



مدل‌سازی ریاضی و تحلیل تشدید در نوسان‌کننده‌های برخوردی

علی ابراهیمی ممقانی^{*}، روح اله حسینی

باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۰ بهمن ۱۳۹۵
بازنگری: ۲۵ اسفند ۱۳۹۵
پذیرش: ۲۷ فروردین ۱۳۹۶
ارائه آنلاین: ۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۶

کلمات کلیدی:

نوسان‌گر دوطرفه
نوسان‌کننده برخوردی
زمان برخورد
مجموعه ویژه
تشدید چندهارمونیک
پوش نوسان

چکیده: نوسان‌کننده‌های دوطرفه نوسان‌گرهایی هستند که خاصیت ارتجاعی آن‌ها در فشار و تنش، فنریتهای متفاوتی دارند. در این مقاله یک مورد خاص از نوسان‌کننده دوطرفه، یعنی نوسان‌کننده برخوردی که سختی فشرده‌گی آن نامحدود است، بررسی می‌شود و مجموعه ویژه زمان‌های برخورد که مجموعه راه‌حل معادله همگن (نوسان‌کننده بدون نیروی تحریک) هستند، تحلیل می‌شوند. این مجموعه و زیرمجموعه‌های آن با توجه به تنوع شرایط اولیه پایدار هستند. معادلات دینامیکی این نوسان‌گر با در نظر گرفتن مبدأ به عنوان نقطه گذر ناگهانی، به صورت نیمه‌تحلیلی و همچنین با روش عددی رانگ کوتای مرتبه چهارم تحلیل غیرخطی شده‌اند. به علاوه، در میان همه مجموعه‌های متناوب زمان‌های برخورد متناسب با دوره نیروی تحریک، مجموعه ویژه تنها موردی است که می‌تواند تشدیدها مخصوصاً تشدیدهای چندهارمونیک را پشتیبانی کند. بقیه تشدیدها نیز باید مجموعه‌های غیرمتناوب زمان‌های برخورد را تولید کنند. این پدیده نشان می‌دهد فرض معمول که زمان‌های بین برخوردها با دوره نیروی تحریک متناسب هستند، همیشه برقرار نیست. همچنین نشان داده خواهد شد که برای اولین تشدید نیم‌هارمونیک مجموعه زمان‌های برخورد نزدیک به مجموعه ویژه است و پوش نوسان‌ها در این تشدید، برخلاف افزایش خطی تشدیدهای چندهارمونیک به صورت مجذور ریشه زمان است.

۱- مقدمه

نوسان‌گرهای دوطرفه^۱، نوسان‌کننده‌هایی هستند که میزان فنریته آن‌ها در فشار و کشش متفاوت می‌باشد. محققین با استفاده از شبیه‌سازی پدیده‌های طبیعی و مهندسی که شامل نیروهای برگشتی است و دامنه‌های مختلفی در تنش و فشار دارند، به وسیله روابط این نوسان‌گرها، به تحلیل و بررسی دینامیک این‌گونه مسائل می‌پردازند. یکی از مکانیزم‌های اصلی چنین تفاوتی، وجود تماس‌هایی است که با الاستیسیته سیستم در مقابل حرکت در یک جهت مقاومت می‌کند، درحالی‌که حرکت در جهت دیگر شامل مقاومت بالای اضافی جسم در تماس است. به طور مثال شاخص هر فرآیند برش این است که حرکت ابزار برش در جهت قطعه کاری، نیروهای تماسی بالایی ایجاد می‌کند، درحالی‌که حرکت برعکس آن برای نگه‌دارنده ابزار، مقاومت کمی دارد. این مسئله با عنوان درگیری متناوب بین قطعه کاری و ابزار عنوان می‌شود و مخصوصاً به این دلیل که موجب افت پایداری دینامیک شده و نرخ حذف ماده مخصوصاً در سرعت‌های بالا را محدود می‌کند، مهم است [۱]. یک نمونه خاص دیگر تقابل بین سنگ و سر مته دریل است. درعین حال که چرخش‌های ابزار برش سر مته، نیروی تحریک را متناوب یا شبه متناوب می‌کند، اما از سوی دیگر، دسته دریل بلند است و سختی کلی کمی دارد

و سنگ در مقابل حرکت سر مته دریل مقاومت می‌کند. مثال‌های دیگر عبارت هستند از اتصالات واگن‌ها در قطارها، ترک‌های نازک در سیستم‌های مهندسی [۲، ۳]، خطوط و برج‌های اسکله، پل‌های معلق، سازه‌های پیوسته توپولوژیک [۴] که اجزا از طریق مهارهای جنبشی به هم متصل نگه داشته می‌شوند [۵-۷]. آنچه در این کاربردها مهم است، امکان تشدید در سیستم است که از طریق کاهش اصطکاک حاصل از نوسان می‌تواند به کاهش پایداری منجر شود [۸].

یکی از خصوصیات نوسان‌کننده دوطرفه، وجود مناطق ناپایداری و رفتار آشفته^۲ است [۹-۱۳]. مخصوصاً این ویژگی، خود را در ناپایداری‌های حل عددی نشان می‌دهد [۸]. شاو و هولمز تحلیل پایداری نوسان‌گرهای دوطرفه و برخوردی را انجام دادند [۱۴]. ویستون این تحلیل را به مورد نوسان‌گر دوطرفه با بار اولیه گسترش داد [۱۵]. آنالیز این پژوهش بر اساس این فرض است که زمان پرواز^۳ (یعنی زمان بین گذرهای متوالی از $x < 0$ به $x > 0$) متناسب با دوره تناوب نیروی تحریک متناسب است. گذر ناگهانی از یک عدد سختی به عددی دیگر، هموار بودن راه‌حل را کاهش می‌دهد، مخصوصاً اگر نقطه گذر $x \neq 0$ باشد. در نتیجه، نوسان‌کننده دوطرفه را برخی محققین با صاف کردن منحنی‌های جابه‌جایی-نیرو (تنش-کشش) مدل‌سازی کردند [۱۶].

1 Bilinear oscillator

2 Chaotic
3 Flight time

نویسنده عهده‌دار مکاتبات: ppirali@mut.ac.ir

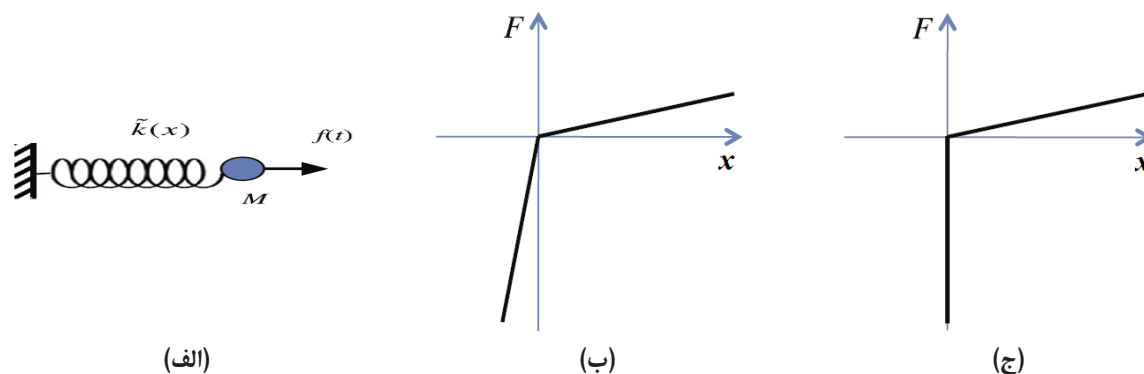


Fig. 1. schematic of the system and forces in (a) bilinear and (b) impact oscillators

شکل ۱: (الف) شماتیک سیستمی و نیرویی فنرهای (ب) دوطرفه و (ج) برخوردی

آن یعنی نوسان کننده برخوردی، ابتدا به وسیله بی‌بعدسازی و فرموله کردن خصوصیات عمومی نوسان گرهای برخوردی استخراج می‌شوند. سپس با بررسی مجموعه زمان‌های برخورد و همچنین تحلیل زمان‌های برخورد متناوب متناسب با دوره تناوب تحریک در تشدیدهای چندهارمونیک، نیم‌هارمونیک^۳ و زیرهارمونیک، تأثیر مجموعه ویژه بر رخداد رزونانس و پشتیبانی از تشدیدها بررسی می‌شود. در نهایت نیز پاسخ و رفتار مجانبی^۴ سیستم تحت تشدید نیم‌هارمونیک سینوسی و کسینوسی بررسی و تحلیل می‌شود. به همین منظور نتایج اصلی تحقیق با روش نیمه‌تحلیلی استخراج می‌شوند. همچنین با رسم نمودارهای پاسخ زمانی، دیاگرام فاز و طیف توان به ازای شرایط مختلف نیروی تحریک خارجی، به تحلیل و بررسی نتایج حاصله پرداخته می‌شود و علاوه بر این با استفاده از روش عددی (رانگ کوتای مرتبه چهارم) به صحت‌سازی و نتایج حل معادلات دیفرانسیل پرداخته می‌شود.

۲- نوسان گر دوطرفه

یک نوسان گر دوطرفه (شکل ۱ (الف و ب)) بعد از بی‌بعدسازی با معادله زیر توضیح داده می‌شود [۱۴]:

$$x'' + 2\alpha x' + \tilde{k}(x)x = f(t), \quad (1)$$

$$\tilde{k}(x) = \begin{cases} \omega_+^2, & x \geq 0 \\ \omega_-^2, & x < 0 \end{cases}, \quad \omega_+ < \omega_-$$

که $x(t)$ جابجایی نوسان کننده و α ضریب میرایی است. ویژگی اصلی نوسان کننده دوطرفه این است که فضای فاز^۵ به دو منطقه مجزا تقسیم می‌شود که در آن‌ها رفتار نوسان کننده خطی است، درحالی‌که غیرخطی بودن سیستم، با عبور از مرز بین حالات خطی رخ می‌دهد. فرکانس تشدید^۶ را می‌توان با جمع زمان‌هایی که نوسان گر در هر یک از حالات خطی صرف می‌کند، به دست آورد [۱۴]:

مهم‌ترین ویژگی نوسان گرهای دوطرفه، زمان‌های برخورد (یعنی زمان‌های عبور از نقطه گذر) می‌باشد. مطالعات نشان داده‌اند که در میان همه مجموعه زمان‌های برخورد با دوره متناسب با دوره نیروی تحریک، مجموعه ویژه (زمان‌های عبور از نقطه گذر بدون وجود نیروی تحریک خارجی) تنها موردی است که می‌تواند تشدیدها مخصوصاً تشدیدهای چندهارمونیک را پشتیبانی کند. بقیه تشدیدها نیز باید مجموعه‌های غیرمتناوب زمان‌های برخورد را تولید کنند [۱۴].

تنها راه‌حل‌های تحلیلی شناخته شده تاکنون برای این نوسان گرها، به مورد محدودکننده $\omega \rightarrow \infty$ یعنی نوسان کننده برخوردی^۱ (شکل ۱ (ج)) مربوط می‌شوند که تشدیدهای چندهارمونیک^۲ در حل تحلیلی آن‌ها یافت می‌شود. این نوسان گرها در فشردگی سختی نامحدود دارند. دیسکین و همکاران [۱۷] به بررسی نقاط سکون و تشدید در زنجیره نوسان گرهای دوطرفه چند درجه آزادی پرداختند. ژیانگ و همکاران [۱۸] برای نوسان گرهای برخوردی همراه با قیدهای الاستیک که تحت نیروهای سایشی هستند، روابطی برای استخراج نقاط انشعاب این سیستم‌ها استخراج کردند. ژونگ و همکاران [۱۹] در پژوهشی نوین به تحلیل ارتعاشات سیستم‌های غیرخطی همراه با نوسان گرهای دوطرفه هیستریزیسی پرداختند. آن‌ها برای حل معادلات سیستم‌های یک و دو درجه آزادی، از روش عددی رانگ کوتای مرتبه چهارم و روش تحلیلی هارمونیک بالانس استفاده کردند. لیا و همکاران [۲۰] پایداری و انشعاب نوسان‌های برخوردی تحت تحریک هارمونیک را به منظور استخراج سختی معادل با روش‌های عددی و آزمایشگاهی مورد تحلیل و بررسی قرار دادند. بین و همکاران [۲۱] نیز پایداری، پاسخ‌های پریودیک و پاسخ‌های شبه پریودیک را در دمپرهای برخوردی مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. نیومن و ماکارنکوف [۲۲] با استفاده از روش نوین میانگیری به تحلیل رزونانس در نوسان گرهای برخوردی پرداختند.

بررسی‌های بالا نشان می‌دهند انجام تحلیل‌های بیشتر به منظور تعیین راه‌حل‌های شکل بسته و تحلیل نوسان گرهای دوطرفه و برخوردی ضروری است. در این مقاله معادلات نوسان کننده‌های دوطرفه در ساده‌ترین شکل

3 Half harmonic resonance
4 Asymptotical behavior
5 Phase space
6 Resonat frequency

1 Impact oscillator
2 Multi-harmonic

معادله خطی حل کرد که معادله (۳) با آن در فاصله (t_0, t_1) رفتار می‌کند. نقطه t_1 از معادله $x(t_1)=0$ تعیین می‌شود و برای فاصله (t_1, t_2) سرعت در نقطه t_1+0^+ از معادله (۴) به دست می‌آید و دوباره راه‌حل مرسوم به کار می‌رود. بنابراین برای شرایط اولیه مشخص، راه‌حل (۳) و (۴) وجود دارد و منحصر به فرد است.

به منظور ساده کردن بیشتر تحلیل، فرض می‌شود میرایی وجود ندارد. با تنظیم $\alpha = 0$ و نوشتن مجدد معادله‌های (۳) و (۴) به صورت متغیر زمانی بدون بعد $t \rightarrow t\omega_+$ و قرار دادن f / ω_+^2 به جای f ، معادله دیفرانسیل زیر به دست می‌آید:

$$x'' + x = f(t) \quad x > 0 \quad (5)$$

که باز هم با شرایط برخورد (۴) حل می‌شود. فرکانس تشدید معادله (۵) با متغیر زمانی بدون بعد، $\Omega_r = 2$ است؛ همین‌طور فرکانس تشدید چندهارمونیکی‌ها نیز مساوی $2n$ هستند. به سادگی می‌توان دید اگر $f(t)$ به صورت نامحدود قابل مشتق‌گیری باشد، راه‌حل $x(t)$ در فواصل (t_k, t_{k+1}) به صورت نامحدود قابل مشتق‌گیری است. در زمان‌های برخورد، همه مشتق‌های فرد $m=1, 2, \dots$ $x^{(2m+1)}(t)$ گسسته هستند، در حالی که خود راه‌حل، $x(t)$ و همه مشتق‌های زوج یعنی $x^{(2m)}(t)$ ، پیوسته هستند.

لازم به ذکر است که با اینکه عملگر دیفرانسیل در طرف چپ معادله (۵) غیرخطی است، حالت محدودی از ترکیب محدب^۲ را اجازه می‌دهد، یعنی اگر $x(t)$ و $y(t)$ ($x(t), y(t) > 0$) به ترتیب معادله $x'' + x = f(t)$ و $y'' + y = g(t)$ را برآورده سازند و زمان‌های برخورد مساوی (t_k) وجود داشته باشد، پس در نتیجه برای هر $\alpha, \beta > 0$ که $\alpha x + \beta y = z$ معادله زیر برقرار است:

$$z'' + z = \alpha f(t) + \beta g(t), \quad z > 0 \quad (6)$$

این ویژگی از این واقعیت پیروی می‌کند که هم $x(t)$ و هم $y(t)$ منفی نیستند و صفرهای مساوی (t_k) دارند، پس ترکیب محدب آن‌ها که مثبت است، همان صفرها را دارد و معادله (۶) بین آن‌ها برقرار است.

از این خصوصیت می‌توان دید مجموعه زمان‌های برخورد نقش اساسی در ساختار راه‌حل‌های سیستم (۵) با روابط (۴) را ایفا می‌کند. با استفاده از این خصوصیت می‌توان پیشنهاد داد که نوسان‌کننده برخوردی را می‌توان با بررسی مجموعه زمان‌های برخورد و سرعت‌های برخورد مربوطه تحلیل کرد که البته این نقاط، نقاط نمودار پوانکاره^۳ برای $x=0$ هستند.

۴- زمان‌های برخورد

با در نظر گرفتن $\theta(t_k)$ به عنوان یک مجموعه از زمان‌های برخورد^۴، مبدأ به اولین زمان برخورد منتقل خواهد شد به گونه‌ای که $t_0 = 0$. به همین دلیل یک مجموعه خاص انتخاب می‌شود که $\theta = \pi k, k = 0, 1, \dots$ که

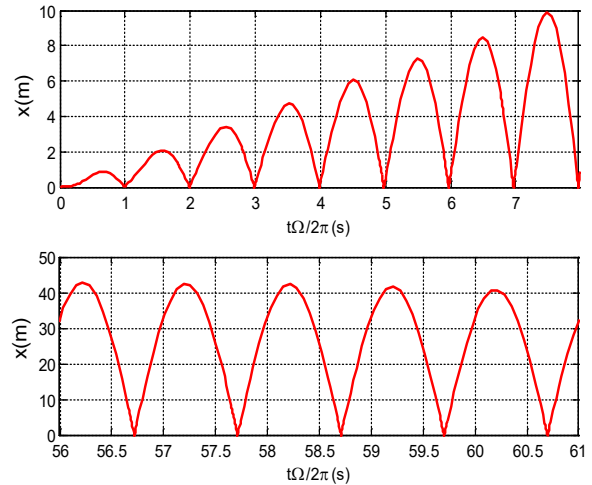


Fig. 2. numerical solution of equation (1) and non-periodic impact times for $\omega_-^2 / \omega_+^2 = 20$, $\alpha=0$ and $\omega=1.01\Omega_r$

شکل ۲: حل عددی معادله (۱) و رخداد زمان‌های برخورد غیرمتناوب ($\omega = 1.01\Omega_r$ و $\alpha=0$ و $\omega_-^2 / \omega_+^2 = 20$)

$$\Omega_r = \frac{2\Omega_+ \Omega_-}{\Omega_+ + \Omega_-}, \quad \Omega_{\pm}^2 = \omega_{\pm}^2 - \alpha^2 \quad (2)$$

با در نظر گرفتن مبدأ به عنوان نقطه گذار برای نوسان‌کننده برخوردی، مجموعه زمان‌های برخورد، دوره تناوبی مساوی یا چند برابر دوره تناوب نیروی تحریک دارند [۲۳]. این فرض برای نیروهای تحریک با فرکانس چند برابر فرکانس ویژه نوسان‌کننده ($\omega = n\Omega_r$) معتبر است و هر انحراف جزئی از چنین فرکانسی، زمان‌های برخورد غیرمتناوب تولید می‌کند [۱۰]. به طور مثال همان‌گونه که در شکل ۲ برای یک نوسان‌گر دوطرفه (معادله (۱)) مشاهده می‌شود در حالی که در آغاز حرکت (شکل ۲(الف)) به نظر می‌رسد که فواصل بین برخوردهای متوالی مساوی دوره تناوب نیروی تحریک است اما در پایان فاصله زمانی (شکل ۲(ب)) غیر تناوبی بودن پاسخ دینامیکی نوسان‌کننده آشکار می‌شود و می‌توان به اهمیت موضوع زمان‌های برخورد در نوسان‌گرهای دوطرفه پی برد.

۳- نوسان‌کننده برخوردی و ویژگی‌های آن

با در نظر گرفتن $\omega_- \rightarrow \infty$ ، معادله (۱) به معادله زیر تبدیل می‌شود [۱۴]:

$$x'' + 2\alpha x' + \omega_+^2 x = f(t), \quad x > 0 \quad (3)$$

نقاط $x(t)=0$ نقاط گذر^۱ (برخورد) هستند که در زمان‌های $t_k (k = 0, 1, \dots)$ اتفاق می‌افتند (t_k مجموعه زمان‌های برخورد است):

$$x(t_k) = 0, \quad x'(t_k + 0) = -x'(t_k - 0) = V_k \quad (4)$$

در معادله (۴) سرعت‌های برخورد هستند. معادلات (۳) و (۴) را می‌توان مرحله به مرحله با شروع با شرایط اولیه در t_0 و با استفاده از راه‌حل مرسوم

2 Convex combination
3 Poincare map
4 Impact times

1 Transition points

۴-۱- تشدید نیم‌هارمونیک

با توجه به اینکه Θ_0 مجموعه زمان‌های برخورد برای جواب کلی معادله همگنی است که با (۴) مطابقت دارد، می‌توان تصور کرد ویژگی (۱) برای هر مجموعه $\Theta_0 \neq \Theta$ به کار می‌رود، اما این گونه نیست، چون مجموعه‌های Θ وجود دارد که تغییر سرعت اولیه حداقل در فاصله‌ای خاص بر Θ تأثیر ندارد. این مسئله با مثال زیر نشان داده می‌شود.

مثال: به مجموعه زمان‌های برخورد زیر توجه کنید:

$$\Theta_m = \{s_k\} \subset \Theta_0 : s_0 = 0, s_{k+1} = \begin{cases} s_k + m & k = 2n \\ s_k + 1 & k = 2n + 1 \end{cases} \quad (10)$$

همچنین یک گروه از توابع زیر را در نظر بگیرید [۲۳]:

$$x_*(t) = A \sin t - \cos \frac{2t + \pi}{m+1} + \cos \frac{\pi}{m+1} \quad (11)$$

همه این توابع، Θ_m را به عنوان یک مجموعه از ریشه‌های خود دارند و در سایر نقاط آن‌ها معادله (۵) را با معادله زیر برآورده می‌کنند.

$$f(t) = \frac{(3-m)(m+5)}{(m+1)^2} \cos \frac{2t + \pi}{m+1} + \cos \frac{\pi}{m+1} \quad (12)$$

فاکتور A در هر فاصله بین زمان‌های برخورد به نحوی انتخاب می‌شود تا اطمینان حاصل شود که جواب به دست آمده معادله (۵) و (۱۲) منفی نیستند. به منظور رعایت این مسئله، در نظر گرفته می‌شود که مجموعه Θ_m دوره تناوب $T = \pi(1+m)$ دارد. بخش اول معادله (۱۱) (جواب معادله یکنواخت در مورد خطی) دوره T یا $T/2$ به ترتیب برای k فرد یا زوج دارد. با فرض V_0 به عنوان سرعت اولیه (در $t=0$) به دست خواهد آمد:

$$A = \begin{cases} V_0 + \frac{2}{m+1} \sin \frac{\pi}{m+1} & 0 \leq t \leq m\pi \\ -V_0 + \frac{2}{m+1} \sin \frac{\pi}{m+1} & m\pi \leq t \leq (m+1)\pi \end{cases} \quad (13)$$

برای فاصله بعدی $(m+1)\pi \leq 2(m+1)\pi$ ، سرعت اولیه برابر خواهد بود:

$$V_1 = \begin{cases} -V_0 + \frac{4}{m+1} \sin \frac{\pi}{m+1} & m = 2n \\ V_0 & m = 2n + 1 \end{cases} \quad (14)$$

۴-۲- تشدید زیرهارمونیک^۲

زمانی که m زوج است، سرعت اولیه تنها برای فاصله بعدی $2(m+1)\pi \leq t \leq 3(m+1)\pi$ مساوی V_0 می‌شود که این واقعیت را منعکس می‌کند که در این مورد دوره تناوب $2(1+m)\pi$ است. شکل‌های (۳) و (۴) توابع (۱۱) و (۱۳) را به ترتیب برای $m = 2, 3$ نشان می‌دهند. این توابع جواب‌های معادلات (۵) و (۱۲) را با زمان‌های برخورد Θ_m برای برخی مقادیر

مجموعه زمان‌های برخورد برای راه‌حل‌های معادله همگن^۱ معادله (۷) است:

$$x'' + x = 0, \quad x > 0 \quad (7)$$

با شرایط اثر (۴) و شرایط اولیه زیر:

$$\dot{x}(0) = V_0, \quad x(0) = 0 \quad (8)$$

که V_0 سرعت اولیه است. با نامگذاری مجموعه $\Theta_0 = \pi k$ به عنوان مجموعه ویژه، راه‌حل معادله (۷) با شرایط برخورد (۴) و شرایط اولیه (۸) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۱۴]:

$$x_0(t) = V_0 \sin(t - \pi k), \quad \pi k \leq t \leq \pi(k+1) \quad (9)$$

قطعاً اگر x جواب معادله (۵) با مجموعه زمان‌های برخورد $\Theta_0 = \pi k$ باشد، پس $x + x_0$ جواب دیگر است (اما با یک سرعت اولیه متفاوت). بنابراین x_0 نقش جزء خنثی در جواب‌های معادله ناهمگن معادله (۵) با مجموعه زمان‌های برخورد $\Theta_0 = \pi k$ را ایفا می‌کند. این شبیه معادله مرتبط بین معادلات دیفرانسیل خطی همگن و غیر همگن است.

حال به بررسی برخی ویژگی‌های معادلات (۴) و (۵) مرتبط با مجموعه زمان‌های برخورد پرداخته می‌شود:

ویژگی ۱: اگر $x > 0$ و $y > 0$ ($y \neq x$)، شرط $x'' = x$ و $f(t) = y'' + y$ را با زمان‌های برخورد یکسان $\Theta_0 \subset \Theta$ برآورده سازد، با فرض $f, g \neq 0$ به دست خواهد آمد: $f \neq g$ به عبارت دیگر، تفکیک جواب به جمع یک جواب کلی معادله همگن و یک جواب خصوصی نمونه، تنها برای راه‌حل‌های با زمان‌های برخورد یکسان متعلق به مجموعه ویژه $\Theta_0 = \pi k$ ممکن است. بنابراین اگر $\Theta_0 \subset \Theta$ ، برخلاف نمونه معادلات دیفرانسیل خطی، جواب معادله ناهمگن را نمی‌توان بدون تغییر نیروی تحریک به جواب معادله همگن مربوطه اضافه کرد.

اثبات: فرض کنید عکس قضیه صادق است، $g=f$. پس به دلیل انحصاری بودن جواب معادلات (۴) و (۵) برای هر k ، $x'(t_k) \neq y'(t_k)$ در غیر این صورت x و y منطبق خواهند بود. فرض کنید که در این معادله $x'(t_k) = W_k$ ، $y'(t_k) = W_k$ و $V_k < W_k$. از آنجایی که در فاصله $(tk, tk+1)$ هم x و هم y همان معادله دیفرانسیل خطی (۷) با همان طرف راست هستند، یعنی در این معادله $x(t) - y(t) = z(t)$ یک جواب معادله همگن مربوطه در $(tk, tk+1)$ با شرایط اولیه $z(t_k) = 0$ و همچنین $z'(t_k) = W_k - V_k$ است. شکل این جواب مشخص است: $z(t) = (W_k - V_k) \sin t$. از آنجایی که x و y صفر بعدی را در t_{k+1} دارند، این نقطه باید یک صفر z باشد. پس $t_{k+1} = t_k + \pi_{sk}$ که s_k عدد صحیح است و نشان می‌دهد $\Theta_0 \subseteq \Theta$. این مسئله اثبات را خاتمه می‌دهد. تعبیر دیگری از ویژگی (۱) بیان می‌کند که معادله با طرف راست مشخص که سرعت اولیه را تغییر می‌دهد به تغییر در مجموعه زمان‌های برخورد Θ به میزان $\Theta \subseteq \Theta$ می‌انجامد.

لازم به ذکر است که برای $m=3$ دوره تناوب برابر است با $(m+1)\pi$ که با دوره تناوب نیروی تحریک تطابق دارد. برای $m=2$ این دوره تناوب، دو برابر است، یعنی برابر است با $2(m+1)\pi$. نمونه مورد بررسی نشان می‌دهد برخلاف فرض موجود در [۱۴، ۱۵]، دوره تناوب‌های زمان‌های برخورد و نیروی تحریک منطبق نیستند (زمان‌های برخورد حتی ممکن است متفاوت باشند). یعنی مجموعه زمان‌های برخورد و نیروی تحریک متفاوت است و یک دوره مشترک دارند. همان‌طور در شکل‌های (۳) و (۴) مشاهده می‌شود شرایط اولیه در تشدیدهای زیرهارمونیک تأثیرگذار می‌باشد و برای رخداد رزونانس متناسب با دوره نیروی تحریک، حتماً سرعت اولیه نوسان‌گر می‌بایست مقداری کمتر از مقدار مرزی مشخص شده داشته باشد.

۵- زمان‌های برخورد متناوب متناسب با دوره تناوب تحریک: تشدیدها

اگر فرض شود مجموعه Θ زمان‌های برخورد، با دوره تناوب T است و نیروی تحریک نیز همان دوره تناوب را دارد، به این معنی که $f(t+T)=f(t)$ پس طبق ویژگی زیر برای یک وقوع یک تشدید، زمان‌های برخورد باید مطابق با مجموعه ویژه Θ_0 باشند:

ویژگی (۲): اگر جواب x معادله (۵) با زمان‌های برخورد Θ ، یک تشدید است، پس $\Theta = \Theta_0$.

ویژگی (۲) یک شرط لازم تشدید در یک مجموعه متناوب زمان‌های برخورد است. با این وجود همان‌طور که با آنالیز معادله (۱۷) نشان داده شده این شرط کافی نیست. به طور مثال در معادله (۱۵):

$$x'' + x = \sin nt, \quad x > 0 \quad (15)$$

دوره تناوب نیروی تحریک در اینجا $2\pi/n$ است. وقتی n فرد باشد، دوره تناوب مجموعه ویژه Θ_0 (مساوی π است) مساوی یا چند برابر $2\pi/n$ است. پس تشدید ممکن و شکل آن مشخص است [۵، ۱۴]:

$$x_k(t) = A_k \sin t - \frac{1}{n^2 - 1} \sin nt, \quad (16)$$

$$x'(t) = A_k \cos t - \frac{1}{n^2 - 1} \cos nt$$

$$A_k = (-1)^k \left[V_k + \frac{n}{n^2 - 1} \right], \quad V_k = V_{k-1} + \frac{2n}{n^2 - 1} \quad (17)$$

که $V_k > 0$ سرعت برخورد در آغاز یک چرخه است. شکل (۵) جواب‌های معادلات (۱۶) و (۱۷) را برای $n=2.46$ نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود این پدیده یک تشدید چندهارمونیک با افزایش خطی دامنه و سرعت برخورد است (چون فرکانس زاویه‌ای اصلی نوسان‌گر (۱۵) برابر ۲ است). هرچه مرتبه چندهارمونیک معادله (۱۵) بیشتر شود، رشد سرعت $V_k - V_{k-1}$ کوچک‌تر است که با n کاهش می‌یابد. همان‌طور که در نتایج و مراجع نشان داده شده است با افزایش مرتبه چندهارمونیک، دامنه‌ها و سرعت‌های برخورد کاهش می‌یابند [۵، ۲۴، ۲۵].

جدول ۱: مقادیر مرزی سرعت اولیه وجود پاسخ Θ_m برای معادلات (۵) و (۱۲)
Table 1. boundary values for existence of Θ_m for equations (5) and (12)

m	۵	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۵
$V_*(m)$	۱/۵	۰/۹۸۴	۰/۶۷۵	۰/۴۸۶	۰/۳۶۵	۰/۲۸۳

سرعت اولیه می‌دهند. باین‌وجود، همه مقادیر V_0 جواب‌های (۵) و (۱۲) با مجموعه زمان‌های برخورد Θ_m را نمی‌دهند. شرط لازم $V_0 < V_*(m)$ است که برای m زوج، $V_*(m) = (4/(m+1)) \sin(\pi/(m+1))$ و برای $m=3$ ، $V_*(3) = 1 + 3\sqrt{2}/4$ است. برای سایر اعداد فرد m ، $V_*(m)$ در جدول (۱) موجود است. برای مقادیر V_0 بیشتر از $V_*(m)$ ، جواب‌های معادلات (۵) و (۱۲) وجود دارد اما شامل مجموعه‌های مختلف (نامنظم) زمان‌های برخورد می‌شود.

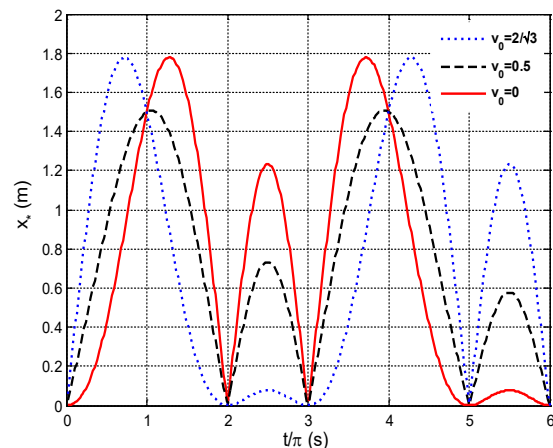


Fig. 3. analytical solution of equations (11) and (13), subharmonic resonance with various initial condition ($m=2$)
شکل ۳: حل تحلیلی معادله (۱۱) و (۱۳)، تشدید زیرهارمونیک با شرایط اولیه متفاوت ($m=2$)

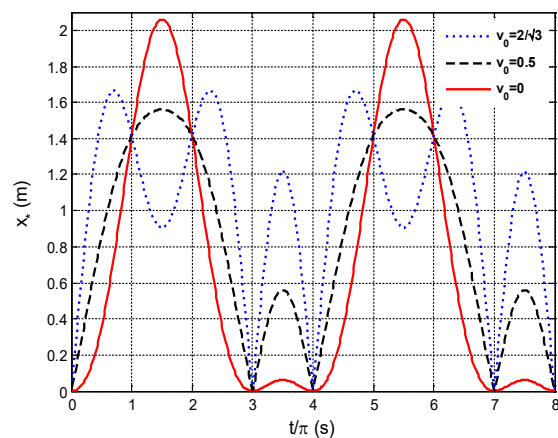


Fig. 4. analytical solution of equations (11) and (13), subharmonic resonance with various initial condition ($m=3$)
شکل ۴: حل تحلیلی معادله (۱۱) و (۱۳)، تشدید زیرهارمونیک با شرایط اولیه متفاوت ($m=3$)

موقعیت تنها تا زمانی معتبر است که $x_k(t)$ علاوه بر اجزای مجموعه Θ_0 ، ریشه‌ای نداشته باشد. از معادله ۲۰ معادلات زیر را برای ریشه‌های اضافی به دست می‌آید:

$$k = 2p: \left[V_{2p} + \frac{n}{n^2-1} \right] \sin t - \frac{1}{n^2-1} \sin nt = 0, \quad (20)$$

$$2p\pi < t < (2p+1)\pi$$

$$k = 2p+1: \left[-V_{2p} + \frac{n}{n^2-1} \right] \sin t - \frac{1}{n^2-1} \sin nt = 0, \quad (21)$$

$$(2p+1)\pi < t < 2(p+1)\pi$$

از آنجایی که $V_k > 0$ ، معادله (۲۲) ریشه‌ای در فاصله $(2p\pi, 2p\pi + \pi)$ ندارد و V_k را می‌توان به صورت یک پارامتر بررسی کرد که با شروع از یک عدد بزرگ و سپس کاهش آن تا پدید آمدن یک ریشه اضافی (t_*)، به دست خواهد آمد.

این ریشه قطعاً در نقطه‌ای رخ می‌دهد که $x_k(t^*) = x'_k(t^*) = 0$ این حالت منتهی به یک سیستم از روابط می‌شود که بعد از جایگزینی $-\pi/2 \leq \xi \leq \pi/2$ ، $t^* = \xi + 2p\pi + 3\pi/2$ می‌دهد:

$$x(\xi) = \left[V_{2p} - \frac{n}{n^2-1} \right] \cos \xi + \frac{(-1)^m}{n^2-1} \cos n\xi = 0, \quad n = 2m+1 \quad (22)$$

$$x'(\xi) = \left[V_{2p} - \frac{n}{n^2-1} \right] \sin \xi + \frac{(-1)^m n}{n^2-1} \sin n\xi = 0$$

برای $n = 5, 7, \dots$ معادله (۲۴) زیر کاهش می‌یابد:

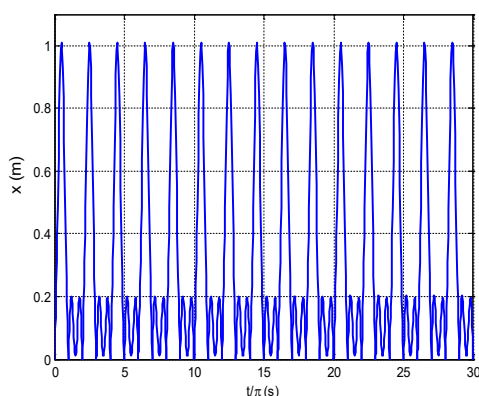
$$\tan \xi = n \tan n\xi \quad (23)$$

که شرط وجود ریشه‌های اضافی به شرح زیر است:

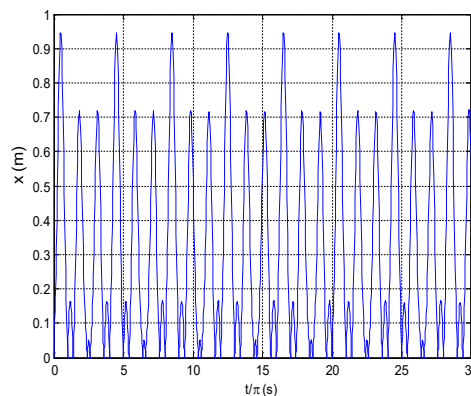
$$V_k = V_{2p} \leq V_{max} \frac{1}{n^2-1} \left[n - (-1)^m \frac{\cos n\xi}{\cos \xi} \right], \quad (23)$$

$$n = 2m+1$$

با حل معادله (۲۳) به صورت عددی، مرزهای بالا برای سرعت‌های



(ب)



(الف)

Fig. 6. solution of equation (15), odd resonance proportion with periodic of excitation (n=3) for (a) $V_0=0.51$ and (b) $V_0=0.45$

شکل ۶: حل معادله (۱۵)، تشدید فرد متناسب با دوره تحریک ($n=3$) به ازای (الف) $V_0=0.51$ (ب) $V_0=0.45$

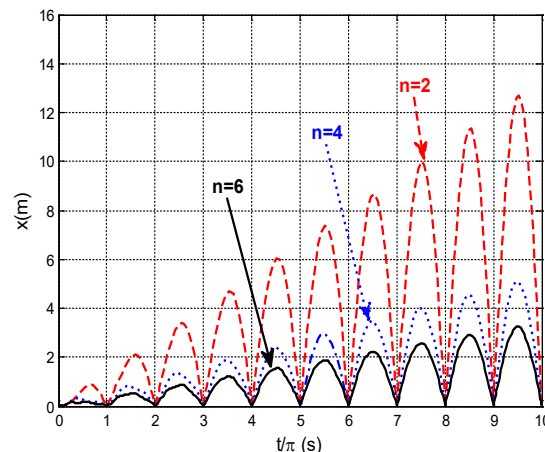


Fig. 5. solution of equations (16) and (17), even resonance proportion (with periodic of excitation (n=2, 4, 6

شکل ۵: حل معادله (۱۶) و (۱۷)، تشدیدهای زوج متناسب با دوره تحریک ($n=2,4,6$)

با این حال هنگامی که n فرد باشد، فقط دو برابر مجموعه Θ_0 ، برابر و یا مضربی از $2\pi/n$ است، در حالت کلی، وضعیت لازم و ضروری تشدید ارضا می‌شود، اما محاسبات مستقیم نشان می‌دهند که این راه‌حل با زمان‌های برخورد Θ_0 به صورت زیر است:

$$x_k(t) = A_k \sin t - \frac{1}{n^2-1} \sin nt$$

$$x'_k(t) = A_k \cos t - \frac{n}{n^2-1} \cos nt \quad (18)$$

$$A_k = (-1)^k V_k + \frac{n}{n^2-1}$$

و معادله زیر به دست می‌آید:

$$V_k = V_{k-1} \quad (19)$$

پس نوسانات حالت پایدار رخ خواهد داد (شکل ۶ الف)). با این حال این

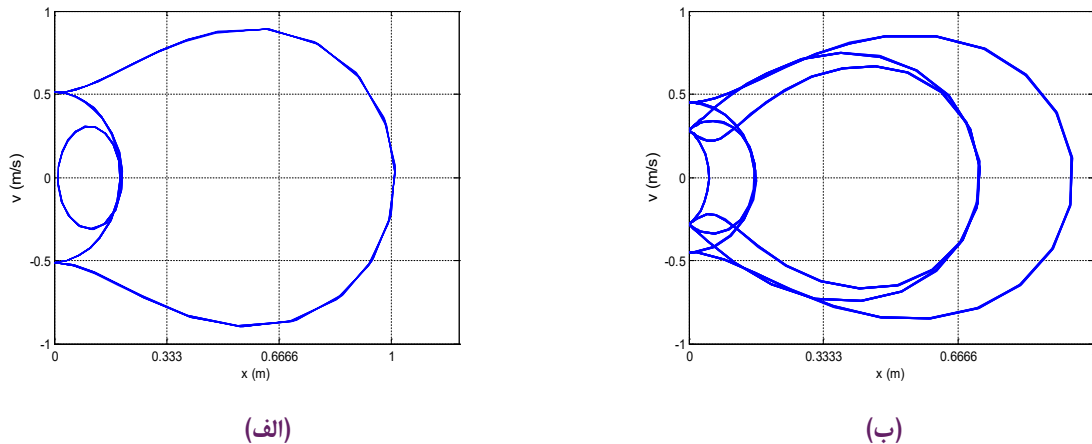


Fig. 7. diagram phase of equation (15), odd resonance proportion with periodic of excitation ($n=3$) for (a) $V_0=0.51$ and (b) $V_0=0.45$
 شکل ۷: دیاگرام فاز معادله (۱۵)، تشدید فرد متناسب با دوره تحریک ($n=3$) به ازای (الف) $V_0=0.51$ (ب) $V_0=0.45$

است ($V_0=0.139$ و $n=9$). پس تنها تشدیدهای با زمان‌های برخورد متناوب متناسب با دوره تناوب نیروی تحریک خارجی، موارد معادلات (۱۶) و (۱۷) است. حال تشدیدهای غیر مرتبط با مجموعه ویژه زمان‌های برخورد Θ_0 بررسی می‌شوند که تشدیدهای نیم‌هارمونیک هستند.

۶- زمان‌های برخورد دوره‌ای مجانبی

۶-۱- تشدید نیم‌هارمونیک سینوسی

برای تحریک در فرکانس نیم‌هارمونیک می‌توان نوشت:

$$x'' + x = \sin t, \quad x > 0 \quad (25)$$

شبه‌سازی‌های عددی [۵، ۶، ۱۴، ۲۸] نشان داده‌اند که این معادله دارای تشدید است. حال با در نظر گرفتن $\Theta = \{t_k\}$ به عنوان مجموعه‌ای از زمان‌های برخورد، برای هر فاصله زمانی (t_k, t_{k+1}) می‌توان راه‌حل (۲۵) را به صورت زیر نوشت [۲۳]:

$$x_k(t) = A_k \sin t + B_k \cos t - \frac{t}{2} \cos t \quad (26)$$

$$x'_k(t) = \left(A_k - \frac{1}{2} \right) \cos t - B_k \sin t + \frac{t}{2} \sin t$$

فرض کنید که هم‌زمان برخورد t_k و هم سرعت برخورد V_k شناخته شده هستند. بنابراین معادله‌ی (۲۶) حرکت را برای $t > t_k$ و زمان ضربه بعدی ارائه می‌دهد، t_{k+1} از معادله $x_k(t_{k+1}) = 0$ یافت شود. این معادله را با معرفی $\xi_k = t_{k+1} - t_k$ می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\tan \xi_k = \frac{\cos t_k}{\cos t_k + 2V_k} \xi_k \quad (27)$$

این معادله به صورت تحلیلی حل‌پذیر نیست، اگرچه که خطوط مجانب مقادیر بزرگ V_k که با تشدید نیم‌هارمونیک متناظر هستند را می‌توان به صورت زیر یافت:

برخورد در جدول (۲) استخراج شدند. به عنوان مثال، شکل ۶(ب) جواب‌های معادله (۱۷) را برای حالت $n=3$ و $V_0=0.51$ (که به زمان‌های برخورد Θ_0 شکل ۶(الف) مربوط می‌شود) و همچنین $V_0=0.45$ (زمان‌های برخورد متفاوت با Θ_0 شکل ۶(ب)) نشان می‌دهند. این اعداد به نحوی انتخاب می‌شوند که اولین آن‌ها بزرگ‌تر از $V_{max}=0.5$ باشد و دومی کوچک‌تر از آن باشد. اولین نمودار مسیر حرکت، طبق معادله (۱۸) است. نمودار دوم نیز به صورت عددی و با استفاده از روش رانگ کوتای درجه چهارم^۱ برای حل معادله نوسان‌گر دوطرفه معادله (۱) با نقاط 2×10^4 ، $\alpha=0$ و $\omega=1$ و نقاط 2^{20} در فاصله $(0, 3.0\pi)$ حل شده است. تفاوت در رفتار برای سرعت‌های اولیه مختلف نیز در دیاگرام فاز^۲ (شکل ۷) و طیف قدرت^۳ $|S(\omega)|^2$ (شکل ۸) دیده می‌شود که $S(\omega)$ تبدیل فوری^۴ $x(t)$ است. همانطور که در [۱۰، ۱۷، ۲۶، ۲۷] اشاره شده است دیاگرام‌های فاز یک حرکت منظم تکرار شونده را نشان می‌دهند و این جواب با زمان‌های برخورد متناوب نیز پیک‌های طیفی منظمی را نشان می‌دهند که با افزایش فرکانس، دامنه به سرعت کاهش می‌یابد، درحالی‌که راه‌حل دیگر با یک طیف وسیع‌تر با پیک‌های طیفی بسیار کوچک‌تر نامنظم مشخص می‌شود.

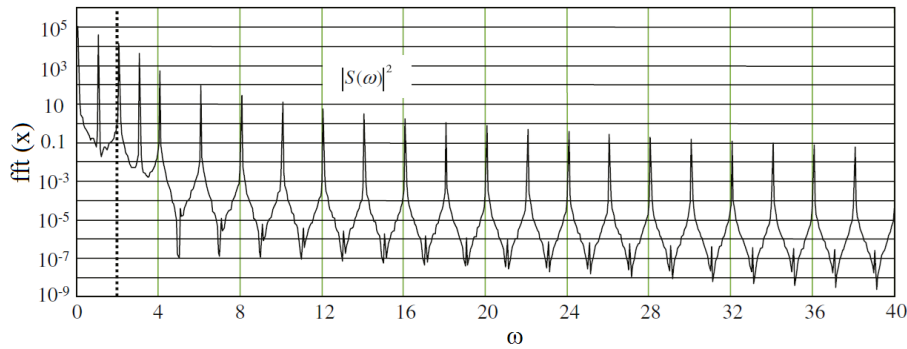
شکل (۹) نمونه دیگری را نشان می‌دهد و در آن هم‌زمان به مقایسه حل تحلیلی و عددی پرداخته شده است که نمایانگر دقت روش ذکر شده

جدول ۲: سرعت‌های بحرانی معادله (۱۵) که به ازای مقادیر کمتر از آن‌ها، زمان برخورد با Θ_0 متفاوت خواهد بود

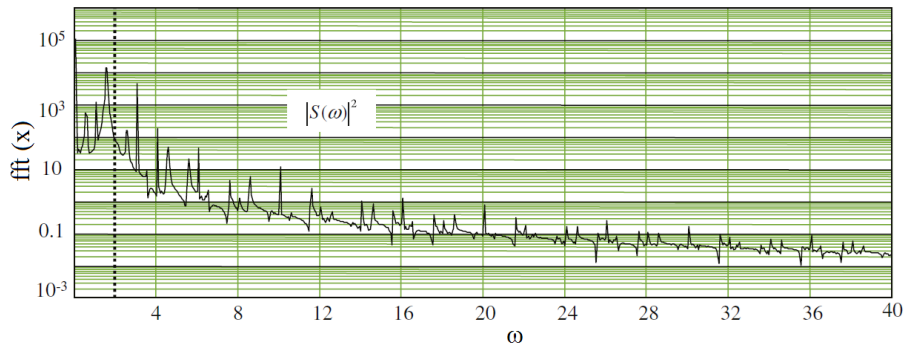
Table 2. critical velocities of equation (15) which at lower of these values, impact time is different with Θ_0

n	۵	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۵
$V_{max}(n)$	۰/۲۶	۰/۱۸	۰/۱۳۸	۰/۱۱۲	۰/۰۹۵	۰/۰۸۲

- 1 Forth-order Runge Kutta method
- 2 Phase portrait
- 3 Power spectra
- 4 Fourier transform



(الف)



(ب)

Fig. 8. power spectrum of equation (15), odd resonance proportion with periodic of excitation (n=3) for (a) $V_0=0.51$ and (b) $V_0=0.45$
 شکل ۸: طیف نوسان کننده معادله (۱۵)، تشدید فرد متناسب با دوره تحریک (n=3) به ازای (الف) $V_0=0.51$ (ب) $V_0=0.45$

بنابراین در V_k بزرگ، دوره‌ی زمان ضربه به π نزدیک بوده و مجموعه زمان‌های ضربه $\theta = \{t_k\}$ به صورت مجانب به مجموعه θ_0 نزدیک است. می‌توان سرعت را برای چرخه بعدی همانند $V_{k+1} = -x'_k(t_{k+1})$ نشان داد. پس از عملیات جبری، به معادله زیر استخراج می‌شود:

$$V_{k+1} = V_k + \frac{\pi}{2} [\sin t_k + (\pi + 2 \sin t_k) \alpha_k] + O(\alpha_k^2) \quad (30)$$

t_k به $k\pi$ نزدیک است، اما به منظور نشان دادن تمایز به سرعت چرخه قبلی نیاز است (V_{k-1}) . سپس در مرحله بعدی معادله زیر به دست خواهد آمد:

$$V_{k+2} = V_k + \frac{\pi}{2} \left[\frac{\frac{\pi}{2} \cos^2 t_k + \sin 2t_k}{V_k} \right] + O(V_k^{-2}) \quad (31)$$

با استفاده از این تخمین، می‌توان گفت که $V_{k+2} - V_k = (t_{k+2} - t_k) V'(t_k) = 2\pi(1 + \alpha_k) V'(t_k) + O(V_k^{-2})$ و با توجه به زمان‌های بسیار بیشتر از $t_{k+2} - t_k$ و جایگزین کردن صورت کسر در معادله (۳۱) با مقدار میانگین آن که با a نشان داده شده است، معادله دیفرانسیلی زیر را برای خطوط مجانب V_t به دست خواهد آمد:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{a}{\pi V} + O(V^{-2}) \quad (32)$$

که راه‌حل آن در کنار این فرضیه که $V(0) = 0$ ، به صورت زیر است:

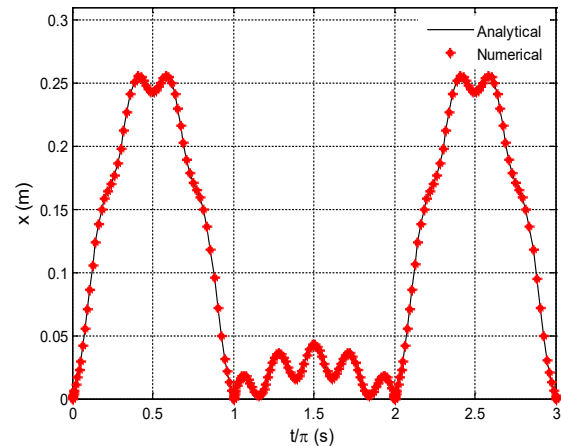


Fig. 9. solution of equation (15), odd resonance proportion with periodic of excitation (n=9) for $V_0=0.139$
 شکل ۹: حل معادله (۱۵)، تشدید فرد متناسب با دوره تحریک (n=9) به ازای $V_0=0.139$

$$\frac{\cos t_k}{\cos t_k + 2V_k} = \xi_k \quad (28)$$

همچنین با بیان $V_k \gg |\alpha_k| \ll 1$ ، راه‌حل مجانب (۲۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\xi_k = \pi(1 + \alpha_k) + O(\alpha_k^2) \quad , \quad (29)$$

$$\alpha_k = \frac{\cos t_k}{2V_k} + O(V_k^{-2})$$

$$V_{k+1} = V_k + (-1)^k \frac{\pi}{2}, \quad V_{k+2} = V_k \quad (37)$$

لازم است وجود جواب‌های اضافی $x_k(t)=0$ بررسی شود. بدین منظور اولین معادله (۳۶) را به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$x_k(t) = \left(V_k + \frac{\tau}{2} \right) \sin \tau, \quad k = 2p$$

$$x_k(t) = \left(V_k - \frac{\tau}{2} \right) \sin \tau, \quad k = 2p+1 \quad (38)$$

$$\tau = t - k\pi, \quad 0 \leq \tau \leq \pi$$

برای k زوج، تنها جواب‌ها $k\pi$ هستند. برای k فرد نیز جواب‌های اضافی تنها در صورتی ممکن هستند که $V_k \leq \pi/2$ باشد. به عبارت دیگر، اولین معادله (۳۷) می‌گوید برای k فرد، $V_k \geq V_{k-1} + \pi/2 \geq \pi/2$. بنابراین تنها جایی که جواب‌های دیگر ممکن است، $V_0 = 0$. پس یک زمان برخورد در $t = \pi/2$ وجود دارد.

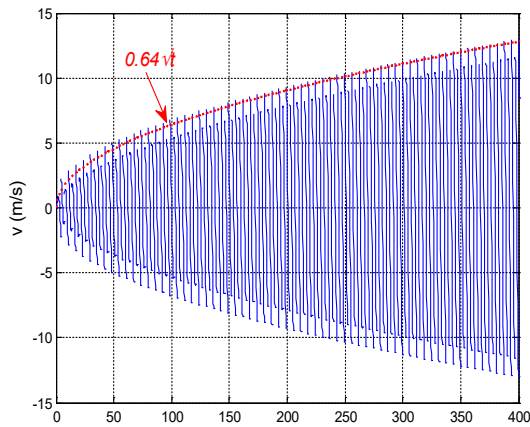


Fig. 10. velocity of equation (25), sin half harmonic

شکل ۱۰: سرعت نوسان کننده معادله (۲۵)، تشدید نیم‌هارمونیک سینوسی

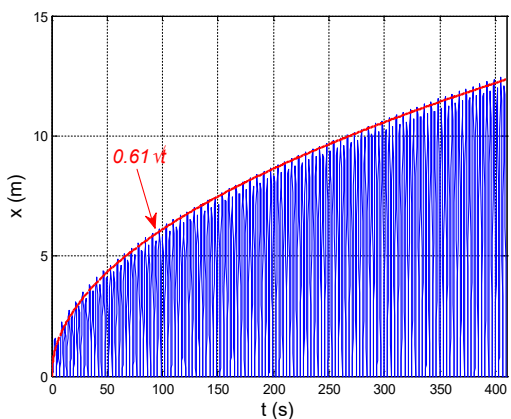


Fig.11. displacement of equation (25), sin half harmonic

شکل ۱۱: جابجایی نوسان کننده معادله (۲۵)، تشدید نیم‌هارمونیک سینوسی

$$V(t) = b\sqrt{t} \quad (33)$$

که پارامتر b یک ثابت است. شکل (۱۰) $x'(t)$ به دست آمده از طریق جواب عددی معادله ۲۷ با شرط اولیه $V_0=0$ را نشان می‌دهد. برای رسم شکل (۱۰) از مرحله انطباقی روش رانگ کوتای درجه چهارم^۱ (حل عددی) برای معادله نوسان گر دوطرفه معادله (۱) با نقاط $\omega_- / \omega_+ = 2 \times 10^{-4}$ ، $\alpha = 0$ و 2° در فاصله (۴۰۰،۰) استفاده شده است. نمودار مجانب نشان می‌دهد که ثابت b با ساختن معادله (۳۳) به صورت پوشش نمودار سرعت تعیین می‌شود. شکل (۱۱) نشان می‌دهد همان قانون توان پوششی برای $x(t)$ را نیز فراهم می‌کند. در هر دو مورد این واقعیت که راه‌حل عددی اجازه مجانب‌های (۳۳) را می‌دهد نشان می‌دهد برای این اعداد پارامترها، جواب عددی دقیق است. شکل‌های (۱۲) و (۱۳) دیاگرام فاز و طیف توان را نشان می‌دهد. همانطور که در مراجع شاره شده است [۱۰، ۱۷، ۲۶، ۲۷] هم دیاگرام فاز و هم طیف توان یک کاراکتر منظم دارند که طیف توان پیک‌های منظم قوی را نشان می‌دهد. این به این دلیل است که مجموعه زمان‌های برخورد به صورت مجانب منظم‌اند و با افزایش سرعت برخورد به Θ_0 می‌رسند و نشان دهنده یک حرکت منظم تکرار شونده هستند و این جواب تکرار شونده منظم نیز منجر به تولید پیک‌های طیفی منظم می‌شوند که در شکل (۱۳) نشان داده شده‌اند.

۶-۲- تشدید نیم‌هارمونیک کسینوسی

وجود نصف تشدید هارمونیک به فاز نیروی تحریک بستگی دارد. به عنوان نمونه معادله زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$x'' + x = \cos t, \quad x > 0 \quad (34)$$

که راه‌حل کلی آن برای هر فاصله زمانی (t_k, t_{k+1}) به صورت زیر است [۲۳]:

$$x_k(t) = \left(A_k - \frac{t}{2} \right) \sin t$$

$$x'_k(t) = \left(A_k - \frac{t}{2} \right) \cos t - \frac{1}{2} \sin t \quad (35)$$

مجموعه دقیق زمان‌های برخورد برای آزمایش، Θ_0 است، چون $x_k(k\pi)=0$. اگر V_k سرعت برخورد در $k\pi$ باشد، معادله (۳۵) مجموعه جواب‌های زیر را تولید می‌کند:

$$x_k(t) = \left(V_k + (-1)^k \frac{\tau}{2} \right) \sin \tau, \quad \tau = t - k\pi, \quad 0 \leq \tau \leq \pi \quad (36)$$

$$x'_k(t) = \left(V_k + (-1)^k \frac{\tau}{2} \right) \cos t - \frac{(-1)^k}{2} \sin t$$

نوسان‌کننده برخوردی (سختی نامحدود در فشار) با گذر سختی در جابجایی صفر همراه با نیروی تحریک هارمونیک بررسی شد. این نوسان‌گرها طیف وسیعی از پدیده‌ها از نوسانات سازه‌های منفک و خطوط کانالی گرفته تا متها در ابزارهای برش را در برمی‌گیرند. مسیر نوسان‌گر برخوردی همیشه غیر منفی است و فقط در نقاط خاص به نام زمان‌های برخورد (نقاط گذر یا پرواز) صفر می‌شود. سرعت‌ها در زمان‌های برخورد تغییر علامت می‌دهند، درحالی‌که اندازه سرعت آن‌ها بدون تغییر باقی می‌مانند (ضریب برگشت مساوی یک است). مجموعه‌های زمان‌های برخورد نقش مهمی در پاسخ دینامیکی نوسان‌گرهای برخوردی ایفا می‌کنند و به عنوان مبنایی برای تحلیل نوسان‌گرهای برخوردی استفاده می‌شوند. در میان همه مجموعه‌های زمان‌های برخورد، یک مورد خاص به عنوان مجموعه ویژه تلقی می‌شود که مجموعه زمان‌های برخورد مربوط به جواب معادله همگن یعنی بدون نیروی تحریک است. با رسم پاسخ‌های زمانی، دیاگرام‌های فاز و طیف توان نوسان‌گر نشان داده شد که این مجموعه و زیرمجموعه‌های آن تنها مواردی هستند که می‌توانند از حرکات مختلف نوسان‌گر برخوردی برای شرایط اولیه مختلف پشتیبانی کند. همچنین در این مقاله نشان داده شد که تنها در حالتی که زمان‌های برخورد یکسان برای دو معادله وجود دارد می‌توان پاسخ‌های آن‌ها را باهم ترکیب کرد. هر تغییری در سرعت اولیه زمان‌های برخورد را تغییر می‌دهد و مرزهای سرعت‌های بحرانی به دست آمدند. از آنجا که راه حل صریح تنها برای چند مورد مشخص وجود دارد، بنابراین برای صحت‌سازی و تحلیل نتایج مدل‌سازی عددی نیز به کار گرفته شد. با این وجود وقتی ترکیب‌های پارامترها به گونه‌ای باشد که نوسان‌گر رفتار تصادفی از خود نشان دهد، شبیه‌سازی عددی کاملاً پایدار نیست و می‌بایست بازه‌های زمانی حل را کوچک در نظر گرفت. یک ویژگی مهم دیگر نوسان‌گر برخوردی، وجود تشدیدهای نیم‌هارمونیک و چندهارمونیک است. مجموعه ویژه زمان‌های برخورد (مجموعه زمان برخورد معادله همگن) در اینجا نقش خاصی ایفا می‌کند. نتایج نشان دادند که در میان همه مجموعه‌های

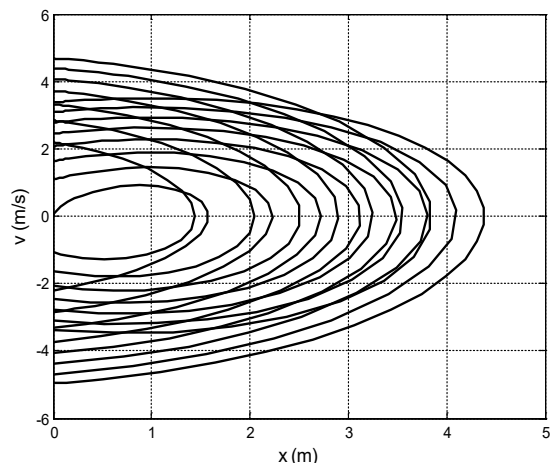


Fig.12. diagram phase of equation (25), sin half harmonic
 شکل ۱۲: دیاگرام فاز نوسان‌کننده معادله (۲۵)، تشدید نیم‌هارمونیک سینوسی

پس برای هر سرعت اولیه $V_0 > 0$ ، معادله (۳۴) فقط جواب‌های متناوب حالت پایدار با زمان‌های برخورد متناوب θ_0 دارد. باین وجود اگر $V_0 = 0$ ، می‌توان زمان را با $\pi/2$ منتقل کرد تا مبدأ به این زمان برخورد اضافی منتقل شود. این کار معادله (۳۴) را به معادله (۲۵) تبدیل کرده و تحلیل مربوطه به کار می‌رود. شکل‌های (۱۴) و (۱۵)، سرعت و جابه‌جایی مربوطه را در مقابل زمان نشان می‌دهند. پوش‌ها همان مجانب‌ها را نشان می‌دهند. همانطور که نتایج نشان دادند برخلاف تشدیدهای چندهارمونیک که پوش منحنی جابه‌جایی و سرعت برحسب زمان به صورت خطی می‌باشد، در تشدیدهای نیم‌هارمونیک سینوسی و کسینوسی به صورت مجذور با زمان افزایش می‌یابند.

۷- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله نوسان‌گر دوطرفه، به ساده‌ترین شکل خود یعنی

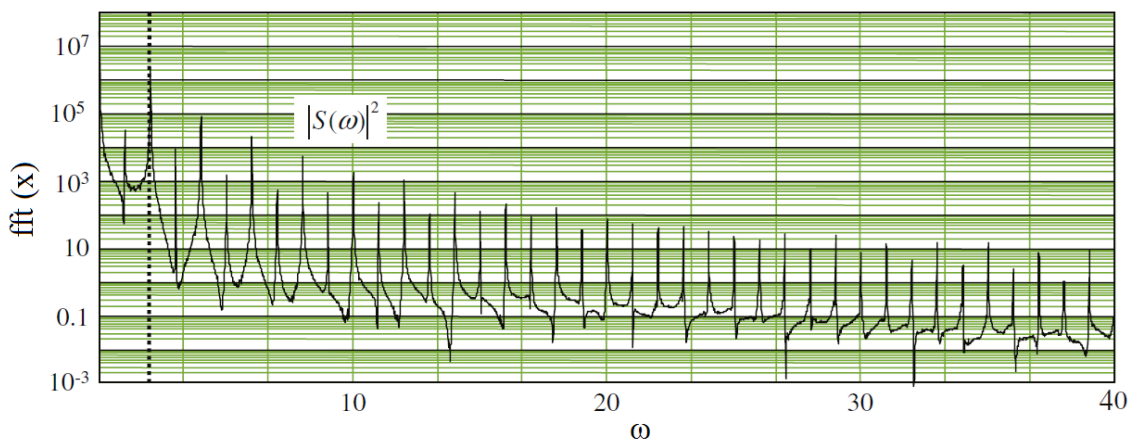


Fig.13. power spectrum of equation (25), cos half harmonic
 شکل ۱۳: طیف قدرت نوسان‌کننده معادله (۲۵)، تشدید نیم‌هارمونیک سینوسی

برعکس تشدیدهای چندهارمونیک که به صورت خطی هستند، به صورت مجذور ریشه زمان افزایش می‌یابد.

مراجع

- [1] M. Davies, B. Balachandran, Impact dynamics in milling of thin-walled structures, *Nonlinear Dynamics*, 22(4) (2000) 375-392
- [2] M.S. De Freitas, R.L. Viana, C. Grebogi, Multistability, basin boundary structure, and chaotic behavior in a suspension bridge model, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 14(03) (2004) 927-950
- [3] S. Doole, S. Hogan, A piece wise linear suspension bridge model: nonlinear dynamics and orbit continuation, *Dynamics and Stability of Systems*, 11(1) (1996) 19-47
- [4] A.V. Dyskin, E. Pasternak, E. Pelinovsky, Modelling resonances in topological interlocking structures, in: 5th Australasian Congress on Applied Mechanics (ACAM 2007), *Engineers Australia*, (2007) 408-413
- [5] M. Gerber, L. Engelbrecht, The bilinear oscillator: the response of an articulated mooring tower driven by irregular seas, *Ocean engineering*, 20(2) (1993) 113-133
- [6] S. Esfahani, S.E. Khadem, A.E. Mamaghani, Nonlinear vibration analysis of an electrostatic functionally graded nano-resonator with surface effects based on nonlocal strain gradient theory, *International Journal of Mechanical Sciences*, 151 (2019) 508-522
- [7] S. Esfahani, S.E. Khadem, A.E. Mamaghani, Size-dependent nonlinear vibration of an electrostatic nanobeam actuator considering surface effects and inter-molecular interactions, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, (2018) 1-17. doi: 10.1007/s10999-018-9424-7
- [8] A.V. Dyskin, E. Pasternak, E. Pelinovsky, Coupled bilinear oscillators, their resonances and controlling parameters, in: Proceedings of the 6th Australasian Congress on Applied Mechanics, *Engineers Australia*, 2010, pp. 1008
- [9] A. Ebrahimi Mamaghani, S. Esameilzadeh Khadem, Vibration analysis of a beam under external periodic excitation using a nonlinear energy sink, *Modares Mechanical Engineering*, 16(9) (2016) 186-194 (In persian)
- [10] A. Ebrahimi-Mamaghani, R. Sotudeh-Gharebagh, R. Zarghami, N. Mostoufi, Dynamics of two-phase flow in vertical pipes, *Journal of Fluids and Structures*, 87 (2019) 150-173
- [11] A.E. Mamaghani, S. Khadem, S. Bab, Vibration control of a pipe conveying fluid under external periodic

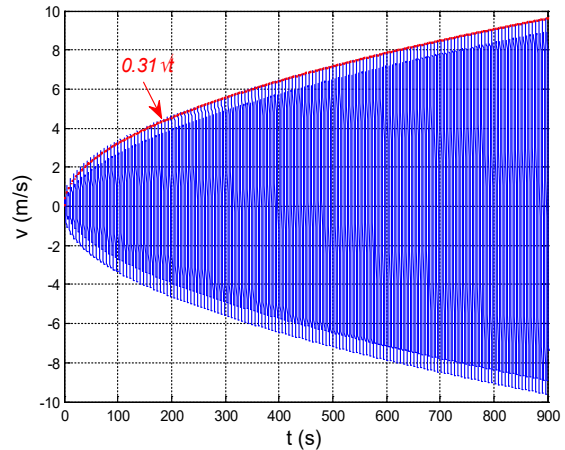


Fig.14. velocity of equation (34), cos half harmonic
 شکل ۱۴: سرعت نوسان کننده معادله (۳۴)، تشدید نیم‌هارمونیک کسینوسی

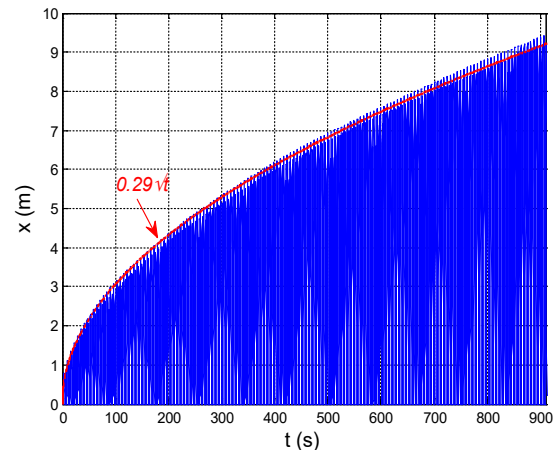


Fig.15. displacement of equation (34), cos half harmonic
 شکل ۱۵: جابجایی نوسان کننده معادله (۳۴)، تشدید نیم‌هارمونیک کسینوسی

زمان‌های برخورد متناسب با دوره تناوب نیروی تحریک، مجموعه ویژه تنها موردی است که به ازای شرایط اولیه سرعت متفاوت می‌تواند از رزونانس پشتیبانی کند. علاوه بر این نشان داده شد که وجود تشدیدها قویاً به شرایط اولیه (دامنه اولیه سرعت برخورد) بستگی دارد. به طور مثال محدوده‌های سرعت‌های اولیه‌ای وجود دارد که نوساناتی با مجموعه ویژه زمان‌های برخورد (یا زیرمجموعه‌های متناوب آن‌ها) تولید می‌کند، به عبارت دیگر خارج از این محدوده‌ها زمان‌های برخورد تناوب را از دست می‌دهند. ضمناً نشان داده شد که تشدیدهای چندهارمونیک مورد تأیید مجموعه هارمونیک هستند و بقیه تشدیدها، مجموعه‌های غیرمتناوب زمان‌های برخورد هستند. علاوه بر این با تحلیل اولین تشدید نیم‌هارمونیک (نصف فرکانس تشدید) مشخص شد که زمان‌های برخورد متناوب نیستند؛ باین وجود از نظر مجانبی نزدیک مجموعه ویژه می‌باشند. در نهایت پاسخ‌های تحلیلی نشان دادند که برخلاف تشدیدهای چندهارمونیک، پوش نوسانات و سرعت در این تشدید،

- impact oscillator, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 41 (2016) 19-31.
- [21] S. Yin, G. Wen, Y. Shen, H. Xu, Instability phenomena in impact damper system: From quasi-periodic motion to period-three motion, *Journal of Sound and Vibration* 391 (2017): 170-179.
- [22] J. Newman, O. Makarenkov, Resonance oscillations in a mass-spring impact oscillator, *Nonlinear Dynamics*, 79(1) (2015) 111-118.
- [23] J. Thompson, Complex dynamics of compliant offshore structures, in: Proceedings of the Royal Society of London A: *Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *The Royal Society*, (1983) 407-427.
- [24] R. Hosseini, M. Hamed, A. Ebrahimi Mamaghani, H.C. Kim, J. Kim, J. Dayou, Parameter identification of partially covered piezoelectric cantilever power scavenger based on the coupled distributed parameter solution, *International Journal of Smart and Nano Materials*, 8(2-3) (2017) 110-124.
- [25] S.H. Mirtalebi, M.T. Ahmadian, A. Ebrahimi-Mamaghani, On the dynamics of micro-tubes conveying fluid on various foundations, *SN Applied Sciences*, 1(6) (2019) 547.
- [26] H. Sarparast, S. Esmailzade Khadem, A. Ebrahimi Mamaghani, Investigation of the cancellation, resonance and maximum amplitude of free vibration phenomena in laminated curved Timoshenko beams under moving loads, *Modares Mechanical Engineering*, 18(9) (2019) 69-80.
- [27] J. Thompson, A. Bokaian, R. Ghaffari, Subharmonic resonances and chaotic motions of a bilinear oscillator, *IMA Journal of Applied Mathematics*, 31(3) (1983) 207-234
- [28] F.e. Peterka, Bifurcations and transition phenomena in an impact oscillator, *Chaos, Solitons & Fractals*, 7(10) (1996) 1635-1647.
- excitation using a nonlinear energy sink, *Nonlinear Dynamics*, 86(3) (2016) 1761-1795
- [12] A.E. Mamaghani, S.E. Khadem, S. Bab, S.M. Pourkiaee, Irreversible passive energy transfer of an immersed beam subjected to a sinusoidal flow via local nonlinear attachment, *International Journal of Mechanical Sciences*, 138 (2018) 427-447
- [13] A.E. Mamaghani, H. Zohoor, K. Firoozbakhsh, R. Hosseini, Dynamics of a Running Below-Knee Prosthesis Compared to Those of a Normal Subject, *Journal of Solid Mechanics*(2013) 5(2) 152-160.
- [14] S.W. Shaw, P. Holmes, A periodically forced piecewise linear oscillator, *Journal of Sound and Vibration*, 90(1) (1983) 129-155
- [15] G. Whiston, The vibro-impact response of a harmonically excited and preloaded one-dimensional linear oscillator, *Journal of Sound and Vibration*, 115(2) (1987) 303-319
- [16] V. Lyakhovskiy, Y. Hamiel, J.-P. Ampuero, Y. Ben-Zion, Non-linear damage rheology and wave resonance in rocks, *Geophysical Journal International*, 178(2) (2009) 910-920
- [17] A.V. Dyskin, E. Pasternak, I. Shufrin, Structure of resonances and formation of stationary points in symmetrical chains of bilinear oscillators, *Journal of Sound and Vibration*, 333(24) (2014): 6590-6606
- [18] H. Jiang, A.S. Chong, Y. Ueda, M. Wiercigroch, Grazing-induced bifurcations in impact oscillators with elastic and rigid constraints, *International Journal of Mechanical Sciences* 127 (2017): 204-214
- [19] H. Xiong, X. Kong, H. Li, Z. Yang, Vibration analysis of nonlinear systems with the bilinear hysteretic oscillator by using incremental harmonic balance method, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 42 (2017) 437-450
- [20] M. Liao, J. Ing, J.P. Chávez, M. Wiercigroch, Bifurcation techniques for stiffness identification of an

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

A. Mamaghani, R. Hosseini, Mathematical Modelling and Resonance Analysis in Impact Oscillators, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 50(5) (2018) 157-168.

DOI: 10.22060/mej.2017.12458.5343

