 124301.

[11] Q. Wang, V. Varadan, Vibration of carbon nanotubes studied using nonlocal continuum mechanics, Smart Materials and Structures, 15(2) (2006) 659.

[12] A.C. Eringen, Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves, *International Journal of Engineering Science,* 10(5) (1972) 425-435.

[13] A.C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of applied physics,* 54(9) (1983) 4703-4710.

[14] F. Yang, A. Chong, D.C.C. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *International Journal of Solids and Structures,* 39(10) (2002) 2731-2743.

[15] J. Reddy, Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams, *International Journal of Engineering Science,* 45(2-8) (2007) 288-307.

[16] S. Pradhan, J. Phadikar, Nonlocal elasticity theory for vibration of nanoplates, *Journal of Sound and Vibration,* 325(1-2) (2009) 206-223.

[17] M. Aydogdu, A general nonlocal beam theory: its application to nanobeam bending, buckling and vibration, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 41(9) (2009) 1651-1655.

[18] T. Murmu, S. Adhikari, Nonlocal transverse vibration of double-nanobeam-systems, *Journal of Applied Physics,* 108(8) (2010) 083514.

[19] C.W. Lim, C. Li, J.-L. Yu, Dynamic behaviour of axially moving nanobeams based on nonlocal elasticity approach, *Acta Mechanica Sinica*, 26(5) (2010) 755-765.

[20] L.-L. Ke, Y.-S. Wang, J. Yang, S. Kitipornchai, Free vibration of size-dependent magneto-electro-elastic nanoplates based on the nonlocal theory, *Acta Mechanica Sinica*, 30(4) (2014) 516-525.

[21] Y.-Z. Wang, F.-M. Li, K. Kishimoto, Scale effects on flexural wave propagation in nanoplate embedded in elastic matrix with initial stress, *Applied Physics A*, 99(4) (2010) 907-911.

[22] Y.-Z. Wang, F.-M. Li, K. Kishimoto, Scale effects on the longitudinal wave propagation in nanoplates, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 42(5) (2010) 1356-1360.

[23] S. Narendar, S. Gopalakrishnan, Temperature effects on wave propagation in nanoplates, *Composites Part B: Engineering,* 43(3) (2012) 1275-1281.

[24] L. Zhang, J. Liu, X. Fang, G. Nie, Effects of surface piezoelectricity and nonlocal scale on wave propagation in piezoelectric nanoplates*, European Journal of Mechanics-A/Solids, 46 (*2014) 22-29.

[25] L. Zhang, J. Liu, X. Fang, G. Nie, Surface effect on size-dependent wave propagation in nanoplates via nonlocal *elasticity, Philosophical Magazine,* 94(18) (2014) 2009-2020.

[26] J. Zang, B. Fang, Y.-W. Zhang, T.-Z. Yang, D.-H. Li, Longitudinal wave propagation in a piezoelectric nanoplate considering surface effects and nonlocal elasticity theory, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 63 (2014) 147-150.

[27] G. Varzandian, S. Ziaei, Analytical Solution of Non-Linear Free Vibration of Thin Rectangular Plates with Various Boundary Conditions Based on Non-Local Theory, *Mechanical Engineering*, 48(4) (2017).

[28] A. Kaghazian, H.R. Foruzande, A. Hajnayeb, H. Mohammad Sedighi, nonlinear free vibrations analysis of a piezoelectric bimorph nanoactuator using nonlocal elasticity theory, *Modares Mechanical Engineering,* 16(4) (2016) 55-66.

[29] R. Nazemnezhad, K. Kamali, Investigation of the inertia of the lateral motions effect on free axial vibration of nanorods using nonlocal Rayleigh theory, Modares Mechanical Engineering, 16(5) (2016) 19-28.

[30] Z. Su, L. Ye, Y. Lu, Guided Lamb waves for identification of damage in composite structures: A review, Journal of sound and vibration, 295(3-5) (2006) 753-780.

[31] R.F. Bunshah, J.M. Blocher, Deposition technologies for films and coatings: *developments and applications, Noyes Data,* 1982.

[32] P. Patel, D. Almond, Thermal wave testing of plasma-sprayed coatings and a comparison of the effects of coating microstructure on the propagation of thermal and ultrasonic waves, *Journal of Materials science,* 20(3) (1985) 955-966.

[33] S. Natarajan, S. Chakraborty, M. Thangavel, S. Bordas, T. Rabczuk, Size-dependent free flexural vibration behavior of functionally graded nanoplates,

plates, *Archive of Applied Mechanics*, 83(1) (2013) 137-149.

[41] F. Kaviani, H. Mirdamadi, Static Analysis of Bending, Stability, and Dynamic Analysis of Functionally Graded Plates by a Four-Variable Theory.

[42] S.A. Yahia, H.A. Atmane, M.S.A. Houari, A. Tounsi, Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories, *Structural Engineering and Mechanics,* 53(6) (2015) 1143-1165.

[43] A. Ghorbanpour Arani, M. Jamali, A. Ghorbanpour-Arani, R. Kolahchi, M. Mosayyebi, Electro-magneto wave propagation analysis of viscoelastic sandwich nanoplates considering surface effects, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 231(2) (2017) 387-403.

[44] M.R. Barati, A.M. Zenkour, H. Shahverdi, Thermo-mechanical buckling analysis of embedded nanosize FG plates in thermal environments via an inverse cotangential theory, *Composite Structures*, 141 (2016) 203-212.

[45] Y.-W. Zhang, J. Chen, W. Zeng, Y.-Y. Teng, B. Fang, J. Zang, Surface and thermal effects of the flexural wave propagation of piezoelectric functionally graded nanobeam using nonlocal elasticity, *Computational Materials Science*, 97 (2015) 222-226.

[46] L. Li, Y. Hu, L. Ling, Flexural wave propagation in small-scaled functionally graded beams via a nonlocal strain gradient theory, Composite Structures, 133 (2015) 1079-1092.

*Computational Materials Science*, 65 (2012) 74-80.

[34] F. Ebrahimi, E. Salari, Thermal buckling and free vibration analysis of size dependent Timoshenko FG nanobeams in thermal environments, *Composite Structures,* 128 (2015) 363-380.

[35]F. Ebrahimi, E. Salari, S.A.H. Hosseini, Thermomechanical vibration behavior of FG nanobeams subjected to linear and non-linear temperature distributions, *Journal of Thermal Stresses*, 38(12) (2015) 1360-1386.

[36]R. Ansari, M. Ashrafi, T. Pourashraf, S. Sahmani, Vibration and buckling characteristics of functionally graded nanoplates subjected to thermal loading based on surface elasticity theory, *Acta Astronautica*, 109 (2015) 42-51.

[37]I. Belkorissat, M.S.A. Houari, A. Tounsi, E. Bedia, S. Mahmoud, On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model, *Steel Compos. Struct*, 18(4) (2015) 1063-1081.

[38] M.R. Nami, M. Janghorban, M. Damadam, Thermal buckling analysis of functionally graded rectangular nanoplates based on nonlocal third-order shear deformation theory, *Aerospace Science and Technology,* 41 (2015) 7-15.

[39] H.-T. Thai, D.-H. Choi, A refined shear deformation theory for free vibration of functionally graded plates on elastic foundation, *Composites Part B: Engineering,* 43(5) (2012) 2335-2347.

[40] H.-T. Thai, T. Park, D.-H. Choi, An efficient shear deformation theory for vibration of functionally graded

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

F. Ebrahimi, A. Dabbagh, Wave Propagation in Embedded Temperature-dependent Functionally Graded Nano-plates Subjected to Nonlinear Thermal Loading According to a Nonlocal Four-variable Plate Theory, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 50(5) (2018) 973-988.

DOI: 10.22060/mej.2017.11824.5194